arXiv:2301.03259v1 [math.FA] 9 Jan 2023

MIBesov空间与Triebel-Lizorkin空间的乘法 S

DOUADI DRIHEM

Abstract. 本文旨在证明以下形式的一些嵌入

$$F^{s_1}_{p_1,q} \cdot B^{s_2}_{p_2,\infty} \cdot ... \cdot B^{s_m}_{p_m,\infty} \hookrightarrow F^{s_1}_{p,q}, \quad m \geqslant 2.$$

本文得到的不同嵌入对参数有一定限制。特别地，我们改进了Triebel-Lizorkin空间中逐点乘法的一些结果。主要工具包括Franke-Jawerth嵌入、Gustaffson-Peetre的 $\pm$ - 方法，以及Hardy空间与Triebel-Lizorkin空间之间的关系。

1. 引言

约45年前，Peetre [14] 和 Triebel [18], [19], 各自独立地运用一种特殊的乘积分解 $f \cdot g$ 来研究乘积

$$A^{s_1}_{p_1,q_1} \cdot A^{s_2}_{p_2,q_2} \hookrightarrow A^{s}_{p,q}$$

在 $p_1 = p_2 = p$ 的情形下。这里 $A^s_{p,\ q}$ 表示 Besov空间 $B^s_{p,\ q}$ 或 Triebel-Lizorkin 空间 $F^s_{p,\ q}$。这种方法如今称为拟乘法，后来被许多作者采用。关于这一主题的早期研究，Yamazaki 的论文 [22] 讨论了 $p_1 = p_2 = p$ 的情形，而 Sickel 研究了 $p_1 = p_2 \neq p$ 的情形。Hanouzet [7] 研究了 $p_1 \neq p_2$，但仅限于 Besov空间。Sickel 和 Triebel 最近的一项研究也探讨了 $p_1 \neq p_2$ 的情形，并给出了一组相当完整的必要条件。J. Johnsen 的论文 [8], 给出了新的充要条件，另见 J. Marschall [10] 以及 [11], , ; Sobolev 空间和 Besov空间方面可参见 Amann[1] 。

关于情形 $F^{s_1}_{p_1,q_1} \cdot B^{s_2}_{p_2,q_2} \hookrightarrow F^{s}_{p,q}$。Franke [5] 和 Marschall 在 [10] 和 [11] 中研究了这一情形，其中 $p_1 = p$。近期论文 [4], 也研究了情形 $p_1 \neq p$，并改进了逐点乘法的已知充分条件。与本文工作更为接近的是 T. Runst、W. Sickel 的著作 [15], ，另见 V. Maz'ya 、 T. Shaponiskova [12]。

研究函数空间上乘法问题的动机源于其在偏微分方程中的应用。例如，见 [23], ，其中函数空间上乘积的估计有助于处理许多偏微分方程中的二次非线性项；另见 H. Bahouri、J.-Y. Chemin 和 R. Danchin[2], ， V.G. Maz'ya 和 T.O. Shaposhnikova [12], ，以及 Zeidler [24]。此外，函数乘积的估计在复合算子的研究中发挥了关键作用，见 [15, 第 5]章。

最近，Meyries 和 Veraar [13], 以及 Lindemulder [9] 研究了关于权重 $w(x,t) = |t|^\alpha, x \in$ 的 Besov 空间和 Bessel势空间 $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, w)$ $H^s_p(\mathbb{R}^n, w)$

日期：2023年1月10日。2010年数学主题分类：46E35，41A05。关键词和短语：Besov空间、Triebel-Lizorkin空间、Gustaffson-Peetre 的 $\pm$ - 方法。

$\mathbb{R}^{n-1}, t \in \mathbb{R}$。在对 s, p, q和 α 作出适当假设的条件下，他们发现，半空间的特征函数是 $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, w)$ $H^s_p(\mathbb{R}^n, w)$ 的逐点乘子。

本文旨在研究 m -线性映射

$$F^{s_1}_{p_1,q} \cdot A^{s_2}_{p_2,\infty} \cdot ... \cdot A^{s_m}_{p_m,\infty} \hookrightarrow F^{s_1}_{p,q}, \quad m \geqslant 2,$$

由.....诱导

$$(f_1, f_2, ..., f_m) \longrightarrow f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_m.$$

下面简要介绍本文的内容。第 2 节回顾不同空间的定义和一些必要的工具。我们将运用旁乘法方法对乘积进行分解

$$f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_m.$$

正光滑度空间中的乘积见小节 3.1。负光滑度空间中的乘积见小节 3.2。

本文中我们将始终采用以下约定。按照惯例，我们用$\mathbb{R}^n$ 表示 n维实欧几里得空间，用 $\mathbb{N}$ 表示所有自然数的集合，并用$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$表示。对于多重指标 $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n_0$，我们记作 $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$。 $x = (x_1, ..., x_n)$ 与 $y = (y_1, ..., y_n)$ 的欧几里得内积定义为 $x \cdot y = x_1y_1 + ... + x_ny_n$。若 $a \in \mathbb{R}$，则令 $a_+ = \max(0, a)$。

按照惯例， L_p（$\mathbb{R}^n$）表示定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格空间 $0 < p \leqslant \infty$，其满足 h

$$\big\| f \mid L_p(\mathbb{R}^n) \big\| = \big\| f \big\|_p = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \Big)^{1/p} < \infty, \quad 0 < p < \infty$$

and

$$\big\| f \mid L_\infty(\mathbb{R}^n) \big\| = \big\| f \big\|_\infty = \operatorname*{ess\text{-}sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty.$$

我们用 $\mathcal{S}$（$\mathbb{R}^n$）表示 $\mathbb{R}^n$ 上所有复值、无穷次可微且快速衰减的函数构成的施瓦茨空间，用 $\mathcal{S}'$（$\mathbb{R}^n$）表示 $\mathbb{R}^n$上所有温和分布构成的对偶空间。我们将函数 $f \in \mathcal{S}$（$\mathbb{R}^n$）的傅里叶变换定义为

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

其逆算子记作 $\mathcal{F}^{-1} f$。 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}^{-1}$通常都以相同方式扩展到对偶施瓦茨空间$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$。

若 $s \in \mathbb{R}$ 和 $0 < q \leqslant \infty$，则 ℓ^s_q是所有满足下列条件的复数序列 $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ 的集合：

$$\big\| \{f_j\}_{j \in \mathbb{N}_0} \mid \ell^s_q \big\| = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} |f_j|^q \Big)^{1/q} < \infty$$

with 若 $q = \infty$，则作相应的显然修改。若 $s = 0$，则简记 ℓ^0_q为 ℓ_q。

若 $0 < p$、 $q \leqslant \infty$，则空间 $L_p(\ell_q)$（分别地， $\ell_q(L_p)$）是满足下列条件的函数序列 $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ 的集合：

$$\big\| \{f_j\}_{j \in \mathbb{N}_0} \mid L_p(\ell_q) \big\| = \Big\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^q \Big)^{1/q} \Big\|_p < \infty, \quad 0 < p < \infty$$

$$\Big(\text{resp. } \big\| \{f_j\}_{j \in \mathbb{N}_0} \mid \ell_q(L_p) \big\| = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \big\| f_j \big\|^q_p \Big)^{1/q} < \infty \Big),$$

若 $q = \infty$.，则作显而易见的修改

给定两个准Banach空间 X 和 Y，若 $X \subset Y$ 且 X 到 Y 的自然嵌入是连续的，我们记作 $X \hookrightarrow Y$。我们用 c 表示正常数，该常数在每次出现时可能不同。

2. Functions spaces

本节介绍 Besov 空间和 Triebel-Lizorkin空间的傅里叶分析定义，并回顾它们的基本性质。此外，我们还介绍本文将用到的一些有用结果。首先给出一个特定的单位分解。设 Ψ 是$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$中的一个函数，满足 $\Psi(x) = 1$ 对 $|x| \leqslant 1$ 成立，并且 $\Psi(x) = 0$ 对 $|x| \geqslant \frac{3}{2}$ 成立。令 $\varphi_0(x) = \Psi(x)$,$\varphi_1(x) = \Psi(x/2) - \Psi(x)$，并且

$$\varphi_j(x) = \varphi_1(2^{-j+1}x) \quad \text{for} \quad j = 2, 3, ...$$

于是有 supp $\varphi_j \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leqslant |x| \leqslant 3 \cdot 2^{j-1}\}$, $\varphi_j(x) = 1$ 对 $3 \cdot 2^{j-2} \leqslant |x| \leqslant 2^j$成立，并且 $\Psi(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) = 1$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$成立。函数系 $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ 称为光滑二进单位分解。我们将卷积算子 Δ_j 定义如下：

$$\Delta_j f = \mathcal{F}^{-1}\varphi_j * f, \quad j \in \mathbb{N} \quad \text{and} \quad \Delta_0 f = \mathcal{F}^{-1}\Psi * f, \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

因此，我们得到所有 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的 Littlewood-Paley分解 $f = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f$（在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中收敛）。

我们按如下方式定义卷积算子 Q_j, $j \in \mathbb{N}_0$：

$$Q_j f = \mathcal{F}^{-1}\Psi_j * f, \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

其中 $\Psi_j = \Psi(2^{-j}\cdot)$ $j \in \mathbb{N}_0$，并且我们看到

$$Q_j f = \sum_{k=0}^{j} \Delta_k f$$

对任意 $j \in \mathbb{N}_0$.

现在我们给出 Besov 空间和 Triebel-Lizorkin 空间的定义，并概述一些基本结果。为简洁起见，我们只阐述后文将用到的相关内容。更详细的论述可参见 J. Peetre [14], T. Runst 和 W. Sickel, [15] 以及 H. Triebel [16, 17, 18]等文献。

定义 2.1。（i）设 $s \in \mathbb{R}$ 且 $0 < p, q \leqslant \infty$。Besov空间 $B^s_{p,q}$ 是满足下列条件的所有 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的集合：

$$\left\| f \mid B^s_{p,q} \right\| = \left\| \{\Delta_j f\}_{j\in\mathbb{N}_0} \mid \ell^s_q(L_p) \right\| < \infty.$$

(ii) 设 $s \in \mathbb{R}$、$0 < p < \infty$ 和 $0 < q \leqslant \infty$。Triebel-Lizorkin空间 $F^s_{p,\,q}$ 是所有满足以下条件的 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的集合

$$\left\| f \mid F^s_{p,q} \right\| = \left\| \{\Delta_j f\}_{j\in\mathbb{N}_0} \mid L_p\left(\ell^s_q\right) \right\| < \infty.$$

现在我们给出 $F^s_{p,\,q}$ 和 $B^s_{p,\,q}$ 的一些性质，这些性质与我们有关，参见 T. Runst 和 W. Sickel, [15] 以及 H. Triebel [16, 17, 18]。

引理 2.2. (i) 空间 $B^s_{p,q}$ 和 $F^s_{p,q}$ 是拟巴拿赫空间（当 $p, q \geqslant 1$ 时为巴拿赫空间），且在任何情况下

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,q} \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad and \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^s_{p,q} \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

(ii) 设 $s_i \in \mathbb{R}$, $0 < p_i < \infty$ （分别为 $0 < p_i \leqslant \infty$）和 $0 < q_i \leqslant \infty$ （其中 $i = 0,\ 1$）。若 $s_0 > s_1$ 和 $p_0 = p_1$，或 $s_0 \geqslant s_1$ 和 $s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$（$q_0 \leqslant q_1$ 对于 Besov空间），则成立

$$F^{s_0}_{p_0,\,q_0} \hookrightarrow F^{s_1}_{p_1,\,q_1} \quad (resp.\ B^{s_0}_{p_0,\,q_0} \hookrightarrow B^{s_1}_{p_1,\,q_1}).$$

(iii) 设 $s, s_i \in \mathbb{R}$, $0 < p, p_i < \infty$ 和 $0 < q, q_i \leqslant \infty$ （其中 $i = 0, 1$），满足 $s_0 - \frac{n}{p_0} = s - \frac{n}{p} = s_1 - \frac{n}{p_1}$.。若 $s_0 > s > s_1$ 和 $q_0 \leqslant p \leqslant q_1$，或 $s_0 = s = s_1$, $q_0 \leqslant \min(p, q)$ 且 $q_1 \geqslant \max(p, q)$，则有

$$B^{s_0}_{p_0,\,q_0} \hookrightarrow F^{s}_{p,\,q} \hookrightarrow B^{s_1}_{p_1,\,q_1}, \quad Franke\text{-}Jawerth\ embeddings.$$

按照惯例，用 $\langle A_0, A_1\rangle_\theta$ 表示将 Gustaffson-Peetre 的 $\pm$-方法应用于准Banach空间 A_0 和 A_1所得的结果。下一个定理已在 [6] 中证明。

定理 2.3. 设 $0 < \theta < 1, 0 < p_0, p_1 < \infty, 0 < q_0, q_1 \leqslant \infty$ 和 $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$。则

$$\left\langle F^{s_0}_{p_0,\,q_0}, F^{s_1}_{p_1,\,q_1}\right\rangle_\theta = F^{s}_{p,\,q}$$

假设 $s = (1-\theta)\ s_0 + \theta s_1$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ and $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.

注 2.4. $\pm$-方法具有所谓的插值性质。用 $\mathcal{L}(A, B)$ 表示从 A 到 B 的所有有界线性算子组成的集合。那么，这意味着如果 $T \in \mathcal{L}(A_i, B_i), i = 1, 2$，则 T 将 $\langle A_0, B_0\rangle_\theta$ 映射到 $\langle A_1, B_1\rangle_\theta$，并且

$$\left\|T \mid \langle A_0, B_0\rangle_\theta \longrightarrow \langle A_1, B_1\rangle_\theta\right\| \leqslant \left\|T \mid A_0 \longrightarrow A_1\right\|^{1-\theta} \left\|T \mid A_0 \longrightarrow A_1\right\|^{\theta},$$

这在本文中起着至关重要的作用。

现在我们回顾一些对本文有用的结果。下一个引理是一个易于证明的 Hardy型不等式。

引理 2.5. 设 $0 < \gamma < 1$ 和 $0 < q \leqslant \infty$。设 $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ 是一个正实数序列，使得

$$\left\|\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \mid \ell_q\right\| = A < \infty.$$

那么序列 $\delta_k = \sum_{j=0}^{k} \gamma^{k-j}\varepsilon_j$, $k \in \mathbb{N}_0$ 属于 ℓ_q，且估计

$$\left\|\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \mid \ell_q\right\| \leqslant c\ A$$

成立。常数 c 仅依赖于 γ 和 q。

$\wedge$引理 2.6. 设 $\gamma > 0$。对于任意由满足 $\operatorname{supp} f_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n :\ \gamma^{-1}2^j \leqslant |\xi| \leqslant \gamma 2^j\}$ 的函数构成的序列 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$，我们有

$$\left\|\sum_{j=0}^{\infty} f_j \mid F^{s}_{p,q}\right\| \leqslant c\left\|\{2^{js} f_j\}_{j\in\mathbb{N}_0} \mid L_p(\ell_q)\right\| \quad if \quad p < \infty$$

and

$$\left\|\sum_{j=0}^{\infty} f_j \mid B^{s}_{p,q}\right\| \leqslant c\left\|\{2^{js} f_j\}_{j\in\mathbb{N}_0} \mid \ell_q(L_p)\right\|. \tag{2.7}$$

常数 c 依赖于 s, n, p 和 γ。

引理 2.8. 设 $\gamma > 1, 0 < p, q \leqslant \infty$ and $s > n(\frac{1}{p} - 1)_+$. 对任意由$\wedge$函数构成的序列 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$，若 $\operatorname{supp} f_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n :\ |\xi| \leqslant \gamma 2^j\}$，则 (2.7) 仍然成立。

引理 2.9. 设 $0 < p \leqslant q \leqslant \infty$ and $\gamma > 0$. 则存在常数 $c = c(n,p,q) > 0$, 使得对所有满足 $\operatorname{supp} f \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leqslant \gamma\}$ 的 $f \in L_p$, 均有

$$\|f\|_q \leqslant c\,\gamma^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_p.$$

关于引理 2.6, 见 [15],; 而引理 2.8 的证明见 [11, 引理3]。关于引理 2.9 的证明, 见 [20, 第 1.3 节。2]。

引理 2.10。设 $s \in \mathbb{R}$ 且 $0 < p < \infty$。

(i) 我们有

$$\big\| \sup_{j\in\mathbb{N}} |Q_j f| \,\big\|_p \leqslant c\big\|f \mid F^0_{p,2}\big\|,$$

对所有 $f \in F^0_{p,\,2}$。

(ii) 设 $j \in \mathbb{N}_0$ 且 $f \in B^s_{p,\,\infty}$。则存在一个与 j 无关的正常数 c, 使得

$$\big\|Q_j f\big\|_p \leqslant c\;\varepsilon_j\big\|f \mid B^s_{p,\infty}\big\|,$$

其中

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 2^{-js}, & if \quad s < 0, \\ 1, & if \quad s > 0, \\ (j+1)^{\frac{1}{\min(1,p)}}, & if \quad s = 0. \end{cases}$$

(iii) 令 $0 < p \leqslant t \leqslant \infty$、$j \in \mathbb{N}_0$ 和 $f \in B^s_{p,\infty}$。则

$$\big\|\Delta_j f\big\|_t \leqslant c\;2^{(\frac{n}{p}-\frac{n}{t}-s)j}\big\|f \mid B^s_{p,\infty}\big\|,$$

其中正常数 c 与 j 无关。

(iv) 我们有

$$\big\|Q_j f\big\|_t \leqslant c\;\varepsilon_j\big\|f \mid B^s_{p,\infty}\big\|,$$

对所有 $j \in \mathbb{N}_0$、所有 $f \in B^s_{p,\infty}$ 以及所有 $p < t \leqslant \;^{1}\!/_{(\frac{1}{p}-\frac{s}{n})_+}$, 其中

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1, & if \quad p < t < \frac{1}{(\frac{1}{p}-\frac{s}{n})_+}, \\ (j+1)^{\frac{1}{\min(1,t)}}, & if \quad t = \frac{1}{(\frac{1}{p}-\frac{s}{n})_+} \end{cases}$$

且正常数 c 与 j 无关。

证明。(i) 由局部 Hardy 空间 h_p 与 $F^0_{p,2}$ 之间的等式可得（参见[20, 第 2.2 节, 第 37 页, 以及定理 2.5.8/1]）。对于 (ii), 只需证明

$$\big\|Q_j f\big\|_p^\tau \leqslant \sum_{i=0}^{j} 2^{-s\tau i}2^{s\tau i}\big\|\Delta_i f\big\|_p^\tau \leqslant c\;\varepsilon_j^\tau\big\|f \mid B^s_{p,\infty}\big\|^\tau, \quad j \in \mathbb{N}_0, \tau = \min(1,p)$$

其中, 如果 $s < 0$ 我们使用了引理 2.5。现在由引理 2.9 可得

$$\big\|\Delta_j f\big\|_t \leqslant c\;2^{(\frac{n}{p}-\frac{n}{t})j}\big\|\Delta_j f\big\|_p \leqslant c\;2^{(\frac{n}{p}-\frac{n}{t}-s)j}\big\|f \mid B^s_{p,\infty}\big\|$$

and

$$\big\|Q_j f\big\|_t^\tau \leqslant c\sum_{i=0}^{j} 2^{(\frac{n}{p}-\frac{n}{t}-s)\tau i}2^{s\tau i}\big\|\Delta_i f\big\|_p^\tau \leqslant c\;\varepsilon_j^\tau\big\|f \mid B^s_{p,\infty}\big\|^\tau, \quad j \in \mathbb{N}_0, \tau = \min(1,t).$$

由此, 我们完成了(iii)和(iv)的证明。 □

$_m$**2.1.** 乘积分解 $\prod f_i$。对于所有 $f_i \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$、$i = 1$、2、...、$m$，乘积$_{i=1}\prod_{i=1}^m f_i$ 定义为

$$\prod_{i=1}^m f_i = \lim_{j\to\infty} \prod_{i=1}^m Q_j f_i,$$

如果右侧在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的极限存在，则成立。该乘积的如下分解见 [16, 第 77-78] 页。我们有如下形式分解：

$$\prod_{i=1}^m f_i = \sum_{k_1,\dots,k_m=0}^{\infty} \prod_{i=1}^m (\Delta_{k_i} f_i).$$

基本思想是将 $\prod_{i=1}^m f_i$ 分成两部分，这两部分始终都有定义。设 N 为大于 $1 + \log_2 3(m-1)$ 的自然数。则有如下分解：

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^m f_i =& \sum_{j=0}^{\infty} [Q_{j-N} f_1 \cdot \ldots \cdot Q_{j-N} f_{m-1} \cdot \Delta_j f_m + \ldots \\ &+ (\Pi_{l\neq k} Q_{j-N} f_l)\, \Delta_k f_j + \ldots + \Delta_j f_1 \cdot Q_{j-N} f_2 \cdot \ldots \cdot Q_{j-N} f_m] \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum^{j} (\Delta_{k_1} f_1) \cdot \ldots \cdot (\Delta_{k_m} f_m),\end{aligned}$$

其中，$\sum^j$ 取遍所有满足 $\max_{\ell=1,\dots,m} k_1 = k_{k_{m_0}} = j$ 且 $\max_{\ell\neq m_0} |\ell - k_\ell| < N$ 的 $k \in \mathbb{Z}_+^n$。当然，如果 $k < 0$，我们令 $\Delta_k f = 0$。通过限制到一个典型部分，$\sum^j$ 或许会变得更加清晰；该部分可以取为

$$\Big(\prod_{i\in I_1} \Delta_j f_i\Big) \prod_{i\in I_2} Q_j f_i,$$

其中

$$I_1, I_2 \subset \{1, \dots, m\}, \quad I_1 \cap I_2 = \emptyset, \quad I_1 \cup I_2 = \{1, \dots, m\} = I, \quad |I_1| \geqslant 2.$$

我们引入以下记号

$$\Pi_{1,k}(f_1, f_2, \dots, f_m) = \sum_{j=N}^{\infty} \Big(\prod_{i\neq k} Q_{j-N} f_i\Big) \Delta_j f_k, \quad k \in I$$

and

$$\Pi_2(f_1, f_2, \dots, f_m) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum^{j} \Big(\prod_{i=1}^m \Delta_{k_i} f_i\Big).$$

上述分解的优点在于

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}\Big(\Big(\prod_{i\neq k} Q_{j-N} f_i\Big) \Delta_j f_k\Big) \subset \big\{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+1}\big\}, \quad j \geqslant N$$

and

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}\Big(\sum^{j} \Big(\prod_{i=1}^m \Delta_{k_i} f_i\Big)\Big) \subset \big\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leqslant 2^{j+N-2}\big\}, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

最后，若 $j \in \mathbb{N}_0$、$J = J_1 \cup J_2$，其中 $J_1 \subseteq I_1$ 且 $J_2 \subseteq I_2$，我们将使用以下记号

$$\tilde{Q}_j f_i = \begin{cases} \Delta_j f_i, & \text{if} \quad i \in J_1, \\ Q_j f_i, & \text{if} \quad i \in J_2. \end{cases}$$

3. Results and their proofs

我们在两个不同的小节中给出结果。

3.1. 正光滑度空间中的乘积。

本小节讨论以下情形

$$0 < s_1 < s_2 \leqslant s_3 \leqslant ... \leqslant s_m. \tag{3.1}$$

本小节的主要结果是以下定理。

定理 3.2. 设 $s_i \in \mathbb{R}, 1 \leqslant p_1 < \infty, 0 < p_i \leqslant \infty, i = 2, ..., m$ 和 $0 < q \leqslant \infty$。假设 **(3.1)** 且 $s_1 < \frac{n}{p_1}$。进一步假设

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \sum_{i=2}^{m} \frac{1}{h_i} < 1, \tag{3.3}$$

其中

$$\left(\frac{1}{p_i} - \frac{s_i}{n}\right)_+ < \frac{1}{h_i} \leqslant \frac{1}{p_i}, \quad i = 2, ..., m. \tag{3.4}$$

Then

$$F^{s_1}_{p_1,q} \cdot B^{s_2}_{p_2,\infty} \cdot ... \cdot B^{s_m}_{p_m,\infty} \hookrightarrow F^{s_1}_{p,q},$$

成立。

推论3.5。在定理 3.2的假设下，有

$$F^{s_1}_{p_1,q} \cdot F^{s_2}_{p_2,\infty} \cdot ... \cdot F^{s_m}_{p_m,\infty} \hookrightarrow F^{s_1}_{p,q}.$$

推论3.5的证明是显然的，因为 $F^{s_i}_{p_i,\infty} \hookrightarrow B^{s_i}_{p_i,\infty}$, $i = 2, 3, ..., m$。

注记3.6。推论3.5见 [16, 定理 2.3.3] 和 [15, 定理 4.5.2/1]。

注记 3.7。我们看到，条件 $\sum_{i=1}^{m} s_i \geqslant \max\left(0, \sum_{i=1}^{m} \frac{n}{p_i} - n\right)$ 对逐点乘法是必要的，参见 [15, 定理 4.3.1/2]，这由 **(3.4)** 所涵盖。对于 $B^{s_1}_{p_1,q} \cdot B^{s_2}_{p_2,\infty} \cdot ... \cdot B^{s_m}_{p_m,\infty} \hookrightarrow B^{s_1}_{p,q}$ 型的乘法，我们再次请读者参阅 T. Runst 和 W. Sickel 的专著 [15, 第 4] 章。

定理 3.2 的证明。我们首先估计 $\Pi_{1,k}(f_1, f_2, ..., f_m)$。估计 $\Pi_{1,k}(f_1, f_2, ..., f_m)$。由引理 2.6 可得

$$\left\|\Pi_{1,k}(f_1, f_2, ..., f_m) \mid F^{s_1}_{p,q}\right\| \leqslant c \left\| \left\{ 2^{js_1} \Big(\prod_{i \neq k} Q_{j-N} f_i \Big) \Delta_j f_k \right\}_{j \geqslant N} \mid L_p(\ell_q) \right\| \tag{3.8}$$

对任意 $k \in I$ 均成立。首先注意到

$$\sup_{j \geqslant N} \left\| Q_{j-N} f_i \right\|_{v_i} \leqslant c \left\| f_i \mid F^0_{v_i,2} \right\|, \quad 0 < v_i < \infty, i \in I. \tag{3.9}$$

令 $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \sum_{i=2}^{m} \frac{1}{t_i}$，其中

$$\left(\frac{1}{p_i} - \frac{s_i}{n}\right)_+ < \frac{1}{t_i} \leqslant \frac{1}{p_i}, \quad i \in I \backslash \{1\}.$$

我们将估计分为两种情形。

• 情形 1. $k=1$. H¨older 不等式给出，(3.8) 的右端被以下表达式控制：

$$c\big\|f \mid F^{s_1}_{p_1,q}\big\| \prod_{i\in I\setminus\{1\}} \big\|f_i \mid F^0_{t_i,2}\big\|.$$

由于 t_i, $i\in I\setminus\{1\}$ 可以独立选取，因此我们可以求和，从而得到以下限制

$$\tfrac{1}{p_1}+\sum_{i\in I\setminus\{1\}}\big(\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n}\big)_+<\tfrac{1}{p}\leqslant\tfrac{1}{p_1}+\sum_{i\in I\setminus\{1\}}\tfrac{1}{p_i}.$$

而这恰好是 (3.3)，结合 (3.4) 即可。考虑到.....，便可完成估计

$$B^{s_i}_{p_i,\infty}\hookrightarrow F^0_{t_i,2},\quad i\in I\setminus\{1\}.$$

• 情形 2. $k\neq 1$。这种情况截然不同，也更为复杂。我们令 $\frac{1}{b}=\frac{1}{p_k}+\sum_{i\in I\setminus\{1,k\}}\frac{1}{t_i}+\frac{1}{p_1}-\frac{s_1}{n}$，其中

$$\big(\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n}\big)_+<\tfrac{1}{t_i}\leqslant\tfrac{1}{p_i},\quad i\in I\setminus\{1,k\}.$$

为证明这一点，我们还将其分为子情形 2.1、2.2 和 2.3。

• 子情形 2.1. $\frac{n}{p_k}\geqslant s_k$ 或 $(s_1\leqslant\frac{n}{p_k}<s_k)$。首先，假设 $p\leqslant b$。我们设 $\frac{1}{p}=\frac{1}{p_k}+\sum_{i\in I\setminus\{1,k\}}\frac{1}{t_i}+\frac{1}{\tau}$，其中 $\frac{1}{p_1}-\frac{s_1}{n}\leqslant\frac{1}{\tau}<\frac{1}{p_1}$。由引理 2.10/(iv) 可知，显然有

$$\big\|Q_{j-N}f_1\big\|_\tau\lesssim\gamma_k\big\|f_1\mid F^{s_1}_{p_1,\infty}\big\|,\quad j\geqslant N,$$

因为 $\frac{n}{p_1}-s_1-\frac{n}{\tau}\leqslant 0$，其中

$$\gamma_k=\begin{cases} j-N+1, & \text{if}\quad p=b,\\ 1, & \text{if}\quad p<b.\end{cases}$$

由 ¨，霍尔德不等式可得

$$\begin{aligned}&\big\|\Pi_{1,k}(f_1,f_2,...,f_m)\mid B^{s_1}_{p,\min(p,q)}\big\|\\ \leqslant& c\Big\|\prod_{i\in I\setminus\{k\}}\sup_{j\geqslant N}|Q_{j-N}f_i|\big\{2^{js_1}|\Delta_j f_k|\big\}_{j\geqslant N}\mid\ell_{\min(p,q)}(L_p)\Big\|\\ \leqslant& c\prod_{i\in I\setminus\{1,k\}}\big\|f_i\mid F^0_{t_i,2}\big\|\big\|f_k\mid B^{s_k}_{p_k,\infty}\big\|\big\|f_1\mid F^{s_1}_{p_1,\infty}\big\|,\end{aligned}$$

由于 $s_1<s_k$，$k\neq 1$。考虑到.....即可完成估计

$$B^{s_1}_{p,\min(p,q)}\hookrightarrow F^{s_1}_{p,q},\quad B^{s_i}_{p_i,\infty}\hookrightarrow F^0_{t_i,2},\quad i\in I\setminus\{1,k\}.\tag{3.10}$$

现在，假设 $p>b$。令 u_1 为满足下列条件的正数

$$\max\Big(0,\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{p_k}-\sum_{i\in I\setminus\{1,k\}}\tfrac{1}{t_i}\Big)<\tfrac{1}{u_1}<\tfrac{1}{p_1}-\tfrac{s_1}{n}.$$

我们令

$$\tfrac{1}{v}=\tfrac{1}{p_k}+\sum_{i\in I\setminus\{1,k\}}\tfrac{1}{t_i}+\tfrac{1}{u_1},\quad \sigma=s_1-\tfrac{n}{p}+\tfrac{n}{v},\quad \beta=s_1-\tfrac{n}{p_1}+\tfrac{n}{u_1}.$$

这些保证了嵌入

$$B^{\sigma}_{v,p}\hookrightarrow F^{s_1}_{p,q}.\tag{3.11}$$

我们需要估计 $\Pi_{1,k}(f_1, f_2, ..., f_m)$ 在 $B^{\sigma}_{v,p}$ 空间中的值。H¨older 不等式给出

$$\begin{aligned} &2^{j\sigma}\Big\| \prod_{i\in I\setminus\{k\}} Q_{j-N} f_i \cdot \Delta_j f_k\Big\|_v \\ \leqslant &2^{j\sigma} \prod_{i\in I\setminus\{1,k\}} \big\|Q_{j-N} f_i\big\|_{t_i} \big\|Q_{j-N} f_1\big\|_{u_1} \big\|\Delta_j f_k\big\|_{p_k}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

由引理 2.9 和 2.5 可得

$$\begin{aligned} 2^{k\beta} \sum_{l=0}^{j-N} \big\|\Delta_l f_1\big\|_{u_1} \lesssim &2^{k\beta} \sum_{l=0}^{j-N} 2^{-j\beta} 2^{j\beta} \big\|\Delta_l f_1\big\|_{u_1} \\ \lesssim &\big\|f_1 \mid F^{\beta}_{u_1,\infty}\big\|, \end{aligned}$$

因为 $\beta < 0$，其中隐含常数与 k 无关。因此，(3.12) 被以下表达式控制

$$c2^{j(\sigma-\beta-s_k)} \prod_{i\in I\setminus\{1,k\}} \big\|f_i \mid F^0_{t_i,2}\big\| \big\|f_k \mid B^{s_k}_{p_k,\infty}\big\| \big\|f \mid F^{\beta}_{u_1,\infty}\big\|.$$

注意到 $\sigma - \beta - s_k < 0$，那么最后一个表达式的 ℓ^p-拟范数有界

$$c \prod_{i\in I\setminus\{1,k\}} \big\|f_i \mid B^{s_i}_{p_i,\infty}\big\| \big\|f_k \mid B^{s_k}_{p_k,\infty}\big\| \big\|f \mid F^{\beta}_{u_1,\infty}\big\|,$$

这里我们用到了 (3.10) 中的第二个嵌入。由嵌入 (3.11) 可得所需估计，且 $F^{s_1}_{p_1,\infty} \hookrightarrow F^{\beta}_{u_1,\infty}$.

- 子情形 2.2。$\frac{n}{p_k} < s_1 < s_k$。我们只需研究情形 $p < b$ 。与子情形 2.1 一样，我们得到所需估计。

- 子情形 2.3。我们考虑情形 $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}$。我们需要估计 $\Pi_{1,\ k}(f_1, f_2, ..., f_m)$ 在 $B^{s_1}_{p,\ \min(p,\ q)}$ 空间中的范数。首先注意到

$$\big\|Q_{j-N} f_i\big\|_{p_i} \lesssim \big\|f_i \mid F^{s_i}_{p_i,\infty}\big\|, \quad j \geqslant N, i \in I\setminus\{k\},$$

由于 $s_i > 0, i \in I\setminus\{k\}$，参见引理 2.10。由 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} &2^{js}\Big\| \prod_{i\in I\setminus\{k\}} Q_{j-N} f_i \cdot \Delta_j f_k\Big\|_p \\ \leqslant &2^{j(s-s_k)} \prod_{i\in I\setminus\{k\}} \big\|f_i \mid F^{s_i}_{p_i,\infty}\big\| 2^{js_k} \big\|\Delta_j f_k\big\|_{p_k} \end{aligned}$$

对任意 $j \geqslant N$ 均成立。由于 $s_1 < s_k$，引理 2.6 和 (3.10) 中的第一个嵌入给出所需估计。

对 $\Pi_2(f_1, f_2, ..., f_m)$ 的估计。情况要复杂得多。为简洁起见，我们令

$$\frac{1}{t} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}.$$

由 (3.3) 和 (3.4)，我们得到

$$\frac{s_1}{n} + \sum_{i=1}^m \big(\frac{1}{p_i} - \frac{s_i}{n}\big)_+ < \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant 1.$$

整个估计分为两个步骤。

• 步骤1。我们考虑 $s_i=\frac{n}{p_i}$、 $i\in K$ 和 $s_i<\frac{n}{p_i}$、 $i\in I\backslash K$、 $K\subsetneq I$ 的情形。我们有

$$\sum_{i\in I\backslash(K\cup\{1\})}\left(\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n}\right)+\tfrac{1}{p_1}<\tfrac{1}{p}\leqslant\tfrac{1}{t}. \tag{3.13}$$

我们将 $K\cup\{1\}$ 分解为 K_1 与 K_2的不交并，其中

$$K_1\subseteq I_1 \text{ and } K_2\subseteq I_2 \tag{3.14}$$

而 I_1、I_2 在第 3 节中定义（显然，若 $K_2=I_2$ 则 $K_1\subsetneq I_1$，若 $K_1=I_1$则 $K_2\subsetneq I_2$。此外， $1\notin K$，且若 $1\in I_1$，则有 $1\in K_1$）。由于一些技术原因，我们将这一步分成三个独立的情形。

• 情形 1。 $I_1\backslash K_1\neq\emptyset$ 和 $I_2\backslash K_2\neq\emptyset$。我们继续讨论以下子情形。

•子情形1.1。假设

$$\tfrac{1}{p_1}+\sum_{i\in I_1\backslash K_1}\left(\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n}\right)<\tfrac{1}{p}-\sum_{i\in I_2\backslash K_2}\left(\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n}\right)<\tfrac{1}{p_1}-\tfrac{s_1}{n}+\sum_{i\in I_1\backslash K_1}\tfrac{1}{p_i}.$$

我们令

$$\tfrac{1}{p}=\tfrac{1}{p_1}-\tfrac{s_1}{n}+\sum_{i\in I_1\backslash K_1}\tfrac{1}{p_i}+\sum_{i\in I_2\backslash K_2}\tfrac{1}{t_i},\quad \beta_i=s_i-\tfrac{n}{p_i}+\tfrac{n}{t_i},\quad i\in I_2\backslash K_2,$$

其中

$$\tfrac{s_1-\sum_{i\in I_1\backslash K_1}s_i}{n|I_2\backslash K_2|}<\tfrac{1}{t_i}-\left(\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n}\right)<0,\quad i\in I_2\backslash K_2.$$

这是可行的，因为 $I_1\backslash K_1$ 和 $I_2\backslash K_2$ 均非空。由引理 2.8 可得

$$\left\|\Pi_2(f_1,f_2,...,f_m)\mid B^{s_1}_{p,\min(p,q)}\right\|\leqslant c\left\|\left\{\sum^{j}\left(\prod_{i=1}^{m}\Delta_{k_i}f_i\right)\right\}\mid\ell^{s_1}_{\min(p,q)}(L_p)\right\|.$$

首先注意到，引理 2.10/(iii)-(iv) 得出

$$\left\|\tilde{Q}_jf_1\right\|_{\tilde{p}_1}\leqslant c\ u_j\left\|f_1\mid B^{s_1}_{p_1,\infty}\right\|,$$

其中 $\frac{1}{\tilde{p}_1}=\frac{1}{p_1}-\frac{s_1}{n}$ 和$p_1\quad p_1\quad n$

$$u_j=\begin{cases}1, & \text{if}\quad 1\in I_1,\\ j+1, & \text{if}\quad 1\in I_2.\end{cases} \tag{3.15}$$

由 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}&2^{js_1}\left\|\sum^{j}\left(\prod_{i=1}^{m}\Delta_{k_i}f_i\right)\right\|_p \qquad (3.16)\\ \leqslant& c\ 2^{js_1}u_j\left\|f_1\mid B^{s_1}_{p_1,\infty}\right\|\prod_{i\in I_1\backslash K_1}\left\|\Delta_jf_i\right\|_{p_i}\prod_{i\in I_2\backslash K_2}\left\|Q_jf_i\right\|_{t_i}\prod_{i\in K}\left\|\tilde{Q}_jf_i\right\|_{\infty},\end{aligned}$$

对任意 $j\in\mathbb{N}_0$，其中 $c>0$ 与 j无关。由于对任意 $i\in I_2\backslash K_2$都有 $\beta_i<0$，由引理 2.10/(ii)-(iii)可得

$$\left\|Q_{j-N}f_i\right\|_{t_i}\leqslant c\ 2^{-\beta_ij}\left\|f_i\mid B^{\beta_i}_{t_i,\infty}\right\|,\quad i\in I_2\backslash K_2$$

and

$$\left\|\tilde{Q}_jf_i\right\|_{\infty}\leqslant c\left\|f_i\mid B^{n/p_i}_{p_i,\infty}\right\|\times\begin{cases}1, & \text{if}\quad i\in K_1\backslash\{1\},\\ j+1, & \text{if}\quad i\in K_2\backslash\{1\}.\end{cases} \tag{3.17}$$

因此，表达式 (3.16) 有如下上界

$$c\ 2^{\gamma nj}u'_j\big\|f_1\mid B^{s_1}_{p_1,\infty}\big\|\prod_{i\in I_1\backslash K_1}\big\|f_i\mid B^{s_i}_{p_i,\infty}\big\|\prod_{i\in I_2\backslash K_2}\big\|f_i\mid B^{\beta_i}_{t_i,\infty}\big\|\prod_{i\in K}\big\|f_i\mid B^{n/p_i}_{p_i,\infty}\big\|,$$

其中，对于 $j\in\mathbb{N}_0$,

$$u'_j=\begin{cases}(j+1)^{|K_2|}, & \text{if}\quad 1\in I_1 \text{ or } 1\in K_2,\\ (j+1)^{|K_2|+1}, & \text{if}\quad 1\notin K_2 \text{ and } 1\in I_2\end{cases}\tag{3.18}$$

and

$$\gamma=\sum_{i\in I\backslash(K\cup\{1\})}\big(\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n}\big)+\tfrac{1}{p_1}-\tfrac{1}{p}.$$

利用嵌入

$$F^{s_1}_{p,q}\hookrightarrow B^{s_1}_{p,\min(p,q)},\quad F^{s_1}_{p_1,q}\hookrightarrow B^{s_1}_{p_1,\infty}\tag{3.19}$$

and

$$B^{s_i}_{p_i,\infty}\hookrightarrow B^{\beta_i}_{t_i,\infty},\quad i\in I_2\backslash K_2,$$

我们得到， $\Pi_2(f_1,f_2,...,f_m)$ 的 $F^{s_1}_{p,q}$-范数可以估计为

$$c\big\|f_1\mid F^{s_1}_{p_1,q}\big\|\prod_{i\in I\backslash(K\cup\{1\})}\big\|f_i\mid B^{s_i}_{p_i,\infty}\big\|\prod_{i\in K}\big\|f_i\mid B^{n/p_i}_{p_i,\infty}\big\|,$$

鉴于 $\big\{2^{\gamma nj}u'_j\big\}\in\ell_{\min(p,q)}$。

•子情形 1.2。我们考虑这种情形

$$\tfrac{1}{p_1}-\tfrac{s_1}{n}+\sum_{i\in I\backslash(K\cup\{1\})}\tfrac{1}{p_i}-\sum_{i\in I_2\backslash K_2}\tfrac{s_i}{n}\leqslant\tfrac{1}{p}\leqslant\tfrac{1}{t}.\tag{3.20}$$

首先，由 H¨older 不等式和引理 2.10/(ii)-(iii)，可得

$$\begin{aligned}&2^{js_1}\Big\|\sum^{j}\Big(\prod_{i=1}^{m}\Delta_{k_i}f_i\Big)\Big\|_t\\ \leqslant& c\ 2^{js_1}u_j\big\|f_1\mid B^{s_1}_{p_1,\infty}\big\|\prod_{i\in I_1\backslash K_1}\big\|\Delta_jf_i\big\|_{p_i}\prod_{i\in I_2\backslash K_2}\big\|Q_jf_i\big\|_{p_i}\prod_{i\in K}\big\|\tilde{Q}_jf_i\big\|_{p_i}\\ \leqslant& c\ 2^{j\varrho}u_j\prod_{i\in I\backslash K}\big\|f_i\mid B^{s_i}_{p_i,\infty}\big\|\prod_{i\in K}\big\|f_i\mid B^{n/p_i}_{p_i,\infty}\big\|,\quad j\in\mathbb{N}_0,\end{aligned}$$

其中 $c>0$ 与 j 无关，且

$$\varrho=\begin{cases}-\sum\limits_{i\in I_1\backslash\{1\}}s_i, & \text{if}\quad 1\in I_1,\\ s_1-\sum\limits_{i\in I_1\backslash\{1\}}s_i, & \text{if}\quad 1\notin I_1.\end{cases}$$

由于考虑到 $|I_1|\geqslant 2$,

$$\big\{2^{j\varrho}u_j\big\}\in\ell_{\min(p,q)},$$

再由 (3.19)，我们得到所需估计。现在令

$$\tfrac{1}{t_1}=\tfrac{1}{p_1}-\tfrac{s_1}{n}+\sum_{i\in I_1\backslash K_1}\tfrac{1}{p_i}+\sum_{i\in I_2\backslash K_2}\tfrac{1}{t_i},$$

其中

$$\tfrac{1}{t_i}=\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n},\quad i\in I_2\backslash K_2.$$

H¨older 不等式给出估计 (3.16)（其中以 t_1 替代 p）。引理 2.10/(iii) 给出

$$\prod_{i\in I_2\setminus K_2}\big\|Q_jf_i\big\|_{t_i}\leqslant c\,(j+1)^{|I_2\setminus K_2|}\prod_{i\in I_2\setminus K_2}\big\|f_i\mid B^{s_i}_{p_i,\infty}\big\|. \tag{3.21}$$

由最后一个估计和 (3.17) 可得

$$2^{js_1}\Big\|\sum^{j}\Big(\prod_{i=1}^{m}\Delta_{k_i}f_i\Big)\Big\|_{t_1}\leqslant c\,2^{\gamma_2nj}\,(j+1)^{|I_2\setminus K_2|}\,u'_j\prod_{i\in I\setminus K}\big\|f_i\mid B^{s_i}_{p_i,\infty}\big\|\prod_{i\in K}\big\|f_i\mid B^{n/p_i}_{p_i,\infty}\big\|,$$

其中

$$\gamma_2=s_1-\sum_{i\in I_1\setminus K_1}s_i$$

且 $\{u'_j\}$ 在 (3.18) 中定义。我们利用以下事实：

$$\big\{2^{\gamma_2nj}\,(j+1)^{|I_2\setminus K_2|}\,u'_j\big\}\in\ell_{\min(p,q)},$$

那么，由嵌入 (3.19) 可得所需估计。令 $f_i\in B^{s_i}_{p_i,\ \infty}, i\in\{2,...,m\}$。因此

$$\Pi_2(\cdot,f_2,...,f_m):F^{s_1}_{p_1,q}\longrightarrow F^{s_1}_{t,q}\quad\text{and}\quad\Pi_2(\cdot,f_2,...,f_m):F^{s_1}_{p_1,q}\longrightarrow F^{s_1}_{t_1,q}.$$

为涵盖所有满足 (3.20) 的 p，我们应用定理 2.3 和注 2.4。这个子情形的证明至此完成。

• 情形 2。 $I_1\setminus K_1\neq\emptyset$ 且 $I_2\setminus K_2=\emptyset$。此情形得到 $K\cup\{1\}=I_2\cup K_1$，其中$K_1\subsetneq I_1$。此外，根据 (3.13)，我们有

$$\sum_{i\in I_1\setminus K_1}\big(\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n}\big)+\tfrac{1}{p_1}<\tfrac{1}{p}\leqslant\tfrac{1}{t}.$$

•子情形 2.1。假设

$$\sum_{i\in I_1\setminus K_1}\big(\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n}\big)+\tfrac{1}{p_1}<\tfrac{1}{p}\leqslant\tfrac{1}{p_1}+\sum_{i\in I_1\setminus K_1}\tfrac{1}{p_i}.$$

令

$$\tfrac{1}{p}=\tfrac{1}{p_1}+\sum_{i\in I_1\setminus K_1}\tfrac{1}{t_i},$$

其中

$$\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n}<\tfrac{1}{t_i}\leqslant\tfrac{1}{p_i},\quad i\in I_1\setminus K_1.$$

H¨older 不等式、(3.17) 和引理 2.10/(iii) 得出

$$\begin{aligned}&2^{js_1}\Big\|\sum^{j}\Big(\prod_{i=1}^{m}\Delta_{k_i}f_i\Big)\Big\|_{p}\\&\leqslant c\,2^{js_1}u_j\big\|f_1\mid B^{s_1}_{p_1,\infty}\big\|\prod_{i\in I_1\setminus K_1}\big\|\Delta_jf_i\big\|_{t_i}\prod_{i\in K}\big\|\tilde{Q}_jf_i\big\|_{\infty}\\&\leqslant c\,2^{js_1}u''_j\big\|f_1\mid B^{s_1}_{p_1,\infty}\big\|\prod_{i\in I_1\setminus K_1}\big\|\Delta_jf_i\big\|_{t_i}\prod_{i\in K}\big\|f_i\mid B^{n/p_i}_{p_i,\infty}\big\|\\&\leqslant c\,2^{\gamma_3nj}u''_j\prod_{i\in(I_1\setminus K_1)\cup\{1\}}\big\|f_i\mid B^{s_i}_{p_i,\infty}\big\|\prod_{i\in K}\big\|f_i\mid B^{n/p_i}_{p_i,\infty}\big\|,\end{aligned}$$

其中 $c>0$ 与 j、$\{u_j\}$ 无关，$\{u_j\}$ 在 (3.15) 中定义，且对于 $j\in\mathbb{N}_0$

$$u_j''=\begin{cases}(j+1)^{|I_2|-1} & \text{if}\quad 1\in I_2\\ 2^{-s_1 j}\,(j+1)^{|I_2|} & \text{if}\quad 1\in I_1\end{cases}$$

and

$$\gamma_3=\tfrac{1}{p_1}-\tfrac{1}{p}+\sum_{i\in I_1\setminus K_1}\big(\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n}\big).$$

我们取 $\ell_{\min(p,q)}$拟范数，并根据 (3.19)，结合 $\gamma_3<0$ 这一事实，得到所需估计。

•子情形 2.2。假设

$$\tfrac{1}{p_1}+\sum_{i\in I_1\setminus K_1}\tfrac{1}{p_i}<\tfrac{1}{p}\leqslant\tfrac{1}{t}.$$

此情形可由子情形 1.2 中给出的插值方法处理。

• 情形 3。 $I_1\setminus K_1=\emptyset$ 且 $I_2\setminus K_2\neq\emptyset$。此情形推出 $K\cup\{1\}=I_1\cup K_2$，其中$K_2\subsetneq I_2$。令 $I_2=K_2\cup I_3$。因此，由 (3.13)，我们有

$$\tfrac{1}{p_1}+\sum_{i\in I_3\setminus\{1\}}\big(\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n}\big)<\tfrac{1}{p}\leqslant\tfrac{1}{t}.$$

•子情形 3.1。我们考虑以下情形

$$\tfrac{1}{p_1}<\tfrac{1}{p}-\sum_{i\in I_3\setminus\{1\}}\big(\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n}\big)<\tfrac{1}{p_1}-\tfrac{s_1}{n}+\sum_{i\in I_1\setminus\{1\}}\tfrac{1}{p_i}.$$

设 $1<v<p$ 使得

$$\tfrac{1}{v}=\tfrac{1}{p_1}-\tfrac{s_1}{n}+\sum_{i\in I_3\setminus\{1\}}\tfrac{1}{d_i}+\sum_{i\in I_1\setminus\{1\}}\tfrac{1}{t_i},$$

其中 $t_i>p_i$、$i\in I_1\setminus\{1\}$ 以及

$$\tfrac{1}{d_i}=\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n},\quad i\in I_3\setminus\{1\}.$$

记 $\sigma=s_1-\frac{n}{p}+\frac{n}{v}$。由 H¨older 不等式和引理 2.10/(iii)，得到

$$\begin{aligned}&2^{j\sigma}\Big\|\sum^{j}\Big(\prod_{i=1}^{m}\Delta_{k_i}f_i\Big)\Big\|_v\\ \leqslant& c\;u_j 2^{j\sigma}\big\|f_1\mid B^{s_1}_{p_1,\infty}\big\|\prod_{i\in I_1\setminus\{1\}}\big\|\Delta_j f_i\big\|_{t_i}\prod_{i\in K_2\setminus\{1\}}\big\|Q_j f_i\big\|_{\infty}\prod_{i\in I_3\setminus\{1\}}\big\|Q_k f_i\big\|_{d_i}\\ \leqslant& c\;\eta_j\prod_{i=1}^{m}\big\|f_i\mid B^{s_i}_{p_i,\infty}\big\|,\end{aligned}$$

其中 $c>0$ 与 j 无关，$\{u_j\}$ 定义于 (3.15) 中，且对于 $j\in\mathbb{N}_0$

$$\eta_j=2^{j(\frac{n}{p_1}+\sum_{i\in I_3\setminus\{1\}}(\frac{n}{p_i}-s_i)-\frac{n}{p})}\times\begin{cases}(j+1)^{|I_3|}, & \text{if}\quad 1\in I_1\text{ or }1\in I_3,\\ (j+1)^{|I_3|+1}, & \text{if}\quad 1\in K_2\end{cases}.$$

由于 $\{\eta_j\}\in\ell_p$ 和 $\sigma>0$，结合 $B^{\sigma}_{v,\,p}\hookrightarrow F^{s_1}_{p,\,q}$ 以及引理 2.8，可得所需估计。

•子情形 3.2。我们考虑如下情形

$$\sum_{i\in I_1\setminus\{1\}}\frac{1}{p_i}+\sum_{i\in I_3\setminus\{1\}}\Big(\frac{1}{p_i}-\frac{s_i}{n}\Big)+\frac{1}{p_1}-\frac{s_1}{n}\leqslant\frac{1}{p}\leqslant\frac{1}{t}. \tag{3.22}$$

令 $\frac{1}{t_1}$ 为式 (3.22) 左侧给出的实数。首先，由引理 2.10/(iii)，将 ∞、 $K_2\setminus\{1\}$ 以及 $\big(\frac{1}{p_i}-\frac{s_i}{n}\big)^{-1}$、 $I_3\setminus\{1\}$ 分别代替 t_i、$I_2\setminus K_2$ ，可得估计 (3.21)。由 H¨older 不等式，得到

$$2^{js_1}\Big\|\sum^{j}\Big(\prod_{i=1}^{m}\Delta_{k_i}f_i\Big)\Big\|_{t_1}\leqslant c\,\omega_j\prod_{i=1}^{m}\|f_i\mid B^{s_i}_{p_i,\infty}\|,\quad j\in\mathbb{N}_0,$$

其中 $c>0$ 与 j 无关，且

$$\omega_j=(j+1)^{|I_3\setminus\{1\}|+|K_2\setminus\{1\}|}\,2^{j(s_1-\sum_{i\in I_1\setminus\{1\}}s_i)}u_j$$

对任意 $j\in\mathbb{N}_0$ 均成立。由于 $\{\omega_j\}\in\ell_{\min(p,q)}$，利用式 (3.19) 可得所需估计。令 $f_i\in B^{s_i}_{p_i,\ \infty}$、 $i\in\{2,...,m\}$。通过对情形 1.2 中所用论证作简单修改，可得

$$\Pi_2(\cdot,f_2,...,f_m):F^{s_1}_{p_1,q}\longrightarrow F^{s_1}_{t_1,q}\quad\text{and}\quad\Pi_2(\cdot,f_2,...,f_m):F^{s_1}_{p_1,q}\longrightarrow F^{s_1}_{t,q}.$$

因此，采用情形 1.2 中给出的相同插值方法，可得所需结果。

• 步骤 2。考虑 $s_i>\frac{n}{p_i}$、 $i\in I_4\subsetneq I$ 的情形。我们有

$$I\setminus I_4=\{i:s_i\leqslant\tfrac{n}{p_i}\}=\tilde{I}.$$

所需的估计可通过对˜步骤1中所用论证稍作修改得到，其中我们将 I 替换为 I ，并利用以下事实:

$$\big\|\tilde{Q}_jf_i\big\|_\infty\leqslant c\,\big\|f_i\mid B^{s_i}_{p_i,\infty}\big\|$$

对于任意 $j\in\mathbb{N}_0$ 以及任意 $0<p_i\leqslant\infty$， $i\in I_4$，其中正常数 c 与 j无关。

至此，定理 3.2 得证。 □

注 3.23. 本小节中关于 $m=2$ 的结果见 [4]。

3.2. 负光滑度空间中的乘积。本小节讨论以下情形

$$s_1\leqslant0<s_2\leqslant s_3\leqslant...\leqslant s_m. \tag{3.24}$$

主要结果如下。

定理 3.25. 设 $1\leqslant p_1<\infty$, $0<p_i\leqslant\infty$ 和 $0<q\leqslant\infty, i=2,...,m$。进一步假设 (3.3)、(3.4)、(3.24) 以及

$$s_1+s_2>0$$

Then

$$F^{s_1}_{p_1,q}\cdot B^{s_2}_{p_2,\infty}\cdot...\cdot B^{s_m}_{p_m,\infty}\hookrightarrow F^{s_1}_{p,q}$$

成立。

推论 3.26. 在定理 3.25 的假设下，有

$$F^{s_1}_{p_1,q}\cdot F^{s_2}_{p_2,\infty}\cdot...\cdot F^{s_m}_{p_m,\infty}\hookrightarrow F^{s_1}_{p,q}.$$

推论 3.26 的证明是直接的，因为 $F^{s_i}_{p_i,\ \infty}\hookrightarrow B^{s_i}_{p_i,\ \infty}$, $i=2,...,\quad m.$

注3.27。我们注意到，推论 3.26 在 $[16,$ 定理 2.4.5$]$ 和 $[15,$定理 4.5.2/1$]$ 中给出。

注3.28。如同前一小节，本节中的情形 $m=2$ （其中 $0<p,p_1<\infty$）已在[4]中讨论过。

定理 3.25 的证明。根据定理 3.2 证明中对 $\Pi_{1,\ k}(f_1, f_2, ..., f_m)$ 的估计，只需考虑 $\Pi_2(f_1, f_2, ..., f_m)$。事实上，我们只需研究情形 $k\neq 1$。令 $\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\sum_{i=2}^m\frac{1}{t_i}$，其中

$$\left(\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n}\right)_+<\tfrac{1}{t_i}\leqslant\tfrac{1}{p_i},\quad i\in I\backslash\{1\}.$$

利用估计 (3.9)，即可得到我们的估计，

$$\sup_{j\geqslant N}\left\|\Delta_j f_k\right\|_{t_k}\leqslant c\left\|f_k\mid B^{s_k}_{p_k,\infty}\right\|.$$

以及以下事实

$$\left\|\left\{2^{js_1}Q_{j-N}f_1\right\}_{j\geqslant N}\mid L_p(\ell_q)\right\|\lesssim\left\|f_1\mid F^{s_1}_{p_1,q}\right\|.$$

$\Pi_2(f_1, f_2, ..., f_m)$ 的估计。令 K 为 (3.14) 中的 us。为简便起见，若 $K=\emptyset$，我们令 $\sum_{i\in K}\frac{1}{r}=$为 0。从 (3.3) 和 (3.4) 可得

$$\tfrac{s_1}{n}+\sum_{i=1}^m\left(\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n}\right)_+<\tfrac{1}{p}\leqslant\sum_{i=1}^m\tfrac{1}{p_i}\leqslant 1. \tag{3.29}$$

我们将估计分为几个不同的部分；

- 步骤1. 我们考虑情形 $s_i=\frac{n}{p_i}, i\in K$ 和 $s_i<\frac{n}{p_i}, i\in I\backslash K, K\subsetneq I$。我们有

$$\tfrac{s_1}{n}+\left(\tfrac{1}{p_1}-\tfrac{s_1}{n}\right)_+=\tfrac{1}{p_1}.$$

同样，我们将 $K\cup\{1\}$ 分解为 K_1 和 K_2的不交并，其中 $K_1\subseteq I_1$ 和$K_2\subseteq I_2$，见 (3.14)。我们必须分别考虑以下情形：

- 情形 1. $I_1\backslash K_1\neq\emptyset$ 和 $I_2\backslash K_2\neq\emptyset$。我们将此情形分为以下两个子情形。

- 子情形1.1. 这里我们处理

$$\tfrac{1}{p_1}+\sum_{i\in I_1\backslash K_1}\tfrac{1}{p_i}+\sum_{i\in I_2\backslash K_2}\left(\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n}\right)\leqslant\tfrac{1}{p}\leqslant\tfrac{1}{t}, \tag{3.30}$$

其中 $t=\left(\sum_{i=1}^m\frac{1}{p_i}\right)^{-1}$。我们选取 θ 使得 $-s_1<\theta<s_2$。这保证了

$$B^{s_1+\theta}_{p,\infty}\hookrightarrow F^{s_1}_{p,q}. \tag{3.31}$$

由引理 2.8 可得

$$\left\|\Pi_2(f_1,f_2,...,f_m)\mid B^{s_1+\theta}_{p,\infty}\right\|\leqslant c\left\|\left\{\sum^j\left(\prod_{i=1}^m\Delta_{k_i}f_i\right)\right\}\mid\ell^{s_1+\theta}_\infty(L_p)\right\|.$$

首先，令

$$\tfrac{1}{p_0}=\tfrac{1}{p_1}+\sum_{i\in I_1\backslash K_1}\tfrac{1}{p_i}+\sum_{i\in I_2\backslash K_2}\tfrac{1}{t_i}, \tag{3.32}$$

其中

$$t_i=\left(\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n}\right)^{-1},\quad i\in I_2\backslash K_2.$$

定理 3.2 证明中子情形 1.2 所用的相同论证可得

$$2^{j(s_1+\theta)}\Big\|\sum^{j}\Big(\prod_{i=1}^{m}\Delta_{k_i}f_i\Big)\Big\|_{p_0}\leqslant c\,\varepsilon_j\prod_{i\in I\setminus K}\|f_i\mid B^{s_i}_{p_i,\infty}\|\prod_{i\in K}\|f_i\mid B^{n/p_i}_{p_i,\infty}\|,\quad j\in\mathbb{N}_0,$$

其中正常数 c 与 j 无关，且

$$\varepsilon_j=2^{j(\theta-\sum_{i\in I_1\setminus K_1}s_i)}(j+1)^{|I_2\setminus\{1\}|},\quad j\in\mathbb{N}_0.$$

θ 的选取确保了 $\sum_{i\in I_1\setminus K_1}s_i-\theta>0$，由此得到 $\{\varepsilon_j\}\in\ell_{\infty}$。结合嵌入可得上述估计

$$F^{s_1}_{p_1,q}\hookrightarrow B^{s_1}_{p_1,\infty},\tag{3.33}$$

give

$$\Pi_2(\cdot,f_2,...,f_m):F^{s_1}_{p_1,q}\longrightarrow F^{s_1}_{p_0,q}.$$

采用上述相同的技术，我们可以证明

$$\Pi_2(\cdot,f_2,...,f_m):F^{s_1}_{p_1,q}\longrightarrow F^{s_1}_{t,q},$$

其中 $f_i\in B^{s_i}_{p_i,\ \infty}, i\in\{2,...,m\}$。为涵盖所有满足 (3.30) 的 p，我们应用定理 2.3 和注 2.4。

- 子情形 1.2。当 p处于以下范围时，我们考虑这种情形:

$$\sum_{i\in I_2\setminus K_2}\tfrac{s_i}{n}<\tfrac{1}{p_1}+\sum_{i\in I\setminus(K\cup\{1\})}\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{1}{p}<\sum_{i\in I\setminus(K\cup\{1\})}\tfrac{s_i}{n}.$$

我们回顾一下， p_0 在（3.32）中给出。令 $\alpha>0$ 满足

$$\tfrac{n}{p_0}-\tfrac{n}{p}<\sum_{i\in I_1\setminus K_1}s_i-\alpha\quad\text{and}\quad\alpha<\sum_{i\in I_1\setminus K_1}s_i+s_1.$$

我们看到

$$B^{\sum_{i\in I_1\setminus K_1}s_i+s_1-\alpha}_{p_0,\infty}\hookrightarrow B^{s_1+\frac{n}{p_0}-\frac{n}{p}}_{p_0,\min(p,q)}\hookrightarrow B^{s_1}_{p,\min(p,q)}\hookrightarrow F^{s_1}_{p,q}.$$

使用上文相同的技术，不难得到所需估计。

- 情形 2。 $I_1\setminus K_1\neq\emptyset$ 和 $I_2\setminus K_2=\emptyset$。那么 $K\cup\{1\}=I_2\cup\{1\}\cup I_3$，其中 $I_3\subsetneq I_1$。此情形可用与情形 1 相同的论证处理。因此我们省略细节。
- 情形 3。 $I_1\setminus K_1=\emptyset$ 和 $I_2\setminus K_2\neq\emptyset$。为证明这一点，我们还将其分为子步骤 3.1 和 3.2。

- 子情形 3.1。我们先考虑 p 处于以下范围内的情形:

$$\tfrac{1}{p_1}<\tfrac{1}{p}-\sum_{i\in I_2\setminus K_2}\big(\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n}\big)<\tfrac{1}{p_1}+\tfrac{s_1}{n}+\sum_{i\in I_1\setminus\{1\}}\tfrac{1}{p_i}.$$

- $s_1>\frac{n}{p}-n$. 设 $v>0$ 满足

$$\tfrac{1}{p}-\tfrac{s_1}{n}<\tfrac{1}{v}<\tfrac{1}{p_1}+\sum_{i\in I_1\setminus\{1\}}\tfrac{1}{p_i}+\sum_{i\in I_2\setminus K_2}\big(\tfrac{1}{p_i}-\tfrac{s_i}{n}\big).$$

我们设

$$\tfrac{1}{v}=\tfrac{1}{p_1}+\sum_{i\in I_2\setminus K_2}\tfrac{1}{d_i}+\sum_{i\in I_1\setminus\{1\}}\tfrac{1}{t_i},$$

其中 $t_i>p_i$、 $i\in I_1\setminus\{1\}$ 和 $\frac{1}{d_i}=\frac{1}{p_i}-\frac{s_i}{n}$、 $i\in I_2\setminus K_2$。对定理 3.2 证明中的子情形 3.1 做一些细微的技术调整后，我们便可得到所需结果。

• $s_1 \leqslant \frac{n}{p} - n_\circ$ 设 $v > 0$ 满足

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{p_1} + \sum_{i\in I_1\setminus\{1\}} \frac{1}{p_i} + \sum_{i\in I_2\setminus K_2} \frac{1}{t_i}, \quad \sigma = s_1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{v}, \tag{3.34}$$

其中

$$\left(\frac{1}{p_i} - \frac{s_i}{n}\right)^{-1} > t_i > p_i, \quad i \in I_2\setminus K_2.$$

我们有

$$B_{v,p}^{\frac{n}{v}-n+\theta} \hookrightarrow B_{v,p}^{\frac{n}{v}-n} \hookrightarrow B_{v,p}^{\sigma} \hookrightarrow F_{p,q}^{s_1}, \tag{3.35}$$

其中 $\theta > n - \frac{n}{v}$。因此，对于任意 $j \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} &2^{j(\frac{n}{v}-n+\theta)} \Big\| \sum^{j} \Big(\prod_{i=1}^{m} \Delta_{k_i} f_i \Big) \Big\|_v \\ \leqslant & c\, 2^{j\nu} u_j' \big\| f_1 \mid B_{p_1,\infty}^{s_1} \big\| \prod_{i\in I_2\setminus K_2} \big\| f_i \mid B_{p_i,\infty}^{s_i} \big\| \prod_{i\in I_1\cup K_2} \big\| f_i \mid B_{p_i,\infty}^{n/p_i} \big\|, \end{aligned}$$

其中正常数 c 与 j 无关，$\{u_j'\}$ 由（3.18）定义，且

$$\nu = \frac{n}{v} - n - s_1 - \sum_{i\in I_1\setminus\{1\}} \frac{n}{p_i} + \theta.$$

取 θ 使得 $\nu < 0$, 可得 $\{2^{j\nu} \cdot u_j'\} \in \ell_{p\circ}$ 利用（3.33）和（3.35），我们得到所需估计。

•子情形 3.2。我们考虑以下情形

$$\sum_{i\in I_1\setminus\{1\}} \frac{1}{p_i} + \sum_{i\in I_2\setminus K_2} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{s_i}{n}\right) + \frac{1}{p_1} + \frac{s_1}{n} \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{t}.$$

首先令

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{p_1} + \sum_{i\in I_1\setminus\{1\}} \left(\frac{1}{p_i} + \frac{s_1}{|I_1\setminus\{1\}|n}\right) + \sum_{i\in I_2\setminus K_2} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{s_i}{n}\right).$$

这里注意到，对于任意 $i \in I_1\setminus\{1\}$，都有 $\frac{1}{p_i} + \frac{s_1}{|I_1\setminus\{1\}|n} > 0$，因为对于任意$i \in I\setminus\{1\}$, 都有 $s_1 + s_i > 0$。首先由引理 2.10/(iii)可得

$$\prod_{i\in J_2} \big\| Q_j f_i \big\|_\infty \leqslant c\, u_j' \prod_{i\in K_2} \big\| f_i \mid B_{p_i,\infty}^{s_i} \big\|, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

H¨older 不等式和引理 2.10/(iii)给出

$$2^{j(s_1+\theta)} \Big\| \sum^{j} \Big(\prod_{i=1}^{m} \Delta_{k_i} f_i \Big) \Big\|_v \leqslant c\, u_j' 2^{j(\theta - \sum_{i\in I_1\setminus\{1\}} n/p_i)} \prod_{i=1}^{m} \big\| f_i \mid B_{p_i,\infty}^{s_i} \big\|, \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

其中正常数 c 与 $j \in \mathbb{N}_0$ 无关。取

$$-s_1 < \theta < \sum_{i\in I_1\setminus\{1\}} \frac{n}{p_i}, \tag{3.36}$$

这之所以成立，是因为 $|I_1\setminus\{1\}| \geqslant 1$，从而得到 $\left\{2^{j(\theta - \sum_{i\in I_1\setminus\{1\}} n/p_i)}\right\} \in \ell_{\min(p,q)\circ}$ 令 $f_i \in B_{p_i,\infty}^{s_i}, i \in \{2, ..., m\}$。利用 (3.31) 和 (3.33)，我们得到所需估计。因此，

$$\Pi_2(\cdot, f_2, ..., f_m) : F_{p_1,q}^{s_1} \longrightarrow F_{v,q}^{s_1}.$$

现在，若 $p=t$，通过对情形 1.2 中所用论证稍作修改，我们得到 g et

$$\Pi_2(\cdot,f_2,...,f_m):F^{s_1}_{p_1,q}\longrightarrow F^{s_1}_{t,q}.$$

因此，利用上述相同的插值方法，我们得到所需结果。

- 步骤 2。求得所需估计需要以下子步骤 .
  - 子步骤 2.1。$s_i=\frac{n}{p_i}, i\in I\setminus\{1\}$。在这种情况下，我们有 $p<p_1$。我们区分以下两种情形:

•情形 1。

$$\tfrac{1}{p_1}+\sum_{i\in I_1\setminus\{1\}}\tfrac{1}{p_i}\leqslant\tfrac{1}{p}\leqslant\tfrac{1}{t}.$$

我们设

$$\tfrac{1}{p}=\tfrac{1}{p_1}+\sum_{i\in I_1\setminus\{1\}}\tfrac{1}{p_i}+\sum_{i\in I_2\setminus\{1\}}\tfrac{1}{t_i},\quad t_i\geqslant p_i, i\in I_2\setminus\{1\}\,.$$

不难得到

$$2^{j(s_1+\theta)}\Big\|\sum^{j}\Big(\prod_{i=1}^{m}\Delta_{k_i}f_i\Big)\Big\|_p\leqslant c\,2^{j(\theta-\sum_{i\in I_1\setminus\{1\}}\frac{n}{p_i})}\big\|f_1\mid B^{s_1}_{p_1,\infty}\big\|\prod_{i=2}^{m}\big\|f_i\mid B^{n/p_i}_{p_i,\infty}\big\|$$

对任意 $j\in\mathbb{N}_0$。我们选取如 (3.36) 中的 θ，并利用 (3.31) 和 (3.33)，得到所需估计。

•情形 2。

$$\tfrac{1}{p_1}<\tfrac{1}{p}<\tfrac{1}{p_1}+\sum_{i\in I_1\setminus\{1\}}\tfrac{1}{p_i}.$$

首先我们看到 $s_1>\frac{n}{p_1}-n$，见 (3.29)。令 $v>0$ 满足

$$\max\Big(\tfrac{1}{p},\tfrac{1}{p_1}-\tfrac{s_1}{n}\Big)<\tfrac{1}{v}<\tfrac{1}{p_1}+\sum_{i\in I_1\setminus\{1\}}\tfrac{1}{p_i}.$$

我们设

$$\tfrac{1}{v}=\tfrac{1}{p_1}+\sum_{i\in I_1\setminus\{1\}}\tfrac{1}{t_i},\quad t_i>p_i, i\in I_1\setminus\{1\}$$

并令 $\theta>0$ 满足

$$-s_1-\tfrac{n}{v}<\theta-\tfrac{n}{p}<-\tfrac{n}{p_1}.$$

令 σ 如 (3.34) 所示。我们可以证明以下估计

$$\begin{aligned}2^{j(\sigma+\theta)}\Big\|\sum^{j}\Big(\prod_{i=1}^{m}\Delta_{k_i}f_i\Big)\Big\|_v&\leqslant c\,2^{j(\sigma-s_1+\theta)}\big\|f_1\mid B^{s_1}_{p_1,\infty}\big\|\prod_{i\in I_1\setminus\{1\}}\big\|\Delta_j f_i\big\|_{t_i}\prod_{i\in I_2\setminus\{1\}}\big\|Q_j f_i\big\|_\infty\\&\leqslant c\,2^{j(\theta-\frac{n}{p}+\frac{n}{p_1})}\big\|f_1\mid B^{s_1}_{p_1,\infty}\big\|\prod_{i=2}^{m}\big\|f_i\mid B^{n/p_i}_{p_i,\infty}\big\|,\quad j\in\mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

结论由 (3.31)、(3.33) 以及 $\big\{2^{j(\theta-\frac{n}{p}+\frac{n}{p_1)}}\big\}\in\ell_\infty$ 这一事实得出。

- 子步骤 2.2。$s_i>\frac{n}{p_i}, i\in I_3\subset I_\circ$ 若 $s_i>\frac{n}{p_i}, i\in I_3\subsetneq I,$，我们可以用步骤1中给出的相同论证来处理这种情况。设 $f_i\in B^{s_i}_{p_i,\infty}, i\in\{2,...,m\}$。若 $s_i>\frac{n}{p_i}, i\in I\setminus\{1\}$，则可以证明 $\Pi_2(\cdot,f_2,...,f_m):F^{s_1}_{p_1,q}\longrightarrow F^{s_1}_{t\,q,\circ}$ 利用嵌入可得 $\Pi_2(\cdot,f_2,...,f_m):F^{s_1}_{p_1,q}\longrightarrow F^{s_1}_{p_1,q}$

$$B^{s_1+\frac{n}{p_{i_0}}+\theta}_{v,\infty}\hookrightarrow F^{s_1+\frac{n}{p_{i_0}}}_{v,\infty}\hookrightarrow F^{s_1}_{p_1,q}$$

对于某些 $i_0 \in I_1 \setminus \{1\}$ 和 $\frac{1}{v} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_{i_0}}$，满足

$$-s_1 - \frac{n}{p_{i_0}} < \theta < s_{i_0} - \frac{n}{p_{i_0}},$$

这之所以可行，是因为 $s_1 + s_2 > 0$。我们利用定理 3.2 证明中的子情形 1.2 所给出的插值方法，得出所需结果。□

注 3.37。我们希望我们的结果能应用于函数空间、复合算子和偏微分方程理论。我们请读者参阅论文[3]，作者在文中研究了由

$$A^s_{p_1,q}(\mathbb{R}^n, |\cdot|^\alpha) \cdot A^r_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n, |\cdot|^\alpha) \hookrightarrow A^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, |\cdot|^\alpha), \tag{3.38}$$

诱导的

$$(f_1, f_2) \longrightarrow f_1 \cdot f_2,$$

并将其应用于幂权Triebel-Lizorkin空间上伪微分算子的连续性。这里，$A^s_{p,\ q}(\mathbb{R}^n, |\cdot|^\alpha)$表示Besov空间$B^s_{p,\ q}(\mathbb{R}^n, |\cdot|^\alpha)$或Triebel-Lizorkin空间$F^s_{p,\ q}(\mathbb{R}^n, |\cdot|^\alpha)$。此外，他们还证明了关于参数的大多数假设的必要性。

致谢。阿尔及利亚科学研究与技术发展总局和高等教育与培训总局为本研究提供了支撑（资助编号：C00L03UN280120220004）。

References

[1] H. Amann，《Sobolev空间与Besov空间中的乘法》。载于：非线性分析。比萨高等师范学校，1991，27-50。[2] H. Bahouri、J.-Y. Chemin 和 R. Danchin，《傅里叶分析与非线性偏微分方程》，数学科学基础丛书第343卷，[数学科学基本原理]。施普林格，海德堡，2011。[3]H. Brahim Boulares 和 D. Drihem，《幂权Besov空间与Triebel-Lizorkin空间上的乘法》，函数逼近与数学评论，提前出版，1-32，2022。https://doi.org/10.7169/facm/1991[4]D. Drihem 和 M. Moussai，《Besov空间与Triebel-Lizorkin空间中的逐点乘法》。国际数学与数学科学杂志，2006年，第2006卷，文章编号76182，页码1-18，DOI 10.1155/IJMMS/2006/76182。[5] J. Franke，《Triebel-Lizorkin型空间 $F^{s}{}_{,p}{}^{q}$：逐点乘子与定义域上的空间》。数学新闻125（1986），29-68。[6] M. Frazier 和 B. Jawerth，《分布空间的离散变换与分解》。J. Funct. Anal. 93（1990），34-170。[7] B. Hanouzet，《与变系数系统相容的双线性映射：Besov空间中的连续性》。偏微分方程通讯10（1985），433-465。[8] J. Johnsen，《Besov空间与Triebel-Lizorkin空间的逐点乘法》。数学新闻175（1995），85-133。[9]N. Lindemulder，《半空间特征函数在各向异性向量值函数空间上的逐点乘法》，arXiv: 2105.03087v1。[10] J. Marschall，《非正规伪微分算子的有界性与紧性》。数学新闻175（1995），231-262。[11]J. Marschall，《关于非正规伪微分算子的评述》。Z. Anal. Anwendungen. 15（1996），109-148。[12] V.G. Maz'ya 和 T.O. Shaposhnikova，《Sobolev乘子理论：及其在微分算子与积分算子中的应用》。施普林格，2009。[13] M. Meyries、M.C. Veraar，《幂权光滑函数空间的锐嵌入结果》，Studia. Math. 208(3)（2012），257–293。

[14] J. Peetre，《Besov空间新论》，杜克大学数学丛书，第1号，杜克大学数学系，北卡罗来纳州，1976。[15] T. Runst 和W. Sickel，《分数阶Sobolev空间、Nemytskij算子与非线性偏微分方程》。De Gruyter，柏林，1996。[16] W. Sickel，《Triebel-Lizorkin空间中的逐点乘法》。Forum Math. 5（1993），73-91。[17] W. Sickel 和 H. Triebel，《函数空间中 ¨older不等式与锐嵌入：$B^s_{p,q}$ 型及$F^s_{p,q}$ 型空间》。Z. Anal. Anwendungen. 14（1995），105-140。[18] H. Triebel，《空间$B^s_{p,q}$ 和 $F^s_{p,q}$的乘法性质：函数的拟Banach代数》。Ann. Mat. Pura. Appl. 113（1977），33-42。[19] H. Triebel，《Besov空间的乘法性质》。Ann. Mat. Pura. Appl. 114（1977），87-102。[20] H. Triebel，《函数空间理论》。Birkh¨auser，巴塞尔，1983。[21] H. Triebel，《函数空间理论 II》。Birkh¨auser，巴塞尔，1992。[22] M. Yamazaki，《拟齐次版本的拟微分算子 I：Besov型空间上的有界性》。J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 33（1986），131-174。[23] J. Wu，《二维耗散准地转方程在Besov空间中的整体解》，SIAM J. Math. Anal. 36.3（2004/05），1014–1030。[24] E. Ziedler，《非线性泛函分析及其应用》。Springer-Verlag，柏林、海德堡、纽约、伦敦、巴黎、东京，1990。

M'sila University, Department of Mathematics, Laboratory of Functional Analysis and Geometry of Spaces, M'sila 28000, Algeria.电子邮箱地址：douadidr@yahoo.fr, douadi.drihem@univ-msila.dz