arXiv:2301.03255v1 [math.NT] 9 Jan 2023

Apostol-Bernoulli多项式与广义弗罗贝尼乌斯–欧拉多项式的联合乘法公式

Г. Г. 伊柳塔

摘要。我们将证明 Apostol-Bernoulli多项式与广义弗罗贝尼乌斯–欧拉多项式的联合乘法公式，并将其与戴德金-拉德马赫和、阿波斯托尔-戴德金和以及傅里叶-戴德金和联系起来。

我们证明 Apostol-Bernoulli多项式与广义弗罗贝尼乌斯-欧拉多项式的联合乘法公式，并将其与戴德金-拉德马赫和、阿波斯托尔-戴德金和以及傅里叶-戴德金和联系起来。

目录

1. 引言 1 2. 离散傅里叶变换 2 3. 联合乘法公式 3 4. 示例 5 参考文献 7

1. 引言

我们将证明两类阿佩尔多项式——阿波斯托尔–伯努利多项式的乘法公式

本研究获得俄罗斯基础研究基金会（RFBR）项目 20-01-00579 的资助。

$B_m(q,\lambda)$ 和广义弗罗贝尼乌斯–欧拉多项式 $H_m^{(p)}(q,\lambda,\gamma)$ 的联合乘法公式，它们由生成函数定义

$$\frac{t}{\lambda e^t-1}e^{qt}=\sum_{m=0}^{\infty}B_m(q,\lambda)\frac{t^m}{m!},$$

$$\frac{(1-\gamma)^p}{\lambda e^t-\gamma}e^{qt}=\sum_{m=0}^{\infty}H_m^{(p)}(q,\lambda,\gamma)\frac{t^m}{m!},$$

其中 $p\in\mathbb{Z}$。我们将这些公式解释为 Dedekind 和之间的关系，因为广义 Frobenius-Euler 多项式是通过 Dedekind 和引入的。

$$E_{m,n}^{r,p}(q,\lambda;C):=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\epsilon_n^{-kr}H_{m-1}^{(p)}(q,\lambda,\epsilon_n^{-k})C_{-k}}{(1-\epsilon_n^k)^p},\tag{1}$$

其中 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$, $n\in\mathbb{Z}_{>1}$, $r,p\in\mathbb{Z}$, $\epsilon_n:=e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $C=\{C_k\}$– n-周期序列。采用这种术语的原因可由以下两个例子说明：当 $m=p=\lambda=1$ 时，

$$C_k=\frac{1}{1-\epsilon_n^{-ak}},\quad 0<k<n,$$

在定义 (1) 中，我们得到 Dedekind-Rademacher 和的 Fourier-Dedekind 和表示 [1], 第 156 页；而当 $m>1$,$r=q=0$, $p=\lambda=1$ 时，

$$C_k=\frac{1}{1-\epsilon_n^{ak}},\quad 0<k<n,$$

——得到 Apostol-Dedekind 和的类似表示 [2], 第 521 页。

2. 离散傅里叶变换

设 n-周期序列 $K=\{K_j\}$ 与序列 $C=\{C_k\}$ 通过离散傅里叶变换相关

$$C_k=\sum_{j=0}^{n-1}K_j\epsilon_n^{kj},$$

$$K_j=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}C_k\epsilon_n^{-kj}.$$

序列 $\{\epsilon_n^{-kr}C_{-k}\}$ 的拉格朗日插值多项式 $C^{(r)}(q)$ 由以下条件定义：$\deg C^{(r)}(q) < n$，且

$$C^{(r)}(\epsilon_n^{-k}) = \epsilon_n^{-kr}C_{-k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

命题 1。

$$C^{(r)}(q) = \sum_{j=0}^{n-1} K_{j-r}q^j. \tag{2}$$

证明。根据拉格朗日公式

$$\begin{aligned}\frac{C^{(r)}(q)}{q^n-1} &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\epsilon_n^{-k}\epsilon_n^{-kr}C_{-k}}{q-\epsilon_n^{-k}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\epsilon_n^{-k}\sum_{j=0}^{n-1}K_{j-r}\epsilon_n^{-kj}}{q-\epsilon_n^{-k}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}K_{j-r}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\epsilon_n^{-k}\epsilon_n^{-kj}}{q-\epsilon_n^{-k}}. \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{n-1}K_{j-r}q^j}{q^n-1}. \qquad \square\end{aligned} \tag{3}$$

3. 联合乘法公式

命题 2。对于 $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$

$$\begin{aligned}&(-1)^{p-1}mE_{m,n}^{r,p}(nq,\lambda;C) \\ &= C_0B_m(nq,\lambda) - n^m\sum_{j=0}^{n-1}K_{j-r-p+1}\lambda^j B_m\left(q+\frac{j}{n},\lambda^n\right).\end{aligned} \tag{4}$$

证明。广义弗罗贝尼乌斯-欧拉多项式存在生成函数，因此可以写出类似的和式 (1)

$$\begin{aligned}G_n^{r,p}(q,\lambda,t;C) &:= \sum_{m=0}^{\infty}E_{m+1,n}^{r,p}(q,\lambda;C)\frac{t^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\epsilon_n^{-kr}H_m^{(p)}(q,\lambda,\epsilon_n^{-k})C_{-k}}{(1-\epsilon_n^k)^p}\frac{t^m}{m!}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\epsilon_n^{-kr} C_{-k}}{(1-\epsilon_n^k)^p} \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(p)}(q, \lambda, \epsilon_n^{-k}) \frac{t^m}{m!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\epsilon_n^{-kr} C_{-k} (1-\epsilon_n^{-k})^p}{(1-\epsilon_n^k)^p (\lambda e^t - \epsilon_n^{-k})} e^{qt}$$

$$= (-1)^p \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\epsilon_n^{-k} \epsilon_n^{-k(r+p-1)} C_{-k}}{(\lambda e^t - \epsilon_n^{-k})} e^{qt}. \tag{5}$$

在最后一个和式中加入对应于 $k = 0$ 的项，并将其与公式 (3) 比较，可得

$$\frac{C_0}{\lambda e^t - 1} e^{qt} + (-1)^p G_n^{r,p}(q, \lambda, t; C) = \frac{n C^{(r+p-1)}(\lambda e^t)}{\lambda^n e^{nt} - 1} e^{qt}.$$

将此关系式乘以 $te^{(n-1)qt}$ 并应用公式 (2)

$$\frac{C_0 t}{\lambda e^t - 1} e^{nqt} + (-1)^p t G_n^{r,p}(q, \lambda, t; C) e^{(n-1)qt}$$

$$= \frac{nt \sum_{j=0}^{n-1} K_{j-r-p+1} \lambda^j e^{jt}}{\lambda^n e^{nt} - 1} e^{nqt} = \frac{nt \sum_{j=0}^{n-1} K_{j-r-p+1} \lambda^j e^{\left(q+\frac{j}{n}\right)nt}}{\lambda^n e^{nt} - 1}. \tag{6}$$

将等式链 (5) 反向推导，得到

$$t G_n^{r,p}(q, \lambda, t; C) e^{(n-1)qt} = t(-1)^p \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\epsilon_n^{-k} \epsilon_n^{-k(r+p-1)} C_{-k}}{(\lambda e^t - \epsilon_n^{-k})} e^{nqt}$$

$$= t \sum_{m=0}^{\infty} E_{m+1,n}^{r,p}(nq, \lambda; C) \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} m E_{m,n}^{r,p}(nq, \lambda; C) \frac{t^m}{m!}. \tag{7}$$

将公式 (6) 中 Apostol-Bernoulli 多项式的生成函数展开为级数，并应用公式 (7)，得到

$$C_0 \sum_{m=0}^{\infty} B_m(nq, \lambda) \frac{t^m}{m!} + (-1)^p \sum_{m=1}^{\infty} m E_{m,n}^{r,p}(nq, \lambda; C) \frac{t^m}{m!}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} K_{j-r-p+1} \lambda^j \sum_{m=0}^{\infty} n^m B_m \left(q + \frac{j}{n}, \lambda^n\right) \frac{t^m}{m!}$$

现在比较变量 t 的相同次幂的系数。□

在公式 (4) 中令 $C_0 = n$, $C_k = 0$, $n \nmid k$,

$$K_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C_k \epsilon_n^{-kj} = 1, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$E_{m,n}^{r,p}(q,\lambda;C)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\epsilon_n^{-kr}H_{m-1}^{(p)}(q,\lambda,\epsilon_n^{-k})C_{-k}}{(1-\epsilon_n^k)^p}=0,$$

便得到阿波斯托尔-伯努利多项式的乘法公式 [3]

$$B_m(nq,\lambda)=n^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\lambda^j B_m\left(q+\frac{j}{n},\lambda^n\right).$$

4. 示例

设对于 $1\leqslant j\leqslant n$ $K_j=1$，若 $(j,n)=1$，且 $K_j=0$，若 $(j,n)>1$，其中 $n\in\mathbb{Z}_{>1}$ 和 (j,n) 是最大公约数。则

$$C_k=\sum_{j=0}^{n-1}K_j\epsilon_n^{kj}=\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\(j,n)=1}}\epsilon_n^{kj}$$

——拉马努金和（圆分多项式的根的幂和），特别地，$C_0=\phi(n)$——欧拉函数，$C_1=\mu(n)$——莫比乌斯函数。根据 [5], 第 75 页,

$$C^{(0)}(q)=\sum_{j=0}^{n-1}K_jq^j$$

$$=\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\(j,n)=1}}q^j=(q^n-1)\sum_{d|n}\frac{\mu(d)q^d}{q^d-1}=(q^n-1)\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{q^d-1}.$$

最后一个等式由条件 $n>1$ 和莫比乌斯函数的定义得出：$\mu(1)=1$,

$$\sum_{d|n}\mu(d)=0,\quad n>1.$$

设

$$V_n^{(k)}(\lambda):=\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\(j,n)=1}}j^k\lambda^j=\left(q\frac{d}{dq}\right)^k\sum_{j=0}^{n-1}K_jq^j.$$

包含和$V_n^{(k)}(1)$显式公式的参考文献见 [4], 第 242 页。例如， $V_{(0)n}(1) = \phi(n)$和

$$V_n^{(1)}(1) = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\(j,n)=1}} j = \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\(j,n)=1}} (j+(n-j)) = \frac{n\phi(n)}{2}.$$

当 $r+p=1$ 时，公式 (4) 将变为

$$(-1)^{p-1}mE_{m,n}^{r,p}(nq,\lambda;C)$$

$$= \phi(n)B_m(nq,\lambda) - n^m \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\(j,n)=1}} \lambda^j B_m\left(q+\frac{j}{n},\lambda^n\right).$$

众所周知

$$B_m(q,\lambda) = \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}q^{m-i}B_i(\lambda),$$

其中 $B_i(\lambda) := B_i(0,\lambda)$。因此

$$-\frac{(-1)^{p-1}mE_{m,n}^{r,p}(nq,\lambda;C)-\phi(n)B_m(nq,\lambda)}{n^m} = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\(j,n)=1}} \lambda^j B_m\left(q+\frac{j}{n},\lambda^n\right)$$

$$= \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\(j,n)=1}} \lambda^j \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\left(q+\frac{j}{n}\right)^{m-i} B_i(\lambda^n)$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}B_i(\lambda^n)\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\(j,n)=1}} \lambda^j \sum_{k=0}^{m-i}\binom{m-i}{k}\frac{j^k}{n^k}q^{m-i-k}$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{m-i}\frac{1}{n^k}\binom{m}{i}\binom{m-i}{k}B_i(\lambda^n)q^{m-i-k}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\(j,n)=1}} j^k\lambda^j$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{m-i}\frac{m!}{n^k i!k!}B_i(\lambda^n)V_n^{(k)}(\lambda)\frac{q^{m-i-k}}{(m-i-k)!}.$$

因此

$$(-1)^{p-1}mE_{m,n}^{r,p}(nq,\lambda;C)$$

$$= \phi(n)B_m(nq,\lambda) - \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{m-i}\frac{n^{m-k}m!}{i!k!}B_i(\lambda^n)V_n^{(k)}(\lambda)\frac{q^{m-i-k}}{(m-i-k)!}.$$

参考文献

[1]M. Beck、S. Robins，《连续离散化：多面体中的整点计数》，第2版，施普林格，纽约，2015年。[2] L. Carlitz，广义Dedekind和的一些定理，《太平洋数学杂志》3（1953），513–522。[3] Q.-M. Luo，高阶 Apostol-Bernoulli 多项式和 Apostol-Euler 多项式的乘法公式，《积分变换与特殊函数》20（2009），377–391。[4] J. S´andor、B. Crstici，《数论手册II》，施普林格出版社，2005年。[5] H. S. Wilf，《生成函数学》（第3版），A K Peters出版社，韦尔斯利，马萨诸塞州，2006年。电子邮箱：ilgena@rambler.ru