arXiv:2301.03258v1 [math.AP] 9 Jan 2023

具有临界指数的一类半线性分数阶方程的诺伊曼问题

SOMNATH GANDAL, JAGMOHAN TYAGI

Abstract. 我们证明了以下分数阶拉普拉斯算子半线性 Neumann 问题的解存在：其指数为临界指数：

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + \lambda u = |u|^{p-1}u & \text{in } \Omega, \\ \mathcal{N}_s u(x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

其中， $\lambda > 0$ 是一个常数，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是具有光滑边界的有界区域。这里， $p = \frac{n+2s}{n-2s}$ 是临界指数， $n > \max\{4s, \frac{8s+2}{3}\}$， $s \in (0,1)$。由于问题中含有临界指数，相应的泛函J_λ 不满足 Palais-Smale (PS)条件，因此无法使用标准变分方法求出 J_λ. 的临界点。我们通过建立瑞利商的界，并借助有界区域上的 Cherrier最优Sobolev不等式的非局部版本，克服了这些困难。我们还证明了这些解在小区域中的唯一性。

Contents

1. 引言 1
2. 预备知识 3. Cherrier最优Sobolev不等式 4. 最小能量解的存在性 附录：临界情形下最小能量解的唯一性 5. 致谢 参考文献 1
4
6
8
14
17
17

1. Introduction

我们证明以下分数阶拉普拉斯算子半线性诺伊曼问题的非恒定解存在：$(-\Delta)^s$， $s \in (0,1)$：

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + \lambda u = |u|^{p-1}u & \text{in } \Omega, \\ \mathcal{N}_s u(x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 C^1光滑有界区域， $\lambda > 0$ 是一个常数，且 $p = \frac{n+2s}{n-2s}, n > \max\left\{4s, \frac{8s+2}{3}\right\}$. 对于光滑函数，分数阶拉普拉斯算子$(-\Delta)^s$ 定义如下：

$$(-\Delta)^s u(x) := c_{n,s} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy, \ \ s \in (0,1). \tag{1.2}$$

这里，P.V. 表示“在主值意义下”，而 $c_{n,\ s}$ 是一个归一化常数，其定义为

$$c_{n,s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - cos(\theta_1)}{|\theta|^{n+2s}} d\theta \right)^{-1}, \tag{1.3}$$

Date：2023年1月10日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 35R11, 35B09, 35B40, 35J61, 35D30。
Key words and phrases. 半线性 Neumann 问题，分数阶拉普拉斯算子，正解，存在性与唯一性。提交于2023年1月10日。发表日期——。

例如参见 [15, 25]。算子 $\mathcal{N}_s w$ 表示非局部法向导数，其对光滑函数的定义为

$$\mathcal{N}_s w(x) := c_{n,s} \int_\Omega \frac{w(x) - w(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \tag{1.4}$$

其中 $c_{n,\ s}$ 是式 (1.3) 中给出的同一归一化常数。

注 1.1. 上述定义的非局部法向导数 $\mathcal{N}_s w$ 在 $s \to 1$ 时趋近于经典法向导数 $\partial_\nu w$ （见命题 5.1 [26]）。

近年来，人们越来越关注非局部问题的存在性、渐近行为及其他相关定性问题，这些问题涉及 $(-\Delta)^s$. 。例如，参见 [10, 11, 15, 27, 28, 33, 43, 44]及其中的参考文献。对这类涉及非局部扩散算子的问题的研究，受到其在图像处理 [33], 、流体动力学 [34, 37, 40], 、金融 [22, 45] 等领域应用的推动。关于包含分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^s$ 以及其他 s-非局部算子的诺伊曼问题，更多内容请参见 [14, 23, 26, 32, 38] 及其中的参考文献。

问题 (1.1) 是以下经典诺伊曼问题的分数阶对应形式 :

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-1} u & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

其中 $\lambda > 0$ 是一个常数，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是具有光滑边界的有界区域。许多研究者从不同角度研究了 (1.5)。为介绍早期进展，我们仅提及与本文密切相关的论文。次临界情形，即 (1.5) 的 $1 < p < \frac{n+2}{n-2}, n \geq 3$，已在 Lin 等人 [35] 以及 C. S. Lin 和 W. M. Ni [36] 的论文中得到深入研究。他们证明，当 λ 充分大时，(1.5) 存在非常数解；而当 λ 较小时，(1.5) 不存在非常数解。临界情形，即$p = \frac{n+2}{n-2}$，与次临界情形截然不同。(1.5) 的非常数解对应于能量泛函的临界点

$$F_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega |u|^{p+1} \, dx, \quad u \in H^1(\Omega).$$

由于嵌入 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ 缺乏紧性，能量泛函 F_λ 不满足 Palais-Smale（PS）条件。因此，无法使用标准变分方法求出能量泛函的临界点。值得指出的是，在临界情形下，边界几何对于确立解的存在性与不存在性起着重要作用。Adimurthi 和 G. Mancini [1] 以及 X. J. Wang [50]证明，当一般区域 Ω 中的 λ 充分大时，方程 (1.5) 存在具有临界指数的非常数解。当 Ω 是一个球且 λ 很小时，Adimurthi 和 S. L. Yadava [4] 以及 Budd 等人 [19] 证明，在低维情形 $n = 4$、5、6 中存在非常数解。在这些研究中，作者考虑了具有临界指数的方程。

我们注意到，对于相关能量泛函不满足(PS)条件的椭圆问题，Cherrier最优Sobolev不等式发挥着至关重要的作用，参见 [3]。有关Cherrier最优Sobolev不等式的详细内容，可参见定理2.30 [8] 和 [20] 。

最近，E. Cinti和F. Colasuonno [21] 研究了具有Neumann 边界条件的非局部问题，并证明了以下问题存在非负径向解：

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + u = h(u) & \text{in } \Omega, \\ \mathcal{N}_s u(x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中$s > \frac{1}{2}$，Ω为球或环域， h 为超线性非线性项。在 [46, 47], 中，R. Servadei和E. Valdinoci研究了非局部情形下具有Dirichlet边界的Brezis-Nirenberg问题，涵盖次临界指数和临界指数。具体而言，他们考虑了形式为 $\lambda u + u^{p-1}$的非线性项，其中 $\lambda > 0$ 且 $1 < p \leq \frac{n+2s}{n-2s}$。Bhakta等人 [12, 13] 研究了具有非局部Dirichlet数据、非线性项含有临界增长和超临界增长的分数阶拉普拉斯算子半线性问题。参见 [39], ， D. Mugnai和E. Proietti Lippi 在那里利用锥上的链接这一概念，证明了Neumann分数阶 p-拉普拉斯算子存在非平凡解。关于具有谱Neumann分数阶拉普拉斯算子和临界非线性项的半线性问题的解的存在性，参见 [49] 。

容易看出， $u_0 = 0$ 和 $u_\lambda = \lambda^{\frac{1}{p-1}} = \lambda^{\frac{(n-2s)}{4s}}$ 是方程（1.1）的唯一常数解。因此，受局部情形的启发，我们对寻找方程（1.1）的非常数解感兴趣。Barrios等人 [11] 已经证明，在次临界情形下存在

方程（1.1）的一个非常数解 $1 < p < \frac{n+2s}{n-2s}$. 。该问题的非常数解对应于能量泛函 J_λ的临界点，其中 J_λ 由下式给出

$$J_\lambda(u) := \frac{1}{2}\Big[\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy + \lambda\int_\Omega u^2dx\Big] - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx, \quad u \in H^s_\Omega.$$

在上述方程中， $T(\Omega) = \mathbb{R}^{2n}\setminus(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)^2$，空间 H^s_Ω 将在（2.2）中进一步定义。他们运用 Ambrosetti-Rabinowitz 的山路引理 [6]，找到了该泛函的临界点。由于 H^s_Ω 并未紧嵌入到 $L^{\frac{2n}{n-2s}}(\Omega)$ 中，在临界情形（即 $p = \frac{n+2s}{n-2s}$）下，经典变分方法无法找到 J_λ. 的临界点。在这种具有挑战性的情况下，对于适当的 λ，建立以下不等式十分重要:

$$\inf_{u\in H^s_\Omega, \|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}=1}\left\{\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy + \lambda\int_\Omega u^2dx\right\} < \frac{S}{2^{\frac{2s}{n}}}, \tag{1.7}$$

其中， S 是分数阶 Sobolev 嵌入的最佳常数

$$H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2s}}(\mathbb{R}^n).$$

对于经典情形，可参阅 T. Aubin [9], 、H. Brezis 和 L. Nirenberg [17], 、H. Brezis[18] 以及 Adimurthi 等人 [1, 3]的一些著名著作。为建立上述不等式（1.7），我们计算比值

$$K_\lambda(V_\epsilon) = \frac{\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)}\frac{|V_\epsilon(x)-V_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy + \lambda\int_\Omega V_\epsilon^2dx}{\left(\int_\Omega |V_\epsilon|^{p+1}dx\right)^{\frac{2}{p+1}}}, \tag{1.8}$$

其中

$$V_\epsilon(x) = \frac{\psi(x)}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{(n-2s)}{2}}}, \epsilon > 0$$

且 ψ 是一个截断函数。函数

$$(\epsilon+|x|^2)^{\frac{-(n-2s)}{2}}$$

是 $\mathbb{R}^n$中的分数阶 Sobolev 嵌入的极值函数。接下来，我们得到 Cherrier最优Sobolev不等式的以下非局部类比。

定理 1.2.（Cherrier最优Sobolev不等式的非局部版本）设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 C^1. 类有界区域。则对每个 $\epsilon > 0$，存在一个常数 $A(\epsilon) > 0$，使得对任意 $u \in H^s_\Omega$，有

$$\left(\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{2}{p+1}} \le \left(\frac{2^{\frac{2s}{n}}}{S}+\epsilon\right)\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy + A(\epsilon)\int_\Omega u^2dx. \tag{1.9}$$

不等 式 (1.7) 和 (1.9) 是证明本文以下存在性结果的重要工具。 r.

定理 1.3. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个 C^1. 类有界区域。设 $p = \frac{n+2s}{n-2s}$， $n >$最大值 $\{4s, \frac{8s+2}{3}\}$ 且 $s \in (0, 1)$。那么存在一个常数 $\lambda^* > 0$，使得对于 $\lambda > \lambda^*$，问题

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + \lambda u = |u|^{p-1}u & in\ \Omega, \\ \mathcal{N}_s u(x) = 0 & in\ \mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}, \\ u \ge 0 & in\ \Omega, \end{cases} \tag{1.10}$$

存在一个非恒定解 v_0，使得 $J_\lambda(v_0) < \frac{sS^{\frac{n}{2s}}}{2n}$.

研究半线性 Neumann 问题的最小能量解的渐近行为也引起了广泛关注。W. M. Ni 和 I. Takagi [41, 42] 证明，对于足够大的 λ，方程 (1.5) 的最小能量解 v_λ 在 Ω 的边界上的唯一一点处取得最大值。即使在临界情形下，Adimurthi 等人 [2]也证明了同样的结论。此外，还有其他类型的渐近行为结果。为此，我们考虑以下区域族

$$\Omega_\eta = \{\eta x : x \in \Omega\}$$

关于解的渐近行为。对于收缩区域，即 $\eta \to 0$，以及扩张区域，即 $\eta \to \infty$，经典的.....会导致最佳 Sobolev 常数和极值函数的行为发生变化，对此进行了详细分析。

Sobolev嵌入可见 [24, 28, 29] 及其中的参考文献。令 $S_q(\Omega)$ 为 Sobolev 迹嵌入 $W^{1,\,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$ 的最佳常数，其中 $n \geq 2$、$1 < p < n$，且 $1 < q \leq {}^{p}{}_{(n-1)\,n-p}$ ·。特别地，当 $n \geq 3$、$p = 2$ 且 $2 < q < {}^{2}{}_{(n-1)\,n-2}$ 时，del Pino等人 [24] 研究了扩张区域中最佳常数 $S_q(\Omega)$ 及其相关极值函数族的渐近行为。他们证明，$S_q(\Omega_\lambda)$ 趋近于 $S_q(\mathbb{R}^n_+)$，且极值函数会在边界曲率达到最大值的点附近形成峰值。在更一般的情况下，当 $1 < p < n$、$1 < q < {}^{p}{}_{(n-1)\,n-p}$ 时，Fern´andez Bonder等人 [29] 讨论了扩张和收缩区域中 $S_q(\Omega)$ 的渐近行为。在该论文中，他们证明 $S_q(\Omega)$ 的行为取决于 p 和q。此外，在收缩区域中，极值函数收敛于一个常数；而在扩张区域中，极值函数则集中于边界。

定义

$$Y_p(\Omega) := \inf_{v \in H^s(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|v\|^2_{H^s(\Omega)}}{\|v\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}}. \tag{1.11}$$

对于光滑有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，我们有 $H^s(\Omega)$ 紧嵌入于 $L^{p+1}(\Omega)$，其中 $0 \leq p < \frac{n+2s}{n-2s}$。因此，在次临界情形下，上述方程存在极值函数$1 < p < \frac{n+2s}{n-2s}$. 对于$Y_p$ 的任意极值函数都是以下问题的弱解

$$(-\Delta)^s u + u = \lambda\,|u|^{p-1}\,u,$$

其中 λ 是某个常数。最近，Fern´andez Bonder 等人 [30] 描述了次临界情形下，当 η 趋于零时，最佳常数 $Y_p(\Omega_\eta)$ 及相应极值函数的渐近行为。更确切地说，设 u_η是 $Y_p(\Omega_\eta)$ 的一个极值函数。研究表明，任意经过重新缩放的极值函数

$$\bar{u}_\eta = u_\eta(\eta x)$$

在归一化为

$$\|\bar{u}_\eta\|_{L^{p+1}(\Omega)} = 1$$

${}_{-1}$在 $H^s(\Omega)$ 中强收敛到 $|\Omega|^{\overline{p+1}}$。利用这一渐近行为，他们证明了收缩域上最小能量解的唯一性，参见 [30]。

受上述工作的启发，我们证明了（1.1）的最小能量解的唯一性。我们利用隐函数定理，并沿用 [30]中处理次临界情形的类似方法，证明最小能量解的唯一性。具体而言，我们有

定理 1.4. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，$p$，$n$，$s$ 和 λ^* 与定理 1.3 中的定义相同。设 $\lambda > \lambda^*$，则存在一个 $\delta > 0$，使得 $X_\lambda(\Omega_\eta)$ 在 $0 < \eta < \delta$时有唯一极小化子，其中 $X_\lambda(\Omega_\eta)$ 定义于（4.4）中。

本文结构安排如下。第 2 节介绍本文所用的一些有用结果。第 3 节给出定理 1.2 的证明。第 4 节证明定理 1.3。附录中给出定理 1.4 在薄域情形下的证明。

2. Preliminaries

我们回顾本文中用到的重要结果。

定理 2.1.（分数阶 Sobolev 嵌入 [25]）令 $n > 2s$ 和 $p = \frac{n+2s}{n-2s}$ 为分数阶临界指数。则有以下嵌入关系：

（1）对于任意可测函数 $u \in C_0(\mathbb{R}^n)$，当 $q \in [0, p]$ 时，有：

$$\|u\|^2_{L^{q+1}(\mathbb{R}^n)} \leq B(n,s) \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy$$

对于某个常数 B，其取值取决于 n 和 s。这意味着 $H^s(\mathbb{R}^n)$连续嵌入到 $L^{q+1}(\mathbb{R}^n)$。

（2）设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是 $H^s(\Omega)$ 的有界延拓域。那么对于任意 $q \in [0, p]$，空间 $H^s(\Omega)$ 连续嵌入到$L^q(\Omega)$，即：

$$\|u\|^2_{L^{q+1}(\Omega)} \leq B(n,s)\,\|u\|^2_{H^s(\Omega)}$$

对于某个常数 B，其取值取决于 n、s 和 Ω。此外，对于任意 $q \in [0, p)$，上述嵌入是紧的。

下一个定理给出了嵌入 $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2s}}(\mathbb{R}^n)$ 的最佳常数。

定理 2.2。（定理 1.*1,* [7]）设 $n > 2s$ 和 $p+1 = \frac{2n}{n-2s}$.，则

$$S\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}} \leq \frac{c_{n,s}}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy, \quad \forall\ u \in H^s(\mathbb{R}^n), \tag{2.1}$$

其中 $c_{n,\ s}$ 是 (1.3) 中定义的归一化常数， S 是上述不等式中的最佳常数。具体而言，

$$S = 2^{2s}\pi^s \frac{\Gamma(\frac{n+2s}{2})}{\Gamma(\frac{n-2s}{2})}\left[\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n)}\right]^{\frac{2s}{n}}.$$

在 (2.1) 中，当 i ff $u(x) = \frac{c}{(\epsilon+|x-z_0|^2)^{\frac{n-2s}{2}}}$，$x \in \mathbb{R}^n$，其中 $c \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0\ and\ z_0 \in \mathbb{R}^n$ 是固定常数 .

下一个引理是法图引理的一个改进版本，Adimurthi 和 Mancini [1] 以及 Adimurthi 和 Yadava [3] 曾使用过该引理。

引理 2.3.（Brezis-Lieb [16]）设 (Ω μ) 是一个可测空间。若 $\{u_k\}$ 是 L^q(Ω μ) 中的有界序列，$q \in$ (1, ∞) 且 $u_k \to u$ 几乎处处成立，则

$$\int_\Omega |u|_k^q d\mu - \int_\Omega |u|^q d\mu - \int_\Omega |u_k - u|^q d\mu \to 0.$$

当 $q = 2$ 时，即使不假设几乎处处收敛，Brezis-Lieb 引理的结论仍然成立。这意味着，如果 $u_k \rightharpoonup u$ 在 L^2(Ω) 中弱收敛，那么

$$\begin{aligned}\|u_k\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|u_k - u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} - 2(u_k - u, u)\\ &= \|u_k - u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + o(1).\end{aligned}$$

Let

$$T(\Omega) := \mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)^2.$$

定义

$$H^s_\Omega := \left\{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ measurable} : \|u\|_{H^s_\Omega} < \infty\right\} \tag{2.2}$$

其赋范为

$$\|u\|^2_{H^s_\Omega} := \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{T(\Omega)} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\right). \tag{2.3}$$

注 2.4. H^s_Ω 是一个希尔伯特空间（参见 [26], 命题 3.1）。

注 2.5. 设 $u \in H^s_\Omega$，则

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy \leq \int_{T(\Omega)} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy < \infty.$$

这意味着 t 在 Ω 上的限制属于 H^s(Ω)，因此我们有连续嵌入 $H^s_\Omega \hookrightarrow H^s$(Ω).

事实上，我们有如下嵌入：

命题 2.6.（命题 2.*4* [21]）设 Ω $\subset \mathbb{R}^n$ 是一个 C^1 类有界区域，且 $p = \frac{n+2s}{n-2s}, n > 2s$，则$H^s_\Omega$ 紧嵌入到 L^q(Ω) 中，对任意 $q \in [1, p+1)$ 。

现在，让我们回顾分部积分公式 [26]。

引理 2.7. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的有界 C^2 函数 v, w ，我们有

$$\int_\Omega w(-\Delta)^s v dx = \frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)} \frac{(v(x)-v(y))(w(x)-w(y))}{|x-y|^{n+2s}}dxdy - \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \mathcal{N}_s(v)w dx,$$

其中 $c_{n,\ s}$ 是 (1.3) 中的归一化常数。

分部积分公式导出了诺伊曼问题的以下弱形式。

定义 2.8. 设 $h \in L^2(\Omega)$ 和 $u \in H^s_\Omega$.，我们称 u 是

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + \lambda u = h & \text{in } \Omega, \\ \mathcal{N}_s u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \end{cases}$$

只要

$$\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)} \frac{(u(x)-u(y))(w(x)-w(y))}{|x-y|^{n+2s}}dxdy + \lambda\int_\Omega uwdx = \int_\Omega hwdx \ \text{ holds } \forall\, w \in H^s_\Omega.$$

3. Cherrier's Optimal Sobolev Inequality

设 $s \in (0,1)$ $n > 2s$. 在本节中，我们固定指数 $p = \frac{n+2s}{n-2s}$，并令 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个 C^1 类有界区域。令 $T(\Omega) := \mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)^2$ 为 Ω 上的一个十字形集合，且 S 为嵌入 $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ 的最佳 Sobolev 常数。本节讨论非局部情形下 Cherrier 最优 Sobolev 不等式的推广，该不等式在我们的存在性定理中起着重要作用。定义

$$E := \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$$

and

$$D := \overline{E} \cap B_1.$$

以下是一些重要引理，它们有助于在有界区域上获得最优分数阶 Sobolev 不等式。这些引理取自 [25]，并经过了一些修改。

引理 3.1.（引理 5.*1* [25]）设 $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为一个可测函数，在 B_r 上属于 C^1，其中 $r > 0$，且其支集包含于 B_r.。则 h 满足：

$$\left(\int_{B_r} |h|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{2}{p+1}} \le \frac{1}{S}\left(\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(B_r(0))} \frac{|h(x)-h(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\right). \tag{3.1}$$

证明。设 $K = supp(h) \subset B_r$ 是一个紧集。定义

$$\overline{h}(x) := \begin{cases} h(x), & x \in B_r, \\ 0, & x \in \mathcal{C}B_r. \end{cases}$$

于是显然 $\overline{h} \in H^s(\mathbb{R}^n)$。现在，根据定理 2.2，我们得到

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_r} |h|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{2}{p+1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\overline{h}\right|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{2}{p+1}} &\le \frac{1}{S}\left(\frac{c_{n,s}}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|\overline{h}(x)-\overline{h}(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\right) \\ &\le \frac{1}{S}\left(\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(B_r(0))} \frac{|h(x)-h(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

□

引理 3.2。（引理 5.*2* [25]）设 $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个可测函数，在 E 上 C^1，且支集包含于 D.。那么 h满足：

$$\left(\int_E |h|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{2}{p+1}} \le \frac{2^{\frac{2s}{n}}}{S}\left(\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(E)} \frac{|h(x)-h(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\right). \tag{3.3}$$

证明。定义

$$\widetilde{h}(x) := \begin{cases} h(x), & \text{if } x \in E, \\ h(\widetilde{x}), & \text{if } x \in \mathcal{C}E, \end{cases}$$

~ ~其中 $\widetilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, -x_n)$。容易验证，$h$ 是一个在 $\mathbb{R}^n$. 中具有紧支撑的 C^1 函数。因此 $h \in H^s(\mathbb{R}^n)$。利用分数阶Sobolev嵌入定理，我们得到

$$\left\|\widetilde{h}\right\|^2_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{S}\left[\frac{c_{n,s}}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|\widetilde{h}(x)-\widetilde{h}(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\right]. \tag{3.4}$$

由于

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|\widetilde{h}\right|^{p+1}=2\int_E|h|^{p+1}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left|\widetilde{h}(x)-\widetilde{h}(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\le 2\int_{T(E)}\frac{|h(x)-h(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy,$$

因此，引理得证。 □

我们使用单位分解来证明定理 1.2。

定理 1.2 的证明：设 $\{h_i\}_{i\in I}$ 是一个从属于 Ω 的有限开覆盖 $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ 的 C^∞ 单位分解，其中每个 Ω_i 都同胚于一个 $\mathbb{R}^n$ 球或如上所定义的 D 半球。设 $|I|=k$，其中 $k>0$. 为某个整数。我们对 $u\in H^s_\Omega\cap C^\infty(\Omega)$ 证明该定理。对于 $u\in H^s_\Omega$ 的情形，可通过逼近证明。由引理 3.1 和 3.2，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I}\left\|u^2h_i\right\|_{L^{\frac{p+1}{2}}(\Omega_i)}&=\sum_{i\in I}\left\|uh_i^{\frac12}\right\|^2_{L^{p+1}(\Omega_i)}\\
&\le\frac{2^{\frac{2s}{n}}}{S}\sum_{i\in I}\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega_i)}\frac{\left|u(x)h_i^{\frac12}(x)-u(y)h_i^{\frac12}(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\\
&\le\frac{2^{\frac{2s}{n}}}{S}\sum_{i\in I}\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)}\frac{\left|u(x)h_i^{\frac12}(x)-u(y)h_i^{\frac12}(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\\
&\le\frac{2^{\frac{2s}{n}}}{S}\left(\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)}\sum_{i\in I}\left(\frac{\left|(u(x)-u(y))h_i^{\frac12}(x)+u(y)(h_i^{\frac12}(x)-h_i^{\frac12}(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\right)\right)\\
&\le\frac{2^{\frac{2s}{n}}}{S}\left(\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)}\sum_{i\in I}\left(\frac{|(u(x)-u(y))|^2|h_i(x)|}{|x-y|^{n+2s}}+\frac{2|(u(x)-u(y))|\left|h_i^{\frac12}(x)\right||u(y)|\left|h_i^{\frac12}(x)-h_i^{\frac12}(y)\right|}{|x-y|^{n+2s}}\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\frac{|u(y)|^2\left|h_i^{\frac12}(x)-h_i^{\frac12}(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\right)dxdy\right)\\
&\le\frac{2^{\frac{2s}{n}}}{S}\left(\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)}\frac{|(u(x)-u(y))|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy+\frac{c_{n,s}}{2}\sum_{i\in I}\int_{T(\Omega)}\frac{2|(u(x)-u(y))|\left|h_i^{\frac12}(x)\right||u(y)|\left|h_i^{\frac12}(x)-h_i^{\frac12}(y)\right|}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\right.\\
&\quad\left.+\frac{c_{n,s}}{2}\sum_{i\in I}\int_{T(\Omega)}\frac{|u(y)|^2\left|h_i^{\frac12}(x)-h_i^{\frac12}(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\right).
\end{aligned}$$

现在，我们使用下面的不等式来简化上述不等式右侧的第二个积分。对于任意 a、b 和 λ 三个正实数，我们有

$$2ab\le\eta a^2+\frac{1}{\eta}b^2.$$

取 $a=|(u(x)-u(y))|, b=\left|h_i^{\frac12}(x)\right||u(y)|\left|h_i^{\frac12}(x)-h_i^{\frac12}(y)\right|$，并应用引理 5.3 [25],，得到

$$\sum_{i\in I}\left\|u^2h_i\right\|_{L^{\frac{p+1}{2}}(\Omega_i)} \le \frac{2^{\frac{2s}{n}}}{S}\left(\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)}\frac{|(u(x)-u(y))|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy + \frac{c_{n,s}}{2}\sum_{i\in I}\int_{T(\Omega)}\frac{\eta\,|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\right.$$
$$+\frac{c_{n,s}}{2}\sum_{i\in I}\int_{T(\Omega)}\frac{\eta^{-1}\,|h_i(x)|\,|u(y)|^2\left|h_i^{\frac12}(x)-h_i^{\frac12}(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy + \frac{c_{n,s}}{2}\sum_{i\in I}\int_{T(\Omega)}\frac{|u(y)|^2\left|h_i^{\frac12}(x)-h_i^{\frac12}(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\Bigg)$$
$$\le \frac{2^{\frac{2s}{n}}}{S}\left(\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)}\frac{|(u(x)-u(y))|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy + k\eta\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\right.$$
$$\left.+\frac{k}{\eta}C_1(n,s,\Omega)\int_\Omega u^2(y)dy + kC_2(n,s,\Omega)\int_\Omega u^2(y)dy\right),$$

其中 $C_1(n,s,\Omega)$ 和 $C_2(n,s,\Omega)$ 是一些正常数。令 $\epsilon_0 = k\eta$，且 $A(\epsilon_0) = \frac{k}{\eta}C_1(n,s,\Omega) + kC_2(n,s,\Omega)$，得到

$$\sum_{i\in I}\left\|u^2h_i\right\|_{L^{\frac{p+1}{2}}(\Omega_i)} \le \frac{2^{\frac{2s}{n}}}{S}(1+\epsilon_0)\left(\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)}\frac{|(u(x)-u(y))|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy + A(\epsilon_0)\int_\Omega u^2(y)dy\right).$$

Now,

$$\|u\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} = \left\|u^2\right\|_{L^{\frac{p+1}{2}}(\Omega)} = \left\|\sum_{i\in I}u^2h_i\right\|_{L^{\frac{p+1}{2}}(\Omega)}$$
$$\le \sum_{i\in I}\left\|u^2h_i\right\|_{L^{\frac{p+1}{2}}(\Omega)}$$
$$\le \frac{2^{\frac{2s}{n}}}{S}(1+\epsilon_0)\left(\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)}\frac{|(u(x)-u(y))|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy + A(\epsilon_0)\int_\Omega u^2(y)dy\right).$$

取 η 足够小，其中 $\eta = \frac{\epsilon_0}{k}$，使得

$$\frac{2^{\frac{2s}{n}}}{S}(1+\epsilon_0) \le \left(\frac{2^{\frac{2s}{n}}}{S}+\epsilon\right)$$

and

$$A(\epsilon) = \frac{2^{\frac{2s}{n}}}{S}(1+\epsilon_0)A(\epsilon_0).$$

定理 1.2 的证明至此完成。 □

4. Existence of minimal energy solutions

我们的目标是求出方程 (1.1) 的非恒定解。首先介绍预备定义。设 $p = \frac{n+2s}{n-2s}$, $s\in(0,1)$，且 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个 C^1. 类有界区域。令 $u\in H^s_\Omega$，定义

$$\|u\|^2_{s,\Omega,\lambda} := \frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy + \lambda\int_\Omega u^2dx. \tag{4.1}$$

$$J_\lambda(u) := \frac12\|u\|^2_{s,\Omega,\lambda} - \frac{1}{p+1}\int_\Omega|u|^{p+1}dx, \text{ an energy functional.} \tag{4.2}$$

$$K_\lambda(u) := \frac{\|u\|^2_{s,\Omega,\lambda}}{\left(\int_\Omega|u|^{p+1}dx\right)^{\frac{2}{p+1}}}. \tag{4.3}$$

$$X_\lambda(\Omega) := \inf\left\{K_\lambda(u) : u\in H^s_\Omega\setminus\{0\}\right\}. \tag{4.4}$$

引理 4.1. 在上述记号下，我们有

(1) $X_\lambda > 0$.

(2) 假设 $X_\lambda < \frac{S}{2^{\frac{2s}{n}}}$，则存在一个 $v \in H^s_\Omega$，使得 $X_\lambda = K_\lambda(v)$。此外，定义 $v_0 = X_\lambda^{\frac{n-2s}{4s}} v$，则 v_0满足 (1.10)，且 $J_\lambda(v_0) < \frac{sS^{\frac{2s}{2s}}}{2n}$.

证明。(1) 根据分数阶 Sobolev嵌入，存在一个常数 $c > 0$，使得对所有 $u \in H^s_\Omega$，我们有 e

$$\left(\int_\Omega |u|^{p+1} dx\right)^{\frac{2}{p+1}} \le c \|u\|^2_{s;\Omega,\lambda}. \tag{4.5}$$

因此

$$X_\lambda = \inf\left\{K_\lambda(u) \mid u \in_2 H^s_\Omega \setminus \{0\}\right\} > 0.$$

(2) L 且 $\{v_k\}$ 是 X_λ 的极小化序列，使得 $\left(\int_\Omega |v_k|^{p+1} dx\right)^{\frac{2}{p+1}} = 1$. 因此 ,

$$\|v_k\|^2_{s,\Omega,\lambda} = X_\lambda + o(1) \text{ as } k \to \infty.$$

因此，$\{v_k\}$ 是 H^s_Ω. 中的有界序列。因此，我们可以从 $\{v_k\}$ 中提取一个子序列，并仍记作 $\{v_k\}$，使得 $v_k \rightharpoonup v$ 在 H^s_Ω 中弱收敛，且在 Ω 中几乎处处收敛。我们断言 $v \not\equiv 0$. 。否则，由定理 1.2 以及分数阶 Sobolev 空间的紧嵌入，可得

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{c_{n,s}}{2} \int_{T(\Omega)} \frac{|v_k(x) - v_k(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy &= \lim_{k\to\infty} \|v_k\|^2_{s,\Omega,\lambda} \\
&= X_\lambda \\
&= X_\lambda \cdot \left(\int_\Omega |v_k|^{p+1} dx\right)^{\frac{2}{p+1}} \\
&\le X_\lambda \left(\frac{2^{\frac{2s}{n}}}{S} + \epsilon\right) \lim_{k\to\infty} \frac{c_{n,s}}{2} \int_{T(\Omega)} \frac{|v_k(x) - v_k(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy.
\end{aligned}$$

这与我们的假设 $X_\lambda < \frac{S}{2^{\frac{2s}{n}}}$. 矛盾。因此 $v \not\equiv 0$.

现在，我们断言 $K_\lambda(v) = X_\lambda$. 。设 $w_k = v_k - v$，则 w_k 弱收敛到 0，且在 Ω 中几乎处处收敛。因此，由命题 2.6 可得

$$\begin{aligned}
\|v_k\|^2_{s,\Omega,\lambda} &= \|v\|^2_{s,\Omega,\lambda} + \|w_k\|^2_{s,\Omega,\lambda} + o(1) \\
&= \|v\|^2_{s,\Omega,\lambda} + \frac{c_{n,s}}{2} \int_{T(\Omega)} \frac{|w_k(x) - w_k(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy + o(1),
\end{aligned}$$

由此得到

$$X_\lambda = \|v\|^2_{s,\Omega,\lambda} + \frac{c_{n,s}}{2} \int_{T(\Omega)} \frac{|w_k(x) - w_k(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy + o(1). \tag{4.6}$$

现在，由 Brezis-Leib 引理 2.3 和定理 1.2，可得

$$\begin{aligned}
1 &= \|v_k\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} \\
&= \|v\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} + \|w_k\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} + o(1) \\
1 &\le \|v\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} + \left(\frac{2^{\frac{2s}{n}}}{S} + \epsilon\right) \frac{c_{n,s}}{2} \int_{T(\Omega)} \frac{|w_k(x) - w_k(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy + o(1).
\end{aligned}$$

因此

$$X_\lambda \le X_\lambda \|v\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} + X_\lambda \left(\frac{2^{\frac{2s}{n}}}{S} + \epsilon\right) \frac{c_{n,s}}{2} \int_{T(\Omega)} \frac{|w_k(x) - w_k(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy + o(1). \tag{4.7}$$

由 (4.6) 和 (4.7)，我们得到

$$\frac{\|v\|^2_{s,\Omega,\lambda}}{\|v\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}} \leq X_\lambda.$$

因此 v 使 X_λ. 最小化。因此 $K_\lambda(v) = X_\lambda$. 由于 $K_\lambda(v) = K_\lambda(\frac{v}{\|v\|_{L^{p+1}(\Omega)}})$，我们假设 $\|v\|_{L^{p+1}(\Omega)} = 1$. 现在，$_{n-2s}$取 $v_0 = X_\lambda^{\frac{}{4s}} v$. 则

$$J_\lambda(v_0) = X_\lambda^{\frac{n}{2s}} \frac{s}{n} < \frac{sS^{\frac{n}{2s}}}{2n} \text{ (since by assumption } X_\lambda < \frac{S}{2^{\frac{2s}{n}}}). \tag{4.8}$$

接下来，我们证明 v_0 是（1.10）的一个解。由于 $K_\lambda(v) = X_\lambda$，我们得到

$$\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)} \frac{(v(x)-v(y))(w(x)-w(y))}{|x-y|^{n+2s}}dxdy + \lambda\int_\Omega vw = X_\lambda \int_\Omega |v|^{p-1} vw \text{ holds, } \forall w \in H^s_\Omega. \tag{4.9}$$

这意味着

$$\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)} \frac{(v_0(x)-v_0(y))(w(x)-w(y))}{|x-y|^{n+2s}}dxdy + \lambda\int_\Omega v_0 w = \int_\Omega |v_0|^{p-1} v_0 w \text{ holds, } \forall w \in H^s_\Omega. \tag{4.10}$$

因此，根据定义 2.8，我们看到 v_0 是（1.10）的一个解。证明完毕。 □

在下一个命题中，我们得到 Brezis-Nirenberg[17]的方程（1.11）、（1.12）和（1.13）的非局部版本。该命题有助于我们证明前一个引理中关于 X_λ. 的假设

命题 4.2. 设 $\psi \in C_0^\infty(B_{\frac{R}{2}}(0))$ 是一个满足以下条件的非负径向函数：

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & if\ |x| \leq \frac{R}{4}, \\ 0 & if\ |x| > \frac{R}{2}, \end{cases}$$

并且对于 $\epsilon > 0$，定义

$$V_\epsilon(x) := \frac{\psi(x)}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{(n-2s)}{2}}}. \tag{4.11}$$

于是，我们有

$$\frac{c_{n,s}}{2}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|V_\epsilon(x)-V_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy = \frac{L_1}{\epsilon^{\frac{(n-2s)}{2}}} + O(1). \tag{4.12}$$

$$\left(\int_\Omega |V_\epsilon|^{p+1}\right)^{2/p+1} = \frac{L_2}{\epsilon^{\frac{(n-2s)}{2}}} + O(1). \tag{4.13}$$

$$\int_\Omega |V_\epsilon|^2 = \begin{cases} \frac{L_3}{\epsilon^{\frac{(n-4s)}{2}}} + O(1)\ when\ n > 4s, \\ L_3\,|log\epsilon| + O(1)\ when\ n = 4s = 2, 3, \\ L_3 sinh^{-1}(\frac{r}{\sqrt{\epsilon}}) + O(1)\ when\ n = 4s = 1, \end{cases} \tag{4.14}$$

其中 $r > 0$ 是某个常数，L_1、L_2 *and* L_3 是正常数，满足 $\frac{L_1}{L_2} = S$，其中 S 在定理 2.2 中定义。

证明。由于 ψ 在 0 的某个邻域内等于 1，我们有如下结果

$$\begin{aligned}\frac{c_{n,s}}{2}\int_\Omega\int_\Omega\frac{|V_\epsilon(x)-V_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy &= \frac{c_{n,s}}{2}\int_\Omega\int_\Omega\frac{\left|\frac{\psi(x)}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{(n-2s)}{2}}}-\frac{\psi(y)}{(\epsilon+|y|^2)^{\frac{(n-2s)}{2}}}\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\\ &= \frac{c_{n,s}}{2}\int_\Omega\int_\Omega\frac{\left|\left(\frac{\psi(x)-1}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{(n-2s)}{2}}}-\frac{\psi(y)-1}{(\epsilon+|y|^2)^{\frac{(n-2s)}{2}}}\right)+\left(\frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{(n-2s)}{2}}}-\frac{1}{(\epsilon+|y|^2)^{\frac{(n-2s)}{2}}}\right)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\\ &= \frac{c_{n,s}}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left|\frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{(n-2s)}{2}}}-\frac{1}{(\epsilon+|y|^2)^{\frac{(n-2s)}{2}}}\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy+O(1).\end{aligned}$$

变量替换

$$x'=\frac{x}{\sqrt{\epsilon}},\ \ y'=\frac{y}{\sqrt{\epsilon}}$$

可得

$$\begin{aligned}\frac{c_{n,s}}{2}\int_\Omega\int_\Omega\frac{|V_\epsilon(x)-V_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy &= \frac{1}{\epsilon^{\frac{(n-2s)}{2}}}\left(\frac{c_{n,s}}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left|\frac{1}{(1+|x'|^2)^{\frac{(n-2s)}{2}}}-\frac{1}{(1+|y'|^2)^{\frac{(n-2s)}{2}}}\right|^2}{|x'-y'|^{n+2s}}dx'dy'\right)+O(1)\\ &= \frac{L_1}{\epsilon^{\frac{(n-2s)}{2}}}+O(1),\end{aligned}$$

其中

$$L_1=\frac{c_{n,s}}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left|\frac{1}{(1+|x'|^2)^{\frac{(n-2s)}{2}}}-\frac{1}{(1+|y'|^2)^{\frac{(n-2s)}{2}}}\right|^2}{|x'-y'|^{n+2s}}dx'dy'.$$

这验证了（4.12）。此外，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega|V_\epsilon|^{p+1} &= \int_\Omega\frac{\psi^{p+1}(x)}{(\epsilon+|x|^2)^n}dx\\ &= \int_\Omega\frac{[\psi^{p+1}(x)-1]}{(\epsilon+|x|^2)^n}dx+\int_\Omega\frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^n}dx\\ &= O(1)+\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^n}dx\\ &= \frac{L_2'}{\epsilon^{n/2}}+O(1),\end{aligned}$$

其中

$$L_2'=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx.$$

因此

$$\left(\int_\Omega|V_\epsilon|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}=\frac{L_2}{\epsilon^{\frac{(n-2s)}{2}}}+O(1),$$

其中

$$L_2=\left\|\left(1+|x|^2\right)^{\frac{-(n-2s)}{2}}\right\|^2_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}$$

因此，（4.13）得以验证。由于 $\left(\epsilon+|x|^2\right)^{\frac{-(n+2s)}{2}}$ 给出了（2.1）中的等式，可以注意到

$$\frac{L_1}{L_2}=S.$$

现在，我们验证（4.14）。为此，

$$\begin{aligned}\int_\Omega |V_\epsilon|^2 &= \int_\Omega \frac{[\psi^2(x)-1]}{(\epsilon+|x|^2)^{n-2s}}dx + \int_\Omega \frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^{n-2s}}dx \\ &= O(1) + \int_\Omega \frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^{n-2s}}dx.\end{aligned}$$

当 $n > 4s$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^{n-2s}}dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^{n-2s}}dx + O(1) \\ &= \frac{1}{\epsilon^{n-2s}}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\left|\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}\right|^2)^{n-2s}}dx + O(1).\end{aligned}$$

变量替换

$$\frac{x}{\sqrt{\epsilon}} = y,$$

给出

$$\int_\Omega \frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^{n-2s}}dx = \frac{1}{\epsilon^{\frac{(n-2s)}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|^2)^{n-2s}}dx + O(1).$$

这验证了 (4.14)，其中

$$L_3 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|^2)^{n-2s}}dx = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1-4s}{2})}{\Gamma(1-2s)} & \text{if } n=1, \\ \frac{\omega_n \Gamma(\frac{n-4s}{2}\Gamma(\frac{n}{2}))}{2\Gamma(n-2s)} & \text{if } n>1, \end{cases}$$

其中 ω_n 是 $\mathbb{R}^n$. 中单位球面的表面测度
当 $n = 4s$ 时，我们看到

$$\int_{|x|\le r_1} \frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^{2s}} \le \int_\Omega \frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^{2s}} \le \int_{|x|\le r_2} \frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^{2s}}, \tag{4.15}$$

对于某些正常数 r_1 和 r_2.，因此

$$\int_{|x|\le r} \frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^{2s}} = \begin{cases} \omega_n \int_0^r \frac{t^{4s-1}}{\epsilon+t^{4s}}dt + O(1) & \text{if } n=2,3, \\ 2sinh^{-1}(\frac{r}{\sqrt{\epsilon}}) & \text{if } n=1, \end{cases}$$

对于某个正常数 $r.$，这意味着

$$\int_{|x|\le r} \frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^{2s}} = \begin{cases} \frac{\omega_n}{4s}|log\epsilon| + O(1) & \text{if } n=2,3, \\ 2sinh^{-1}(\frac{r}{\sqrt{\epsilon}}) & \text{if } n=1. \end{cases}$$

因此，这验证了 (4.14)，其中

$$L_3 = \frac{\omega_n}{n},$$

当 $n = 2$ 时，3 和 $L_3 = 2$；当 $n = 1.$ 时 □

现在，我们利用上述命题 4.2 来证明以下引理。

引理 4.3. 设 Ω 为一个属于 $C^1.$ 类的有界区域，则对于每个 $\lambda > 0$，我们有 $X_\lambda < \frac{S}{2^{\frac{2s}{n}}}$.

证明。由于 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，我们可以假设 Ω 位于 $\mathbb{R}^n.$ 中某个超平面的一侧。不失一般性，假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+ := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$. 因此，我们得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|V_\epsilon(x)-V_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dydx &\le \int_{\mathbb{R}^n_+}\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|V_\epsilon(x)-V_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dydx \\ &\le \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|V_\epsilon(x)-V_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dydx.\end{aligned} \tag{4.16}$$

由于 Ω 是一个开集，对于 $x \in \Omega$，存在某个 $r > 0$，使得 $B_r(x) \subset \Omega$。对每个 $\epsilon > 0$ 使用 $V_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 和 H¨older 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_{\mathcal{C}\Omega} \frac{|V_\epsilon(x) - V_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dydx &\leq \int_\Omega \int_{\mathcal{C}\Omega} \frac{2|V_\epsilon(x)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dydx + \int_\Omega \int_{\mathcal{C}\Omega} \frac{2|V_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dydx \\
&\leq \int_\Omega \int_{\mathcal{C}B_r(x)} \frac{2|V_\epsilon(x)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dydx + \int_\Omega \int_{\mathcal{C}B_r(x)} \frac{2|V_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dydx \\
&\leq \int_\Omega |V_\epsilon(x)|^2 \left(\int_{\mathcal{C}B_r(x)} \frac{2}{|x-y|^{n+2s}} dy \right) dx + \int_\Omega \int_{\mathcal{C}B_r(x)} \frac{2|V_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dydx \\
&\leq \int_\Omega |V_\epsilon(x)|^2 \left(\int_{\mathcal{C}B_r(x)} \frac{2}{|x-y|^{n+2s}} dy \right) dx + \frac{1}{\epsilon^{(n-2s)}} \int_\Omega \int_{\mathcal{C}B_r(x)} \frac{2dydx}{\left(1 + \left|\frac{y}{\sqrt{\epsilon}}\right|^2\right)^{(n-2s)} |x-y|^{n+2s}} \\
&\leq \int_\Omega |V_\epsilon(x)|^2 \left(\int_r^\infty \frac{2\omega_n \rho^{n-1}}{\rho^{n+2s}} d\rho \right) dx \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon^{(n-2s)}} \int_\Omega \left(\int_{\mathcal{C}B_r(x)} \frac{1}{\left(1 + \left|\frac{y}{\sqrt{\epsilon}}\right|^2\right)^{(2n-4s)}} dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{C}B_r(x)} \frac{4}{|x-y|^{2n+4s}} dy \right)^{\frac{1}{2}} dx.
\end{aligned}$$

通过变量替换

$$\frac{y}{\sqrt{\epsilon}} = z,$$

我们得到 $n > \frac{8s+2}{3}$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_{\mathcal{C}\Omega} \frac{|V_\epsilon(x) - V_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dydx &\leq \frac{\omega_n}{sr^{2s}} \int_\Omega |V_\epsilon(x)|^2 dx + \epsilon^{2s} \int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dz}{(1+|z|^2)^{(2n-4s)}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_r^\infty \frac{4\omega_n \rho^{n-1}}{\rho^{2n+4s}} d\rho \right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&\leq \frac{\omega_n}{sr^{2s}} \int_\Omega |V_\epsilon(x)|^2 dx + \epsilon^{2s} \int_\Omega \left(\int_0^\infty \frac{\omega_n \rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^{(2n-4s)}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_r^\infty \frac{4\omega_n \rho^{n-1}}{\rho^{2n+4s}} d\rho \right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&\leq \frac{\omega_n}{sr^{2s}} \int_\Omega |V_\epsilon(x)|^2 dx + \epsilon^{2s} \int_\Omega \left(\frac{\omega_n \Gamma(\frac{n+2}{2}) \Gamma(\frac{3n-8s-2}{2})}{2\Gamma(2n-4s)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4\omega_n}{(n+4s) r^{n+2s}} \right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&\leq \frac{\omega_n}{sr^{2s}} \int_\Omega |V_\epsilon(x)|^2 dx + \epsilon^{2s} |\Omega| \left(\frac{\omega_n \Gamma(\frac{n+2}{2}) \Gamma(\frac{3n-8s-2}{2})}{2\Gamma(2n-4s)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4\omega_n}{(n+4s) r^{n+2s}} \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

结合方程 (4.16) 和 (4.17)，我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{c_{n,s}}{2} \int_{T(\Omega)} \frac{|V_\epsilon(x) - V_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dydx &= \frac{c_{n,s}}{2} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|V_\epsilon(x) - V_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dydx + c_{n,s} \int_\Omega \int_{\mathcal{C}\Omega} \frac{|V_\epsilon(x) - V_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dydx \\
&\leq \frac{1}{4} \left(\frac{c_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|V_\epsilon(x) - V_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dydx \right) + \frac{c_{n,s}\omega_n}{sr^{2s}} \int_\Omega |V_\epsilon(x)|^2 dx \\
&\quad + \epsilon^{2s} |\Omega| \left(\frac{4\omega_n^2 |\Omega|^2 \Gamma(\frac{n+2}{2}) \Gamma(\frac{3n-8s-2}{2})}{2(n+4s) r^{n+2s} \Gamma(2n-4s)} \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

现在，利用 (4.18)、(4.12) 和 (4.14)，对于 $\epsilon \to 0$，我们有

$$\frac{c_{n,s}}{2} \int_{T(\Omega)} \frac{|V_\epsilon(x) - V_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dydx = \frac{L_1}{4\epsilon^{\frac{(n-2s)}{2}}} + \frac{C(n,s,r)L_3}{\epsilon^{\frac{(n-4s)}{2}}} + O(1) \qquad (4.19)$$

因此，由方程 (4.19)、(4.13) 和 (4.14)，对于 $n > \max\{4s, \frac{8s+3}{2}\}$，我们得到

$$K_\lambda(V_\epsilon) < \frac{S}{2^{\frac{2s}{n}}},$$

当 $\epsilon > 0$ 足够小时。因此

$$X_\lambda = \inf\{K_\lambda(u) \mid u \in H^s_\Omega \setminus \{0\}\} < \frac{S}{2^{\frac{2s}{n}}}.$$

□

结合上述引理，我们现在可以证明本节的主要结果。

定理 1.3 的证明：由引理 4.1 和引理 4.3，我们得到问题 (1.10) 的一个解 v_0，满足$J_\lambda(v_o) < {}^{s}{}_{(S)}\ {}_{2n}^{\frac{n}{2s}}$. 现在，我们证明 v_0 是~~一个~~非恒定解。为此，定义

$$\lambda^* = \frac{S}{(2|\Omega|)^{\frac{2s}{n}}},$$

其中，|Ω|表示 Ω 的测度。于是，对于 $\lambda > \lambda^*$ 和 $v_* = \lambda^{\frac{(n-2s)}{4s}}$，我们有

$$\begin{aligned} J_\lambda(v_1) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda^{\frac{(n-2s+2s)}{2s}} - \frac{(n-2s)}{2n}\int_\Omega \lambda^{\frac{n}{2s}} \\ &= \frac{1}{2}|\Omega|\lambda^{\frac{n}{2s}} - \frac{n-2s}{2n}\lambda^{\frac{n}{2s}}|\Omega| \\ &= \frac{s}{n}\lambda^{\frac{n}{2s}}|\Omega| \\ &> \frac{s(S)^{\frac{n}{2s}}}{2n}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

因此，v_0 是一个非恒定函数。否则，若 v_0 是常数，则可推出 $v_0 = \lambda^{\frac{n-2s}{4s}}$，这与 (4.20) 矛盾。

此外，我们有

$$||u(x)| - |u(y)|| \le |u(x) - u(y)|$$

因此

$$\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)} \frac{||u(x)| - |u(y)||^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy \le \frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy,$$

由此得到

$$K_\lambda(|u|) \le K_\lambda(u),\ \forall\ u \in H^s_\Omega.$$

这意味着，若 u 是一个极小化子，那么 $|u|$ 也是 X_λ. 的一个极小化子。因此，我们可以假设 $v_0 \ge 0$ 属于 Ω。注意，正如引理 4.1 中已证明的，v_0 并非恒等于零。□

Appendix: Uniqueness of minimal energy solutions in critical case

我们采用与 [30]中相同的方法，证明小区域上的最小能量解的唯一性。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 C^1类有界区域。考虑问题

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + \lambda u = X_\lambda(\Omega)\,|u|^{p-1}\,u & \text{in } \Omega\ , \\ \mathcal{N}_s u(x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \\ u \ge 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{4.21}$$

其中 $\lambda > 0$ 是一个常数，$p = \frac{n+2s}{n-2s}$，$n > \max\{4s, \frac{8s+2}{3}\}$，$s \in (0,1)$，且 X_λ(Ω)在前面的 (4.4) 中定义。

在引理 4.1 的证明中（参见方程 (4.9) 和 (4.10)），我们已经看到，(1.10) 和 (4.21) 的最小能量解只相差一个常数。因此，为了检验 (1.10) 的最小能量解的唯一性，只需检验上述问题 (4.21) 的唯一性。

我们考虑一族收缩域

$$\Omega_\eta := \eta \cdot \Omega = \{\eta x : x \in \Omega\} \tag{4.22}$$

并研究当 $\eta \to 0$ 时 Ω_η 中上述问题的最小能量解的渐近行为。以下结果的论证与 Fern´andez Bonder 等人 [30] 的工作类似，但作了一些修改以处理

临界非线性。Fern´andez Bonder 等人 [30] 证明了次临界情形下最小能量解的唯一性。这里无法像 [30] 中那样直接应用紧 Sobolev 嵌入。在我们的框架中，我们在引理 4.5 的证明中使用 Brezis-Lieb 引理、定理 2.1 和定理 1.2，以克服嵌入缺乏紧性所带来的困难。我们从下面的引理开始。

引理 4.4.（引理 3.*1,* [30]）在上述记号下，我们有

$$X_\lambda(\Omega_\eta) \le \lambda |\Omega_\eta|^{\frac{p-1}{p+1}} = \lambda \eta^{n\left(\frac{p-1}{p+1}\right)} |\Omega|^{\frac{p-1}{p+1}}.$$

以下观察有助于证明下一个引理。首先，对任意 $v \in H^s_{\Omega_\eta}$，我们定义：

$$(v)^2_{s,\Omega} := \frac{c_{n,s}}{2} \int_{T(\Omega)} \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy.$$

设 $v \in H^s_{\Omega_\eta}$，若记 $\bar{v}(x) = v(\eta x)$，则 $\bar{v} \in H^s_{\Omega_\eta}$. 此外，

$$\begin{aligned}(\bar{v})^2_{s,\Omega} &= \frac{c_{n,s}}{2} \int_{T(\Omega)} \frac{|v(\eta x)-v(\eta y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy \\ &= \frac{c_{n,s}}{2}\left[\int_\Omega \int_\Omega \frac{|v(\eta x)-v(\eta y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy + 2\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \frac{|v(\eta x)-v(\eta y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy\right].\end{aligned}$$

作变量代换 $\eta x = z$ 和 $\eta y = w$，得到

$$\begin{aligned}(\bar{v})^2_{s,\Omega} &= \eta^{2s-n}\frac{c_{n,s}}{2}\left[\int_{\Omega_\eta} \int_{\Omega_\eta} \frac{|v(z)-v(w)|^2}{|z-w|^{n+2s}} dzdw + 2\int_{\Omega_\eta} \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega_\eta} \frac{|v(z)-v(w)|^2}{|z-w|^{n+2s}} dzdw\right]. \\ &= \eta^{2s-n}(v)^2_{s,\Omega_\eta}. \qquad (4.23)\end{aligned}$$

And

$$\|\bar{v}\|_{L^{p+1}(\Omega)} = \eta^{-\frac{n}{p+1}} \|v\|_{L^{p+1}(\Omega_\eta)}. \qquad (4.24)$$

因此

$$\frac{\|v\|^2_{s,\Omega_\eta,\lambda}}{\|v\|^2_{L^{p+1}(\Omega_\eta)}} = \eta^{n\left(\frac{p-1}{p+1}\right)} \frac{\eta^{-2s}(\bar{v})^2_{s,\Omega} + \lambda\|\bar{v}\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|\bar{v}\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}}, \qquad (4.25)$$

其中

$$\|v\|^2_{s,\Omega_\eta,\lambda} = \frac{c_{n,s}}{2} \int_{T(\Omega_\eta)} \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy + \lambda \int_{\Omega_\eta} v^2 dx.$$

引理 4.5. 设 $v_\eta \in H^s_{\Omega_\eta}$ 是 $X_s(\Omega\eta)$ 的一个极小化子。那么重标度极小化子 $\bar{v}_\eta(x) := v_\eta(\eta x)$ 经过归一化，使得 $\|\bar{v}_\eta\|_{L^{p+1}(\Omega)} = 1$，可得

$$\bar{v}_\eta \to |\Omega|^{-\frac{1}{p+1}} \ \textit{strongly in } H^s_\Omega.$$

此外，我们有

$$\lim_{\eta\to 0} \frac{X_\lambda(\Omega_\eta)}{\eta^{n\left(\frac{p-1}{p+1}\right)}} = |\Omega|^{\frac{p-1}{p+1}}.$$

证明. 根据上述观察，我们有如下结论

$$X_\lambda(\Omega_\eta) = \eta^{n\left(\frac{p-1}{p+1}\right)} \frac{\eta^{-2s}(\bar{v}_\eta)^2_{s,\Omega} + \lambda\|\bar{v}_\eta\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|\bar{v}_\eta\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}}.$$

现在，根据引理 4.4，我们得到

$$\frac{\eta^{-2s}(\bar{v}_\eta)^2_{s,\Omega} + \lambda\|\bar{v}_\eta\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|\bar{v}_\eta\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}} \le \lambda|\Omega|^{\frac{p-1}{p+1}}. \qquad (4.26)$$

现在固定 $\|\bar{v}_\eta\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}=1$. 由上述不等式可知， $\bar{v}_\eta$ 在 H^s_Ω. 中一致有界。因此，除去一个子列 $\eta_k\to 0$，我们有

$$v_\eta \rightharpoonup \bar{v} \text{ weakly in } H^s_\Omega, \tag{4.27}$$

$$v_\eta \to \bar{v} \text{ strongly in } L^q(\Omega), \text{ for } 1\le q<p+1. \tag{4.28}$$

我们知道，嵌入 $H^s(\Omega)\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ 不是紧的。因此，我们无法直接推断上述序列在 $L^{p+1}(\Omega)$ 中强收敛。由于范数是弱下半连续的，由 (4.26) 和 (4.27) 可得

$$(\bar{v})^2_{s,\Omega}\le \liminf_{\eta\to 0}(\bar{v_\eta})^2_{s,\Omega}=0.$$

因此， $\bar{v}$ 是一个常数。此外，我们有

$$\|\bar{v}\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}\le \liminf_{\eta\to 0}\|\bar{v}_\eta\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}=1. \tag{4.29}$$

现在，令 $\bar{w}_\eta=\bar{v}_\eta-\bar{v}$，则 $\bar{w}_\eta\rightharpoonup 0$ 在 $L^{p+1}(\Omega)$ 中弱收敛，并且在 Ω 中几乎处处收敛。因此，再次利用 Brezis-Lieb 引理 2.3、命题 2.6 和定理 1.2，对于 $\eta\to 0$，我们得到

$$\begin{aligned}
1&=\|\bar{v}_\eta\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}\\
&=\|\bar{v}\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}+\|\bar{w}_\eta\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}+o(1)\\
&\le \|\bar{v}\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}+\left(\frac{2^{\frac{2s}{n}}}{S}+\epsilon\right)\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)}\frac{|\bar{w}_\eta(x)-\bar{w}_\eta(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}+o(1)\\
&=\|\bar{v}\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}+\left(\frac{2^{\frac{2s}{n}}}{S}+\epsilon\right)\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)}\frac{|\bar{v}_\eta(x)-\bar{v}_\eta(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}+o(1)\ (\text{since } \bar{v} \text{ is a constant}).\\
&=\|\bar{v}\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}+o(1)\ (\text{since by } (4.26)).
\end{aligned}\tag{4.30}$$

因此，由 (4.29) 和 (4.30) 可知，$\|\bar{v}\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}=1$. 这意味着

$$\bar{v}=|\Omega|^{\frac{-1}{p+1}}.$$

根据这些估计，我们可以很容易地得出

$$\begin{aligned}
\lambda|\Omega|^{\frac{p-1}{p+1}}&\le\liminf_{\eta\to 0}\eta^{-2s}(\bar{v_\eta})^2_{s,\Omega}+\lambda\|\bar{v}_\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&=\liminf_{\eta\to 0}\frac{X_\lambda(\Omega_\eta)}{\eta^{n\left(\frac{p-1}{p+1}\right)}}\le\limsup_{\eta\to 0}\frac{X_\lambda(\Omega_\eta)}{\eta^{n\left(\frac{p-1}{p+1}\right)}}\le\lambda|\Omega|^{\frac{p-1}{p+1}}.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

下一个定理表明，当区域收缩到足够小时，极小化子具有唯一性。定义空间

$$U:=\left\{u\in H^s_\Omega:\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}=1\right\}.$$

[1]我们注意到 $\bar{v}=|\Omega|^{\frac{-1}{p+1}}\in U$.

注 4.6. U 是一个 C^1 流形。

注 4.7. 容易看出，当极小化子 v_η 对应于 $X_\lambda(\Omega_\eta)$，且将其归一化为 $\|\bar{v}_\eta\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}=1$ 时，它在弱意义下满足以下问题：

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^s u+\lambda\eta^{2s}u&=\eta^{2s}X_\lambda(\Omega_\eta)\eta^{-n\left(\frac{p-1}{p+1}\right)}|u|^{p-1}u, && x\in\Omega\\
\mathcal{N}_s u(x)&=0, && x\in\mathbb{R}^n\setminus\bar{\Omega}.
\end{aligned}\tag{4.31}$$

现在，我们定义泛函

$$G:U\times[0,1)\to(H^s_\Omega)^*$$

使得

$$G(v,\eta)(w):=\frac{c_{n,s}}{2}\int_{T(\Omega)}\frac{(v(x)-v(y))(w(x)-w(y)}{|x-y|^{n+2s}}+\lambda\eta^{2s}\int_\Omega vwdx-\eta^{2s}X_s(\Omega_\eta)\eta^{-n\left(\frac{p-1}{p+1}\right)}\int_\Omega|v|^{p-1}vwdx. \tag{4.32}$$

注 4.8. 我们利用隐函数定理（IFT）证明小量 $\delta > 0$ 和曲线 $\varphi : [0, \delta) \to U$ 的存在性，使得

(1) $\varphi(0) = \bar{v} = |\Omega|^{-\frac{1}{p+1}}$ and $G(\varphi(\eta), \eta) = 0$ for every $0 \leq \eta < \delta$.

(2) 若 $(v, \eta) \in U \times [0, \delta)$ 满足 $G(v, \eta) = 0$ 且 v 接近 $\bar{v}$，则 $\varphi(\eta) = \bar{v}$。

为了应用隐函数定理，我们证明 G 关于 v 在点 $(\bar{v}, 0)$ 处的导数，即 $G_v|_{(\bar{v},0)}$，是可逆的，例见 [5, 48]。为此，我们需要以下结果。

按照引理 4.1 [30], 中的类似证明思路，我们有以下结果

引理 4.9。U 在 $\bar{v}$ 处的切空间由下式给出

$$T_{\bar{v}}U = \left\{ u \in H^s_\Omega : \int_\Omega u dx = 0 \right\}.$$

为简洁起见，我们省略细节。

引理 4.10. 导数 $G_v|_{(\bar{v},0)} : T_{\bar{v}}U \to \mathcal{F}$ 具有连续逆。

证明。　很容易看出，$T_{\bar{v}}U$ 是一个希尔伯特空间。该空间上的内积定义如下：

$$\langle v, w \rangle = G_{v|(\bar{v},0)}(v)(w) = \frac{c_{n,s}}{2} \int_{T(\Omega)} \frac{(v(x) - v(y))(w(x) - w(y)}{|x - y|^{n+2s}}.$$

由里斯表示定理可知，结论成立。 □

现在，我们可以应用隐函数定理完成定理 1.4 的证明。

定理 1.4 的证明：由隐函数定理，存在唯一解 v of $G(v, \eta) = 0$，其中 v 接近 $\bar{v}$. 。因此，当 η. 取较小值时，在 $\bar{v}$ 附近存在方程 (4.31) 的唯一弱解。由引理 4.5，当 η 趋于零时，极小化子在 H^s_Ω 中收敛到 $\bar{v}$。此外，由上述注 4.7 可知，这些极小化子都是问题 (4.31) 的弱解。由此可得极小化子的唯一性，证明完毕。□

5. Acknowledgement

第一作者感谢 CSIR 通过项目 09/1031(0009)/2019-EMR-I 提供资助。第二作者感谢 DST/SERB 通过资助项目 CRG/2020/000041 提供资助。

References

[1] Adimurthi, G. Mancini，具有临界非线性的椭圆方程的诺伊曼问题，向 G. Prodi 致敬文集，比萨高等师范学院，（1991），09–25。[2] Adimurthi, F. Pacella, S. L. Yadava，边界几何与具有临界非线性的半线性诺伊曼问题正解之间的相互作用，J. Funct. Anal. 113(1993), 318–350。[3] Adimurthi, S. L. Yadava， $\mathbb{R}^n$ 中的临界 Sobolev 指数问题，($n \geq 4$)，带有 Neumann 边界条件，Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), 100 (3)(1990) 275–284。[4] Adimurthi, S. L. Yadava，具有临界 Sobolev 指数的诺伊曼问题正径向解的存在性与不存在性，Arch. Rational Mech. Anal. 115 (1991), no. 3, 275–296。[5] A. Ambrosetti and G. Prodi，非线性分析入门，剑桥高等数学研究丛书，第 34 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1995，1993 年原版的修订重印本。[6] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz，临界点理论中的对偶变分方法及其应用，J. Funct. Anal. 14 (1973) 349–381。[7] C. Athanase and K. T. Nikolaos，高阶分数阶导数的 Sobolev 不等式最佳常数，J. Math. Anal. Appl. 295 (2004) 225–236。[8] T. Aubin，Monge-Amp`ere 方程中的流形非线性分析，纽约：Springer-Verlag (1982)。[9] T. Aubin，关于标量曲率的 Yamabe 问题的非线性微分方程，J. Math. Pures et Appl. 55, 1976, pp. 269–293。[10] B. Barrios, L. Del Pezzo, J. Garc´ıa-Meli´an, A. Quaas，半空间中若干非局部椭圆问题解的单调性，Calc. Var. Partial Differential Equations 56 (2017) 56–39。[11] B. Barrios, L. Montoro, I. Peral, F. Soria，高阶 s-分数阶拉普拉斯算子的 Neumann 条件 $(-\Delta)^s u$，其中 $s > 1$，Nonlinear Anal. 193 (2020) 111368, 34 pp.

[12] M. Bhakta, D. Mukherjee，具有临界和超临界指数的半线性非局部椭圆方程，纯粹与应用分析通讯，第 16 卷，第 5 期，（2017）；1741–1766。[13] M. Bhakta, D. Mukherjee, S. Santra，具有临界和超临界非线性项的非局部方程解的轮廓，当代数学通讯，21(1) (2019) 1750099。[14] G. Barles, E. Chasseigne, C. Georgelin, E. Jakobsen，半空间中的非局部方程 Neumann 型问题，Trans. Amer. Math. Soc. 366 (9) (2014) 4873–4917。[15] B. Barrios, L. Montoro, B. Sciunzi，有界区域中非局部问题的移动平面法，J. Anal. Math. 135 (1) (2018) 37–57。[16] H. Brezis and E. Lieb，函数逐点收敛与泛函收敛之间的关系，Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983) 486–490。[17] H. Brezis and L. Nirenberg，涉及临界指数的非线性椭圆方程正解，Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983) 437–477。[18] H. Brezis，具有极限 Sobolev 指数的椭圆方程——拓扑的影响，Comm. Pure Appl. Math. 39 (1986), no. S, suppl., S17–S39。[19] C. Budd, M. C. Knaap, and L. A. Peletier，具有临界指数和 Neumann 边界条件的椭圆方程解的渐近行为，Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 117 (1991), no. 3(4), 225–250。[20] P. Cherrier，黎曼流形上的非线性诺伊曼问题，J. Funct. Anal. 57 (1984), no. 2, 154–206。[21] E. Cinti, F. Colasuonno，一个非局部超临界 Neumann 问题，J. Differ. Equ. 268 (2020) 2246–2279。[22] P. Constantin，欧拉方程、纳维–斯托克斯方程与湍流，《湍流黏性流的数学基础》，数学讲义，第 1871 卷，施普林格，柏林，2006 年，第 1–43 页。[23] C. Cortazar, M. Elgueta, J. Rossi, N. Wolanski，如何用非局部扩散问题逼近具有 Neumann 边界条件的热方程，Arch. Ration. Mech. Anal. 187 (2008) 137–156。[24] M. del Pino and C. Flores，扩张区域中迹嵌入的最佳常数与极值函数的渐近行为，Comm. Partial Differential Equations，第 26 卷（11-12 期）（2001），2189–2210。[25] E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci，分数阶 Sobolev 空间指南，Bull. Sci. Math. 136 (5) (2012) 521–573。[26] S. Dipierro, X. Ros-Oton, E. Valdinoci，具有 Neumann 边界条件的非局部问题，Rev. Mat. Iberoam. 33 (2) (2017) 377–416。[27] S. Dipierro, N. Soave, E. Valdinoci，Lipschitz 集与上图集上的分数阶椭圆方程：正则性、单调性与刚性结果，Math. Ann. 369 (3–4) (2017) 1283–1326。[28] J. Fernández Bonder, E. Lami Dozo, and J. D. Rossi，Sobolev 迹嵌入极值函数的对称性，Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire 21 (2004), no. 6, 795–805。[29] J. Fernández Bonder, J. D. Rossi，扩张与收缩区域中最佳 Sobolev 迹常数的渐近行为，Comm. Pure Appl. Anal. 1 (3) (2002) 359–378。[30] J. Fernández Bonder, A. Silva, J. Spedaletti，涉及分数阶拉普拉斯算子的半线性问题的最小能量解的唯一性，Proc. Amer. Math. Soc. 147(7) (2019), 2925–2936。[31] G. Gilboa and S. Osher，应用于图像处理的非局部算子，Multiscale Model. Simul. 7 (2008), no. 3, 1005–1028。[32] G. Grubb，μ-传输与分数阶椭圆伪微分算子的局部与非局部边界条件，Anal. PDE. 7 (7) (2014) 1649–1682。[33] G. Grubb，区域上的分数阶拉普拉斯算子：¨ormander 的 μ-传输伪微分算子理论的发展，Adv. Math. 268 (2015) 478–528。[34] N. Humphries, N. Queiroz, J. Dyer, N. Pade, M. Musyl, K. Schaefer, D. Fuller, J. Brunnschweiler, T. Doyle, J. Houghton, G. Hays, C. Jones, L. Noble, V. Wearmouth, E. Southall and D. Sims，环境背景解释了海洋捕食者的列维运动与布朗运动模式，《自然》465 (2010), 1066–1069。[35] C. S. Lin, W. M. Ni, I. Takagi，趋化系统的大振幅平稳解，J. Differential Equations 72 (1988) 1–27。[36] C. S. Lin, W. M. Ni，半线性诺伊曼问题的扩散系数，Springer 讲义，第 1340 卷，施普林格，纽约/柏林，1986。[37] A. Massaccesi and E. Valdinoci，非局部扩散策略是否有利于竞争中的生物种群？数学生物学杂志 74 (2017), no. 1-2, 113–147。[38] E. Montefusco, B. Pellacci, G. Verzini，具有 Neumann 边界条件的分数阶扩散：逻辑斯蒂方程，Disc. Contin. Dyn. Syst. Ser. B 18 (2013) 2175–2202。[39] D. Mugnai, E. Proietti Lippi，锥上的链接方法与 Neumann 分数阶 p-拉普拉斯算子，J. Differential Equations 271 (2021), 797–820。[40] Ralf Metzler and Joseph Klafter，反常扩散随机游走指南：一种分数阶动力学方法，Phys. Rep. 339 (2000), no. 1, 77。[41] W. M. Ni, I. Takagi，半线性诺伊曼问题的解的存在性与形状，非线性扩散方程及其平衡态会议论文集，第 3 卷，Gregynog (1989), 425–436。[42] W. M. Ni, I. Takagi，半线性诺伊曼问题最小能量解的形状，Comm. Pure Appl. Math. 44 (1991), no. 7, 819–851。[43] X. Ros-Oton, J. Serra，分数阶拉普拉斯算子的 Dirichlet 问题：边界正则性，J. Math. Pures Appl. 101 (2012) 275–302。[44] X. Ros-Oton, J. Serra，分数阶拉普拉斯算子的 Pohozaev 恒等式，Arch. Ration. Mech. Anal. 213 (2014) 587–628。[45] W. Schoutens，金融中的列维过程：金融衍生品定价，威立概率与统计丛书，威立，纽约，2003。

[46] R. Servadei、E. Valdinoci，非局部椭圆算子的山路解，J. Math. Anal. Appl. 389 (2012)，第 2 期，887–898。[47] R. Servadei、E. Valdinoci，分数阶拉普拉斯算子的 Brezis-Nirenberg 结果，Trans. Amer. Math. Soc. 367 1, 67 2015 102 ( )，第 – 期。[48] H. Upmeier，对称巴拿赫流形与 Jordan C^*-代数，North-Holland Mathematics Studies，第 104 卷，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，1985，Notas de Matem´atica，Mathematical Notes。[49] N. S. Ustinov，关于具有谱Neumann分数阶拉普拉斯算子和临界右端项的半线性问题的可解性，（俄文）Algebra i Analiz 33 (2021)，第 1 期，194–212。[50] X. J. Wang，涉及临界索博列夫指数的半线性椭圆方程的诺伊曼问题，J. Differential Equations 93 (1991) 283–310。

Somnath Gandal
Indian Institute of Technology Gandhinagar
Palaj, Gnadhinagar Gujarat India-382355.
Email address: gandal_somnath@iitgn.ac.in

Jagmohan TyagiIndian Institute of Technology Gandhinagar
Palaj, Gandhinagar Gujarat, India-382355.*Email address*:
jtyagi@iitgn.ac.in, jagmohan.iitk@gmail.com