arXiv:2301.03231v1 [math.FA] 9 Jan 2023

加权群代数

Ali Rejali [1], *, Maryam Aghakoochaki [2], †

[1]伊斯法罕大学数学与统计学院纯数学系，伊朗伊斯法罕
81746-73441rejali@sci.ui.ac.ir,
Orcid: 0000-0001-7270-665X伊斯法罕大学

mkoochaki@sci.ui.ac.ir, Orcid: 0000-0002-3851-6550 [2]

2023年1月10日

摘要

设 G 是一个局部紧阿贝尔群，且 $w: G \to (0,\infty)$ 是一个博雷尔可测权函数。本文研究并评估群代数的代数性质和拓扑性质。我们证明，加权群代数 $L^1(G,w)$ 正则，当且仅当 w 是一个非准解析权函数。此外，对于群 G 上的任意博雷尔可测权函数 w ， $L^1(G,w)$ 都是陶伯的。

关键词：巴拿赫代数，正则性，陶伯定理的，加权群代数。

1 引言

在本文中， G 是一个局部紧阿贝尔群， $w: G \to (0,\infty)$ 是一个博雷尔可测权函数。因此， $L^1(G,w)$ 是由所有满足下述条件的博雷尔可测函数 $f: G \to \mathbb{C}$ 构成的代数：

$$\|f\|_{1,w} := \int_G |f(x)|\, w(x)dx < \infty$$

*2020 数学学科分类。主要：46J05；次要：46J10
†通讯作者

空间 $L^1(G,w)$ 配以如下乘法

$$f \star g(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy$$

对于 $f, g \in L^1(G,w)$，是一个巴拿赫代数；参见 [1], [2] 和 [15]。巴拿赫代数 A 的第二对偶上的第一阿伦斯积$\diamond$ 定义如下:

$$< \Phi \diamond \Psi, f >= \Phi(\Psi f)$$

其中

$$\Psi f(a) = \Psi(fa)$$

and

$$fa(b) = f(ab)$$

对所有 $\Phi, \Psi \in A^{**}$, $f \in A^*$ 和 $a, b \in A$均成立。假设 A 是一个巴拿赫代数。若对每个 $\Phi \in A^{**}$，映射 $\Psi \mapsto \Phi o \Psi$ 在 A^{**} 上弱 * 连续，则称 A 为阿伦斯正则。若对每个在盖尔范德拓扑下闭的真子集 $K \subset \Delta(A)$，以及每个满足 $\backslash K$的点 $\varphi \in \Delta(A)$，都存在 $f \in A$，使得 $\hat{} \hat{} f(\varphi) = 1$，且 f 在 K上消失，则称巴拿赫代数 A 为正则。假设 E 是一个巴拿赫 A-双模。若每个连续导子 $A \to E^*$ 都是内导子，则称 A 为可容。令 A 为一个特征空间非空的交换巴拿赫代数。令

$$A_0 = \{a \in A : supp(\hat{a}) \ is \ compact\}$$

如果 A_0 在 A中范数稠密，则称 A 为陶伯定理的。许多作者研究了 $L^1(G,w)$的代数性质和拓扑性质。Gronback 在 [5] 中证明， $L^1(G,w)$是可容巴拿赫代数，当且仅当 G 是可容群且权函数$w^*: G \to [1, \infty)$有界，其中

$$w^*(x) := w(x)w(x^{-1}) \quad (x \in G)$$

Rejali 和 Mehdipour 在 [10] 中证明，巴拿赫代数 $L^1(G,w)$是 Arens-正则的，当且仅当 G 是有限群，或者函数 $\Omega: G \times G \to (0,1]$ 是 0-簇函数。这意味着，对于 G中由不同元素组成的任意序列(x_n)和(y_n)，存在子序列$(x_n^{'})$和$(y_n^{'})$，使得

$$\lim_n \lim_m \Omega(x_n^{'}, y_n^{'}) = 0 = \lim_m \lim_n \Omega(x_n^{'}, y_n^{'})$$

其中

$$\Omega(x,y) = \frac{w(xy)}{w(x)w(y)}$$

对于 x、$y \in G$。Rejali 和 Vishki 在 [14] 中证明，函数 w^* 有界，当且仅当存在 $\epsilon > 0$，使得

$$\Omega(x, y) \geq \epsilon > 0 \quad (x, y \in G)$$

因此，$L^1(G, w)$ 是阿伦斯正则且可容的，当且仅当群 G 是有限群。

近年来，Rejali 和 Mehdipour 在 [[10], [11] 和 [12]] 的文章中研究了 $L^1(G, w)$ 及其第二对偶的许多代数和同调性质。关于进一步研究，读者可参阅文献 [2], [3], [4], [8], [9], [13] 和 [14] 。Domar 在 [3], 中证明，$L^1(G, w)$ 是陶伯定理的且正则的，当且仅当权函数w 是非准解析的，也就是说

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w(x^n)}{n^2} < \infty$$

对所有 $x \in G$ 均成立。本文证明，$L^1(G, w)$ 总是陶伯定理的。因此，$L^1(G, w)$ 正则，当且仅当权函数 w 是非准解析的。在 [6], 中还有一个判定 $L^1(G, w)$ 正则性的准则。事实上，$L^1(G, w)$ 具有唯一一致范数性质，当且仅当 $L^1(G, w)$ 是正则的；见 [[6], 4。7. 3]。

本文简要研究了$L^1(G, w)$的代数性质和同调性质，并证明 $L^1(G, w)$上的每个正定函数都具有以下形式

$$\varphi(f) = \int_{\widehat{G_w}} \gamma(f) d\mu(\gamma)$$

其中，$\mu \in M(\widehat{G_w})$，且 $f \in L^1(G, w)$，其中 $\widehat{G_w} = \Delta(L^1(G, w))$。本文评估了 $L^1(G, w)$与 $L^1(G)$之间的关联。此外，我们研究了 $L^1(G, w)$的盖尔范德表示。我们证明，当 G 为有限 [（分别为平凡]）时，$L^1(G, w)$上的盖尔范德映射是满射 [（分别是等距映射]）。

2 加权群代数

设 G 是一个局部紧群，且 $w : G \to (0, \infty)$是一个博雷尔可测权函数，满足对所有 x, $y \in G$, $w(xy) \leq w(x)w(y)$。假设 $L^\infty(G, \frac{1}{w})$是所有本质加权有界函数 $f : G \to \mathbb{C}$ 的空间，且满足

$$\|f\|_{\infty, \frac{1}{w}} := esssup\{\frac{|f(x)|}{w(x)} : x \in G\} < \infty$$

那么，$L^\infty(G, \frac{1}{w})$ 配备 w-逐点乘积后，

$$f \underset{w}{.} g(x) := \frac{f(x)g(x)}{w(x)} \quad (x \in G)$$

是一个 C^*-代数；参见 [15]。此外，该映射

$$\begin{aligned}\Phi \ : L^\infty(G, \frac{1}{w}) &\to L^1(G,w)^* \\ g &\mapsto \Phi_g\end{aligned}$$

其中

$$\Phi_g(f) := \int_G f(x)g(x)dx \quad (f \in L^1(G,w)).$$

是等距同构映射。

定理 2.1. 设 G 是一个局部紧群，且 $w : G \to (0,\infty)$ 是博雷尔可测权函数。那么

$$L^1(G,w)^* = L^\infty(G, \frac{1}{w}).$$

作为巴拿赫空间，它们等距同构。

证明. 设 $\Phi: L^\infty(G, \frac{1}{w}) \to L^1(G,w)^*$ 定义为 $g \mapsto \Phi_g$，其中

$$\Phi_g(f) := \int_G f(x)g(x)dx \quad (f \in L^1(G,w)).$$

Then

$$\begin{aligned}\mid \Phi_g(f) \mid &\leq \int_G \mid f(x) \mid w(x)\frac{\mid g(x) \mid}{w(x)}dx \\ &\leq \|g\|_{\infty,\frac{1}{w}}.\|f\|_{1,w}\end{aligned}$$

因此

$$\|\Phi_g\| \leq \|g\|_{\infty,\frac{1}{w}}$$

因此， Φ是连续的。令 $I \in L^1(G,w)^*$，并对 $f \in L^1(G)$，定义 $J(f) := I(fw)$。于是 $J \in L^1(G)^* = L_\infty(G)$。因此，存在 $g \in L_\infty(G)$，使得

$$J(f) = \int_G f(x)g(x)dx$$

对所有 $f \in L^1(G)$。令 $h := gw$。那么 $h \in L^\infty(G, \frac{1}{w})$，并且，

$$\begin{aligned}\Phi_h(k) &= \int_G h(x)k(x)dx \\ &= \int_G g(x)w(x)k(x)dx \\ &= J(kw) = I(k)\end{aligned}$$

对所有 $k \in L^1(G,w)$。因此 $\Phi_h = I$ 且 Φ 是满射。另外，

$$\begin{aligned}\|\Phi_g\| &= sup\{|\ \Phi_g(f)\ |: \|f\|_{1,w} \leq 1\} \\ &= sup\{|\ \varphi_{\frac{g}{w}}(fw)\ |: \|fw\|_1 \leq 1\} \\ &= \|\frac{g}{w}\|_\infty = \|g\|_{\infty,\frac{1}{w}}\end{aligned}$$

对每个 $g \in L^\infty(G,\frac{1}{w})$。其中 $\varphi:\ L^\infty(G) \to L^1(G)^*$ 由 $f \mapsto \varphi_f$ 定义，使得

$$\varphi_f(h) = \int_G f(x)h(x)dx$$

对每个 $f \in L^\infty(G),\ \ h \in L^1(G)$。因此，$\Phi$ 是一个等距映射。 □

设 $w:\ G \to [1,\infty)$ 是一个 Borel 可测权函数。那么，$M(G,w)$ 是所有有界拉东测度 μ 的巴拿赫代数：$B(G) \to \mathbb{C}$ 使得 $\mu w \in M(G)$，其中

$$\mu w(E) = \int_E w(x)d\mu(x) \quad (E \in B(G))$$

若 $\mu,\nu \in M(G,w)$，则

$$\mu \star \nu(E) = \int_G \int_G \chi_E(xy)d\mu(x)d\nu(y)$$

and

$$\|\mu\|_w := \|\mu w\|.$$

由于 $w \geq 1$，因此 $M(G,w)$ 在 $M(G)$ 中关于范数稠密，并且

$$M(G,w) = C_0(G,\frac{1}{w})^*$$

作为巴拿赫代数的等距同构。其中 $C_0(G,\frac{1}{w})$ 是所有 Borel 可测函数 $f:\ G \to \mathbb{C}$ 的代数，这些函数满足 $\frac{f}{w} \in C_0(G)$；参见 [15]。

定理 2.2. 设 G 为局部紧群，且 $w:\ G \to (0,\infty)$ 是博雷尔可测权函数。那么

$$M(G,w) = C_0(G,\frac{1}{w})^*$$

在对偶关系下

$$\begin{aligned}\Phi : M(G,w) &\to C_0(G,\frac{1}{w})^* \\ \mu &\mapsto \Phi_\mu\end{aligned}$$

其中

$$\Phi_\mu(f) = \int_G f(x)d\mu(x) \quad (f \in C_0(G, \frac{1}{w}))$$

作为巴拿赫代数的等距同构。

证明。设 $f \in C_0(G, \frac{1}{w})$ 和 $\mu \in M(G, w)$。则

$$\mid \Phi_\mu(f) \mid \leq \|f\|_{\infty,\frac{1}{w}}.\|w\mu\|_w$$

因此 $\|\Phi_\mu\| \leq \|\mu\|$, 所以 Φ 是连续的。假设 $I, J \in C_0(G, \frac{1}{w})^*$。可得:

$$I \star J(f) := \int_G \int_G f(xy)d\mu(x)d\nu(y)$$

其中, μ [（分别为 ν] ）是线性函数 I [（分别为 J]）对应的测度。需要注意的是, $M(G, w)$ 与 $= C_0(G, \frac{1}{w})^*$作为巴拿赫空间是同构的; 参见 [15]。因此

$$\begin{aligned}\Phi(\mu \star \nu)(f) &= \int_G f(z)d\mu \star \nu(z) \\ &= \int_G \int_G f(xy)d\mu(x)d\nu(y) \\ &= \Phi_\mu \star \Phi_\nu(f)\end{aligned}$$

因此 Φ 是一个同态。此外,

$$\begin{aligned}\|\Phi_\mu\| &= sup\{\mid \Phi_\mu(f) \mid : \|f\|_{\infty,\frac{1}{w}} \leq 1\} \\ &= sup\{\mid \varphi_{\mu w}(\frac{f}{w}) \mid : \|\frac{f}{w}\|_\infty \leq 1\} \\ &= \|\mu w\| = \|\mu\|_w\end{aligned}$$

其中 $\varphi : M(G) \to C_0(G)^*$, 使得 $\nu \mapsto \varphi_\nu$ 且 $\varphi_\nu(g) = \int_G g(x)d\nu(x)$, 对于 $g \in C_0(G)$。所以 Φ 是一个等距映射。若 $J \in C_0(G, \frac{1}{w})^*$, 则 $I(g) := J(gw)$, 对于 $g \in C_0(G)$, 定义了 $C_0(G)^* = M(G)$中的一个线性泛函。因此存在唯一的 $\nu \in M(G)$, 使得

$$I(g) = \int_G g(x)d\nu(x).$$

令 $\mu = \nu w^{-1} \in M(G, w)$。于是, 下面的结论显然成立,

$$\begin{aligned}\Phi_\mu(f) &= \int_G f(x)d\mu(x) \\ &= \int_G \frac{f(x)}{w(x)}d\nu(x) \\ &= I(\frac{f}{w}) = J(f)\end{aligned}$$

对每个 $f \in C_0(G, \frac{1}{w})$, 因此 $\Phi_\mu = J$, 所以 Φ 是满射。这就完成了证明。 □

$\widehat{\ }$本文中， G_w 是所有满足 $\frac{\chi}{w}$ 有界的 Borel 可测复值乘法性函数 χ的集合。下文中，为便于参考，我们改写结果 [[6], 2.8.2],。

定理 2.3. 设 G 是一个局部紧阿贝尔群，且 $w: G \to (0,\infty)$ 是一个博雷尔可测权函数。则

$$\Phi : \widehat{G_w} \to \Delta(L^1(G,w))$$
$$\chi \mapsto \Phi_\chi$$

其中

$$\Phi_\chi(f) := \hat{f}(\chi)$$

是同态和同构。

$\widehat{\ }$证明。(i) 若 $\chi \in G_w$，则

$$\begin{aligned}\Phi_\chi(f_1 \star f_2) &= (f_1 \star f_2)\widehat{\ }(\chi)\\ &= (\widehat{f_1}.\widehat{f_2})(\chi)\\ &= \widehat{f_1}(\chi).\widehat{f_2}(\chi)\end{aligned}$$

对所有 $f_1, f_2 \in L^1(G,w)$ 均成立。因此 Φ_χ 是乘法性的。由于 $L^1(G,w)$ 是一个交换巴拿赫代数，故 Φ_χ 连续，且

$$\begin{aligned}\mid \Phi_\chi(f) \mid &= \mid \int_G \overline{\chi}(x)f(x)dx \mid\\ &\leq \|\chi\|_{\infty,\frac{1}{w}}.\|f\|_{1,w}\end{aligned}$$

对所有 $f \in L^1(G,w)$ 均成立。因此

$$\|\Phi_\chi\| \leq \|\chi\|_{\infty,\frac{1}{w}}.$$

(ii) 由于 [[6], 2。 8. 10], $L^1(G,w)$ 是半单的。因此，盖尔范德映射$\Gamma_w: L^1(G,w) \to C_0(\widehat{G_w})$，其中 $f \mapsto \hat{}f$ 满足

$$\hat{f}(\chi) = \int_G \overline{\chi(x)}f(x)dx$$

是单射。如果 $\Phi_{\chi_1} = \Phi_{\chi_2}$，那么

$$\hat{f}(\chi_1) = \hat{f}(\chi_2)$$

对于所有 $f \in L^1(G,w)$。因此 $\chi_1 = \chi_2$，所以 Φ 是单射。
(iii) 假设 $\varphi \in \Delta(L^1(G,w))$ 且 $g \in L^1(G,w)$，其中 $\varphi(g) = 1$。若

$$\chi(y) = \int_G \overline{\varphi(x)}.\overline{g(y^{-1}x)}dx$$

则 $\varphi = \Phi_\chi$ 其中 $\chi \in G_w$ 且 Φ 是满射。
(iv) 若 $\chi_\alpha \to \chi$，则

$$\Phi_{\chi_\alpha}(f) = \hat{f}(\chi_\alpha) \to \hat{f}(\chi) = \Phi_\chi(f)$$

对所有 $f \in L^1(G,w)$ 均成立。因此 $\Phi_{\chi_\alpha} \overset{w^*}{\to} \Phi_\chi$，反之亦然。 □

3 加权群代数的正则性

设 G 是一个局部紧阿贝尔群，且 $w: G \to (0,\infty)$ 是一个博雷尔可测权函数。假设 $A = (L^1(G,w)\ \star)$。则 A 是一个交换半单巴拿赫代数。定义

$$\begin{aligned} r_A(f) &= inf\{\|f^n\|_{1,w}^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\{\|f^n\|_{1,w}^{\frac{1}{n}}\} \quad (f \in A) \end{aligned}$$

Then
(i)

$$r_A(\lambda f) = \overline{\lambda} r_A(f)$$

(ii)

$$r_A(f+g) \le r_A(f) + r_A(g)$$

(iii)

$$r_A(f \star g) \le r_A(f) r_A(g)$$

(iv)

$$|\, r_A(f) - r_A(g)\,| \le r_A(f-g)$$

(v)

$$r_A(f) \le \|f\|_{1,w}$$

对所有 f、$g \in A$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$均成立；参见 [[6], 1.2.13]。

Let

$$I = Ker(r_A) = \{f \in L^1(G,w) : r_A(f) = 0\}$$

那么， I是 $L^1(G,w)$中的一个闭理想。因此， $A_r := (\frac{A}{I}, \|.\|)$是一个交换半单巴拿赫代数，其中

$$\|f+I\| = inf\{\|f+g\|_A : r_A(g) = 0\}$$

Put

$$\|f\|_{r,w} := \|f + Ker(r_A)\|_{\frac{A}{I}}$$

对于 $f \in L^1(G,w)$。因此，$(A,\|.\|_{r,w})$ 是一个交换半单巴拿赫代数。因此 $\|.\|_{r,w}$ 与 $\|.\|_{1,w}$ 等价；参见 [[6], 2.1.11]。显然

$$\|f\|_{r,w} \leq \|f\|_{1,w}$$

并且存在某个 $M > 0$ 使得

$$M\|f\|_{1,w} \leq \|f\|_{r,w}$$

对于所有 $f \in L^1(G,w)$。设 E 是一个代数，且 $|\,.\,|\colon E \to \mathbb{C}$ 是 E 上的一个次乘性范数，使得对于所有 $x \in E$，都有 $|\,x^2\,| = |\,x\,|^2$。则称 $|\,.\,|$ 为一致范数；参见 [[6], 4.6.1]。设 A 是一个交换巴拿赫代数，且 $|\,.\,|_A$ 是 A 上的一个一致范数。那么

$$|\,a\,|_A \leq r_A(a) := \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

对于所有 $a \in A$。定义

$$E := \{\varphi \in \Delta(A) :|\,\varphi(x)\,| \leq |\,x\,|_A,\ for\ x \in A\}$$

对于所有 $x \in A$； [[6], 4.6.2]。设 A 是一个交换半单巴拿赫代数。那么 A 存在一个一致范数，且 $x \mapsto r_A(x)$ 是 A 上的一个一致范数；参见 [[6], 4.6.3]。假设 $a \in A$, 则

$$|\,a\,|_A \leq r_A(a) = \|\hat{a}\|_\infty$$

对于每个一致范数 $|\,.\,|_A$。
若 r_A 是 A上唯一的一致范数，则巴拿赫代数 A 具有唯一一致范数性质。

设 $|\,.\,|_A$ 是代数 A 上的一致范数，且 B 是 A的完备化。那么

$$\begin{aligned} r_A(a) &= r_B(b) \\ &= \lim_{n\to\infty} |\,a^{2^n}\,|_A^{\frac{1}{2^n}} \\ &= |\,a\,|_A \end{aligned}$$

对于每个 $a \in A$。

定理 3.1（[6], 4.7.3）。设 G 是一个局部紧阿贝尔群，且 $w: G \to (0,\infty)$ 是一个博雷尔可测权函数。当且仅当 $L^1(G,w)$ 是正则的，$L^1(G,w)$ 才具有唯一一致范数性质。

在下面的引理中，我们评估 $r_{L^1(G,w)}$ 与 $r_{L^1(G)}$ 之间的关联。

引理 3.2. 设 G 是一个局部紧阿贝尔群，$w: G \to (0,\infty)$ 是一个博雷尔可测权函数，且 $f: G \to \mathbb{C}$ 是一个具有紧支撑的博雷尔可测函数。若 $f \in L^1(G,w) \cap L^1(G)$，则存在 $M > 0$ 使得

$$\frac{1}{M} r_{L^1(G)}(f) \leq r_{L^1(G,w)} \leq M r_{L^1(G)}(f)$$

证明. 若 $K := supp(f)$，则 $supp(f^n) \subseteq K^n$ 是紧的。由 [[6], 1.3.3], w 在 K 上有界。假设

$$M := sup\{w(x) : x \in K \cup K^{-1}\}$$

那么对所有 $x \in G$，都有

$$w(e) \leq w(x)w(x^{-1})$$

因此

$$w(x) \geq \frac{w(e)}{w(x^{-1})}$$

若 $x = x_1 x_2 \cdots x_n \in K^n$，则 $x^{-1} = x_1^{-1} x_2^{-1} \cdots x_n^{-1}$，因此

$$w(x) \leq w(x_1) \cdots w(x_n) \leq M^n$$

and

$$w(x^{-1}) \leq w(x_1^{-1}) \cdots w(x_n^{-1}) \leq M^n$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。因此

$$\frac{w(e)}{M^n} \leq w(x) \leq M^n$$

对所有 $x \in K^n$ 均成立。因此

$$\begin{aligned} \frac{w(e)}{M^n} \|f^n\|_1 &\leq \|f^n\|_{1,w} \\ &= \int_G \mid f^n(x) \mid w(x)dx \\ &= \int_{K^n} \mid f^n(x) \mid w(x)dx \leq M^n \|f^n\|_1 \end{aligned}$$

因此

$$\frac{w(e)^{\frac{1}{n}}}{M}\|f^n\|_1^{\frac{1}{n}} \leq \|f^n\|_{1,w}^{\frac{1}{n}} \leq M\|f^n\|_1^{\frac{1}{n}}$$

因此

$$\frac{1}{M}r_{L^1(G)}(f) \leq r_{L^1(G,w)}(f) \leq Mr_{L^1(G)}(f).$$

□

关于 hk-拓扑的定义，请参阅 [6]。

定理 3.3. 设 G 是一个局部紧阿贝尔群，且 $w: G \to [1,\infty)$ 是一个博雷尔可测权函数，使得 w 是一个非准解析权函数。则

(i)

$$w^* - cl(\Delta(L^1(G,w))) = \Delta(M(G,w)).$$

(ii)

$$w^* - cl(L^1(G,w)) = M(G,w).$$

证明. (i) 由于 $L^1(G,w)$ 是一个带有有界近似单位的交换半单巴拿赫代数，且 $L^1(G,w)$ 是一个闭理想

$$M(G,w) = M(L^1(G,w))$$

于是应用 [[6], 4.1.10]，可得

$$hk - cl(\Delta(A)) = \Delta(M(A))$$

其中 $A = L^1(G,w)$。由于 A 正则，因此 $\tau_{hk} = \tau_{w^*}$。因此，由于 [2]，我们有

$$\begin{aligned} w^* - cl(\widehat{G_w}) &= hk - cl(\Delta(L^1(G,w))) \\ &= \Delta(M(L^1(G,w)) = \Delta(M(G,w)). \end{aligned}$$

其中

$$M(L^1(G,w)) := \{\sigma \in C_b(\Delta(A): \ \sigma.\hat{A} \subseteq \hat{A}\}.$$

(ii) 由于 $L^1(G,w)$ 是.....的一个闭理想

$$M(G,w) = C_0(G, \frac{1}{w})^*$$

and

$$w^* - cl(L^1(G)) = M(G)$$

So

$$w^* - cl(L^1(G,w)) = M(G,w).$$

□

引理 3.4. 设 G 是一个局部紧阿贝尔群，且 $w: G \to (0,\infty)$ 是一个博雷尔可测权函数。那么
(i) 若 $A = l_1(G,w)$，则

$$r_A(x) = \lim_{n\to\infty} w(x^n)^{\frac{1}{n}} := r_w(x)$$

对所有 $x \in G$ 均成立。

(ii) 若 $\chi \in G_w$，则

$$r_w(x^{-1})^{-1} \leq |\chi(x)| \leq r_w(x)$$

对所有 $x \in G$ 均成立。

(iii)

$$0 < |\chi(x)| \leq w(x)$$

对所有 $x \in G$ 均成立。

证明。(i) 若 $x \in G$，则 $\delta_x \in A$ 且

$$\|\delta_x\|_{1,w} = w(x)$$

因此，应用 [[6], 1.2.5]，我们有

$$\begin{aligned} r_A(x) &= \lim_{n\to\infty} \|\delta_x^n\|_A^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \|\delta_{x^n}\|_{1,w}^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} w(x^n)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

(ii) 若 $\chi \in G_w$，则存在 $M > 0$，使得

$$|\chi(x)| \leq Mw(x)$$

对所有 $x \in G$ 均成立。这意味着

$$|\chi(x)|^n = |\chi(x^n)| \leq Mw(x^n)$$

对于所有 $n \in \mathbb{N}$，因此

$$|\chi(x)| \leq M^{\frac{1}{n}} w(x^n)^{\frac{1}{n}}$$

因此

$$| \chi(x) | \leq r_w(x)$$

此外

$$\frac{1}{| \chi(x) |} = | \chi(x^{-1}) | \leq r_w(x^{-1})$$

因此

$$| \chi(x) | \leq r_w(x^{-1})^{-1}$$

对所有 $x \in G$。
(iii)

$$w(x^n) \leq w(x)^n$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$。因此

$$r_w(x) := \lim_{n\to\infty} w(x^n)^{\frac{1}{n}} \leq w(x).$$

□

引理 3.5. 设 G 是一个局部紧阿贝尔群，且 $w : G \to (0, \infty)$ 是一个博雷尔可测权函数。那么

(i) $(G_w, .)$ 是半群，当且仅当 w 是乘法性的。

(ii) $(G_w, .)$ 是群，当且仅当 $w \equiv 1$。

(iii) $G_w = G$ 当且仅当 $\lim_{n\to\infty} w(x^n) = 1$ 对所有 $x \in G$。

证明。（i）如果 $\chi \in G_w$，那么 χ 是乘法性的，且 $\chi . \chi \in G_w$，那么

$$\begin{aligned} \chi_{\cdot w}\chi(xy) &= \frac{\chi(xy)^2}{w(xy)} \\ &= \frac{\chi(x)^2\chi(y)^2}{w(xy)} \end{aligned}$$

此外

$$\begin{aligned} \chi_{\cdot w}\chi(xy) &= \chi_{\cdot w}\chi(x)\chi_{\cdot w}\chi(y) \\ &= \frac{\chi(x)^2\chi(y)^2}{w(x)w(y)} \end{aligned}$$

对于 $x, y \in G$。另一方面，根据引理 3 的（iii）部分，$4\ \chi$ 非零。这意味着 $w(xy) = w(x)w(y)$。因此，w 是乘法性的。
反之，这是显而易见的。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$(ii) 如果 G_w 是群，那么 G_w 是半群，因此根据 (i) 部分， w 是乘法性的。因此 $w \in \widehat{G_w}$ 是单位元。假设 $\chi \in \widehat{G_w}$，那么存在 $\chi^{-1} \in \widehat{G_w}$ 使得

$$\chi_{.w}\chi^{-1} = w$$

另一方面

$$r_w(x^{-1})^{-1} \leq \mid \chi(x) \mid \leq r_w(x)$$

对所有 $x \in G$。由于 w 是乘法性的，因此

$$r_w(x) = w(x)$$

and

$$r_w(x^{-1}) = \frac{1}{w(x)}$$

then

$$\mid \chi(x) \mid = w(x)$$

and

$$w(x) = \mid \chi^{-1}(x) \mid$$

因此 $w^2(x) = 1$，所以 $w(x) = 1$，对所有 $x \in G$。

反之，这是显而易见的。

$\widehat{\ }$(iii) 若 $\chi \in G_w$，则

$$r_w(x^{-1})^{-1} \leq \mid \chi(x) \mid \leq r_w(x)$$

对所有 $x \in G$。由于 $\mid \chi(x) \mid = 1$，所以

$$r_w(x^{-1})^{-1} \leq 1 \leq r_w(x)$$

Thus

$$\lim_{n\to\infty} w(x^n)^{\frac{1}{n}} = r_w(x) = 1$$

反过来，应用 [[6], 2.8.3]即可证明。 □

设 G 是一个阿贝尔群。则 $L^1(G)$ 是正则的；参见[[6], 4. 4.14]。在下面的定理中，我们将用类似的论证证明 $L^1(G, w)$ 是正则的。

定理 3.6. 设 G 是一个局部紧阿贝尔群，且 $w : G \to [1, \infty)$ 是一个博雷尔可测权函数，使得 $w(x^n)^{\frac{1}{n}} = 1$。则 $L^1(G, w)$ 是正则的。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$证明。根据假设，我们有 $G_w = G$。若 $E \subseteq G_w$ 是 w^*-闭的且 $\varphi \notin E$，则$\frown W = G_w \backslash E$ 是开集且 $\varphi \in W$。由于乘法连续，因此存在开集 U和 V，使得 $\varphi \in U$、 $1_G \in V$且 $U.V \subseteq W$。因此 $UV \cap E = \emptyset$。假设 $u, v \in C_{00}(G)^+$，其中 $supp(\hat{}u) \subseteq U$且 $supp(\hat{}v) \subseteq V$，则 $f = uv \in L^1(G, w)$ 并且

$$\widehat{uv} = \hat{u} \star \hat{v}$$

因此

$$\begin{aligned} supp(\hat{f}) &= supp(\hat{u} \star \hat{v}) \\ &\subseteq supp(\hat{u}) supp(\hat{v}) \\ &\subseteq UV \end{aligned}$$

$\hat{}\hat{}$ 这意味着 $f|_E = 0$ 和 $f(\varphi) \neq 0$。 □

引理 3.7. 设 G 是一个局部紧阿贝尔群，且 $w : G \to (0, \infty)$ 是 Borel 可测权函数。那么 $L^1(G, w)$ 是陶伯定理的。

证明. $L^1(G, w)$ 在 $C_{00}(G)$ 中有一个有界近似单位。因此，根据 Kohen 的分解定理，我们有

$$L^1(G, w) \star L^1(G, w) = L^1(G, w)$$

因此，若 $f \in L^1(G, w)$，则存在 $g, h \in L^1(G, w)$ 使得 $f = g \star h$。这意味着，若 g, $h \in L^1(G, w)$，其中 $g_n \to g$和 $h_n \to h$ 属于 $C_{00}(G)$，则 $g_n \star h_n \to g \star h$ 和 $g \star h \in C_{00}(G)$。因此

$$supp(\widehat{g_n \star h_n}) = supp(\widehat{g_n}.\widehat{h_n}) \subseteq supp(\widehat{h_n})$$

是紧的。因此，对所有 $\epsilon > 0$，都存在 m 使得

$$\|g_m \star h_m - f\|_{1,w} < \epsilon$$

且 $k = g_m \star h_m$属于 $C_{00}(G)$，因此属于 $L^1(G, w)$，其中$\|f - k\|_{1,\ w} < \epsilon$。
因此， $C_{00}(G) \subseteq L^1(G, w)_0$。证明至此完成。 □

备注 3.8. 设 G 是一个局部紧阿贝尔群，且 $w : G \to (0, \infty)$ 是一个博雷尔可测权函数。若 $L^1(G, w)$ 是陶伯定理的，且

$$\tau_{w^*} = \tau_{hk}$$

在 $L^1(G, w)$ 上。因此，我们在 $\Delta(L^1(G, w))$ 上为 $\widehat{G_w}$ 配备 hk-拓扑，并为 $L^1(G, w)$ 配备 w^*-拓扑。

设 $w: G \to [1,\infty)$ 是局部紧阿贝尔群 G 上的博雷尔可测权函数，使得

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{Lnw(x^n)}{1+n^2} < \infty \quad (x \in G)$$

于是， w 被称为局部紧阿贝尔群上的非拟解析权函数。因此， $L^1(G,w)$ 是正则的；参见 $[[6],\ 4。7.\ 11]$。如果 $w: G \to [1,\infty)$ 是博雷尔可测权函数，那么 $L^1(G,w)$ 正则且具有陶伯性质，当且仅当 w 是非准解析权；参见 $[[7],$ p.$447]$。利用引理 3.7，下面的定理显然成立。

定理 3.9. 设 G 是一个局部紧阿贝尔群，且 $w: G \to [1,\infty)$ 是博雷尔可测权函数。那么， $L^1(G,w)$ 正则，当且仅当 w 是非准解析权。

定理 3.10. 设 $w: G \to [1,\infty)$ 是局部紧阿贝尔群 G 上的博雷尔可测权函数。则下列表达式等价:
(i) 代数 $L^1(G,w)$ 是正则的。
(ii) 权 w 是非准解析的。
(iii)

$$r_w(x) = limw(x^n)^{\frac{1}{n}} = 1$$

对所有 $x \in G$。
(iv)

$$\Delta(L^1(G,w)) = \Delta(L^1(G))$$

证明。由 $[16]$ 可知，定理 3.9 中的 (i) 与 (ii) 等价。
Kaniuth 在 $[[6],\ 4$ 中。7. $5]$ 证明了 $(ii) \to (iii)$。
由定理 3.6 可知，(iii) 推出 (i)。
通过应用引理 3.5 的 (iii)，可证明 (iii) 与 (iv) 等价。

□

4 $L^1(G,w)$ 的 Gelfand 表示

本节考察 $L^1(G,w)$ 上盖尔范映射的代数性质和拓扑性质；更多内容请参阅参考文献 $[4]$。

引理 4.1. 设 G 是一个局部紧阿贝尔群，$w: G \to (0,\infty)$ 是一个博雷尔可测权函数，且 $\varphi: L^1(G,w) \to \mathbb{C}$ 是正定的。那么存在唯一的 $\mu \in M(G_w)$，使得

$$\varphi(f) = \int_{\widehat{G_w}} \gamma(f) d\mu(\gamma).$$

对所有 $f \in L^1(G,w)$。

证明。若 $S = (L^1(G,w), \star)$，则 S 是一个 $\star$-半群。因此，应用半群的 Bochner$\widehat{}$ 定理，存在 $\mu \in M(S)$，使得

$$\varphi(f) = \int_{\widehat{S}} \gamma(f) d\mu(\gamma)$$

对所有 $f \in L^1(G,w)$；参见 [16]。由于 χ 是乘法性的，并且

$$\begin{aligned}\widehat{S} &= \{\chi : S \to \mathbb{C} : \chi \text{ is multiplicative}\} \\ &= \Delta(L^1(G,w)) = \widehat{G_w}.\end{aligned}$$

因此

$$\varphi(f) = \int_{\widehat{G_w}} \gamma(f) d\mu(\gamma).$$

□

引理 4.2。设 G 是一个局部紧阿贝尔群，且 $w: G \to (0,\infty)$ 是一个博雷尔可测权函数。则
(i) 若 $f \in L^1(G,w)$ 且 $\chi \in \widehat{G_w}$，则 $\chi f \in L^1(G)$，并且

$$\|\chi f\|_1 \le \|f\|_{1,w}$$

(ii) 如果 $\gamma \in G$ 且 $\chi \in G_w$，那么 $\gamma\chi \in G_w$。
(iii) 代数 $L^1(G,w)$ 是半单的，因此 $L^1(G,w)$ 上的盖尔范德映射是单射的。

证明。（i）若 $f \in L^1(G,w)$ 且 $\chi \in \widehat{G_w}$，则

$$\begin{aligned}\|f\chi\|_1 &= \int_G |\, f(x)\,| \,.\, |\,\chi(x)\,|\, dx \\ &\le \int_G |\, fw(x)\,| \,.\, \left|\,\frac{\chi}{w}(x)\,\right| dx \\ &= \|f\|_{1,w} < \infty\end{aligned}$$

因此 $\widehat{f\chi} \in L^1(G)$。

(ii) 若 $\gamma \in G$ 和 $\chi \in G_w$，则 γ，且 χ 是乘法性的。因此 $\gamma\chi$ 是乘法性的。另外

$$|\ \frac{\gamma\chi}{w}(x)\ | = |\ \gamma\ |\ .\ |\ \frac{\gamma}{w}(x)\ | \leq 1$$

这意味着 $\gamma\chi \in G_w$。

(iii) 若 $f \in Rad(L^1(G,w))$、$\gamma \in \widehat{G}$ 和 $\chi \in \widehat{G}$，则 $\chi\gamma(f) = 0$。假设

$$\Phi : \widehat{G_w} \to \Delta(L^1(G,w))$$
$$\chi \mapsto \Phi_\chi$$

是齐次映射，且

$$\varphi : \widehat{G} \to \Delta(L^1(G)$$
$$\gamma \mapsto \varphi_\gamma$$

是满足以下条件的齐次映射

$$\Phi_\chi(f) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}dx$$

and

$$\varphi_\gamma(g) = \int_G g(x)\overline{\gamma(x)}dx$$

对于 $f \in L^1(G,w)$ 和 $g \in L^1(G)$。这意味着

$$0 = \Phi_{\gamma\chi}(f) = \varphi_\gamma(f\overline{\chi}) \quad (\gamma \in \widehat{G})$$

由于 $L^1(G)$ 是半单的，因此 $f\overline{\chi} = 0$。由于 $\overline{\chi} \neq 0$，所以 $f = 0$。因此

$$Rad(L^1(G,w)) = \{0\}$$

且 $L^1(G,w)$ 是半单的。 □

定理 4.3. 设 G 为局部紧阿贝尔群，且 $w : G \to (0,\infty)$ 是博雷尔可测的权函数。则以下各式等价：

(i) 盖尔范德映射 $\Gamma_w : L^1(G,w) \to C_0(\hat{}\,G_w)$ 是等距映射。

(ii) 盖尔范德映射 $\Gamma : L^1(G) \to C_0(\hat{}\,G)$ 是等距映射。

(iii) $(L^1(G,w)\ \|.\|_{1,\ w})$ 是一个 C^*-代数。(iv) $(L^1(G)\ \|.\|_1)$ 是一个 C^*-代数。(v) G 是平凡群。

证明。若 Γ_w 是等距映射，则 $\Gamma_w(L^1(G,w))$ 是 C^*-代数$C_0(\hat{G}_w)$ 的闭子代数。由于 $L^1(G,w)$ 是半单的，因此 Γ_w 是单射。于是 $L^1(G,w)$ 是 C^*-代数。因此， $L^1(G,w)$ 是正则且可容的，所以根据 [15], G ia s 是有限群。若 $x \in G$，则

$$\begin{aligned} w(e) &= \|\delta_x \delta_{x^{-1}}\|_{1,w} \\ &= \|\delta_x^2\|_{1,w} = w(x)^2 \end{aligned}$$

这意味着对于所有 $x \in G$， $w(e) = w(e)^2$ 且 $w(x) = 1$ 。因此

$$L^1(G,w) = L^1(G)$$

且盖尔范德映射 Γ 是等距映射。因此 $L^1(G) \cong \mathbb{C}^n$，其中某个 $n \in \mathbb{N}$。如果

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$$

then

$$\|x\|_1 = \|x\|_\infty$$

因此

$$\mid x_1 \mid + \cdots + \mid x_n \mid = max\{\mid x_i \mid : 1 \leq i \leq n\}$$

因此存在 $1 \leq j \leq n$，使得

$$\|x\|_1 = \mid x \mid_j$$

因此，对于 $i \neq j$， $x_i = 0$ 。所以 G 是平凡群，且 $L^1(G) \cong \mathbb{C}$。 □

定理 4.4。设 G 是一个局部紧阿贝尔群，且 $w : G \to (0,\infty)$ 是一个博雷尔可测权函数。则以下陈述等价
(i) Γ_w 是满射。(ii)
$L^1(G) = C_0(\hat{G})$。
(iii) G 是有限的。

证明。若 $L^1(G,w) = C_0(\widehat{G_w})$，则根据开映射定理，存在 $M > 0$使得

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{1,w} \leq M\|\hat{f}\|_\infty$$

对所有 $f \in L^1(G,w)$ 均成立。因此

$$L^1(G,w) \cong C_0(\widehat{G_w})$$

具有等价范数。但每个阿贝尔 C^*-代数都是阿伦斯正则且可容的。因此， $L^1(G,w)$ 是阿伦斯正则且可容的巴拿赫代数。由于 G 是阿贝尔的，

G 是可容的。因此， w^* 有界，并且对于某个 $m > 0$，Ω 有正的下界。因此，Ω 不是 0-簇。由此， G 是有限的；见 [14]。此外

$$L^1(G, w) \cong L^1(G)$$

$\widehat{\ }$ 具有等价范数，因此 $G_w = G$。于是

$$C_0(\widehat{G_w}) = C_0(\hat{G})$$

因此 $L^1(G) = C_0(\hat{G})$。证明完毕。

□

备注 4.5. 设 A 是交换半单巴拿赫代数，且 Γ_A 是满射。那么

$$A \cong C_0(\Delta(A))$$

具有等价范数，并且 A 是 Arens 正则且可容的巴拿赫代数。此外,

$$A^{**} \cong C(X)$$

其中 $X := \Delta(\Delta(A^{**}))$。因此 A^{**} 是 Arens 正则且可容的巴拿赫代数。

例 4.6. 设 $G = (\mathbb{Z}, +)$ 且 $w(n) = 1+ \mid n \mid$，其中 $n \in \mathbb{Z}$。那么
(i)

$$\lim_{n\to\infty} w(n+m)^{\frac{1}{n}} = 1$$

对所有 $m \in \mathbb{Z}$。
(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Lnw(n+m)}{n^2} < \infty$$

因此， w 是非准解析的。
(iii)

$$\Delta(l_1(\mathbb{Z}, w)) = \mathbb{T}$$

(iv) $l_1(\mathbb{Z}, w)$ 是正则的且具有陶伯定理性质。

证明。 (i) 如果

$$k_n := (1+ \mid n+m \mid)^{\frac{1}{n}} - 1$$

then

$$1+ \mid n+m \mid = (1+k_n)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} k_n^2$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} k_n = 0$$

因此 $r_w(m) = 1$。

(ii) 若 $a_n = \frac{Ln}{(m+n)\, n^2}$ 且 $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

收敛。因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

对所有 m，都收敛，且 w 是非准解析的。
(iii) 由 [[6], 2.8.8],可得:

$$\Delta(l_1(\mathbb{Z}, w)) = \{z \in \mathbb{C} : R_- \leq \mid z \mid \leq R_+\}$$

其中

$$R_+ = inf\{w(n)^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\} = 1$$

and

$$R_- = sup\{w(-n)^{\frac{-1}{n}} : n \in \mathbb{N}\} = 1$$

因此

$$\Delta(l_1(\mathbb{Z}, w)) = \{z \in \mathbb{C} : \mid z \mid = 1\} = \mathbb{T}$$

使得

$$\varphi_z(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) z^n$$

对于 $f \in l_1(\mathbb{Z}, w)$ 和 $z \in \mathbb{T}$。
(iv) 根据定理 3.10，$l_1(\mathbb{Z}, w)$ 是正则的。因此，由引理 3.7 可知，它是陶伯的。

□

参考文献

[1] H. G. Dales, 《巴拿赫代数与自动连续性》。伦敦数学会专著 24，克拉伦登出版社，牛津，2000年。[2] H. G. Dales 和 A. T. Lau, 《伯林代数的第二对偶》，美国数学会回忆录，177 (836) (2005年)。[3] Y. Domar, 《某些交换巴拿赫代数上的调和分析》，《数学学报》96：1-66 (1956年)。[4] I. Gelfand、D. Raikov 和 G. Shilov, 《交换赋范环》，AMS Chelsea Publishing，1964年。[5] N. Gronback, 《局部紧群上的加权卷积代数的可容性》，《美国数学会汇刊》319 (1990年) 765–775。[6] E. Kaniuth, 《交换巴拿赫代数教程》，Springer Science，Bussi- ness Media, LLC 2009年。[7] K. B. Laursen 和 M. M. Neumann, 《局部谱理论导论》，克拉伦登出版社，牛津，(2000年)。[8] S. Maghsoudi 和 A. Rejali, 《具有严格拓扑的某些函数空间的无界加权拉东测度及其对偶》，《马来西亚数学科学学会通报》36 (1) (2013年) 211–219[9] S. Maghsoudi 和 A. Rejali, 《某些局部凸函数空间的对偶》，《伊朗数学会通报》41 (4) (2015年) 1003–1017。[10] M. J. Mehdipour 和 A. Rejali, 《局部紧群上加权巴拿赫代数及其第二对偶的正则性与可容性》，arXiv:2112.13286v1，(2022年)。[11] M. J. Mehdipour 和 A. Rejali, 《加权群代数的弱可容性》，arXiv: 2209.08346v1，(2022年)。[12] M. J. Mehdipour 和 A. Rejali, 《加权测度代数及其第二对偶的弱可容性》，arXiv:2210. 04075v1，(2022年)。[13] A. Rejali, 《半拓扑半群的加权群代数类比》，《伊朗伊斯兰共和国科学杂志》6 (2) (1995年) 113–120

[14] A. Rejali 和 H. R. E. Vishki, 《加权群代数第二对偶的正则性与可容性》, Proyecciones, 第 26 卷, 第 259–267 页（2007年）。[15] A. Rejali 和 H. R. Vishki, 《由卷积代数刻画的加权卷积测度代数》, 《伊朗伊斯兰共和国科学杂志》, 19（2）（2008年）, 169–173 页。[16] P. Ressel 和 W. J. Ricker, 《向量值正定函数、Berg-Maserick 定理及其应用》, Math. Scand., 90（2002年）, 289–319 页。