arXiv:2301.03247v1 [physics.optics] 9 Jan 2023

二能级系统的反射：庞加莱超球面上的相位奇点

BenLang[1]，EdmundHarbord[2] 和 Ruth Oulton[2†]
[1] George Green Institute for Electromagnetics Research, Faculty of Engineering, The University of Nottingham, NG7 2RD, UK
[2] Quantum Engineering Technology Labs, H. H. Wills Physics Laboratory and Department of Electrical & Electronic Engineering, University of Bristol, BS8 1FD, UK

我们研究光子在准一维波导中被二能级系统反射的过程。这一点之所以重要，部分原因在于它为更复杂的设想奠定了基础：许多发射体与波导耦合，从而即使发射体彼此相距甚远，也会产生超辐射和亚辐射耦合。引入手性效应，例如偶极发射体的单向发射，已经带来了丰富的物理现象，如二聚体耦合。然而，偶极子的影响并不只有手性，我们从相位奇点的角度对此进行了探究。我们展示了，通过调控偶极子，可以丰富地调控散射光两个传播方向上的相位和振幅。这拓展了一维发射体链物理研究的范围。

过去几年，对耦合到“一维”类波导光子结构中的量子发射体系统的研究已发展成为一个广阔的领域。光子态密度的改变使波导中的量子发射体能够实现近乎完美的耦合，且这种耦合不会随距离增加而衰减。对这类系统中的原子阵列或量子发射体的研究，预示着丰富多样的物理现象。例如，理论预测，经过精心布置的发射体会呈现超辐射效应 [1]。单向发射和散射会导致原子阵列耦合中的对称性破缺，并形成多体暗态的“二聚体” [2]。这些研究利用了后向散射光与前向散射光之间的干涉。然而，这些研究预先作出了一些假设，例如反射时的相位变化始终为 π [3]，或者只考虑波导中特定位置处手性发射体的前向散射这一特例。

在这项工作中，我们研究具有广义偏振纹理的波导中的广义复偶极子系统。结果表明，我们可以显著控制散射光的相位和振幅，尤其是在反射方面。这类广义偶极子特性将
拓展一维原子链系统的功能，并放宽对发射体位置的要求。

为简单起见，我们考虑光子被单个二能级系统（TLS）反射的情形，这是一个一维量子光学中的经典问题 [4]。入射到 TLS 上的光子可以被反射、透射，或散射出波导，即发生损耗（尽管在一维系统中通常假设这些损耗很小）。这些可能性用复反射系数和透射系数表示，r, t，其中 $|r|^2 + |t|^2 \leq 1$，且仅在损耗为零时等号成立。情况如图 1(a) 所示。

我们研究的普适性在于，同时考虑了 TLS 位置处的波导偏振（即使对于简单的波导，其偏振也对位置非常敏感，见图 1(b)）以及 TLS 的电偶极子。最近，人们开始关注所谓的“手性耦合”，它利用波导电场的纵向分量，使 TLS 与两个传播方向上的波导模式发生不对称耦合[5–9]。手性耦合使得系统对从 TLS 两侧入射的光具有不同的反射/透射系数。例如，对于向前注入的光子，与前向模式解耦的 TLS 将具有 $t = +1$；但从反向入射的光子可能具有介于 $+1$ 和 -1 之间的 t，具体取决于其与反向模式和损耗模式的耦合强度（$t = 0$ 的应用见 [12, 13] 中的 [10, 11] 和 $t = -1$）。

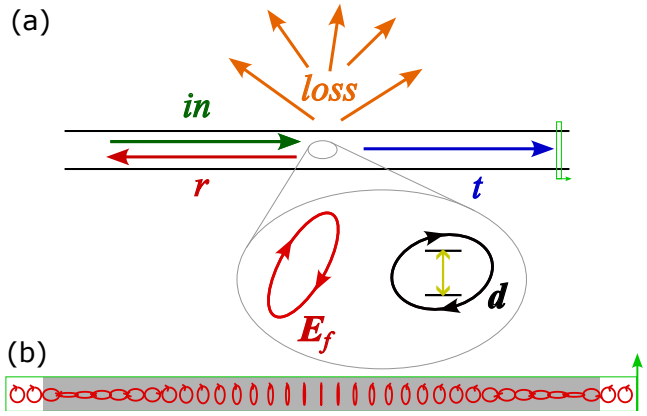


图 1。(a) 散射过程示意图。输入光分别发生反射、透射和损耗，各系数由 TLS（红色）所在位置的波导电场以及 TLS 的跃迁偶极子（黑色）决定。(b) 简单波导中的偏振结构。波导由置于空气（白色）中的高折射率矩形块（灰色）构成。图中通过一个截面展示偏振椭圆，光沿页面向上传播（见坐标系箭头）。

复系数 r 和 t 取决于波导中的精确位置以及偶极子的性质。在纳米光子系统中，任意特定点 r 处的电场偏振都会变化，因此可以在每个点 r [12]描述一个偏振椭圆。

椭圆给出了场的 E_x 和 E_y分量的相对大小及其相对相位。常见的情况包括纯线性电场点、纯圆偏振点（C点），在这些点上， E_x 和 E_y 分量大小相等，且相位相差 $\pi/2$，以及介于这两个极端之间的任意椭圆偏振点。当圆偏振偶极发射体（即由 d_x 和 d_y 偶极子线性组合而成，二者相位相差 $\pi/2$）置于 C点时，会发生单向手性耦合（发射方向由偶极子分量之间相位差的符号决定）。不过，也可以构造任意复偶极子$\mathbf{d} = \alpha d_x + \beta d_y$。我们先前的研究 [14],指出，即使发射体置于椭圆偏振点，只要匹配椭圆与偶极子的螺旋度和离心率，并使两个椭圆的长轴相互正交，也可以实现单向发射。这样便抵消了后向散射分量，从而只发生前向散射。

现在，我们来探讨需要产生反射的情形，考虑一个任意偶极子，其线性分量能够耦合到后向散射方向。这里有趣的是反射的相位。输入输出模型只能为后向散射光引入一个 π 相位偏移，而我们在此表明，椭圆的取向决定了反射光的相位，从而呈现出丰富的结构。这一特性极为有用，因为在考虑原子链时，它能让人调节相位延迟。这意味着，一维链中发射体的位置不再受限于必须精确设定。此外，通过动态控制偶极椭圆取向，还可以实时调控反射率。

我们考虑二能级系统与波导之间的电偶极相互作用，并假设光子带宽很窄（频率范围窄、时间跨度长）。决定单光子 t和 r 系数的关键参数，是二能级系统位置处正向（反向）波导模式的局域偏振$\mathbf{E}_{f(b)}$ ，以及二能级系统跃迁的电偶极子$\mathbf{d}$。$\mathbf{E}_f$和$\mathbf{d}$ 都是空间中的复向量。不失一般性，我们假设二者均为二维。麦克斯韦方程组的时间反演对称性要求$\mathbf{E}_f = \mathbf{E}_b^*$，这相当于反转椭圆的箭头方向。

r、 t 系数由 [14]给出：

$$t = 1 - \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_f^*\ \mathbf{d}^*\cdot\mathbf{E}_f}{D}, \tag{1}$$

$$r = -\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_b^*\ \mathbf{d}^*\cdot\mathbf{E}_f}{D}, \tag{2}$$

with

$$D = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_f^*|^2 + |\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_b^*|^2\right) + \zeta\left(\mathbf{d}\cdot\mathbf{G}_1\cdot\mathbf{d}^* + \mathrm{i}\hbar\epsilon_0\delta\right). \tag{3}$$

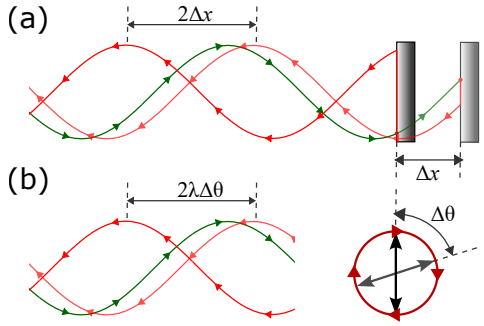


图 2. (a) 镜子运动导致的迈克耳孙干涉仪相位变化。(b) 旋转反射偶极子，使其与延迟的偏振分量相互作用所产生的类似效应。

我们将假设处于共振状态，因此 δ（入射光子与二能级系统跃迁频率之间的失谐）设为零。$\mathbf{G}_1$ 是控制二能级系统与非导引模式相互作用的格林函数[15], , 参数 ζ 表征二能级系统波导模式耦合强度的倒数。为简单起见，我们设定 $\zeta\mathbf{d}\cdot\mathbf{G}_1\cdot\mathbf{d}^* = L$，其中 L 是控制损耗的标量。如果二能级系统处于激发态，则辐射强度（光子概率）进入导引模式的比例为 $\beta = W/(W+L)$，其中$W = \frac{1}{2}(|\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_f^*|^2 + |\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_b^*|^2)$。令损耗与$\mathbf{d}$无关，意味着我们隐含地假设至少存在两个损耗模式，且它们在二能级系统所在位置的偏振彼此正交。

首先，我们考虑线性偶极子的情况。众所周知，此时二能级系统表现得像一面镜子，在损耗较低时， $|r|$趋近于 1。不过，反射的相位却较少受到关注。

首先应明确“反射的相位”指的是什么。自然，这个相位必须相对于输入信号的相位，并在空间中的某个特定位置确定。该位置很重要，因为输入信号（向前传播）的相位会像 e^{ikx} 那样随空间变化，而向后传播的反射则会像 e^{-ikx}那样演变。随着相位参考点与反射二能级系统的位置之间的距离增大，反射的相位会因额外的往返距离而改变——这正是迈克耳孙干涉仪的工作机制。

然而，如果选定某个任意（但固定）的位置来比较输入相位与输出相位，就可以计算其他参数的变化如何影响反射光的相位。

考虑位于圆偏振点处的二能级系统，$\mathbf{E}_f = (1,\ \mathrm{i})$。这里，电场的 y 分量相对于 x 分量延迟了四分之一波长。因此，沿 y 轴排列的线性偶极子，实际上比沿 x排列的线性偶极子“远”四分之一波长。在这里，将偶极子旋转角度 $\Delta\theta$，会使反射率变换为 $r = r_0\exp(2\mathrm{i}\Delta\theta)$，其中 r_0 为反射率

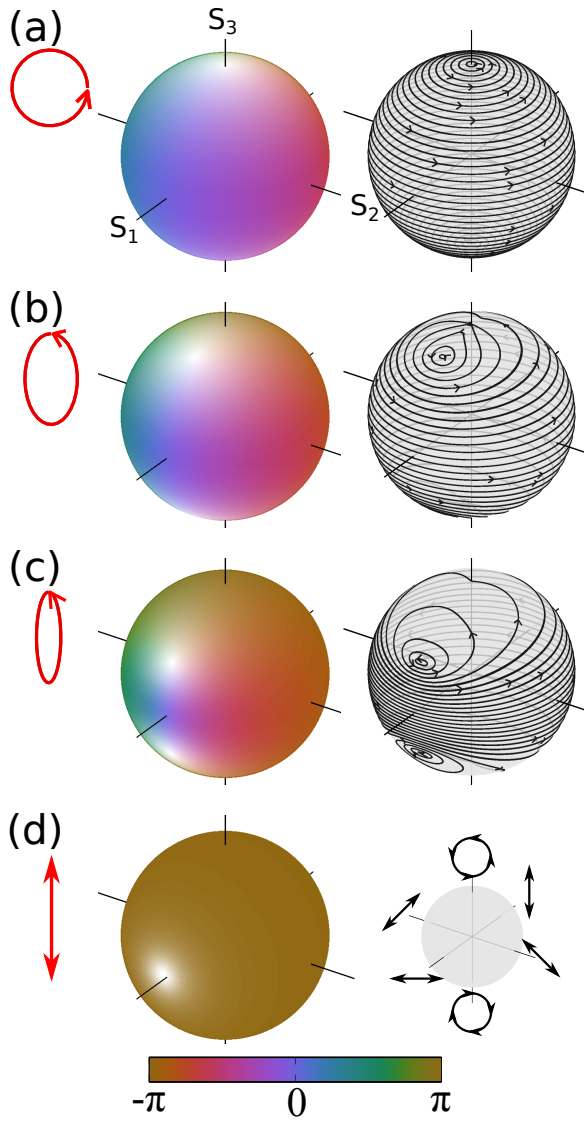


图3. r 随**d**变化。第一列：色调（不透明度）表示庞加莱球上该点处偶极子反射的相位（振幅），对应左侧所示的偏振。这些偏振为$\mathbf{E}_f = [\cos(n\pi/12), \sin(n\pi/12)]$，其中 (a,b,c,d) 分别为 $n = (3, 4, 5, 6)$。第二列：表示相位梯度的流线。(d) 中相位恒定，因此无法绘制流线。取而代之的是，图例标示了球面上基点偶极子的位置。 S_{1-3} 标示斯托克斯参数 [16] 的坐标轴。

$\Delta\theta = 0$。这一机制让人联想到迈克耳孙干涉仪：移动镜子距离 Δx，相位就会因额外的往返距离 $2\Delta x/\lambda$ 而延迟，如图 2 所示。在这里，我们通过旋转镜子来实现等效的镜子移动。

这一相位具有物理意义。可以用旋转偶极子取代移动的镜子来构建干涉仪，并测量其效应。相位在其他情境中也可能很重要。例如，如果多个两能级系统耦合到同一个波导，其间距至关重要，因为它决定了发射和散射是相长还是相消，从而控制超辐射 [17]，偶极子-偶极子频移 [18, 19]，反射率 [20] 以及原子间纠缠 [21, 22]。但是，正如我们刚才所阐述的，相位延迟也取决于跃迁偶极子，因此，有效发射体间距取决于两能级系统偶极子的取向。因此，依赖相邻两能级系统之间相位延迟的方案能否实现 [23]，，并不完全由两能级系统之间的间距决定。

距离和偶极子都能够控制相位，这促使我们提及超导巨原子。手性通常利用单一位置处两个偏振分量之间的相对相位，而这些巨原子则通过空间延伸，利用波导 [24] 中两个位置之间的相对相位来实现类似效果。

要求 $|\mathbf{E}_f| = |\mathbf{d}| = 1$，为简便起见并忽略整体相位后，两个向量都可以写成如下形式： $[\cos(\theta), \sin(\theta)\exp(i\phi)]$。角度 θ、 ϕ 可用于将这些向量表示为庞加莱球面上的点。一般而言，可以从该球面的任意位置选取一个偶极子。上述线性偶极子构成赤道，圆偏振偶极子位于两极，椭圆偏振偶极子则分布在其他位置。

在图 3(a) 中，我们固定一种圆偏振，并计算所有可能偶极子的 r。每个偶极子 **d** 都对应球面上的一个点，并具有其自身的 r 值。在第一列球面图中，色调表示相位 $\angle r$，不透明度表示 $|r|$ [，其中 $r = |r|\exp(i\angle r)$]。第二列绘出了相位梯度。沿箭头方向追踪任意一条线，相位在一个完整周期内变化 -2π。上文提到的类迈克耳孙相位出现在赤道上。我们设定 $|\mathbf{E}_f| = |\mathbf{d}| = 1$，并设定 $L = 0.01$，以考察耦合到损耗模式的强度相较于典型波导耦合较弱的情况。如此低的损耗适用于例如光子晶体波导系统 [25]。由于损耗较低，$|r|$ 在球面上几乎处处接近 1，只有当点积 $|\mathbf{d}^* \cdot \mathbf{E}_f|^2$ 或 $|\mathbf{d}^* \cdot \mathbf{E}_b|^2$ 与 L 相当时，才会显著降低。

将数据绘制在球面上，可以突出显示一些重要的拓扑限制，而这些限制仅从观察式（1）并不明显。赤道周围的相位旋绕直接要求每个半球内都存在一个偶极子，使得 $r = 0$。从图中可以看出，固定赤道之后，无法找到一个在每个半球内至少有一个零点的光滑函数。

这些零点就是相位奇点，这是一种普遍存在的波动现象，发生在复标量场于某处取值为 0 时；绕零点 [26, 27]一周时，相位角以 $2\pi m$ 变化。沿闭合曲线的总相位变化等于 $\sum_n 2\pi m_n$，其中 n 按所包围的奇点计数。

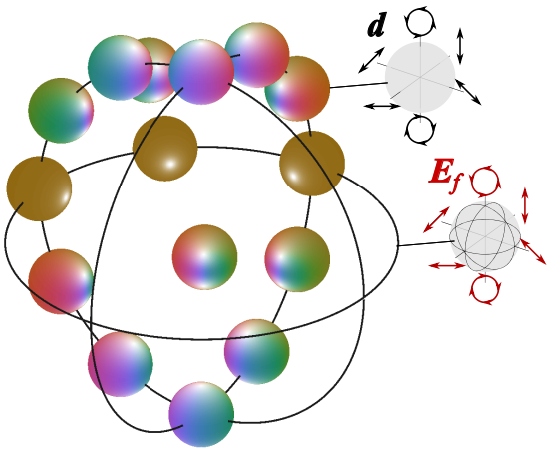


图 4。每个小球表示 r 随$\mathbf{d}$ 变化的函数，如图 3 所示。对于每个小球，所使用的偏振$\mathbf{E}_f$ 由其在较大（线框）球面上的位置表示。

因此，沿赤道的 2π 变化足以确保两个半球都至少包含一个具有 $r = 0$的相位奇点。

对于圆偏振，这些点位于两极。在一个$\mathbf{d}^* \cdot \mathbf{E}_f = 0$ 处，偶极子与前向模式解耦，因此二能级系统无法以任何方式与入射光子相互作用。在另一个$\mathbf{d}^* \cdot \mathbf{E}_b = 0$ 处，无论二能级系统如何作用于光子，都不会涉及向后向模式的任何散射（因此有 $r = 0$）。

转到图中的 (b、c、d) 部分，我们改变波导的偏振。这会使相位结构连续变形，并保留这两个奇点，直到在线偏振情况下它们在赤道上相互湮灭。这表明，对于任意偏振，都存在一个与前向模式解耦的偶极子，以及另一个与后向模式解耦的偶极子（即这两个奇点）；只有在线偏振 [14]情况下二者才会重合。

相位梯度可以视为一个向量场。由于这个场存在于球面上，因此受“毛球定理”的约束：它不可能处处平滑且非零。定理的名称指的是由此得出的一个结论：毛茸茸的球无法梳理到让所有毛发都平贴着球面。更准确地说，该定理要求向量场所有零点的总庞加莱–霍普夫指标等于球面的欧拉示性数 $+2$[28]。图 3 中用流线描绘的向量场各有两个奇点，向量会在奇点处绕圈（即相位奇点）；无论箭头方向如何，这类圆圈的指标均为 $+1$ ，因此这两个奇点的指标之和满足所需的 $+2$总值。

偏振可以在其自身的庞加莱球上遍历所有可能的取值，因此，$\mathbf{E}_f \otimes \mathbf{d}$的空间呈现为 $\mathbb{S}^2 \otimes \mathbb{S}^2$ 的形式，即一个我们称为庞加莱超球面的“球中球”。图 4 展示了这一完整空间，其中较大的球表示偏振，较小的球表示偶极子。可以看到（从大球的北极出发），将最初的圆偏振拉伸，会使极偏振相位奇点彼此靠近；而沿着移动的纬线由大球上的纬线决定。庞加莱球上的对径点对应正交偏振，因此，每个子球上都有一个相位奇点指向大球的中心。这对应于 $\mathbf{d}^* \cdot \mathbf{E}_f = 0$ 情况。每个子球上另一个相位奇点的位置，则通过将第一个奇点关于赤道反射来确定，从而设定$\mathbf{d}^* \cdot \mathbf{E}_b = 0$。

顺带一提，探讨其几何结构也颇有意思。$\mathbf{E}_f$ 和$\mathbf{d}$ 各有 2 维，因此总共是 4 维。相位奇点比其所在空间少 2 个维度，因此我们二维球面上的奇点是点状的（0 维），而在三维空间中，奇点则表现为场 [29]中的暗线或静默线。我们在四维空间中的奇点是二维曲面。这样的曲面有两个，分别对应于$\mathbf{d}^* \cdot (\mathbf{E}_f$ 或$\mathbf{E}_b) = 0$。这些曲面映射为球壳，而两个映射的交集则形成一个圆。在这个圆上，偶极子和偏振都是线性的，且彼此正交，例如在真实空间中类似于“$\times$”。交集呈圆形这一点与“$\times$”可以自由旋转这一事实有关，例如“+”。

透射系数 t 同样可以在球面（或超球面）上进行评估。然而， t 缺少在 r中所见的复结构。在大多数情况下，图 3 的 t 等效图只是在一个半球中显示 $\angle t = \pi$ 的相位，并在另一个半球中显示 $\angle t = 0$ 的相位，两者由 $|t| = 0$赤道分隔开来。通过重新引入失谐 δ，可以将这条 $|t| = 0$ 赤道视为相位奇点。对于固定的$\mathbf{E}_f$，在由$\mathbf{d} \otimes \delta$ 定义的三维空间中，它呈现为一条一维线状相位奇点，并在 $\delta = 0$ 切片中环成一个圆（靠近赤道）。

总之，我们展示了单维光子波导中复偶极两能级系统的反射系数 r所表现出的丰富行为。 r 是一个复场，支持存在于庞加莱（超）球面上的相位奇点。对于每种偏振存在两个偶极子，使得 $r = 0$ ；此外，赤道上类似迈克耳孙干涉仪的相位梯度的存在，也都可以由物理学论据加以解释。我们证明，由于位于球面上的相位奇点所面临的拓扑约束，这两种效应密切相关。对于单个二能级系统，r 对偶极子偏振和波导偏振的丰富依赖关系，将为利用波导中的两能级系统链开辟新的途径。

致谢：我们感谢 EP-SRC 项目资助（编号 EP/N003381/1，“用于量子技术的一维量子发射体与光子”和 EP/M024156/1“Spin Space”），以及 PHD 资助 DTA-1407622。

[1] A. Gonz´alez-Tudela 和 D. Porras, 《物理评论快报》**110**, 080502 (2013)。[2] T. Ramos、H. Pichler、A. J. Daley 和 P. Zoller, 《物理评论快报》**113**, 237203 (2014)。[3] P. Lodahl、S. Mahmoodian、S. Stobbe、P. Schneeweiss、J. Volz、A. Rauschenbeutel、H. Pichler 和 P. Zoller, 《自然》**541**, 473 (2017)。[4] J. T. Shen 和 S. Fan, 《光学快报》**30**, 2001 (2005)。[5] J. Petersen、J. Volz 和 A. Rauschenbeutel, 《科学》**346**, 67 (2014)。[6] F. J. Rodr´ıguez-Fortu˜no、G. Marino、P. Ginzburg、D. O'Connor、A. Mart´ınez、G. A. Wurtz 和 A. V. Zayats, 《科学》**340**, 328 (2013)。[7] A. Aiello、P. Banzer、M. Neugebauer 和 G. Leuchs, 《自然·光子学》**9**, 789 (2015)。[8] R. J. Coles、D. M. Price、J. E. Dixon、B. Roy-all、E. Clarke、P. Kok、M. S. Skolnick、A. M. Fox 和 M. N. Makhonin, 《自然·通讯》**7** (2016), 10.1038/ncomms11183。[9] M. F. Picardi、A. V. Zayats 和 F. J. Rodr´ıguez-Fortu˜no, 《物理评论快报》**120**, 117402 (2018)。[10] C. Gonzalez-Ballestero、E. Moreno、F. J. Garcia-Vidal 和 A. Gonzalez-Tudela, 《物理评论A》**94**, 063817 (2016)。[11] C. Sayrin、C. Junge、R. Mitsch、B. Albrecht、D. O'Shea、P. Schneeweiss、J. Volz 和 A. Rauschenbeutel, 《物理评论X》**5**, 041036 (2015)。[12] A. B. Young、A. C. T. Thijssen、D. M. Beggs、P. Androvitsaneas、L. Kuipers、J. G. Rarity、S. Hughes 和 R. Oulton, 《物理评论快报》**115**, 153901 (2015)。[13] I. S¨ollner、S. Mahmoodian、S. L. Hansen、L. Midolo、A. Javadi、G. Kir˘sansk˙e、T. Pregnolato、H. El-Ella、E. H. Lee、J. D. Song、S. Stobbe 和 P. Lodahl, 《自然·纳米技术》**10**, 775 (2015)。

[14] B. Lang, D. P. S. McCutcheon, E. Harbord, A. B. Young, 和 R. Oulton, 《物理评论快报》**128**，073602（2022）。[15] V. S. C. Manga Rao 和 S. Hughes, 《物理评论B辑》**75**，205437 2007( )。[16] E. Collett, *Field Guide to Polarization*（SPIE 出版社，2005）。[17] R. Jones, G. Buonaiuto, B. Lang, I. Lesanovsky 和 B. Olmos, 《物理评论快报》**124**，093601（2020）。[18] D. Dzsotjan, J. K¨astel 和 M. Fleischhauer, 《物理评论B辑》**84**，075419（2011）。[19] R. Jones, J. A. Needham, I. Lesanovsky, F. Intravaia 和 B. Olmos, 《物理评论A》**97**，053841（2018）。[20] Y. Zhou, Z. Chen 和 J.-T. Shen, 《物理评论A》**101**，043831 2020( )。[21] I. M. Mirza 和 J. C. Schotland, 《物理评论 A 》 **94**，012302 （ 2016 ）。[22] H. Pichler, T. Ramos, A. J. Daley 和 P. Zoller, 《物理评论A》**91**，042116（2015）。[23] R. Holzinger, R. Guti´errez-J´auregui, T. H¨onigl-Decrinis, G. Kirchmair, A. Asenjo-Garcia 和 H. Ritsch, 《物理评论快报》**129**，253601（2022）。[24] X. Wang, T. Liu, A. F. Kockum, H.-R. Li 和 F. Nori, 《物理评论快报》**126**，043602（2021）。[25] L. Scarpelli, B. Lang, F. Masia, D. M. Beggs, E. A. Mul- jarov, A. B. Young, R. Oulton, M. Kamp, S. H¨ofling, C. Schneider 和 W. Langbein, 《物理评论B辑》**100**，035311 2019( )。[26] J. F. Nye 和 M. V. Berry, 《英国皇家学会会刊A辑》**336**，165（1974）。[27] M. Berry, 《自然》**403**，21（2000）。[28] M. V. Berry, M. R. Dennis 和 R. L. Lee, 《新物理学杂志》**6**，162（2004）。[29] M. J. Padgett, K. O'Holleran, R. P. King 和 M. R. Dennis, 《当代物理学》**52**，265（2011）。