arXiv:2301.03243v1 [math.FA] 9 Jan 2023

扩展局部凸空间的对偶空间

AKSHAY KUMAR 和 VARUN JINDAL

Abstract. 本文旨在研究扩展局部凸空间的对偶空间。具体而言，我们研究扩展局部凸空间上的弱拓扑和弱* 拓扑，以及有界子集上一致收敛拓扑。作为在函数空间中的应用，我们证明，在赋予有界族上的强一致收敛拓扑的度量空间 (X, d) 上，所有实值连续函数构成的空间 $C(X)$ 的弱拓扑与其最细局部凸拓扑重合，当且仅当该有界族由 X 的所有有限子集构成。

1. Introduction

在 [2], Beer 提出了扩展赋范线性空间（简称 enls）的概念。Beer 和 Vanderwerff 在 [5, 6] 中进一步研究了这类空间。受 Beer 的思想启发, [2], Salas 和 Tapia-Garc´ıa [13] 定义了扩展局部凸空间（简称 elcs）。这些新型扩展空间不同于经典的局部凸空间，因为其中的数乘不一定是联合连续的。因此，经典局部凸空间理论未必能直接应用于这类新型空间。为解决这一问题， [8], 作者研究了 elcs (X, τ) 上比 τ 更粗的最细局部凸拓扑（简称 flc 拓扑）。文中还证明，若 τ_F 是 elcs (X, τ) 上的 flc 拓扑，则 (X, τ) 和 (X, τ_F) 的对偶空间相同，即 X^*（所有连续线性泛函的集合）。

本文探讨了如何利用局部凸拓扑向量空间 (X, τ) 上的有限局部凸拓扑 τ_F 来研究其对偶空间 X^*。具体而言，我们研究了X上的弱拓扑，以及 X的对偶空间 X^* 上的弱* 拓扑。关于 X^*，我们还研究了局部凸拓扑向量空间 (X, τ) 的有界子集上一致收敛的拓扑 τ_{ucb}。Beer 和 Vanderwerff 首先在 [6]中考察了扩展赋范空间上的拓扑 τ_{ucb} 。

在第二节给出一些预备定义和记号之后，我们在第三节研究局部凸拓扑向量空间上的弱拓扑和弱* 拓扑。

2010 年数学主题分类。主要分类：46A03、46A20；次要分类：46A17、46A99、46B10。关键词和短语：扩展局部凸空间、扩展赋范空间、最细局部凸拓扑、弱拓扑、弱* 拓扑、有界集上一致收敛的拓扑。

特别地，我们研究这些拓扑的可度量化性和可赋范性。为了考察局部凸拓扑向量空间（X， τ）上的弱拓扑的可度量化性，我们首先探讨有限局部凸拓扑何时与其弱拓扑重合。进一步地，我们证明，扩展赋范空间（X， $\|\cdot\|$）的对偶空间中的闭单位球上的弱* 拓扑可度量化，当且仅当（X， τ_F）可分，其中 τ_F 是相应的有限局部凸拓扑。作为在函数空间方面的应用，我们证明，若 $\mathcal{B}$ 是度量空间（X， d）上的一个有界族，且具有闭基，那么对配备了 $\mathcal{B}$ 上的强一致收敛拓扑 $\tau_{\mathcal{B}}^s$ 的全体实值连续函数空间C（X）而言，其有限局部凸拓扑与弱拓扑重合，当且仅当 $\mathcal{B}$ 是由 X的所有有限子集组成的有界族。

在第四节中，我们考察局部凸拓扑向量空间（X,τ）的对偶空间 X^* 中的等度连续弱* 紧致子集，并证明 X^* 的所有等度连续子集的集实际上诱导出 τ。我们还验证了经典的巴拿赫–阿劳格鲁定理、James 紧性判别准则以及扩展情形下的埃伯莱因–史穆连定理。

在最后一节中，我们研究局部凸拓扑向量空间（X,τ）上有界集一致收敛的拓扑 τ_{ucb} 。我们首先考察空间（X^*,τ_{ucb}）的可度量化性和可赋范性。然后，我们探讨以下有趣的问题。对于带有有限局部凸拓扑 τ_F 的局部凸拓扑向量空间（X,τ），空间（X,τ）和（X,τ_F）可能具有不同的有界集（见命题 5.2）；当 $\tau_{ucb}=\tau_s$ 在 X^* 上时，其中 τ_s 是局部凸空间（X,τ_F）的强拓扑，也就是在（X,τ_F）的有界子集上一致收敛的拓扑，这一点值得关注。我们证明，这对于一个基本扩展局部凸空间成立。我们还给出局部凸拓扑向量空间满足 $\tau_{ucb}=\tau_s$ 的条件。

2. 预备知识

假设每个向量空间都定义在域 $\mathbb{K}$ 上，其中 $\mathbb{K}$ 或 $\mathbb{R}$ 。对于 ∞ 值，我们采用以下约定： $\infty.0=0.\infty=0$；对每个 $\alpha\in\mathbb{R}$，$\infty+\alpha=\alpha+\infty=\infty$；当 $\alpha>0$ 时， $\infty.\alpha=\alpha.\infty=\infty$； $\inf\{\emptyset\}=\infty$。

向量空间 X 上的扩展范数 $\|\cdot\|\colon X\to[0,\infty]$ 是一个满足以下性质的函数：

(1) $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$; (2) 对每个标量 α 和 $x\in X$， $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$； (3) 若 $x,y\in X$，则 $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$。

扩展赋范线性空间（简称 enls）是赋予扩展范数 $\|\cdot\|$的向量空间 X ，记作（$X,\|\cdot\|$）（或 X）。扩展巴拿赫空间是关于度量完全的 enls（$X,\|\cdot\|$）

$d(x,y) = \min\{1, \| x-y \|\}$，其中 $x,y \in X$。关于 enls 和扩展度量空间的更多细节，请参阅 [1, 2, 5, 6]。

扩展范数的一种推广是扩展半范数。

定义 2.1. ([13]) 若向量空间 X 上的函数 $\rho: X \to [0,\infty]$ 满足以下条件，则称其为扩展半范数:

(1) 对每个标量 α 和 $x \in X$， $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$;

(2) 对 $x,y \in X$， $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$。

若赋有群拓扑 τ 的向量空间 X 的拓扑 τ 由其上的一族扩展半范数 $\mathcal{P} = \{\rho_i : i \in I\}$ 所诱导，则称其为扩展局部凸空间（简称 elcs ）。若该族 $\mathcal{P}$ 可数，则称 (X,τ) 为可数扩展局部凸空间。我们用 $S(X,\tau)$ 表示 elcs (X,τ) 上所有连续扩展半范数的集合。对于 $\rho \in S(X,\tau)$，定义 $X_{fin}^{\rho} = \{x \in X: \rho(x) < \infty\}$。elcs (X,τ) 的有限子空间定义为

$$X_{fin} = \{x \in X : \rho(x) < \infty \text{ for every } \rho \in S(X,\tau)\}.$$

特别地，如果 $(X, \| \cdot \|)$ 是一个 enls，那么 $X_{fin} = \{x \in X : \| x \| < \infty\}$。

如果存在一个 $\rho \in S(X,\tau)$，使得 $X_{fin} = X_{fin}^{\rho}$属于一个 elcs (X,τ)，那么我们称 (X,τ) 为基本扩展局部凸空间（简称基本 elcs）。关于 elcs (X,τ) 的以下事实要么容易证明，要么见于 [13]。

(1) $(X_{fin}, \tau|_{X_{fin}})$ 是一个局部凸空间，并且它是 X的最大此类子空间。

(2) 如果 ρ 是 X上的连续扩展半范数，那么 X_{fin}^{ρ} 是X中的开闭集。(3) X_{fin} 是 X 的开子空间，当且仅当 X 是一个基本 elcs（见 [13]中的推论 3.11）。(4) 如果 τ 由 X上的一族扩展半范数 $\mathcal{P}$ 所诱导，那么

$$X_{fin} = \bigcap_{\rho \in \mathcal{P}} X_{fin}^{\rho}.$$

(5) 存在一个由绝对凸（平衡且凸）集合构成的 0 的邻域基 $\mathfrak{B}$ 。

设 $\mathfrak{B}$ 是局部凸拓扑向量空间 (X,τ) 中由绝对凸集合构成的 0 的邻域基。那么 τ 由闵可夫斯基泛函族 $\{\mu_V : V \in \mathfrak{B}\}$ 诱导（参见 [13] 中的命题 4.7）。

定义 2.2。（[13]）设（X,τ）是一个局部凸拓扑向量空间，且 U 是 X 的一个绝对凸子集。那么，对于 U，其闵可夫斯基泛函 $\mu_U: X \to [0,\infty]$ 定义为

$$\mu_U(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda U\}.$$

对于局部凸拓扑向量空间 X 的绝对凸子集 U，我们定义 $X_{fin}^{U} = \{x \in X : \mu_U(x) < \infty\}$。利用定义 2.2，很容易证明以下事实。

(1) 每个闵可夫斯基泛函 μ_U 都是一个扩展半范数。此外，假设 $0 \in \text{Core}(U)$，也就是说，对每个 $x \in X$，都存在一个 $\delta_x > 0$，使得 $tx \in A$ 对每个 $0 \leq t \leq \delta_x$. 都成立。那么 μ_U 是 X上的半范数。(2) 闵可夫斯基泛函 μ_U 连续，当且仅当 U 是 0 的一个邻域。(3) 若 $U \subseteq V$，则 $\mu_V \leq \mu_U$。(4) 一般而言，$\{x \in X : \mu_U(x) < 1\} \subseteq U \subseteq \{x \in X : \mu_U(x) \leq 1\}$.

对于向量空间 X 的任意非空子集 A，我们用 $\text{ab}(A)$ 表示 A 在 X 中的绝对凸包，也就是说，$\text{ab}(A)$ 是包含 A 的最小绝对凸集。若 A 是拓扑空间 (X, τ) 中的任意集合，我们分别用 $\text{Cl}_\tau(A)$ 和 $\text{int}_\tau(A)$ 表示 A 在 (X, τ) 中的闭包和内部。其他术语和定义请参见 [12, 14, 15]。

3. Weak and Weak* Topologies

本节旨在研究局部凸拓扑向量空间的弱拓扑和弱*拓扑的一些结构性质。特别地，我们研究这些拓扑的可度量化性和可赋范性与局部凸拓扑向量空间性质之间的关系。我们还证明，对于一个扩展赋范线性空间（$X, \|\cdot\|$），对偶空间 X^* 的闭单位球 B_{X^*} 上的弱* 拓扑可度量化，当且仅当赋予有限局部凸拓扑 τ_F 的 X 是可分的。

定义 3.1. 设（X, τ）是一个对偶空间为 X^*的局部凸拓扑向量空间。 X 上的弱拓扑 τ_w由半范数族 $\mathcal{B}_w = \{\rho_f : f \in X^*\}$ 所诱导，其中ρ_f（x） $= |f$（x）$|$对所有 $x \in X$均成立。

我们将 X^* 上的弱* 拓扑 τ_{w^*} 定义为由半范数族 $\mathcal{B}_{w^*} = \{\rho_x : x \in X\}$ 所诱导的拓扑，其中 ρ_x（f） $= |f$（x）$|$ 对所有$f \in X^*$均成立。

注 3.2. (1) 如果 τ_F是局部凸拓扑向量空间 (X, τ) 上的有限局部凸拓扑，那么 $(X, \tau_F)^* = (X, \tau)^*$。因此，弱拓扑 τ_w 和弱 * 拓扑 τ_{w^*} 与局部凸空间 (X, τ_F) 上的弱拓扑和弱* 拓扑相同。因此，对于拓扑 τ_w 和τ_{w^*}，我们可以采用局部凸空间的弱拓扑和弱* 拓扑的大多数经典结果。(2) 集合族 $\mathcal{B}_w = \{B^\circ : B$ 是 $X^*\}$ 的有限子集，是 (X, τ_w) 中 0 的邻域基，其中 $B^\circ = \{f \in X^* : |f(x)| \leq 1$ 对 $x \in B\}$成立。类似地，集合族 $\mathcal{B}_{w^*} = \{B_\circ : B$ 是 $X^*\}$ 的有限子集，是 (X, τ_{w^*}) 中 0 的邻域基，其中 $B_\circ = \{x \in X : |f(x)| \leq 1$ 对 $f \in B\}$ 成立。

关于局部凸空间上的弱拓扑和弱* 拓扑的更多细节，请参阅 [11, 12, 14]。

众所周知，局部凸空间可赋范，当且仅当它有一个包含 0 的有界邻域（ [11], 第 160 页的定理 6.2.1）；赋范空间 X 的弱拓扑中的 0 邻域有界，当且仅当 X 的维数有限（ [7], 第 67 页的命题 3.10）。因此，局部凸空间的弱拓扑可赋范，当且仅当它是有限维的。由此，根据注 3.2，我们得到局部凸拓扑向量空间的以下结果。

命题 3.3。设 (X,τ) 是一个局部凸拓扑向量空间。那么 (X,τ) 的弱拓扑可赋范，当且仅当 X 的维数有限。

在下一个结果中，我们考察局部凸拓扑向量空间 (X,τ) 何时满足 $\tau_F=\tau_w$？

命题 3.4。设 (X,τ) 是一个局部凸拓扑向量空间，其有限局部凸拓扑为 τ_F，弱拓扑为 τ_w。若 $\tau_F=\tau_w$，则对于 (X,τ) 上的每个连续扩展半范数 ρ，商空间 X/X^{ρ}_{fin} 的维数有限。

证明。设 $X=X^{\rho}_{fin}\oplus M$ 是某个无限维子空间 M 和连续扩展半范数 ρ。因此存在一个无限线性无关子集 $A=\{z_n:\ n\in\mathbb{N}\}$，它属于 M。由于 $\tau_F=\tau_w$，(X,τ_F) 的每个离散子群都必须是有限生成的（[10]）。若 Z 是由 A 生成的 X 的子群，则 Z 不可能是有限生成的。为导出矛盾，我们证明 Z 是 (X,τ_F) 的离散子群。令 $X=Y\oplus$ 为 A 的张成空间，其中 Y 是 X 的子空间。显然，$X^{\rho}_{fin}\subseteq Y$。考虑半范数 $\mu:\ X\to[0,\infty)$，定义如下

$$\mu(x)=\sum|\alpha_n|,$$

其中 $x=x_1+x_2$ 适用于 $x_1\in Y$，且 $x_2=\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n z_n\in$ 是 A 的张成空间。由于对于 $x\in X$，$\mu(x)\le\rho(x)$，μ 是 (X,τ) 上的连续半范数。根据 [8] 中的定理 3.5，μ 在 (X,τ_F) 上连续。若对于 $z\in Z$，$\mu(z)<1$，则存在整数 c_{n_1}、c_{n_2}、……、c_{n_N}，使得 $z=\sum_{k=1}^{N}c_{n_k}z_{n_k}$，且 $\mu(z)=\sum_{k=1}^{N}|c_{n_k}|<1$。因此，对所有 k，$c_{n_k}=0$。由此，$z=0$。所以 $\{0\}=\mu^{-1}[0,1)\cap Z$ 是 $(Z,\tau_F|_Z)$ 中的开集。因此 Z 是 (X,τ_F) 的离散子群。□

定理 3.5. 设 (X,τ) 是一个具有有限局部凸拓扑 τ_F和弱拓扑τ_w的局部凸拓扑向量空间。如果 τ_w 可度量化，则 $\tau_F=\tau_w$。对于可数局部凸拓扑向量空间，逆命题也成立。

证明. 假设 τ_w 可度量化。那么 (X,τ_w) 是一个 Mackey 空间（ [14],第 132 页中的 3.4）。由于 $(X,\tau_F)^*=(X,\tau_w)^*$，我们有 $\tau_w=\tau_F$（ [7], 第 120 页中的定理 4.35）。

反之，假设（X，τ）是一个可数扩展局部凸空间，且 $\tau_F=\tau_w$。根据命题 3.4，对于每个连续

扩展半范数 ρ，商空间 [8] 中的 τ_F 都是可度量化的。因此，根据定理 5.10，τ_w 是可度量化的。□

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个扩展赋范线性空间。那么赋范空间 $(X_{fin}, \|\cdot\|)$ 的弱拓扑与子空间拓扑 $\tau_w|_{X_{fin}}$ 一致，其中 τ_w 是 $(X, \|\cdot\|)$ 的弱拓扑。因此，若 $\tau_w = \tau_F$ 在 X 上，则 $\tau_w|_{X_{fin}} = \tau_F|_{X_{fin}} = \tau_{\|\cdot\|}$ 在 X_{fin} 上。因此，由于有限子空间上的弱拓扑是可赋范的，有限子空间的维数是有限的。由此讨论以及本节以上所有结果，可得下一个定理。

定理 3.6. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个扩展赋范线性空间。假设 τ_F 和 τ_w 分别是 X 的有限局部凸拓扑和弱拓扑。那么以下陈述等价。

(1) $\tau_F = \tau_w$；(2) τ_w 是可度
量化的；(3) τ_w 是可赋范的；
(4) X 是有限维的。

已知，局部凸空间 X 的弱* 拓扑可度量化（可赋范的），当且仅当 X 的维数可数（有限）。因此，根据注 3.2，可得以下结果。

定理 3.7. 设 (X, τ) 是一个对偶空间为 X^*、带有弱* 拓扑τ_{w^*}的局部凸拓扑向量空间。那么，τ_{w^*} 可度量化（可赋范的），当且仅当 X 的维数可数（有限）。

设 $(X, \|\cdot\|)$ 和 $(Y, \|\cdot\|)$ 是两个扩展赋范线性空间。对于连续线性算子 $T: X \to Y$，定义：

$$\| T \|_{op} = \sup\{\| Tx \| : \| x \| \leq 1\}.$$

注意，若 T_1 和 T_2 是局部凸拓扑向量空间 X 上的连续线性算子，且满足 $T_1|_{X_{fin}} = T_2|_{X_{fin}}$，则 $\| T_1 \|_{op} = \| T_2 \|_{op}$。因此，$\|\cdot\|_{op}$ 是 X^* 上的半范数（当且仅当 $X = X_{fin}$ 时，它是范数）。不过，按照 Beer [2], ，我们将$\| T \|_{op}$ 称为 T的算子范数。

回想一下，赋范线性空间 X 可分，当且仅当 X^* 的闭单位球上的弱*拓扑可度量化。然而，若一个扩展赋范线性空间X 可分，则 X 必为赋范线性空间（[2]中的命题 3.10）。下一个定理将扩展赋范线性空间 X 的最细拓扑空间（X, τ_F）的可分性，与闭单位球$B_{X^*} = \{f \in X^* : \| f \|_{op} \leq 1\}$上的弱* 拓扑的可度量化性联系起来。

引理 3.8。设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个具有 $X = X_{fin} \oplus M$ 和有限局部凸拓扑 τ_F 的扩展赋范线性空间。则当且仅当 M 的维数是可数的时，$(M, \tau_F|_M)$ 是可分的。

证明。假设 $M=$ 张成 $\{x_n:\ n\in\mathbb{N}\}$。所有 $\{x_n$ 的线性组合构成的集合（其复系数的实部和虚部均为有理数）在 $(M,\tau_F|_M)$ 中稠密。

反过来，假设 M 的维数不可数。设 $A=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是 M的任意可数子集。那么存在 M 中的一个 x_0，使得 x_0 与 A线性无关。假设 Z 是 X 的子空间，且$X=Z\oplus \text{span}(x_0)$。定义半范数 $\rho:\ X\to[0,\infty)$，令 $\rho(\alpha x_0+y)=|\alpha|$，其中 $y\in Z$。由于 $\rho\equiv 0$ 在 X_{fin}上，ρ 在$(X,\|\cdot\|)$上连续。根据 [8]中的定理 3.5，ρ在(X,τ_F)上连续。注意，$\rho^{-1}((0,2))\cap M\in\tau_F|_M$且$x_0\in\rho^{-1}((0,2))$。由于对任意 $n\in\mathbb{N}$，$x_n\notin\rho^{-1}((0,2))\cap M$，因此 A 在M中不稠密。□

定理 3.9. 假设 $(X,\|\cdot\|)$ 是一个带有有限局部凸拓扑 τ_F 的扩展赋范线性空间。那么以下命题等价。

(1) (B_{X^*},τ_{w^*}) 可度量化；(2) M 的维数可数，且 $(X_{fin},\|\cdot\|)$ 可分；(3) $(M,\tau_F|_M)$ 和 $(X_{fin},\|\cdot\|)$ 均可分；(4) (X,τ_F) 可分。

证明. (1)⇒(2). 首先证明 $(X_{fin},\|\cdot\|)$ 可分。令 $\tau_{w^*}^f$ 为 $(X_{fin},\|\cdot\|)^*$ 的闭单位球 $B_{X_{fin}^*}$ 上的弱* 拓扑。我们证明 $(B_{X_{fin}^*},\tau_{w^*}^f)$ 同胚于 (B_{X^*},τ_{w^*}) 的一个子空间。定义 $\Psi:(B_{X_{fin}^*},\tau_{w^*}^f)\to(B_{X^*},\tau_{w^*})$，使得 $\Psi(f)=f'$，其中

$$f'(x)=\begin{cases}f(x), & \text{if } x\in X_{fin}\\ 0, & \text{if } x\in M.\end{cases}$$

由于 $\|f\|_{op}=\|f'\|_{op}$，映射 Ψ 是良定义的。容易看出，Ψ 是一个单射连续映射。根据经典巴拿赫-阿劳格鲁定理（ [7],第 71 页的定理 3.21），$(B_{X_{fin}^*},\tau_{w^*}^f)$ 是紧致的。因此，$(B_{X_{fin}^*},\tau_{w^*}^f)$ 与 B_{X^*} 的子集 $Z=\{f\in B_{X^*}:\ f|_M=0\}$ 同胚。于是 $(B_{X_{fin}^*},\tau_{w^*}^f)$ 可度量化。因此，X_{fin} 是可分的。

现在假设 M 的维数不可数。由于 (B_{X^*},τ_{w^*}) 可度量化，(B_{X^*},τ_{w^*}) 中的 0 存在一个可数邻域基 $\{U_n:\ n\in\mathbb{N}\}$。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，都存在 X 的一个有限子集 F_n，使得 $((F_n)^\circ\cap B_{X^*})\subseteq U_n$。设 $x_0\in M$ 与 $\cup_{n\in\mathbb{N}}F_n$ 线性无关。于是可以找到 $f\in X^*$，使得 $f\in B_{X^*}$，其中 $f(x)=0$ 对每个 $x\in\cup_{n\in\mathbb{N}}F_n$ 都成立，并且 $f(x_0)=2$。这是不可能的，因为 $\{x_0\}^\circ\cap B_{X^*}$ 是 (B_{X^*},τ_{w^*}) 中 0 的一个邻域，但对于所有 $n\in\mathbb{N}$，$f\in((F_n)^\circ)\cap B_{X^*})\setminus(\{x_0\}^\circ\cap B_{X^*})$。

蕴含关系 (2)⇔(3) 可由引理 3.8 得出。

(3)⇔(4). 考虑映射 $\Psi:(X,\tau_F)\to(X_{fin},\|\cdot\|)\times(M,\tau_F|_M)$，由$\Psi(x)=(x_f,x_M)$定义，其中 $x=x_f+x_M$。显然，Ψ是线性双射。如果

U和 V分别是 $(X_{fin}, \|\cdot\|)$ 和 $(M, \tau_F|_M)$ 中 0 的邻域，那么存在 $r > 0$ 以及定义在 $(M, \tau_F|_M)$ 上的连续半范数 ρ，使得$B(0, r) = \{x \in X_{fin} : \| x \| < r\} \subseteq U$且 $\rho^{-1}([0, r)) \subseteq V$。定义半范数$q : X \to [0, \infty)$，令 $q(x) = \| x_f \| + \rho(x_M)$。由于 $q(x) \leq \| x \|$ 对 $x \in X$成立，我们有 q 是 $(X, \|\cdot\|)$ 上的连续半范数。根据 [8] 的定理 3.5， q 是 (X, τ_F) 上的连续半范数。此外， $\Psi(q^{-1}[0, r)) \subseteq B(0, r) \times \rho^{-1}([0, r)) \subseteq U \times V$。因此，$\Psi$ 是连续的。

为了证明 Ψ^{-1} 的连续性，令 ρ 为 (X, τ_F) 上的连续半范数，并且$r > 0$。那么， ρ 在 $(X, \|\cdot\|)$ 上连续。因此，$(\rho^{-1}([0, \frac{r}{2})) \cap X_{fin}) \times (\rho^{-1}([0, \frac{r}{2})) \cap M)$ 是 $(X_{fin}, \|\cdot\|) \times (M, \tau_F|_M)$ 中 0 的一个邻域，并且 $(\rho^{-1}([0, \frac{r}{2})) \cap X_{fin}) \times (\rho^{-1}([0, \frac{r}{2})) \cap M) \subseteq \Psi(\rho^{-1}[0, r))$。因此 Ψ^{-1} 连续。故 (X, τ_F) 与 $(X_{fin}, \|\cdot\|) \times (M, \tau_F|_M)$ 同构。证毕。

(2)⇒(1). 设 M 的维数可数，且 $(X_{fin}, \|\cdot\|)$ 可分。根据 [11], 第 271 页的习题 8.201(e) 和定理 3.7，乘积空间 $(B_{X^*_{fin}}, \tau^f_{w^*}) \times (M^*, \tau_{w^*})$ 是可度量化的。考虑映射 $\Psi : (B_{X^*}, \tau_{w^*}) \to (B_{X^*_{fin}}, \tau^f_{w^*}) \times (M^*, \tau_{w^*})$，定义为 $\Psi(f) = (f|_{X_{fin}}, f|_M)$。于是根据[2]中的定理 4.3， Ψ 是双射。由于网 $f_\lambda \to f$ 在 X^* 中逐点收敛，当且仅当 $f_\lambda|_{X_{fin}} \to f|_{X_{fin}}$ 在 X^*_{fin} 中逐点收敛且 $f_\lambda|_M \to f|_M$ 在 M^* 中逐点收敛，因此 Ψ 是一个同胚。因此 (B_{X^*}, τ_{w^*}) 是可度量化的。□

我们以将结果应用于函数空间来结束本节。令$C(X)$表示度量空间（X, d）上所有实值连续函数组成的集合。 X 的非空子集族称为 X 上的有界族，若它覆盖 X ，且对有限并及其成员的子集运算封闭。若 $\mathcal{B}_0$ 是 $\mathcal{B}$ 的子族，且 $\mathcal{B}_0$ 中的每个元素都是闭的，并且 $\mathcal{B}_0$ 在集合包含关系下于 $\mathcal{B}$ 中共尾，则称 $\mathcal{B}_0$ 是 $\mathcal{B}$ 的闭基。

$C(X)$上最常用的拓扑是 $\mathcal{B}$上的经典一致收敛拓扑，通常记作 $\tau_{\mathcal{B}}$ （定义见 [3] ）。

拓扑 $\tau_{\mathcal{B}}$ 实际上由 $\{\rho_B\}$ (X)上的扩张半范数族 $\{\rho_B : B \in \mathcal{B}_0\}$ 所诱导，其中对于每个 $f \in C(X)$， $\rho_B(f) = \sup_{x \in B} |f(x)|$ 。因此，$(C(X)$ $\tau_{\mathcal{B}})$是一个局部凸拓扑向量空间。

对于具有闭基的 $\mathcal{B}$ 有界族 (X, d)， [3], Beer 和 Levi 引入了一种 $\tau_{\mathcal{B}}$ 的变分形式，称为 $\mathcal{B}$上的强一致收敛拓扑，记作 $\tau^s_{\mathcal{B}}$ （定义见 [3] ）。

$C(X)$ 上的拓扑 $\tau^s_{\mathcal{B}}$ 也可看作由以下形式的扩展半范数所诱导：

$$\rho^s_B(f) = \inf_{\delta > 0} \left\{ \sup_{x \in B^\delta} |f(x)| \right\},$$

其中 $B \in \mathcal{B}_0$，且 $B^\delta = \{x \in X : \ d(x, y) < \delta$ 对某个 $y \in B\}$ 成立。

一般而言， $\tau_{\mathcal{B}}$ 和 $\tau_{\mathcal{B}}^s$ 在 $C(X)$ 上并不相等。然而，如果有界族 $\mathcal{B}$与闭集隔离，那么 $\tau_{\mathcal{B}} = \tau_{\mathcal{B}}^s$ 在 $C(X)$ 上（参见 [4] 中的定理 4.1）。

命题 3.10. 设 (X, d) 是一个度量空间，且 $B \subseteq X$ 是闭的。那么，商空间 $C(X)/C(X)_{fin}^B$ 是有限维的，当且仅当 B 是紧致的，其中 $C(X)_{fin}^B = \{f \in C(X) : \sup_{x\in B} |f(x)| < \infty\}$。

证明. 若 B 是紧致的，则 $C(X)_{fin}^B = C(X)$。反过来，设 B 不紧致，则存在 B 的一个可数子集 $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$，它在 (X, d) 中闭且离散。对每个 $m \in \mathbb{N}$，在 A 上定义函数 g_m，如下:

$$g_m(x_n) = \begin{cases} 0; & \text{if } n < m \\ n^{2m}; & \text{if } n \geq m. \end{cases}$$

显然，对每个 $m \in \mathbb{N}$， g_m 在 A 上连续。由 Tietze 延拓定理，存在 $f_m \in C(X)$，使得对每个 $m \in \mathbb{N}$， $f_m|_A = g_m$。容易看出， $L = \{f_m : m \in \mathbb{N}\}$ 是 $C(X)$ 的一个线性无关子集。令 $h = \sum_{j=1}^k c_j f_j$，其中标量为 c_1、 c_2、...、 c_k。不妨设 $c_k > 0$ 且 $k \geq 2$。假设 $M > 0$。那么存在一个 $n \in \mathbb{N}$，使得 $n > \max\{\frac{|c_j|}{c_k}, \frac{1}{c_k}, k^2, M : 1 \leq j \leq k\}$。注意

$$\frac{n}{c_k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{|c_j n^{2j}|}{c_k} \leq n^2 + \sum_{j=1}^{k-1} n.n^{2(k-1)} \leq n^{2k-1} + n^{2k-1}\left(\frac{k^2}{2}\right) \leq n^{2k}.$$

因此 $h(x_n) = \sum_{j=1}^k c_j n^{2j} \geq c_k n^{2k} - \sum_{j=1}^{k-1} |c_j| n^{2j} \geq n > M$。于是 $h \notin C(X)_{fin}^B$。因此，商空间 $C(X)/C(X)_{fin}^B$的维数不是有限的。由此得到矛盾。□

定理 3.11. 设 $\mathcal{B}$ 是度量空间 (X, d) 上具有闭基的有界族。那么以下命题等价。

(1) $(C(X)\ \tau_{\mathcal{B}}^s)$ 的有限局部凸拓扑可度量化；(2) $(C(X)\ \tau_{\mathcal{B}})$ 的有限局部凸拓扑可度量化；(3) $\mathcal{B}$ 具有可数紧基，也就是说，它有一个由紧集构成的可数基。

证明. (1)⇒ (3)。设 τ_F是 $(C(X)\ \tau_{\mathcal{B}}^s)$ 的有限局部凸拓扑，且 $B \in \mathcal{B}$是闭的。由于 ρ_B是 $(C(X)\ \tau_{\mathcal{B}}^s)$ 上的连续扩展半范数，且 τ_F可度量化，因此 $C(X)/C(X)_{fin}^B$ 的维数有限（参见 [8] 中的定理 5.10 (a) $\implies$ (b)）。根据命题 3.10， B 是紧致的。因此 $\mathcal{B}$ 具有紧基。因此，对于每个 $B \in \mathcal{B}$， ρ_B^s 都是 $C(X)$上的半范数。故 $\tau_{\mathcal{B}}^s = \tau_F$ 可度量化。因此，根据 [3] 中的定理 7.1， $\mathcal{B}$ 具有可数基。

(3)⇒ (1)。如果 $\mathcal{B}$具有紧基，则 $(C(X)\ \tau_{\mathcal{B}}^s)$ 是一个局部凸空间。因此，该结果由 [3] 中的定理 7.1 得出。

等价关系 (2)⇔ (3) 可通过与 (1)⇔(3) 类似的方式，利用 [9]中的定理 4.4.2 予以证明。□

定义 3.12。（[11]）设（X，τ）是一个局部凸空间，且 $A \subseteq X$。则称 A 在 X 中全有界，如果对于 0 的每个邻域 U，都存在一个有限集 $F \subseteq X$，使得 $A \subseteq F + U$。

定理 3.13。设 $\mathcal{B}$ 是度量空间（X，d）上的一个有界族，且具有闭基。那么，对于（C（X） $\tau_{\mathcal{B}}^{s}$），有限局部凸拓扑 τ_F 与其弱拓扑一致，当且仅当 $\mathcal{B} = \mathcal{F}$，其中 $\mathcal{F}$ 是由 X 的所有有限子集构成的有界族。

证明。设（C（X） $\tau_{\mathcal{B}}^{s}$）上的有限局部凸拓扑 τ_F 与其弱拓扑一致。若 $B \in \mathcal{B}$ 是闭的，则 ρ_B 是（C（X） $\tau_{\mathcal{B}}^{s}$）上的连续扩展半范数。根据命题 3.4，C（X）$/C$（X）$_{fin}^{B}$ 的维数有限，因为 C（X）$_{fin}^{B} = \{f \in C(X) : \rho_B(f) < \infty\}$。因此，由命题 3.13，$B$ 是紧的。于是，ρ_B 是（C（X） $\tau_{\mathcal{B}}^{s}$）上的连续半范数。根据 [8] 中的定理 3.5，ρ_B 是（C（X） τ_F）上的连续半范数。令 $A = \{f \in C(X) : \sup_{x \in X} |f(x)| \leq 1\}$。则 A 在局部凸拓扑向量空间（C（X） $\tau_{\mathcal{B}}^{s}$）中有界（见定义 5.1）。因此，A 在（C（X） τ_F）中有界。根据 [11], 第 231 页的定理 8.2.8, A 在（C（X） τ_F）中全有界。因此，存在有限集 $F = \{f_1, ..., f_m\} \subseteq C(X)$，使得 $A \subseteq F + \rho_B^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ 。若 B 包含多于 m 个元素，设为 $B \supseteq \{x_1, ..., x_m\}$, 则存在 $f \in A$，使得对于每个 $1 \leq i \leq m$,

$$f(x_i) = \begin{cases} 1; & \text{if } f_i(x_i) < 0 \\ -1; & \text{if } f_i(x_i) \geq 0. \end{cases}$$

由于 $f \in A$, $f = f_j + h$，对于某个 $1 \leq j \leq m$ 和 $h \in \rho_B^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ 。这不可能，因为 $|h(x_j)| = |f(x_j) - f_j(x_j)| > \frac{1}{2}$。

反过来，若 $\mathcal{B} = \mathcal{F}$，则由 [4] 中的定理 4.1 可得，$\tau_{\mathcal{B}}^{s} = \tau_{\mathcal{B}}$。因此，在 C（X）上有 $\tau_{\mathcal{B}}^{s} = \tau_p = \tau_F$，其中 τ_p 是逐点收敛拓扑。众所周知，(C（X） τ_p) 赋有其弱拓扑，因为对于每个 $x \in X$，映射 $x \mapsto f(x)$ 关于 $f \in C(X)$ 是 (C（X） τ_p) 上的连续线性泛函。由此完成证明。□

定理 3.14. 设 $\mathcal{B}$ 是度量空间 (X, d) 上的有界族，且具有闭基。那么，(C（X） $\tau_{\mathcal{B}}$) 上的有限局部凸拓扑 τ_F 与其弱拓扑重合，当且仅当 $\mathcal{B} = \mathcal{F}$, 其中 $\mathcal{F}$ 是X的所有有限子集构成的有界族。

证明。它与定理 3.13 的证明类似。□

4. Compactness and equicontinuity

本节讨论局部凸拓扑向量空间 (X,τ) 的对偶空间 X^* 的子集的等度连续性，并说明扩展拓扑 τ 实际上由 X^* 的等度连续子集的极集所诱导。我们还将探讨经典巴拿赫-阿劳格鲁定理在扩展情形下的情况。最后，我们证明，针对弱紧致性的 James 紧性判别准则（ [7], 第 84 页的定理 3.55）和 Eberlein-Šmulian 定理（ [7], 第 128 页的定理 4.47）对于扩展巴拿赫空间同样成立。

定义 4.1. 设 (X,τ) 是一个局部凸拓扑向量空间，且 $A\subseteq X^*$。若存在 0 的一个邻域 U，使得对于每个 $f\in A$ 和 $x\in U$，都有 $|f(x)|\leq 1$，即 $A\subseteq U^\circ$，则称 A 在 (X,τ) 上等度连续。

对于局部凸拓扑向量空间 (X,τ) 的 $A\subseteq X^*$，以下几点很容易验证。

(1) 当且仅当 A。是 (X,τ) 中 0 的一个邻域时， A 在 (X,τ) 上等度连续。(2) 若 $A\subseteq B\subseteq X^*$ 且 B 等度连续，则 A 也等度连续。(3) 若 X 是一个扩展赋范线性空间，则 $A\subseteq X^*$ 等度连续，当且仅当存在一个 $M>0$，使得对每个 $f\in A$ 都有 $\parallel f\parallel_{op}\leq M$。特别地，闭单位球 $B_{X^*}=\{f\in X^*:\parallel f\parallel_{op}\leq 1\}$ 在 X 上总是等度连续。(4) 若 X 是一个扩展赋范线性空间且 $x\in X\setminus X_{fin}$，则对任意 $n\in\mathbb{N}$，存在一个线性泛函 $f_n\in B_{X^*}$，使得 $f_n(x)=n$。因此 B_{X^*} 不是逐点有界的。故局部凸拓扑向量空间上的等度连续族未必逐点有界。

定理 4.2. 设 (X,τ) 是带有有限局部凸拓扑 τ_F 的局部凸拓扑向量空间，并且 $X=X_{fin}\oplus M$。那么以下陈述等价。

(1) 在 (X,τ) 上的每个等度连续族 $A\subseteq X^*$ 在 (X,τ_F) 上都是等度连续的；(2) 在 (X,τ) 上的每个等度连续族 $A\subseteq X^*$ 都是逐点有界的；(3) 对每个 0 的邻域 U， $0\in\mathrm{Core}(U)$；(4) $X=X_{fin}$，也就是说，(X,τ) 是一个局部凸空间。

证明. 蕴含关系 (4)⇒(1)⇒(2) 显然，因为局部凸空间上的每个等度连续族都是逐点有界的。

(2)⇒(3)。设 U 是 (X,τ) 中 0 的一个绝对凸邻域。则 $U\cap X_{fin}$ 是局部凸空间 $(X_{fin},\tau|_{X_{fin}})$ 中 0 的一个邻域。因此，$U\cap X_{fin}$ 是 X_{fin} 中的一个吸收集。若 $0\notin\mathrm{Core}(U)$，则存在一个 $x_0\in M$，使得对于每个非零标量 α，都有 $\alpha x_0\notin U$。由于 U 是 (X,τ) 中 0 的一个邻域， U° 在 (X,τ) 上是等度连续的。根据我们的假设， U° 是逐点有界的。因此存在一个 $n\in\mathbb{N}$，使得 $U^\circ\subseteq n\{x_0\}^\circ$。现在，设 Z 是 X 的一个子空间，使得 $X=Z\oplus$ 张成 $\{x_0\}$。由于 $x_0\in M$，那里

存在一个连续扩展半范数 ρ，定义在 (X,τ) 上，使得 $\rho(x_0) = \infty$。因此 $X_{fin}^{\rho} \subseteq Z$。于是，由 $f(x_z + \alpha x_0) = (n+1)\alpha$ 对 $x_z \in Z$ 定义的线性泛函属于 X^*，并且 $f \in U^\circ \setminus (n\{x_0\}^\circ)$。我们得到矛盾。

(3)⇒(4)。若 ρ 是 (X,τ) 上的连续扩展半范数，则 $\rho^{-1}([0,1])$ 是 0 的一个邻域。根据我们的假设，$0 \in \text{Core}(\rho^{-1}([0,1]))$。因此$X_{fin}^{\rho} = X$。于是 $X_{fin} = X$。□

由定理 4.2 可知，等度连续族 A of X^* 不一定逐点有界。因此，对于 $x \in X$，映射 $\rho_A(x) = \sup_{f\in A} |f(x)|$ 可能不是 X 上的半范数，但它始终是一个扩展半范数。

定理 4.3。设 (X,τ) 是一个局部凸拓扑向量空间，其有限局部凸拓扑为 τ_F。则 τ 由扩展半范数的集合 $\{\rho_A$ 诱导：$A \subseteq X^*$ 在 (X,τ) 上等度连续$\}$。

证明。设 $A \subseteq X^*$ 在 (X,τ) 上等度连续。则存在 (X,τ) 中 0 的一个邻域 U，使得 $A \subseteq U^\circ$。由于 $U \subseteq (U^\circ)_\circ$且$A_\circ \subseteq \rho_A^{-1}([0,1])$，我们有$U \subseteq \rho_A^{-1}([0,1])$。因此，$\rho_A^{-1}([0,1])$ 是 (X,τ) 中 0 的一个邻域。由此，ρ_A 在 (X,τ) 上连续。

反过来，设 ρ 是 (X,τ) 上的连续扩展半范数，且$V = \rho^{-1}([0,1])$。则存在 X 的一个子空间 M，使得 $X = X_{fin}^{\rho} \oplus M$。令 $z \notin V$，并令 $z = z_F + z_M$ 对于 $z_F \in X_{fin}^{\rho}$ 和 $z_M \in M$。我们证明 $z \notin \text{Cl}_{\tau_F}(V)$。在 X 上定义半范数 μ：对于$x \in X$，令 $\mu(x) = \rho(x_M) + \nu(x_M)$，其中 $x = x_F + x_M$ 对于 $x_F \in X_{fin}^{\rho}$, $x_M \in M$，且 ν 是 M 上的半范数，使得只要 $z_m \neq 0$，就有 $\nu(z_M) = 2$。由于对于 $x \in X$，有 $\mu(x) \leq \rho(x)$，因此 μ 在 (X,τ) 上连续。根据 [8] 中的定理 3.5，μ 在 (X,τ_F) 上连续。因此，由于 $\mu^{-1}([0,1])$ 在 (X,τ_F) 中是闭的，且 $V \subseteq \mu^{-1}([0,1])$ 并且$\mu(z) > 1$，所以$z \notin Cl_{\tau_F}(V)$。故 V 在 (X,τ_F) 中是闭的。因此，根据双极定理（ [11], 第 235 页中的定理 8.3.8 ），$(V^\circ)_\circ = V$。容易看出，如果对于$k > 0$和 $x \in X$，有 $\rho_{V^\circ}(x) = k$，那么$\frac{1}{k}x \in (V^\circ)_\circ = V$。由此，$\rho(x) \leq k$。因此，对于 $x \in X$，有$\rho(x) \leq \rho_{V^\circ}(x)$。于是 τ 由集族 $\{\rho_A$ 诱导：$A \subseteq X^*$ 在 (X,τ) 上等度连续$\}$。□

定理 4.4. 设 (X,τ) 是带有有限局部凸拓扑 τ_F 的局部凸拓扑向量空间。那么 τ_F 由集合 $\mathcal{A} = \{\rho_A$ 诱导：$A \subseteq X^*$ 在 (X,τ) 上等度连续，且 $0 \in \text{Core}(A_\circ)\}$。

证明. 首先，我们证明每个 $\rho_A \in \mathcal{A}$ 都是 X 上的半范数。若 $A \subseteq X^*$ 在 (X,τ) 上等度连续，且 $0 \in \text{Core}(A_\circ)$，那么对每个 $x \in X$，存在一个 $t > 0$ 使得 $tx \in A_{\circ\circ}$。这意味着 $\rho_A(x) \leq \frac{1}{t}$。因此，$\rho_A$ 是 X 上的半范数。

假设 τ'是由集合 $\mathcal{A}$诱导的拓扑。那么 (X,τ') 是一个局部凸空间。根据定理 4.3，$\tau' \subseteq \tau$。因此 $\tau' \subseteq \tau_F$。

反过来，设 V 是 (X,τ_F) 中 0 的一个绝对凸、吸收的闭邻域。那么， V° 在 (X,τ) 上是等度连续的，因为 $\tau_F \subseteq \tau$。由于 V 是吸收的，且 $V \subseteq (V^\circ)_\circ$，$0 \in \text{Core}((V^\circ)_\circ)$。因此， ρ_{V° 是 (X,τ') 上的连续半范数。根据双极定理，$(V^\circ)_\circ = V$。于是 $\rho_{V^\circ}^{-1}([0,1)) \subseteq (V^\circ)_\circ = V$。因此， V 是 (X,τ') 中 0 的一个邻域。由此 $\tau_F \subseteq \tau'$。□

我们以考察局部凸拓扑向量空间中弱拓扑和弱* 拓扑下紧致性的若干经典定理来结束本节。一般而言，局部凸拓扑向量空间中 0 的邻域的极集未必是弱* 紧致的。

例 4.5. 设 X 是一个非零向量空间，其离散扩展范数为 $\|\cdot\|_{0,\infty}$。那么 $B_X = \{0\}$。因此 $(B_X)^\circ = X^*$ 不可能是弱* 紧致的。

定理 4.6.（巴拿赫-阿劳格鲁定理）设 (X,τ) 是一个局部凸拓扑向量空间，其有限局部凸拓扑为 τ_F。若 U 是 (X,τ) 中 0 的一个绝对凸邻域，则以下命题等价。

(1) U° 是弱* 紧致的；(2) $0 \in \text{Core}(U)$;
(3) U 是 (X,τ_F) 中 0 的一个邻域

证明. (3)⇒(1)。由经典阿劳格鲁定理（ [11] 中的定理 8.4.1）可得。

(1)⇒(2)。由于 U是（X， τ）中 0 的一个邻域， U°在（X， τ）上等度连续。如果 U° 是弱*紧致的，那么它就是逐点有界的。因此 $0 \in$核(U)（参见定理 4.2 中 (2)⇒(3) 的证明）。

(2)⇒(3)。如果 $0 \in$ 核(U)，那么闵可夫斯基泛函 μ_U 是（X， τ）上的连续半范数。根据 [8]中的定理 3.5， μ_U 是（X， τ_F）上的连续半范数。因此， U是（X， τ_F）中 0 的一个邻域。□

推论 4.7。设（X， $\|\cdot\|$）是一个局部凸拓扑向量空间。那么， X^* 中的闭单位球 B_{X^*}是弱* 紧致的，当且仅当 X 是一个赋范线性空间，即 $X = X_{fin}$。

证明。由事实 $(B_X)^\circ = B_{X^*}$ 和定理 4.6 可知，其中 B_X 是 $(X,\|\cdot\|)$ 中的闭单位球。□

定理 4.8。（Eberlein-ˇSmulian 定理与 James 紧致性判据）设 $(X,\|\cdot\|)$ 是一个具有 $X = X_{fin} \oplus M$的扩展巴拿赫空间，并且$A \subseteq X$ 是弱闭的。考虑以下陈述

(1) A 是弱紧的；(2) A 是弱序列紧的（ A 中的每个序列都有一个弱收敛子列）；(3) A 是弱可数紧的（ A 中的每个可数无限子集都在其弱拓扑下有一个聚点）；

(4) 对每个 $f \in X^*$，都存在一个 $x_0 \in A$，使得 $|f(x_0)| = \sup_{x\in A} |f(x)|$。那么 (1) ⇔ (2) ⇔ (3) ⇒ (4)。特别地，如果 A 是凸的，那么 (4) ⇒ (1)。

证明。假设 A 满足给定陈述中的任意一条。那么，对于每个 $f \in X^*$，$\sup_{x\in A} |f(x)|$ 都是有限的。我们证明，$A \subseteq X_{fin} \oplus$ 是 M 中某个有限集 F 的 span(F)。假设 (x_n) 是 M 中一列线性无关元素，且对某个 $y_n \in X_{fin}$ 有 $y_n + x_n \in A$。那么存在一个 $g \in X^*$，使得对 $n \in \mathbb{N}$ 有 $g(x_n) = n$，并且 $g(X_{fin}) = 0$。因此，$\sup_{x\in A} |g(x)|$ 不是有限的。这就导致矛盾。

设 $Y = X_{fin} \oplus Z$，其中 $Z =$ 是 span(F)。那么 $Y_{fin} = X_{fin}$。根据 [2], 中的命题 3.11，$(Y, \|\cdot\|)$ 是一个扩展巴拿赫空间。在 Y 上定义范数 $|||\cdot|||$: 对于 $x \in Y$，$|||x||| = \| x_F \| + \mu(x_Z)$，其中 $x = x_F + x_Z$ 对于 $x_F \in X_{fin}$、$x_Z \in Z$ 成立，且 μ 是 Z 上的任意范数。由于 $(X_{fin}, \|\cdot\|)$ 和 (Z, μ) 都是巴拿赫空间，因此 $(Y, |||\cdot|||)$ 是一个巴拿赫空间。由于对于 $x \in Y_{fin}$，$|||x||| = \| x \|$，$|||\cdot|||$ 是 $(Y, \|\cdot\|)$ 上的连续范数。因此，根据 [6], 中的推论 1，$(Y, \|\cdot\|)$ 上的有限局部凸拓扑 τ_{F_Y} 由范数 $|||\cdot|||$ 诱导。

由 [8] 中的定理 4.1 可知，τ_{F_Y} 等于 $\tau_F|_Y$。注意，$(Y, \|\cdot\|)$ 上的弱拓扑等于 $(X, \|\cdot\|)$ 上弱拓扑的子空间拓扑。由于 (Y, τ_{F_Y}) 和 $(Y, \|\cdot\|)$ 具有相同的弱拓扑，空间 $(Y, \|\cdot\|)$ 和 $(Y, |||\cdot|||)$ 也具有相同的弱拓扑。因此，A 在 $(Y, |||\cdot|||)$ 中是弱闭的。

等价关系 (1) ⇔(2) ⇔ (3) 由定理 4.47（见 [7], 第 128 页）应用于上文构造的空间 $(Y, |||\cdot|||)$ 即可得出。

(1) ⇒ (4) 显然成立，因为对于任意 $f \in X^*$，$f(A)$ 在 $\mathbb{K}$ 中是紧致的。

特别地，如果 A 是凸的，并且对于每个 $f \in X^*$，都存在一个 $x_0 \in A$ 使得 $|f(x_0)| = \sup_{x\in A} |f(x)|$，那么由 [7], 第 84 页中的定理 3.55 可知，A 在 $(Y, |||\cdot|||)$ 中是弱紧的。因此，A 在 $(X, \|\cdot\|)$ 中是弱紧的。□

5. The topology of uniform convergence on bounded sets

回顾一下，局部凸空间中算子范数拓扑的推广是强拓扑 τ_s，即该局部凸空间上有界子集上一致收敛的拓扑。在 enls$X$的情形下，X 上的有界子集上一致收敛拓扑已在 [6]中得到研究。该拓扑记作 τ_{ucb}。

在本节中，我们定义并研究 elcs (X, τ)上的拓扑 τ_{ucb}，即有界子集上一致收敛的拓扑。我们还将给出 (X^*, τ_{ucb})可度量化和可赋范的条件。我们从以下定义开始。

定义 5.1。（[8]）设 (X, τ) 是一个局部凸拓扑向量空间。若对于 0 的每个邻域 U，都存在 $r > 0$ 和一个有限集 $F \subseteq A$，使得 $A \subseteq F + rU$，则称 $A \subseteq X$ 在 (X, τ) 中是有界的。

以下关于局部凸拓扑向量空间（X, τ）中有界集的结论很容易验证。

(a) 局部凸拓扑向量空间中的每个有限集都是有界的。(b) 如果 $A \subseteq B$ 和 B 有界，那么 A 有界。(c) X 的子空间有界，当且仅当它是零子空间。(d) 如果 $x_n \to 0$ 属于（X, τ），那么 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 在（X, τ）中有界。(e) 如果 τ_F 是（X, τ）的有限局部凸拓扑，那么（X, τ）中的每个有界集在（X, τ_F）中也有界。

命题 5.2. 假设 τ_F 是局部凸拓扑向量空间 (X, τ) 的有限局部凸拓扑。那么 (X, τ) 和 (X, τ_F) 具有相同的有界集族，当且仅当 $X = X_{fin}$，也就是说，(X, τ) 是一个局部凸空间。

证明. 假设 $x \in X \setminus X_{fin}$，也就是说，对于某个定义在 (X, τ) 上的连续扩展半范数 ρ，有 $\rho(x) = \infty$。那么 $A = \{\frac{x}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ 在 (X, τ_F) 中有界，因为对每个 $f \in X^*$，都有 $|f\left(\frac{x}{n}\right)| \leq |f(x)|$。但它在 (X, τ) 中无界，因为对于任何 $r > 0$ 以及 A 的有限子集 F，都有 $A \nsubseteq F + r\rho^{-1}([0, 1])$。□

定义 5.3. 设 (X, τ) 是一个局部凸拓扑向量空间。那么，在 X^* 上，关于 (X, τ) 的有界子集上一致收敛拓扑 τ_{ucb} 由半范数族 $\mathcal{P} = \{\rho_B$ 诱导，其中 B 是 (X, τ) 的有界子集$\}$，且 $\rho_B(f) = \sup_{x \in B} |f(x)|$ 对于 $f \in X^*$。

设 (X, τ) 是一个具有有限局部凸拓扑 τ_F 的局部凸拓扑向量空间。于是，所谓 τ_s 上的强拓扑，我们指的是在 (X, τ_F) 的有界子集上一致收敛的拓扑。显然，拓扑 τ_{ucb} 比 τ_s 粗。关于 τ_{ucb}，以下各点很容易验证。

(1) (X^*, τ_{ucb}) 是一个局部凸空间，并且 $\mathcal{B} = \{B^\circ : B$ 在 (X, τ) 中是有界的; $\}$ 是 (X^*, τ_{ucb}) 中 0 的邻域基。(2) 弱 * 拓扑 τ_{w^*} 比 τ_{ucb} 粗。(3) 关于拓扑 τ_{ucb} 的以下事实可由 [2] 中的定理 4.11 推出。若 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个具有 $X = X_{fin} \oplus M$ 的扩展赋范空间，则 (X^*, τ_{ucb}) 与 $(X^*_{fin}, \|\cdot\|_{op}) \times (M^*, \tau_{w^*})$ 同构。

在 [6], 中，作者证明了：若 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个扩展赋范线性空间，则 τ_{ucb} 可赋范，当且仅当 X 几乎常规，也就是说，X/X_{fin} 的维数有限。我们在局部凸拓扑向量空间中研究这类结果，并进一步完善了针对扩展赋范线性空间的这一结果。我们还找到了局部凸拓扑向量空间 (X, τ) 满足何种条件时，X^* 上的强拓扑可赋范。

定理 5.4. 设 (X, τ) 是一个局部凸拓扑向量空间。

(1) 如果 τ_{ucb} 可赋范，那么对于（X， τ）上的任意连续扩展半范数 ρ，商空间 X/X^ρ_{fin} 的维数都是有限的。(2) 如果 τ_{ucb} 可度量化，那么对于（X， τ）上的任意连续扩展半范数 ρ，商空间 X/X^ρ_{fin}的维数都是可数的。

证明。(1)。假设 τ_{ucb} 可赋范。根据 [11], 第160页的定理 6.2.1，存在（X， τ）中的一个有界集 B，使得 B° 是（X^*， τ_{ucb}）中0的一个有界邻域。假设对于（X， τ）上的某个连续扩展半范数 ρ， X/X^ρ_{fin} 的维数是无限的。因此，存在 X的一个无限维子空间 M，使得 $X = X^\rho_{fin} \oplus M$。由于 B在（X， τ）中有界，存在一个 x_0属于 M，它与 B线性无关，因为 $B \subseteq \rho^{-1}([0, r]) + F$，其中 F 是有限集，且 $r > 0$。此外，由于 B° 在（X^*， τ_{ucb}）中有界，存在一个$m \in \mathbb{N}$ 满足 $B^\circ \subseteq m\{x_0\}^\circ$。这不可能，因为我们可以找到一个 $f \in X^*$，使得 $f|_B = 0$ 且 f（x_0） $= m + 1$。

(2). 设 τ_{ucb} 可度量化，并设 $\{B^\circ_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 (X^*, τ_{ucb}) 中 0 的一个可数邻域基，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$， B_n 在 (X, τ) 中有界。若对于 (X, τ) 上的某个连续扩展半范数 ρ， X/X^ρ_{fin} 的维数不可数，则存在 X 的一个子空间 M，使得 $X = X^\rho_{fin} \oplus M$，且 M 的维数不可数。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 M 的一个有限子集 F_n，使得 $B_n \subseteq X^\rho_{fin} + F_n$。取 $F = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$。于是，由于 M 的维数不可数，存在 M 中一个与 F 线性无关的 x_0。由于 $\{x_0\}^\circ$ 是 (X^*, τ_{ucb}) 中 0 的一个邻域，对于某个 n_0，有 $B^\circ_{n_0} \subseteq \{x_0\}^\circ$。这是不可能的，因为我们可以找到一个 $f \in X^*$，使得 $f|_{B_{n_0}} = 0$ 且 $f(x_0) = 2$。□

一般来说，(1) 和 (2) 的逆命题并不成立（例如，可以取一个强拓扑不可度量化的局部凸空间）。我们也不能将定理 5.4 的 (1) 和 (2) 中的 X^ρ_{fin} 替换为 X_{fin} （见例 5.9）。

定理 5.5. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是带有有限局部凸拓扑 τ_F 的扩展赋范线性空间。那么下列命题等价。

(1) τ_{ucb} 可赋范；(2) τ_F 可
赋范；(3) τ_F 可度量化；
(4) X 几乎常规。

证明. (1)⇔(4)。这由 [6] 中的定理3给出。
(3)⇔(4)。这由 [8] 中的推论5.11 得出。(2)⇒ (3) 显然成立。
(4)⇒(2)。设 X 几乎常规，且 $X = X_{fin} \oplus M$，其中 M 的维数有限。考虑范数 $|||\cdot||| : X \to [0, \infty)$，定义如下:

$$|||x||| = \| x_f \| + \mu(x_M),$$

其中 $x = x_f + x_M$ 对于 $x_f \in X_{fin}$ 和 $x_M \in M$，且 $\mu(\cdot)$ 是M上的任意范数。则对每个 $x \in X$， $|||\cdot|||$ 在 $(X, \|\cdot\|)$ 上作为 $|||x||| \leq \| x \|$ 是连续的。若 $f \in (X, \|\cdot\|)^*$，则 $f|_{X_{fin}} \in (X_{fin}, \|\cdot\|^*$，且由于 M 的维数有限， $f|_M \in (M, \mu(.))^*$。因此

$$|f(x = x_f + x_M)| \leq |f(x_f)| + |f(x_M)| \leq \left(\| f|_{X_{fin}} \|\right) \| x_f \| + \| f|_M \|_\mu \, \mu(x_M),$$

其中 $\|\cdot\|_\mu$ 是相对于范数 $\mu(\cdot)$的算子范数。因此，$|f(x)| \leq M|||x|||$，其中 $M = \max\{\| f|_{X_{fin}} \|, \| f|_M \|_\mu\}$。因此 $f \in (X, |||\cdot|||)^*$。于是 $(X, |||\cdot|||)^* = (X, \|\cdot\|)^*$。根据 [8]中的定理 5.16，$\tau_F$由 $|||\cdot|||$诱导。□

定理 5.6. 设 (X,τ) 是一个具有有限局部凸拓扑 τ_F 的可数局部凸拓扑向量空间。那么

(1) τ_s 上的拓扑 X^* 可赋范，当且仅当 τ_F 可赋范。

(2) 若 τ_{ucb} 可赋范，则 τ_F 可赋范。

证明. (1). 众所周知，可赋范局部凸空间的对偶空间上的强拓扑是可赋范的。反之，设 τ_s 可赋范。那么存在 (X,τ_F) 中的一个有界集 B，使得 B° 是 (X^*,τ_s) 中 0 的一个有界邻域。因此 B° 逐点有界。我们可以假设 B 在 (X,τ_F) 中是闭的、绝对凸的（否则考虑 $\mathrm{Cl}_{\tau_F}(ab(B))$）。根据双极定理（ [11], 第 235 页中的定理 8.3.8）和 [11], 第 251 页中的定理 8.8.3，$((B^\circ)^\circ)$ 是吸收的，并且 $(B^\circ)^\circ = B$。

假设 $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 (X, τ) 中 0 的可数邻域基，且对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $U_{n+1} \subseteq U_n$。我们首先证明 B 是 (X, τ) 中 0 的一个邻域。为此，只需证明对于某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $\frac{U_n}{n} \subseteq B$。假设对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都存在 $x_n \in U_n \setminus nB$。那么 $x_n \to 0$ 属于 (X, τ)。因此，$x_n \to 0$ 属于 (X, τ_F)。所以 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 在 (X, τ_F) 中有界。由于 B° 在 (X^*, τ_s) 中有界，故对于某个 $m \in \mathbb{N}$，有 $B^\circ \subseteq m(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})^\circ$。因此 $(m\{x_n : n \in \mathbb{N}\}^\circ)^\circ \subseteq (B^\circ)^\circ = B$。这不可能，因为 $\frac{x_m}{m} \in (m\{x_n : n \in \mathbb{N}\}^\circ)^\circ \subseteq B$。于是，对于某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $\frac{U_n}{n} \subseteq B$。因此，$B$ 的闵可夫斯基泛函 μ_B 是 (X, τ) 上的连续半范数。由 [8] 中的定理 3.5，μ_B 在 (X, τ_F) 上连续。因此 B 是 (X, τ_F) 中 0 的有界邻域。故 τ_F 是可赋范的。

(2). 设 τ_{ucb} 可赋范。则存在 (X,τ) 中的有界集 B，使得 B° 是 (X^*, τ_{ucb}) 中 0 的有界邻域。因此 B° 逐点有界。由双极定理（ [11], 第 235 页的定理 8.3.8）和 [11], 第 251 页的定理 8.8.3 可知，$(B^\circ)^\circ$ 是吸收的，且 $(B^\circ)^\circ = \mathrm{Cl}_{\tau_F}(\mathrm{ab}(B))$。令 $B' = \mathrm{Cl}_{\tau_F}(\mathrm{ab}(B))$。由于在局部凸空间中，有界集的绝对凸包和闭包都是有界的，所以 B' 在 (X,τ_F) 中有界。现在，重复第 (1) 部分逆向证明中的所有步骤，以证明 B' 是 (X,τ_F) 中 0 的邻域。证毕。□

在局部凸拓扑向量空间 (X,τ) 的对偶空间 X^* 上有两个局部凸拓扑 τ_{ucb} 和 τ_s。显然，$\tau_{ucb} \subseteq \tau_s$。此处自然会产生一个问题：$\tau_{ucb} = \tau_s$? 我们证明，对于基本局部凸拓扑向量空间，$\tau_{ucb}$ 和 τ_s 重合。我们还给出了局部凸拓扑向量空间满足 $\tau_{ucb} = \tau_s$ 的条件。然而，$\tau_{ucb} = \tau_s$ 对每个局部凸拓扑向量空间是否成立，这一问题仍未解决。

定理 5.7. 设 (X,τ) 是一个基本局部凸拓扑向量空间，且 $X = X_{fin} \oplus M$。则 $\tau_{ucb} = \tau_s$ 在 X^* 上。

证明. 显然， $\tau_{ucb} \subseteq \tau_s$。为证明反向包含，考虑投影映射 $P_{X_{fin}}: (X, \tau_F) \to (X_{fin}, \tau_F|_{X_{fin}})$ 和 $P_M: (X, \tau_F) \to (M, \tau_F|_M)$。我们证明 $P_{X_{fin}}$ 和 P_M 都是连续的。设 ρ 是 $(X_{fin}, \tau_F|_{X_{fin}})$ 上的一个连续半范数。由 [8] 中的定理 4.1 可得 $\tau_F|_{X_{fin}} = \tau|_{X_{fin}}$。因此， ρ 在 $(X_{fin}, \tau|_{X_{fin}})$ 上连续。由于 (X, τ) 是基本局部凸拓扑向量空间， X_{fin} 是 (X, τ) 的一个开子空间。因此，由 $\mu(x = x_f + x_M) = \rho(x_f)$（其中 $x_f \in X_{fin}$ 且 $x_M \in M$）定义在 X 上的半范数 μ，在 (X, τ) 上连续。于是，由 [8] 中的定理 3.5， μ 在 (X, τ_F) 上连续。注意，对于 $x \in X$， $\rho(P_{X_{fin}}(x = x_f + x_m)) = \rho(x_f) = \mu(x)$。因此， $P_{X_{fin}}$ 连续。类似地，若 λ 是 $(M, \tau_F|_M)$ 上的一个连续半范数，则对于 $x_f \in X_{fin}$， $\nu(x = x_f + x_M) = \lambda(x_M)$，且 $x_M \in M$ 是 (X, τ_F) 上的一个连续半范数，并且对于 $x \in X$， $\lambda(P_M(x = x_f + x_m)) = \lambda(x_m) = \nu(x)$。因此， P_M 连续。

设 $f_\alpha \to 0$ 属于 (X^*, τ_{ucb})，且设 B 是 (X, τ_F) 中的有界集。那么， $B_1 = P_{X_{fin}}(B)$ 在 $(X_{fin}, \tau_F|_{X_{fin}})$ 中有界，且 $B_2 = P_M(B)$ 在 $(M, \tau_F|_M)$ 中有界，其中 $B \subseteq B_1 + B_2$。因此， B_1 在 $(X_{fin}, \tau|_{X_{fin}})$ 中有界，因为 $\tau|_{X_{fin}} = \tau_F|_{X_{fin}}$。由此， B_1 在 (X, τ) 中有界。若 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq B_2$ 线性无关，则存在一个定义在 M 上的线性泛函 f，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$， $f(x_n) = n$。由于 $(M, \tau|_M)$ 是离散的， $f \in (M, \tau|_M)^*$。根据 [8] 中的定理 4.1， $f \in (M, \tau_F|_M)^*$。但这不可能，因为 B_2 在 $(M, \tau_F|_M)$ 中有界。因此，存在 $(M, \tau_F|_M)$ 的一个有限维子空间 Y，使得 B_2 是 Y 的有界子集。注意

$$\sup_{x \in B} |f_\alpha(x)| \leq \sup_{x \in B_1} |f_\alpha(x)| + \sup_{x \in B_2} |f_\alpha|_Y(x)|.$$

容易看出，当 $f_\alpha \to$趋于 0 时，在 (X^*, τ_{ucb}) 中， $\sup_{x \in B_1} |f_\alpha(x)| \to 0$ 且 $f_\alpha(x) \to 0$。由于有限维局部凸空间的对偶空间上的弱拓扑与强拓扑一致，因此对 $(Y, \tau_F|_Y)$ 的每个有界子集 A，都有 $\sup_{x \in A} |f_\alpha|_Y(x)| \to 0$。因此， $\sup_{x \in B_2} |f_\alpha|_Y(x)| \to 0$。所以， $\sup_{x \in B} |f_\alpha(x)| \to 0$。由此可得 $\tau_{ucb} = \tau_s$。 □

推论 5.8。设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个扩展赋范线性空间。那么 $\tau_{ucb} = \tau_s$。

现在给出一个可数局部凸拓扑向量空间 (X, τ) 的例子，它不是基性的，并且满足 $\tau_{ucb} = \tau_s$。在这个例子中，所有三种局部凸拓扑τ_F、 τ_s和 τ_{ucb} 均可赋范，但 τ 并非由扩展范数诱导。

例 5.9。设 X 为所有收敛到 0 的实数序列的集合。对于 $n \in \mathbb{N}$，定义 $\rho_n : X \to [0, \infty]$ 为

$$\rho_n((x^m)) = \begin{cases} \infty, & \text{if } x^m \neq 0 \text{ for some } 1 \leq m \leq n \\ \sup\limits_{m \in \mathbb{N}} |x^m|, & \text{if } x^m = 0 \text{ for every } 1 \leq m \leq n. \end{cases}$$

假设 τ 是由扩展范数集合 $\mathcal{P}=\{\rho_n:\ n\in\mathbb{N}\}$ 在 X 上诱导的拓扑。那么 (X,τ) 是一个局部凸拓扑向量空间，且 $X_{fin}=\{0\}$。根据 [8], 中的例5.12，(X,τ) 的有限局部凸拓扑 τ_F 与上确界范数拓扑 $\tau_{\|\cdot\|_\infty}$ 一致。令 $B=\{(x^m)\in X:\ x^m\in\{-1,0,1\}$，对每个 $m\in\mathbb{N}\}$ 都成立。那么 B 在 (X,τ) 中有界。我们证明 $\mathrm{Cl}_{\tau_F}(\mathrm{ab}(B))=B_{\|\cdot\|_\infty}$，其中 $B_{\|\cdot\|_\infty}$ 是 $(X,\|\cdot\|_\infty)$ 中的闭单位球。显然，$\mathrm{Cl}_{\tau_F}(\mathrm{ab}(B))\subseteq B_{\|\cdot\|_\infty}$。为证明反向包含，设 $z=(z^m)\in B_{\|\cdot\|_\infty}$。那么对每个 $m\in\mathbb{N}$，$|z^m|\le 1$ 都成立。我们证明，对每个 $m\in\mathbb{N}$，$(z^1,z^2,...,z^m,0,0,...)\in\mathrm{ab}(B)$。注意，如果 $(x^m)\in B$，那么

$$(|z^1|,x^2,x^3...)=|z^1|(1,x^2,x^3,...)+(1-|z^1|)(0,x^2,x^3,...).$$

所以 $(|z^1|,x^2,x^3...)\in\mathrm{ab}(B)$。由于 $B=-B$，且 $\mathrm{ab}(B)$ 是绝对凸的，

$$\left\{(\pm z^1,x^2,x^3,...)\mid x^k\in\{-1,0,1\}\text{ for }k\ge 2\right\}\subseteq\mathrm{ab}(B).$$

类似地，如果

$$\left\{(\pm z^1,\pm z^2,...,\pm z^{n-1},x^n,x^{n+1},x^{n+2},...)\mid x^k\in\{-1,0,1\}\text{ for }k\ge n\right\}\subseteq\mathrm{ab}(B$$

对于某个 $n\in\mathbb{N}$，那么

$$\left\{(\pm z^1,\pm z^2,...,\pm z^n,x^{n+1},x^{n+2},...)\mid x^k\in\{-1,0,1\}\text{ for }k\ge n+1\right\}\subseteq\mathrm{ab}(B).$$

因此由归纳法，

$\{(\pm z^1,\pm z^2,...,\pm z^m,x^{m+1},x^{m+2},...)\mid x^k\in\{-1,0,1\}$ 对每个 $k\ge m+1\}\subseteq$ 都属于 $\mathrm{ab}(B)$。所以 $P_m=(z^1,z^2,...,z^m,0,0,0,...)\in$ 对每个 $m\in\mathbb{N}$ 都属于 $\mathrm{ab}(B)$。由于 $P_m\to z$ 属于 $(X,\|\cdot\|_\infty)$，$z\in\mathrm{Cl}_{\tau_F}(\mathrm{ab}(B))$。因此，$B_{\|\cdot\|_\infty}\subseteq\mathrm{Cl}_{\tau_F}(\mathrm{ab}(B))$。

现在，设 $B_{\|\cdot\|_{op}}$ 是 $(X^*,\|\cdot\|_{op})$ 中的闭单位球，其中 $\|\cdot\|_{op}$ 是赋范空间 $(X,\|\cdot\|_\infty)$ 的对偶空间上的算子范数。则 $(B)^\circ=(\mathrm{Cl}_{\tau_F}(\mathrm{ab}(B)))^\circ=(B_{\|\cdot\|_\infty})^\circ=B_{\|\cdot\|_{op}}$。所以，$B_{\|\cdot\|_{op}}$ 是 (X^*,τ_{ucb}) 中 0 的一个邻域。因此，$\tau_{\|\cdot\|_{op}}\subseteq\tau_{ucb}$。故 $\tau_{ucb}=\tau_{\|\cdot\|_{op}}$。

我们在例 5.9 中使用的技巧可以推广到下一个定理中给出的任意局部凸拓扑向量空间。

定理 5.10. 设 (X,τ) 是一个局部凸拓扑向量空间。则

(1) $\tau_{ucb}=\tau_s$ 当且仅当对于 (X,τ_F) 中的每个有界集 B，都存在 (X,τ) 中的一个有界集 B'，使得 $\mathrm{Cl}_{\tau_F}(\mathrm{ab}(B))=\mathrm{Cl}_{\tau_F}(\mathrm{ab}(B'))$。(2) 如果 (X^*,τ_{ucb}) 是桶状的，那么 $\tau_{ucb}=\tau_s$。

证明。（1）。令 $\tau_{ucb}=\tau_s$，并设 B 是 (X,τ_F) 中的有界集。由于 B° 是 (X^*,τ_s) 中 0 的一个邻域，存在 (X,τ) 中的有界集 B_1，使得 $(B_1)^\circ\subseteq(B)^\circ$。取 $B'=B_1\cap B$。则 B' 是 (X,τ) 中的有界集，且 $(B')^\circ=(B_1\cap B)^\circ=(B_1)^\circ\cup(B)^\circ=B^\circ$。由双极定理，$\mathrm{Cl}_{\tau_F}(\mathrm{ab}(B'))=\mathrm{Cl}_{\tau_F}(\mathrm{ab}(B))$。反过来，若 B 是 (X,τ_F) 中的有界集，则 $\mathrm{Cl}_{\tau_F}(\mathrm{ab}(B'))=$

对于某个 (X,τ) 中的有界集 B'，$\mathrm{Cl}_{\tau_F}(\mathrm{ab}(B))$。因此 $(B)^\circ = (B')^\circ$。所以 $(B)^\circ$ 是 (X^*, τ_{ucb}) 中 0 的一个邻域。因此 $\tau_{ucb} = \tau_{s^\circ}$。

(2). 若 B 是 (X,τ_F) 中的有界集，则 B° 是 X^* 的绝对凸吸收子集。由于 B° 是弱 * 闭的，B° 是 (X^*,τ_{ucb}) 中的一个桶。因此，B° 是 (X^*,τ_{ucb}) 中 0 的一个邻域。故 $\tau_{ucb} = \tau_{s^\circ}$ □

References

[1] G. Beer. 扩展实值度量空间的结构。Set-Valued and Variational Analysis, 21(4):591–602，2013.[2] G. Beer. 具有无穷值的范数。Journal of Convex Analysis, 22(1):37–60，2015.[3] G. Beer and S. Levi. 强一致连续性。Journal of Mathematical Analysis and Applications，350(2):568–589，2009.[4] G. Beer and S. Levi. 一致连续性、一致收敛与屏蔽。Set-Valued and Variational Analysis，18(3-4):251–275，2010.[5] G. Beer and J. Vanderwerff. 扩展赋范空间中的凸集分离。Journal of the Australian Mathematical Society，99(2):145–165，2015.[6] G. Beer and J. Vanderwerff. 扩展赋范空间的结构性质。Set-Valued and Variational Analysis，23(4):613–630，2015.[7] M. Fabian、P. Habala、P. H´ajek、V. M. Santaluc´ıa、J. Pelant 和 V. Zizler。《泛函分析与无限维几何》。施普林格，2001.[8] A. Kumar 和 V. Jindal. 扩展局部凸空间的最细局部凸拓扑。Topology and its Applications，doi.org/10.1016/j.topol.2022.108396, 2023年。[9] R. A. McCoy 和 I. Ntantu. 连续函数空间的拓扑性质。数学讲义，第1315卷，施普林格出版社，柏林，1988.[10] S. Morris. 具有其弱拓扑的局部凸空间的一个拓扑群刻画。Mathematische Annalen，195(2):330–331，1971.[11] L. Narici 和 E. Beckenstein.《拓扑向量空间》。第二版，CRC出版社，2011.[12] M. S. Osborne.《局部凸空间》。施普林格，2014.[13] D. Salas 和 S. Tapia-Garc´ıa. 扩展半范数与扩展拓扑向量空间。Topology and its Applications，210:317–354，2016.[14] H. H. Schaefer 和 M. P. Wolff.《拓扑向量空间》。第二版，施普林格出版社，纽约，1999.[15] S. Willard.《一般拓扑》。Addison-Wesley出版公司，雷丁，马萨诸塞州—伦敦—唐米尔斯，安大略省，1970。

Akshay Kumar: Department of Mathematics, Malaviya National Institute of Technology Jaipur, Jaipur-302017, Rajasthan, India电子邮箱地址: akshayjkm01@gmail.com

Varun Jindal: Department of Mathematics, Malaviya National Institute of Technology Jaipur, Jaipur-302017, Rajasthan, India电子邮箱地址: vjindal.maths@mnit.ac.in