arXiv:2301.03248v1 [math.MG] 9 Jan 2023

广义点对函数的不等式

Oona Rainio

Abstract. 我们研究了一个由常数 $\alpha > 0$ 定义的点对函数的新广义版本。我们证明，对于 $\alpha > 0$ 的所有取值，该函数都是拟度量，并将其与多种双曲型度量进行比较，例如 j^*-度量、三角比度量和双曲度量。本文给出的大多数不等式就 α 而言都具有最佳可能常数。此外，我们还研究了广义点对函数在共形映射和拟正则映射下的畸变。

Oona Rainio[1], 电子邮箱： ormrai@utu.fi，ORCID：0000-0002-7775-7656，1：图尔库大学，FI-20014 图尔库，芬兰 资助。本研究由芬兰文化基金会资助。致谢。感谢Matti Vuorinen教授对本研究提出建设性意见，并感谢他一直以来的支持。数据可用性声明。不适用，未生成新数据。利益冲突声明。不存在利益冲突。

1. Introduction

多种不同的度量可用于研究保形映射 [10], 拟保形映射 [5],拟正则映射或其他映射 [11], ，它们是几何函数论的重要研究课题。在平面上，双曲度量因其不变性而适用于此目的，但遗憾的是，它只能在维数为 $n \geq 3$的特殊情形下定义。因此，研究者提出了许多新的双曲型度量 [3, 9, 14], ，这些度量仿照双曲度量设计，能够在测量点之间距离时考虑这些点相对于区域边界的位置。

设 $G \subsetneq \mathbb{R}^n$ 为一个区域。对于所有点 $x \in G$，用 $d_G(x)$ 表示其到边界的欧几里得距离，即 $= \inf_{z \in \partial G} |x - z|$。对于 $\alpha > 0$，定义函数 $p_G^\alpha \colon G \times G \to [0, 1)$， [2, (5.1)，第 1391] 页。

$$p_G^\alpha(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{|x - y|^2 + \alpha d_G(x) d_G(y)}}. \tag{1.1}$$

File: spf20230109.tex, printed: 2023-1-10, 2.012010年数学主题分类。主要分类：51M10；次要分类：30C65。关键词和短语：双曲度量、点对函数、拟正则映射、三角比度量。

上述函数称为广义点对函数。它由点对函数 p_G 推广而来，其表达式与定义 (1.1) 的特殊情形 $\alpha = 4$ 一致。点对函数最初在 [1] 中引入，并在 [2, 8, 12, 13, 15] 中作了进一步研究。研究发现，它是构造双曲度量界的一种有用工具；此外，已证明对于常数小于或等于 $\sqrt{5}/2$ [2, （定理 4.14，第 1388] 页）的所有域 $G \subsetneq \mathbb{R}^n$，它都是一个拟度量。2022 年，Dautova 等人 [2] 将点对函数定义中的常数 4 替换为更一般的常数 $\alpha > 0$，由此引入了广义点对函数。

当区域 G 是上半空间 $\mathbb{H}^n = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ 时，考虑点对函数是很有依据的。这是因为，对于所有的点 $x, y \in \mathbb{H}^n$，点对函数中的距离 $p_{\mathbb{H}^n}(x, y)$ 等于距离 th$(\rho_{\mathbb{H}^n}(x, y)/2)$，其中 th 是双曲正切，而 $\rho_{\mathbb{H}^n}(x, y)$ 是 $\mathbb{H}^n$ 中定义的双曲度量。不过，在某些区域中，用另一个常数代替 4 来定义该函数或许更合理，这也是研究 $\alpha > 0$ 取不同值时的广义点对函数的意义所在。例如，已知当 $0 < \alpha \leq 12$ 时，广义点对函数在区域 $\mathbb{R}^+$ [2, （定理 5.2，第 1391] 页）、$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ [2, （定理 5.11，第 1395], 页）和 $\mathbb{H}^n$ [2, （定理 5.13，第 1396] 页）中是一个度量。因此，我们旨在通过将该函数与若干双曲型度量进行比较，进一步研究它。

本文结构如下。首先，在第 2 节中，我们给出必要的符号和定义。第 3 节中，我们研究广义点对函数与称为 j^*-度量的双曲型度量之间的不等式，并证明广义点对函数在每个区域 $G \subsetneq \mathbb{R}^n$ 中都是拟度量。第 4 节中，我们给出三角比度量与 t-度量的类似不等式。最后，在第 5 节中，我们给出广义点对函数与双曲度量之间的不等式，并利用这些结果研究保形映射和拟正则映射下广义点对函数中距离的畸变。

2. 预备知识

回顾一下，若函数 $d\colon G \times G \to \mathbb{R}$ 在区域 G 中满足以下条件，则称其为度量：对于所有 $x, y, z \in G$，(1) $d(x, y) \geq 0$ 且 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$；(2) $d(x, y) = d(y, x)$；以及 (3)$d(x, y) \leq d(x, z)+d(z, y)$。其中第三个性质称为三角不等式。如果一个函数满足前两个性质以及其放宽形式

$$d(x, y) \leq c(d(x, z) + d(z, y))$$

满足带有常数 c 的三角不等式，且该常数与点 x、y、z 的选取无关，则称其为拟度量。请注意，这类函数有时也称为半度量、元度量或下度量。

中心为 $x \in \mathbb{R}^n$、半径为 $r > 0$的欧几里得开球记作$B^n(x, r)$，其球面记作 $S^{n-1}(x, r)$。端点为 x、$y \in \mathbb{R}^n$的欧几里得线段记作 $[x, y]$。复数 $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 的辐角为 Arg(x)。另按引言中的定义，记 $d_G(x) = \inf_{z \in \partial G} |x - z|$ 为 $x \in \mathbb{R}^n$。

于是定义原始点对函数 [1, p. 685], [8, 2.4, p. 1124], $p_G\colon G\times G\to[0,1)$,

$$p_G(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{|x-y|^2+4d_G(x)d_G(y)}}.$$

广义点对函数如式 (1.1) 所示。为避免可能的混淆，请注意，p_G 表示 $\alpha=4$，若未指定 α，则指广义版本 p^{α}_{G}。

接下来，考虑以下双曲型度量。Gehring 和 Osgood 引入的距离比度量 [4] 定义为 $j_G\colon G\times G\to[0,\infty)$, [1, 第 685] 页。

$$j_G(x,y)=\log\left(1+\frac{|x-y|}{\min\{d_G(x),d_G(y)\}}\right).$$

可按照 [8, 2.2，第 1123 页和引理 2.1，第 1124] 页中的方式改写此表达式，以定义 j^*度量 $j^*_G\colon G\times G\to[0,1]$,

$$j^*_G(x,y)=\operatorname{th}\frac{j_G(x,y)}{2}=\frac{|x-y|}{|x-y|+2\min\{d_G(x),d_G(y)\}}.$$

P. H¨ast¨o 最初于 2002 [9] 引入的三角比度量 $s_G\colon G\times G\to[0,1]$, 定义为 [1, (1.1)，第 683] 页

$$s_G(x,y)=\frac{|x-y|}{\inf_{z\in\partial G}(|x-z|+|z-y|)}.$$

此外，定义的 t-度量为 $t_G\colon G\times G\to[0,1)$,

$$t_G(x,y)=\frac{|x-y|}{|x-y|+d_G(x)+d_G(y)},$$

该度量最近在 [14] 中引入，但必须指出，与距离比度量或三角比度量不同，该度量不一定是双曲型度量，因为其球的闭包在区域 G 中并不总是紧的。

用 sh、ch 和 th 分别表示双曲正弦、余弦和正切。将上半空间 $\{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,x_n>0\}$ 记为 $\mathbb{H}^n$，并用符号 $\mathbb{B}^n$ 表示庞加莱单位球 $\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,|x|<1\}$。在这两个区域中，双曲度量的公式如下 [6, (4.8)，第 52 页及 (4.14)，第 55] 页

$$\operatorname{ch}\rho_{\mathbb{H}^n}(x,y)=1+\frac{|x-y|^2}{2d_{\mathbb{H}^n}(x)d_{\mathbb{H}^n}(y)},\quad x,y\in\mathbb{H}^n,$$

$$\operatorname{sh}^2\frac{\rho_{\mathbb{B}^n}(x,y)}{2}=\frac{|x-y|^2}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)},\quad x,y\in\mathbb{B}^n.$$

在二维圆盘中，我们有

$$\operatorname{th}\frac{\rho_{\mathbb{B}^2}(x,y)}{2}=\left|\frac{x-y}{1-x\overline{y}}\right|,$$

其中，$\overline{y}$ 是 y的复共轭。

3. Inequalities with the j^*-metric

本节首先求出广义点对函数与 j^*-度量之间的不等式，然后研究所得不等式的紧性，并利用这些不等式证明广义点对函数是拟度量。

定理 3.1. 对所有 x、$y \in G \subsetneq \mathbb{R}^n$ 和 $\alpha > 0$，不等式

$$\min\left\{1, \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right\} j_G^*(x,y) \leq p_G^\alpha(x,y) \leq \sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}} j_G^*(x,y)$$

成立。对于区域 $G = \mathbb{H}^n$，就 α 而言，这些常数是可能的最佳值。事实上，对于区域 $G \subsetneq \mathbb{R}^n$ 的任意选择，此处第一个常数就 α 而言都是可能的最佳值。

证明。由对称性，不妨固定不同的点 x、$y \in G$，使得 $d_G(x) \leq d_G(y)$。现在，

$$\frac{j_G^*(x,y)}{p_G^\alpha(x,y)} = \frac{\sqrt{|x-y|^2 + \alpha d_G(x) d_G(y)}}{|x-y| + 2d_G(x)}. \tag{3.2}$$

显然，在固定 $d_G(x)$ 和 $|x-y|$ 的情况下，此商随 $d_G(y)$ 增大。由三角不等式，$d_G(y) \leq d_G(x) + |x-y|$，因此 $d_G(y)$ 的值被限制在从 $d_G(x)$ 到 $d_G(x) + |x-y|$ 的闭区间内。因此，当 $d_G(y) = d_G(x)$ 时，商 (3.2) 关于 $d_G(y)$ 取最小值；当$d_G(y) = d_G(x) + |x-y|$ 时取最大值。

我们先求在 $d_G(y) = d_G(x)$ 情况下商 (3.2) 的最小值。求导得，

$$\frac{\partial}{\partial |x-y|}\left(\frac{\sqrt{|x-y|^2 + \alpha d_G(x)^2}}{|x-y| + 2d_G(x)}\right) = \frac{d_G(x)(2|x-y| - \alpha d_G(x))}{\sqrt{|x-y|^2 + \alpha d_G(x)^2}(|x-y| + 2d_G(x))^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad |x-y| = \frac{\alpha}{2} d_G(x).$$

我们看到，上述驻点是一个最小值点；由于该商在 $\sqrt{\alpha}/(\alpha+4)$ 处为 $|x-y| = \alpha d_G(x)/2$，因此它就是商 (3.2) 的最小值。

如上所述，我们需要固定 $d_G(y) = d_G(x) + |x-y|$，以求出商 (3.2) 的最大值。通过求导，

$$\frac{\partial}{\partial |x-y|}\left(\frac{\sqrt{|x-y|^2 + \alpha d_G(x)(d_G(x) + |x-y|)}}{|x-y| + 2d_G(x)}\right)$$
$$= \frac{d_G(x)|x-y|(4-\alpha)}{2\sqrt{|x-y|^2 + \alpha d_G(x)(d_G(x)+|x-y|)}(|x-y| + 2d_G(x))^2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \leq 4.$$

由于这个商关于 $|x-y|$ 的变化趋势取决于 α，可能递减也可能递增，因此其最大值为两个极限值之一:

$$\lim_{|x-y|\to 0^+}\frac{\sqrt{|x-y|^2+\alpha d_G(x)(d_G(x)+|x-y|)}}{|x-y|+2d_G(x)}=\frac{\sqrt{\alpha}}{2},$$

$$\lim_{|x-y|\to\infty}\frac{\sqrt{|x-y|^2+\alpha d_G(x)(d_G(x)+|x-y|)}}{|x-y|+2d_G(x)}=1.$$

因此，商 (3.2) 的上确界为 $\max\{1,\sqrt{\alpha}/2\}$。

接下来考虑区域 $G=\mathbb{H}^n$。当 $x=(0,...,0,1)$ 且 $y=(\alpha/2,0,...,0,1)$ 时，商 (3.2) 取得其最小值 $\sqrt{\alpha}/(\alpha+4)$，如图 1(A) 所示。类似地，当 $x=(0,...,0,1)$ 且 $y=(0,...,0,1+k)$，并且 $k\to 0^+$if $\alpha<4$ or $k\to\infty$ if $\alpha\geq 4$ 时，商趋近于其最大值 $\max\{1,\sqrt{\alpha}/2\}$。因此，$\mathbb{H}^n$ 是一个区域示例，在该区域中，所求极值给出了关于 α 的最佳可能常数。此外，无论如何选取区域 G，$\max\{1,\sqrt{\alpha}/2\}$都是关于 α 的商 (3.2) 的最佳可能上界，因为我们总能固定点 $y\in G$、$z\in S^{n-1}(y,d_G(y))\cap(\partial G)$ 和 $x=y+k(z-y)$，并根据 α 取 $k\to 0^+$ 或 $k\to 1^-$，从而使商 (3.2) 达到其极限值。

该定理由此得出，不过请注意，由于界是针对函数 $p_G^\alpha(x,y)$ 给出的，我们考虑所求极值的倒数。□

虽然定理 3.1 中后一个常数对于某些 $G\subsetneq\mathbb{R}^n$, 并非紧的，但由下一个结果可知，在若干常见区域中，例如 $\mathbb{B}^n$、$\mathbb{H}^n$ 和 $\mathbb{R}^n\setminus(\{0\}\cup\{1\})$，该常数是最佳可能常数。

引理 3.3. 对于 $G\subsetneq\mathbb{R}^n$ 和 $\alpha>0$，常数 $\sqrt{(\alpha+4)/\alpha}$ 是关于 α 的最佳可能常数 c，使得不等式 $p_G^\alpha(x,y)\leq cj_G^*(x,y)$ 对所有点 $x,y\in G$ 都成立，条件是

(1) G 包含一个开球，其某一直径的两个端点属于边界 ∂G，或者，

(2) G 包含一个开半球，但其某一直径完全位于边界 ∂G 上。

证明。根据定理 3.1，当 $c=\sqrt{(\alpha+4)/\alpha}$ 时，不等式成立；并且很容易验证，当 $d_G(x)=d_G(y)$ 且 $|x-y|=\alpha d_G(x)/2$ 时，等号成立。

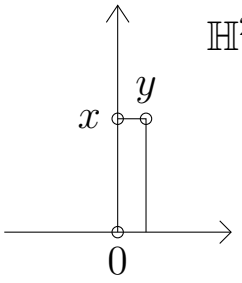
考虑第一种情形：存在一些点 $u,v\in S^1(l,d_G(l))\cap(\partial G)$，其中 $l=(u+v)/2$。于是固定 $x=l+\alpha(u-l)/(\alpha+4)$ 和 $y=l+\alpha(v-l)/(\alpha+4)$。见图1(B)。我们将有 $d_G(x)=4d_G(z)/(\alpha+4)=d_G(y)$，且 $|x-y|=\alpha d_G(x)/2$。

那么，假设对于 $q\in\partial G$、$r>0$ 和 $h\in S^{n-1}(q,r)$，半球

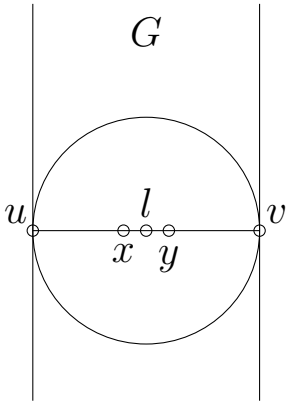
$$\{z\in B^n(q,r):|z-h|>|z-(h+2r(q-h))|\}$$

包含在 G 中，但

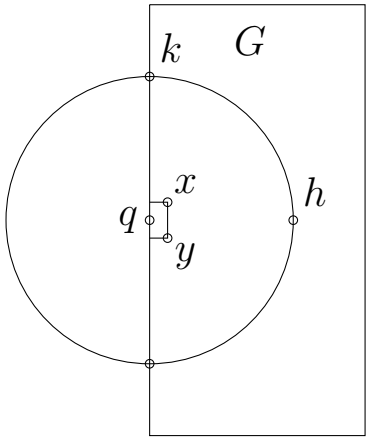
$$[k,k+2(q-k)]\subset\partial G\quad\text{for}\quad k\in\{z\in S^{n-1}(q,r):|z-h|=|z-(h+2r(q-h))|\}.$$



(A) $G = \mathbb{H}^2$, $\alpha = 0.5$



(B) G 如引理 3.3(1)所示, $\alpha = 1$



(C) G 如引理 3.3(2)所示, $\alpha = 4$

FIGURE 1. 点 $x, y \in G$ 使得等号 $p_G^\alpha(x,y) = \sqrt{(\alpha+4)/\alpha}\, j_G^*(x,y)$对于不同的域 G 及 $\alpha > 0$的取值成立。

Fix

$$x = q + \frac{h-q}{\alpha+4} + \alpha\frac{k-q}{4(\alpha+4)}, \quad y = q + \frac{h-q}{\alpha+4} - \alpha\frac{k-q}{4(\alpha+4)}$$

如图 1(C)所示。现在, $d_G(x) = d_G(y) = r/(\alpha+4)$且 $|x-y| = \alpha r/(2(\alpha+4)) = \alpha d_G(x)/2$, 因此结论成立。
□

引理 3.4。对于所有 x、$y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 和 $\alpha > 0$，不等式

$$\frac{2}{\sqrt{\alpha}} j^*_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}(x,y) \le p^{\alpha}_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}(x,y) \le \sqrt{1+\frac{4}{\alpha}}\, j^*_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}(x,y) \quad if \quad \alpha \le 4,$$

$$j^*_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}(x,y) \le p^{\alpha}_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}(x,y) \le \max\left\{1, \frac{4}{\sqrt{\alpha+4}}\right\} j^*_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}(x,y) \quad if \quad \alpha > 4,$$

关于 α 成立，且常数取最佳值。

证明。根据定理 3.1，这两个不等式的左侧成立，并且其常数也取最佳值。由对称性，不妨设点 x、$y \in G = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 满足 $|x| \le |y|$。设从原点指向 x 和 y 的向量之间的角为 k。利用余弦定理表示距离 $|x-y|$，可得

$$\frac{p^{\alpha}_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}(x,y)}{j^*_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}(x,y)} = \frac{\sqrt{|x|^2+|y|^2-2|x||y|\cos(k)}+2|x|}{\sqrt{|x|^2+|y|^2-2|x||y|\cos(k)+\alpha|x||y|}}. \tag{3.5}$$

为了证明引理中不等式的右侧，我们需要求出此商的最大值。

求导得，

$$\frac{\partial}{\partial\cos(k)}\left(\frac{\sqrt{|x|^2+|y|^2-2|x||y|\cos(k)}+2|x|}{\sqrt{|x|^2+|y|^2+(\alpha-2\cos(k))|x||y|}}\right)$$

$$= \frac{|x|^2|y|(2\sqrt{|x|^2+|y|^2-2|x||y|\cos(k)}-\alpha|y|)}{\sqrt{|x|^2+|y|^2-2|x||y|\cos(k)}(|x|^2+|y|^2+(\alpha-2\cos(k))|x||y|)^{3/2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(k) = \frac{4|x|^2+4|y|^2-\alpha^2|y|^2}{8|x||y|}.$$

此驻点是最大值点。当且仅当 $-1 \le \cos(k) \le 1$ 时，它满足

$$-4(|y|-|x|)^2 \le \alpha^2|y|^2 \le 4(|x|+|y|)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha-2)|y| \le 2|x|,$$

鉴于限制条件 $|x| \le |y|$，只有在 $\alpha \le 4$ 时才可能如此。如果 $\cos(k)$ 等价于上述驻点，则商 (3.5) 变为 $\sqrt{1+4|x|/(\alpha|y|)}$；它关于 $|y|$ 递减，并在 $|y| = |x|$ 处取得最大值 $\sqrt{1+4/\alpha}$。因此，当 $\alpha \le 4$ 时，这就是商 (3.5) 的最大值。

于是设 $\alpha > 4$。现在，我们必须选择 $\cos(k) = -1$ 或 $\cos(k) = 1$，以求得商 (3.5) 的最大值。如果 $\cos(k) = -1$，则该商变为

$$\frac{|y|+3|x|}{\sqrt{|x|^2+|y|^2+(\alpha+2)|x||y|}}. \tag{3.6}$$

通过求导，

$$\frac{\partial}{\partial|y|}\left(\frac{|y|+3|x|}{\sqrt{|x|^2+|y|^2+(\alpha+2)|x||y|}}\right) = \frac{-|x|((2+\alpha)|x|+|y|/2)}{(|x|^2+|y|^2+(\alpha+2)|x||y|)^{3/2}} < 0,$$

因此，商 (3.6) 关于 $|y|$ 递减，并在 $|y| = |x|$处取得最大值 $4/\sqrt{\alpha+4}$。

若余弦$(k) = 1$，则商 (3.5) 变为

$$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{|x|^2+|y|^2+(\alpha-2)|x||y|}}. \tag{3.7}$$

求导得，

$$\frac{\partial}{\partial|y|}\left(\frac{|x|+|y|}{\sqrt{|x|^2+|y|^2+(\alpha-2)|x||y|}}\right) = \frac{|x|(|y|-|x|)(\alpha/2-2)}{(|x|^2+|y|^2+(\alpha-2)|x||y|)^{3/2}} \geq 0$$

若 $\alpha > 4$ 且 $|x| \leq |y|$。因此，商 (3.7) 关于 $|y|$递增，其最大值的极限为 1，在 $|y| \to \infty$时取到。由此可得结论。□

推论 3.8. 对所有 $G \subsetneq \mathbb{R}^n$ 和 $\alpha > 0$，函数 $p_G^\alpha(x, y)$ 是一个拟度量，其常数为 $\sqrt{(\alpha+4)}/\alpha$ （若 $\alpha \leq 4$），而在 $\alpha > 4$时为 $2\sqrt{\alpha+4}/\alpha$。

*Pr*证明。由定理 3.1 以及 $j_G^*(x, y)$ 是一个度量这一事实可知 t

$$\begin{aligned} p_G^\alpha(x,y) \leq & \sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}} j_G^*(x,y) \leq \sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}(j_G^*(x,z)+j_G^*(z,y)) \\ & \leq \sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}} \min\left\{1, \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right\}(p_G^\alpha(x,z)+p_G^\alpha(z,y)). \end{aligned}$$

□

注意，对于区域 $G = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$，引理 3.4 中的不等式会为推论 3.8 给出更优的常数，但已证明广义点对函数在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 中对所有 $0 < \alpha \leq 12$ [2, 都是一个度量，见定理 5.11，第 1395] 页。

4. Inequalities with the triangular ratio metric and the t-metric

现在我们来求广义点对函数与三角比度量及 t-度量之间的不等式。

引理 4.1. 对所有 x、$y \in G \subsetneq \mathbb{R}^n$ 和 $\beta > \alpha > 0$，不等式

$$p_G^\beta(x,y) \leq p_G^\alpha(x,y) \leq \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} p_G^\beta(x,y)$$

关于 α，取等号时常数达到最佳。

证明。显然，商

$$\frac{p_G^\alpha(x,y)}{p_G^\beta(x,y)} = \sqrt{\frac{|x-y|^2+\beta d_G(x)d_G(y)}{|x-y|^2+\alpha d_G(x)d_G(y)}}. \tag{4.2}$$

当 x 或 y 趋近边界，使得 $d_G(x) \to 0^+$ 或 $d_G(y) \to 0^+$ 时，商取得最小值 1；当点 x 和 y 彼此趋近，使得 $|x-y| \to 0^+$ 时，商取得最大值 $\sqrt{\beta/\alpha}$ 。□

引理 4.3. 对所有 x、$y \in G \subsetneq \mathbb{R}^n$ 和 $\alpha > 0$,

$$\frac{1}{2}s_G(x,y) \le p_G^{\alpha}(x,y) \le \sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}s_G(x,y) \quad if \quad \alpha \le 4,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}s_G(x,y) \le p_G^{\alpha}(x,y) \le \sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}s_G(x,y) \quad if \quad \alpha > 4,$$

并且，若 G 是凸的，则可分别用 $\max\{1/\sqrt{2}, \sqrt{\alpha}/2\}$ 和 1 替换常数 $1/2$ 和 $1/\sqrt{2}$ ，从而改进这些不等式的左侧。

证明。根据 [8, 引理 2.1，第 1124 页和引理 2.2，第 1125], 页，不等式 $j_G^*(x,y) \le s_G(x,y) \le 2j_G^*(x,y)$ 对所有 x、$y \in G \subsetneq \mathbb{R}^n$, 都成立；将此结果与定理 3.1 结合，可得

$$\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right\} s_G(x,y) \le p_G^{\alpha}(x,y) \le \sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}s_G(x,y). \tag{4.4}$$

由引理 4.1 也可得

$$\min\left\{1, \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\right\} p_G(x,y) \le p_G^{\alpha}(x,y) \le \max\left\{1, \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\right\} p_G(x,y) \tag{4.5}$$

并且，根据 [15, 定理 3.6], $1/\sqrt{2}p_G(x,y) \le s_G(x,y) \le \sqrt{2}p_G(x,y)$。因此，可得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\min\left\{1, \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\right\} s_G(x,y) \le p_G^{\alpha}(x,y) \le \max\left\{\sqrt{2}, \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right\} s_G(x,y). \tag{4.6}$$

现在我们将不等式 (4.4) 和 (4.6) 结合起来。注意,

$$\max\left\{\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right\}, \min\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{2}}\right\}\right\} = \begin{cases} 1/2 & \text{if} \quad \alpha \le 4, \\ 1/\sqrt{2} & \text{if} \quad \alpha > 4 \end{cases}, \quad \text{and}$$
$$\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}} \le \max\left\{\sqrt{2}, \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right\}.$$

引理的第一部分由此得出。

那么，假设 G 是凸的。根据 [8, 定理 2.9(i)，第 1129] 页，在这种情况下成立 $s_G(x,y) \le \sqrt{2}j_G^*(x,y)$, 因此由定理 3.1 可得

$$\min\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right\} s_G(x,y) \le p_G^{\alpha}(x,y)$$

此外，根据 [6, 引理 11.6(1)，第 197], 页，在凸域 G 中有 $s_G(x,y) \le p_G(x,y)$，因此由不等式 (4.5) 可得

$$\min\left\{1, \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\right\} s_G(x,y) \le p_G^{\alpha}(x,y).$$

该引理的其余部分由上述两个不等式得出：

$$\max\left\{\min\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right\}, \min\left\{1, \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\right\}\right\} = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{if} \quad \alpha \le 2, \\ \sqrt{\alpha}/2 & \text{if} \quad 2 < \alpha \le 4, \\ 1 & \text{if} \quad \alpha > 4. \end{cases}$$

□

引理 4.7. 对所有 x、$y \in G \subsetneq \mathbb{R}^n$ 和 $\alpha > 0$，不等式

$$t_G(x,y) \le p_G^{\alpha}(x,y) \le \frac{4}{\sqrt{\alpha(4-\alpha)}} t_G(x,y) \quad \textit{if} \quad \alpha < 2,$$

$$\min\left\{1, \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right\} t_G(x,y) \le p_G^{\alpha}(x,y) \le 2 t_G(x,y) \quad \textit{if} \quad \alpha \ge 2,$$

成立，且关于 α 的常数是最佳的。

证明. 考虑商

$$\frac{p_G^{\alpha}(x,y)}{t_G(x,y)} = \frac{|x-y| + d_G(x) + d_G(y)}{\sqrt{|x-y|^2 + \alpha d_G(x) d_G(y)}}. \tag{4.8}$$

求导可得,

$$\frac{\partial}{\partial d_G(y)} \left(\frac{|x-y| + d_G(x) + d_G(y)}{\sqrt{|x-y|^2 + \alpha d_G(x) d_G(y)}} \right) = \frac{|x-y|^2 + \frac{\alpha}{2} d_G(x)(d_G(y) - |x-y| - d_G(x))}{2(|x-y|^2 + \alpha d_G(x) d_G(y))^{3/2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad d_G(y) = |x-y| + d_G(x) - \frac{2|x-y|^2}{\alpha d_G(x)}.$$

上述驻点是一个极小值点。由对称性，不妨设 $d_G(x) \le d_G(y)$。由三角不等式可得 $d_G(y) \le |x-y| + d_G(x)$。因此，当且仅当.....时，我们可以选取 $d_G(y) = |x-y| + d_G(x) - 2|x-y|^2/(\alpha d_G(x))$

$$d_G(x) \le |x-y| + d_G(x) - \frac{2|x-y|^2}{\alpha d_G(x)} \le |x-y| + d_G(x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le |x-y| \le \frac{\alpha d_G(x)}{2}.$$

首先，假设 $|x-y| \le \alpha d_G(x)/2$。如果 $d_G(y) = |x-y| + d_G(x) - 2|x-y|^2/(\alpha d_G(x))$，则商 (4.8) 变为

$$\frac{2}{\alpha d_G(x)} \sqrt{\alpha d_G(x)(|x-y| + d_G(x)) - |x-y|^2}.$$

求导得,

$$\frac{\partial}{\partial|x-y|}\left(\alpha d_G(x)(|x-y|+d_G(x))-|x-y|^2\right)=\alpha d_G(x)-2|x-y|$$

因此，该表达式关于 $|x-y|$ 递增，当 $|x-y|\le(\alpha d_G(x))/2$。它的极限值为

$$\lim_{|x-y|\to 0^+}\left(\frac{2}{\alpha d_G(x)}\sqrt{\alpha d_G(x)(|x-y|+d_G(x))-|x-y|^2}\right)=\frac{2}{\sqrt{\alpha}}.$$

接下来考虑 $|x-y|>\alpha d_G(x)/2$ 的情形。此时，商 (4.8) 关于 $d_G(y)$ 递增。如果 $d_G(y)=d_G(x)$，商 (4.8) 变为

$$\frac{|x-y|+2d_G(x)}{\sqrt{|x-y|^2+\alpha d_G(x)^2}}. \tag{4.9}$$

求导可得,

$$\frac{\partial}{\partial|x-y|}\left(\frac{|x-y|+2d_G(x)}{\sqrt{|x-y|^2+\alpha d_G(x)^2}}\right)=\frac{d_G(x)(\alpha d_G(x)-2)}{(|x-y|^2+\alpha d_G(x)^2)^{3/2}}\ge 0\quad\Leftrightarrow\quad d_G(x)\ge\frac{2}{\alpha}.$$

因此，商 (4.8) 关于 $|x-y|$ 单调。商 (4.8) 在 $|x-y|\to\alpha d_G(x)/2$ 时的极限值为 $\sqrt{1+4/\alpha}$，而在$|x-y|\to\infty$时的极限值为 1，其中 1 较小。因此，商 (4.8) 的下确界为 $\min\{1,2/\sqrt{\alpha}\}$。

由前面对商 (4.8) 求导可知，关于 $d_G(y)$，其最大值出现在区间 $[d_G(x)\ d_G(x)+|x-y|]$ 的一个端点处。若$d_G(y)=d_G(x)$，商 (4.8) 即为商 (4.9)，而我们已知它关于 $|x-y|$ 单调。商 (4.9) 的最大值要么是极限值$2/\sqrt{\alpha}$（当 $|x-y|\to 0^+$ 时取得），要么为 1（当 $|x-y|\to\infty$ 时取得），这取决于是否 $\alpha\le 4$。

若 $d_G(y)=d_G(x)+|x-y|$，商 (4.8) 变为

$$\frac{2(|x-y|+d_G(x))}{\sqrt{|x-y|^2+\alpha d_G(x)(d_G(x)+|x-y|)}}. \tag{4.10}$$

求导可得,

$$\frac{\partial}{\partial|x-y|}\left(\frac{2(|x-y|+d_G(x))}{\sqrt{|x-y|^2+\alpha d_G(x)(d_G(x)+|x-y|)}}\right)$$
$$=\frac{d_G(x)((\alpha-2)|x-y|+\alpha d_G(x))}{(|x-y|^2+\alpha d_G(x)(d_G(x)+|x-y|))^{3/2}}.$$

当 $\alpha\ge 2$ 或 $\alpha<2$ 且 $|x-y|<\alpha d_G(x)/(2-\alpha)$ 时，上述导数为正。因此，若 $\alpha\ge 2$，商 (4.10) 随 $|x-y|$ 递增，其最大值的极限值为 2，此值在 $|x-y|\to\infty$ 时取得。若 $\alpha<2$，则商 (4.10) 的最大值为 $4/\sqrt{\alpha(4-\alpha)}$，在 $|x-y|=\alpha d_G(x)/(2-\alpha)$ 时取得。因为这些值

大于商 (4.9) 最大值的极限值，所以商 (4.8) 的上确界要么是 $4/\sqrt{\alpha}(4-\alpha)$（若 $\alpha<2$），要么是 2（若 $\alpha\geq 2$）。引理中的不等式由此得证。

通过对任意固定点 $x\in G$ 选取 $y\in B^n(x,d_G(x))$，使得 $d_G(y)\to d_G(x)$ 且 $|x-y|\to 0^+$，即可在任意区域 $G\subsetneq\mathbb{R}^n$ 中得到商 (4.8) 的极限值 $2/\sqrt{\alpha}$。同样，通过选取 $x,y\in G$，使得$d_G(x)$ $d_G(y)\to 0^+$, ~~即可得到~~极限值 1。若 $\alpha<2$，则可通过固定 $x\in G, z\in S^{n-1}(x,d_G(x))\cap(\partial G)$，以及 $y=x+\alpha(z-x)/2$，得到商 (4.8) 的值 $4/\sqrt{\alpha}(4-\alpha)$。此外，若固定 $x\in G, z\in S^{n-1}(x,d_G(x))\cap(\partial G)$ 和 $y=z+k(x-z)$，且 $k\to 0^+$，则商 (4.8) 的极限值 2 可以得到，因为此时 $d_G(y)\to 0^+$，但 $|x-y|\to d_G(x)>0$。由此可知，无论区域 G 如何选择，我们都得到了关于 α 的最佳常数。□

5. Inequalities with the hyperbolic metric

本节首先研究上半空间和单位球中广义点对函数与双曲度量之间的不等式，然后研究广义点对函数在 M¨obius 映射和拟正则映射下的畸变。

推论5.1. 对所有 x、$y\in\mathbb{H}^n$ 和 $\alpha>0$，不等式

$$\min\left\{1,\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\right\}\operatorname{th}\frac{\rho_{\mathbb{H}^n}(x,y)}{2}\leq p^{\alpha}_{\mathbb{H}^n}(x,y)\leq\max\left\{1,\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right\}\operatorname{th}\frac{\rho_{\mathbb{H}^n}(x,y)}{2}$$

成立，且关于 α 的常数是最佳的。

证明. 该结果由引理 4.1 以及 $\operatorname{th}(\rho_{\mathbb{H}^n}(x,y)/2)=p_{\mathbb{H}^n}(x,y)$ by [6, p. 460]. □ 这一事实得出。

定理 5.2. 对所有 x、$y\in\mathbb{B}^n$ 和 $\alpha>0$，不等式

$$\min\left\{1,\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right\}\operatorname{th}\frac{\rho_{\mathbb{B}^n}(x,y)}{2}\leq p^{\alpha}_{\mathbb{B}^n}(x,y)\leq\max\left\{1,\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right\}\operatorname{th}\frac{\rho_{\mathbb{B}^n}(x,y)}{2}$$

关于 α，该结论以可能的最佳常数成立。

证明。$p^{\alpha}_{\mathbb{B}^n}(x,y)$ 和 $\rho_{\mathbb{B}^n}(x,y)$ 的值仅取决于点 x,y 在单位球与包含 x, y 及原点的二维平面的交集上的固定方式，因此只需通过研究商来证明 $n=2$ 的情形下的这个不等式

$$\frac{p^{\alpha}_{\mathbb{B}^2}(x,y)}{\operatorname{th}(\rho_{\mathbb{B}^2}(x,y)/2)}=\frac{|1-x\overline{y}|}{\sqrt{|x-y|^2+\alpha(1-|x|)(1-|y|)}}. \tag{5.3}$$

如果 $y=0$，则商 (5.3) 变为

$$\frac{1}{\sqrt{|x|^2+\alpha(1-|x|)}}, \tag{5.4}$$

其中 a 当 $|x| \to 0^+$ 时趋近于 $1/\sqrt{\alpha}$，当 $|x| \to 1^-$ 时趋近于 1。通过求导,

$$\frac{\partial}{\partial|x|}(|x|^2 + \alpha(1-|x|)) = 2|x| - \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| = \alpha/2.$$

由此可知，若 $\alpha < 2$，则商 (5.4) 的最大值为 $2/\sqrt{\alpha}(4-\alpha)$。否则，最大值为 1。商 (5.4) 的最小值也为 1 或 $1/\sqrt{\alpha}$，取决于是否$\alpha < 1$。根据对称性，在 $x = 0$ 的情形下，这些也是商 (5.3) 的极值。

那么，假设 $x \neq 0 \neq y$。令 $k \in [0, \pi]$ 为从原点指向 x 和 y的向量之间的角，或者等价地， $k =$辐角(x/y)。根据余弦定理,

$$|1 - x\overline{y}| = |1-|x||y|e^{\mathrm{Arg}(x/y)i}| = \sqrt{1+|x|^2|y|^2 - 2|x||y|\cos(k)},$$
$$|x-y| = \sqrt{|x|^2+|y|^2-2|x||y|\cos(k)}.$$

因此，商 (5.3) 可写为

$$\sqrt{\frac{1+|x|^2|y|^2-2|x||y|\cos(k)}{|x|^2+|y|^2-2|x||y|\cos(k)+\alpha(1-|x|)(1-|y|)}}. \tag{5.5}$$

通过求导,

$$\frac{\partial}{\partial\cos(k)}\left(\frac{1+|x|^2|y|^2-2|x||y|\cos(k)}{|x|^2+|y|^2-2|x||y|\cos(k)+\alpha(1-|x|)(1-|y|)}\right)$$
$$= \frac{2|x||y|(1-|x|)(1-|y|)((1+|x|)(1+|y|)-\alpha)}{(|x|^2+|y|^2-2|x||y|\cos(k)+\alpha(1-|x|)(1-|y|))^2}.$$

因此，商 (5.5) 关于余弦(k)是单调的；当余弦$(k) = -1$ 时取最小值，当余弦$(k) = 1$ 时取最大值，反之亦然，具体取决于是否满足 $\alpha <$$(1+|x|)(1+|y|)$。

Let 我们首先考虑余弦$(k) = -1$的情形。此时，商 (5.5) 变为

$$\sqrt{\frac{(1+|x||y|)^2}{(|x|+|y|)^2+\alpha(1-|x|)(1-|y|)}}. \tag{5.6}$$

求导可得,

$$\frac{\partial}{\partial|y|}\left(\frac{(1+|x||y|)^2}{(|x|+|y|)^2+\alpha(1-|x|)(1-|y|)}\right)$$
$$= \frac{(1-|x|)(1+|x||y|)(\alpha(1-|x||y|+2|x|)-2(1+|x|)(|x|+|y|))}{(|x|+|y|)^2+\alpha(1-|x|)(1-|y|)^2}.$$

我们看到，关于 $|y|$，商 (5.6) 的唯一驻点是一个极大值点。然而，该商 (5.6) 的最大值就是商 (5.5) 的最大值

当且仅当 $\alpha \geq (1+|x|)(1+|y|)$。由于该驻点满足

$$\alpha = \frac{2(1+|x|)(|x|+|y|)}{(1-|x||y|+2|x|)} < (1+|x|)(1+|y|) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < (1-|y|)(1+|x||y|),$$

它不可能是商 (5.5) 的最大值。因此，只有当 $|y| \to 0^+$ 或 $|y| \to 1^-$ 时，商 (5.6) 才能取得商 (5.5) 的极值。情形 $y = 0$ 此前已经讨论过；而如果 $|y| \to 1^-$，商 (5.6) 趋近于 1。

接下来考虑 $\cos(k) = 1$ 的情形，此时商 (5.5) 为

$$\sqrt{\frac{(1-|x||y|)^2}{(|x|-|y|)^2+\alpha(1-|x|)(1-|y|)}}. \tag{5.7}$$

通过求导，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial|y|}\left(\frac{(1-|x||y|)^2}{(|x|-|y|)^2+\alpha(1-|x|)(1-|y|)}\right) \\
&= \frac{(1-|x|)(1-|x||y|)(\alpha(1+|x||y|-2|x|)+2(1+|x|)(|x|-|y|))}{(|x|-|y|)^2+\alpha(1-|x|)(1-|y|)^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad |y| = \frac{\alpha(1-2|x|)+2|x|(1+|x|)}{2(1+|x|)-\alpha|x|}. \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

如果 $|y|$在 (5.8) 中，则商 (5.7) 为

$$\sqrt{\frac{4(|x|^2+(2-\alpha)|x|+1)^2}{\alpha((4-\alpha)|x|^2+(\alpha^2-6\alpha+8)|x|+4-\alpha)}}. \tag{5.9}$$

同样，通过求导，

$$\frac{\partial}{\partial|x|}\left(\frac{(|x|^2+(2-\alpha)|x|+1)^2}{(4-\alpha)|x|^2+(\alpha^2-6\alpha+8)|x|+4-\alpha}\right) = \frac{\alpha-2(1+|x|)}{\alpha-4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| = \frac{\alpha-2}{2}.$$

商 (5.9) 在 $x = (\alpha-2)/2$ 处等于 1。若 $|x| \to 1^-$，则 $|y| \to 1^-$ 若 $|y|$ 如 (5.8) 所示，商 (5.9) 趋近于 $2/\sqrt{\alpha}$。若 $|y| \to 1^-$，商 (5.7) 趋近于 1。

因此，商 (5.3) 所有可能的极值及其极限值为 1、$1/\sqrt{\alpha}$、$2/\sqrt{\alpha}$，以及在 $\alpha < 2$ 时的 $2/\sqrt{\alpha(4-\alpha)}$。注意，$2/\sqrt{\alpha(4-\alpha)}$ 永远不是该商的极值，因为它仅在 $0 < \alpha < 2$ 时取得，而不等式 $1/\sqrt{\alpha} < 2/\sqrt{\alpha(4-\alpha)} < 2/\sqrt{\alpha}$ 对所有 $0 < \alpha < 3$ 都成立。定理中的不等式由此得证；又由于这些值不是商 (5.3) 的极值，就是其极限值，因此关于 α不存在更好的常数。□

推论5.10. 对所有 x、$y \in \mathbb{B}^n$ 和 $\alpha > 0$，以及任意共形映射 $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n = f(\mathbb{B}^n)$，

$$\min\left\{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right\} p^{\alpha}_{\mathbb{B}^n}(x,y) \leq p^{\alpha}_{\mathbb{B}^n}(f(x),f(y)) \leq \max\left\{\frac{2}{\sqrt{\alpha}}, 2, \sqrt{\alpha}\right\} p^{\alpha}_{\mathbb{B}^n}(x,y).$$

证明。根据定理 5.2 以及双曲度量的共形不变性,

$$p^{\alpha}_{\mathbb{B}^n}(f(x),f(y)) \le \max\left\{1,\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right\}\operatorname{th}\frac{\rho_{\mathbb{B}^n}(f(x),f(y))}{2} = \max\left\{1,\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right\}\operatorname{th}\frac{\rho_{\mathbb{B}^n}(x,y)}{2}$$
$$\le \max\left\{1,\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right\}\frac{1}{\min\{1,1/\sqrt{\alpha}\}}p^{\alpha}_{\mathbb{B}^n}(x,y) = \max\left\{\frac{2}{\sqrt{\alpha}},2,\sqrt{\alpha}\right\}p^{\alpha}_{\mathbb{B}^n}(x,y)$$

并且，由于任意共形映射的逆映射 f^{-1} 仍是一个共形映射，不等式的第一部分可由此直接得出。□

考虑莫比乌斯变换 $T_a\colon\ \mathbb{B}^2\to\mathbb{B}^2$，定义为 $T_a(z)=(z-a)/(1-\overline{a}z)$。据观察，在单位圆盘中定义的若干内蕴度量和拟度量（包括三角比度量 [1, 猜想 1.6，第 684]，页的 j^*-度量 [12]、t-度量 [14, 猜想 4.4]、点对函数 [12] 以及巴伦德度量 [3, 猜想 4.3，第 25] 页）下，该映射的利普希茨常数似乎为 $1+|a|$。计算机测试表明，无论 $\alpha>0$ 的值如何，广义点对函数也具有这一性质。

猜想 5.11. 对所有 x、y、$a\in\mathbb{B}^2$ 和 $\alpha>0$,

$$\frac{1}{1+|a|}p^{\alpha}_{\mathbb{B}^2}(x,y) \le p^{\alpha}_{\mathbb{B}^2}(T_a(x),T_a(y)) \le (1+|a|)p^{\alpha}_{\mathbb{B}^2}(x,y)$$

定义 5.12. [6, p. 288-289] 设 $G\subset\mathbb{R}^n$ 是一个区域。关于沿直线绝对连续函数（简称 ACL）的定义，参见 [6, Def. 9.1, p. 149]。将 f 在 x 处的导数记为 $f'(x)$，将 f 在 x 处的雅可比行列式记为 $J_f(x)$。映射 $f\colon G\to\mathbb{R}^n$ 若是 ACL^n，且存在常数 $K\ge1$ 使得

$$|f'(x)|^n \le KJ_f(x),\quad |f'(x)| = \max_{|h|=1}|f'(x)h| \tag{5.13}$$

在 G 中几乎处处（a.e.）成立。若 f 是拟正则的，则使 (5.13) 成立的最小 $K\ge1$ 称为 f 的外膨胀，记为 $K_O(f)$；而使该不等式成立的最小 $K\ge1$

$$J_f(x) \le Kl(f'(x))^n,\quad \min_{|h|=1}|f'(x)h|$$

在 G 中几乎处处成立，其中 f 的内膨胀记为 $K_I(f)$。拟正则映射 f 是 K-拟正则的，当且仅当

$$\max\{K_O(f),K_I(f)\}\le K.$$

根据第 157 页的 [6, (9.5) 和第 158]，页的 (9.6)，定义一个常数

$$\log\lambda_n = \lim_{t\to\infty}\left(\left(\frac{\gamma_n(t)}{\omega_{n-1}}\right)^{n-1}-\log(t)\right),$$

其中， γ_n 是按第 121] 页的 [6, (7.17) 所定义的格罗茨施容量。根据二维情形下第 122], 页的 [6, (7.18)

$$\gamma_2(t) = \frac{4\,\mathcal{K}(1/t)}{\mathcal{K}(\sqrt{1-1/t^2})},$$

其中 $\mathcal{K}$ 是第一类完全椭圆积分。该积分定义为

$$\mathcal{K}(r) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-r^2x^2)}}dx, \quad 0 < r < 1,$$

and 可通过多种编程语言中的现成函数计算 .

定理 5.14。 [6, 定理 16.2(1)， 第 300] 页。若 G、$G' \in \{\mathbb{H}^n, \mathbb{B}^n\}$ 和 $f\colon\ G \to G'$ 是一个非常值 K-拟正则映射，且 $f(G) \subset G'$，则

$$\operatorname{th}\frac{\rho_{G'}(f(x), f(y))}{2} \le \lambda_n^{1-c}\left(\operatorname{th}\frac{\rho_G(x,y)}{2}\right)^c,$$

其中 $c = K_I(f)^{1/(1-n)}$。

推论 5.15。若 $f\colon\ \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n = f(\mathbb{B}^n)$ 是一个非常值 K-拟正则映射，则对于所有 x、$y \in \mathbb{B}^n$ 和 $\alpha > 0$

$$p^\alpha_{\mathbb{B}^n}(f(x), f(y)) \le \lambda_n^{1-c}\max\left\{1, \frac{2}{\sqrt{\alpha}}, (\sqrt{\alpha})^c, 2(\sqrt{\alpha})^{c-1}\right\} p^\alpha_{\mathbb{B}^n}(x,y)^c,$$

其中 $c = K_I(f)^{1/(1-n)}$。

证明。由定理 5.2 和 5.14,

$$\begin{aligned} p^\alpha_{\mathbb{B}^n}(f(x), f(y)) &\le \max\left\{1, \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right\} \operatorname{th}\frac{\rho_{\mathbb{B}^n}(f(x), f(y))}{2} \le \lambda_n^{1-c}\max\left\{1, \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right\}\left(\operatorname{th}\frac{\rho_{\mathbb{B}^n}(x,y)}{2}\right)^c \\ &\le \lambda_n^{1-c}\max\left\{1, \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right\}\left(\frac{1}{\min\{1, 1/\sqrt{\alpha}\}} p^\alpha_{\mathbb{B}^n}(x,y)\right)^c \\ &= \lambda_n^{1-c}\max\left\{1, \frac{2}{\sqrt{\alpha}}, (\sqrt{\alpha})^c, 2(\sqrt{\alpha})^{c-1}\right\} p^\alpha_{\mathbb{B}^n}(x,y)^c. \end{aligned}$$

□

References

1. J. Chen, P. Hariri, R. Klén and M. Vuorinen, 利普希茨条件、三角比度量与拟共形映射。Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 40 (2015), 683-709. 2. D. Dautova, S. Nasyrov, O. Rainio, and M. Vuorinen, 由点对函数诱导的度量与拟度量。Bulletin of the Braz. Math. Soc. 53, (2022), 1377–1401. 3. M. Fujimura, M. Mocanu and M. Vuorinen, Barrlund 距离函数与拟共形映射。Complex Var. Elliptic Equ. 66 (2021), 1225-1255. 4. F.W. Gehring and B.G. Osgood, 一致域与拟双曲度量。J. Analyse Math. 36 (1979), 50-74.

5. V.Y. Gutlyanskii and O. Martio. 共形映射及其拟共形延拓的边界行为。Dokl. Math. 73, (2006), 190–192. 6. P. Hariri, R. Klén and M. Vuorinen, 共形不变度量与拟共形映射。Springer, 2020. 7. P. Hariri, R. Klén, M. Vuorinen and X. Zhang, 关于卡西尼度量的一些说明。Publ. Math. Debrecen 90, 3-4 (2017), 269-285. 8. P. Hariri, M. Vuorinen and X. Zhang, 三角比度量的不等式与双利普希茨条件。Rocky Mountain J. Math. 47, 4 (2017), 1121-1148. 9. P. Hästö, 一种新的加权度量：相对度量 I。J. Math. Anal. Appl. 274 (2002), 38-58. 10. D.V. Isangulova, 以三步卡诺群为例，在最小光滑性假设下关于共形映射的刘维尔型定理。Dokl. Math. 88, (2013), 562–565. 11. O.A. Ochakovskaya, 函数全纯性的几何判据。Dokl. Math. 79, (2009), 428–429. 12. O. Rainio, 共形映射与拟正则映射下的内蕴度量。Publ. Math. Debrecen, (to appear) (2022). 13. O. Rainio, 内蕴拟度量。Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 44, 5 (2021), 2873-2891. 14. O. Rainio and M. Vuorinen, 引入一种新的内蕴度量。Results Math. 77, 71 (2022), doi: 10.1007/s00025-021-01592-2. 15. O. Rainio and M. Vuorinen, 扇形域中的拟共形映射下的三角比度量。Comput. Methods Func. Theory (2022), doi: 10.1007/s40315-022-00447-3. 16. X. Xu, G. Wang and X. Zhang 比较与 Ibragi- mov 度量的莫比乌斯拟不变性。Comput. Methods Func. Theory 22, (2022), pp. 609–627