arXiv:2301.03264v1 [math.RT] 9 Jan 2023

循环移位类的推广

何旭华

Abstract. 受 Lusztig 的 G-稳定片启发，我们考察组合片：对于魏尔群中的元素 w 以及由 w 规范化的简单反射子集 K，由此得到的有序对 (w, K)。我们将魏尔群上的循环移位类概念推广到组合片集合。我们证明，与最短长度元素相关的组合片的部分循环移位类具有良好的代表元。作为应用，我们证明了抛物特征层的左右对称性以及诱导函子的相容性。

Introduction

0.1. 魏尔群元素的循环移位。设 G 是代数闭域上的连通约化群。设 B 是 G 的 Borel 子群， W 是 G 的魏尔群。那么我们有 Bruhat 分解 $G = \sqcup_{w\in W} B\dot{w}B$。几何表示论的一个核心主题，是理解约化群 G 与其魏尔群 W 之间（众多）神秘的关系（例如，参见 Kazhdan-Lusztig 理论和 Springer 理论）。

我们尤其关注 W上的共轭作用。注意， W 是一个 Coxeter 群，由简单反射生成。特别地， W 中任意两个属于同一共轭类的元素，都可以通过一系列简单反射共轭得到。若两个元素可以通过一系列简单反射共轭，且每次共轭都保持长度不变，我们就称它们属于同一个循环移位类。长度保持这一条件对于与 G上的共轭问题建立联系至关重要。若 w 和 w' 属于同一个循环移位类，则商栈之间存在一个同构

$$\frac{B\dot{w}B}{\Delta(B)} \cong \frac{B\dot{w}'B}{\Delta(B)}. \tag{a}$$

这里， $\Delta(B)$ 表示共轭作用。这种同构在 W 的共轭类与 G 的幺正共轭类之间的相互作用中发挥着重要作用（见 [10]）。

2010 年数学主题分类：20F55、20G40、14F05。关键词和短语：Weyl 群、循环移位、抛物特征层。

0.2. 组合片的循环移位。本文考虑（a）关于抛物子群的一种类比。这种同构将在研究 Lusztig 的抛物特征层理论时发挥作用，我们将在 §0.4 中讨论该理论。

我们所考虑的对象是商栈 $\frac{P\dot{w}P}{\Delta P}()$，其中 $P = LU_P$是 G的标准抛物子群，w 是魏尔群中一个规范化标准 Levi 子群 L的元素。事实上，在应用中，我们所考虑的对象会比 $\frac{P\dot{w}P}{\Delta P}()$更加技术性，但在引言中我们忽略这些复杂性。

我们的首要目标是为各种配对 (w, P) 建立 $\frac{P\dot{w}P}{\Delta P}()$ 之间的同构。注意，简单反射的共轭作用不会将标准 Levi 子群映到 Levi 子群。为克服这一困难，我们引入组合片。一个组合片是一个配对 (w, K)，其中 w 是魏尔群中的一个元素，K 是简单反射的一个子集（它表示 G的一个标准抛物子群 P_K），并且 w 规范化 K。接着，我们在 §3.2 中引入组合片的循环移位类，并在命题 3.1 中证明，若 (w, K) 和 (w', K') 属于同一个循环移位类，则相应的商栈之间存在同构

$$\frac{P_K\dot{w}P_K}{\Delta(P_K)} \cong \frac{P_{K'}\dot{w}'P_{K'}}{\Delta(P_{K'})}. \tag{b}$$

注意，我们可以通过映射 $w \mapsto (w, \emptyset)$ 将魏尔群 W 视为组合片的一个子集。组合片 $(w, \emptyset)$ 和 $(w', \emptyset)$ 是循环移位等价的，当且仅当 w 和 w' 在通常意义下循环移位等价。在这种情形下，$P_\emptyset = B$。因此，(b) 可视为 (a) 的推广。

0.3. 代表元。我们的下一个目标是为组合片的某些循环移位类找到简洁的代表元。

设 J 是简单反射的一个子集，W_J 是由 J生成的 W 的标准抛物子群。我们考虑 W上的部分共轭类，即 W_J 在W上共轭作用的轨道。根据 [5], ，我们有如下分解

$$\frac{W}{\Delta(W_J)} = \bigsqcup_{(w,K)} \frac{W_K w}{\Delta(W_K)}, \tag{c}$$

其中，$\frac{W}{\Delta}(W_J)$ 表示 W 在 W_J的共轭作用下得到的商栈；右侧对所有满足以下条件的配对 (w, K) 取遍：w是右陪集 $W_J\backslash W$ 的最小长度代表元，且 K 是 J 的极大子集，使得 (w, K) 是一个组合片。此外，若 w 是其部分共轭类中的最短长度元素，则 w 可通过部分共轭（即在 W_J中进行一系列共轭作用）循环移位至 $W_K w$中的某个元素，其中 (w, K) 是 (c) 右侧出现的配对。

我们在定理 3.2 中证明了上述结论的一个“升级版本”。也就是说，若 w_1 是其部分共轭类中的最短长度元素，且 (w_1, K_1) 是一个满足 $K_1 \subset J$ 的组合片，则

$$(w_1, K_1) \text{ is cyclic shift (via partial conjugation) to } (w_2, K_2), \qquad \text{(d)}$$

其中，w_2 是右侧 (c) 中某个 (w, K) 所对应的 $W_K w$ 中的一个元素。

0.4. 抛物特征层的应用。现在我们讨论一些应用。Lusztig 在 [8] 中引入了抛物特征层。粗略地说，抛物特征层是商栈 $\mathcal{Y}_J = \frac{U_{P_J}\backslash G/U_{P_J}}{\Delta}$ $_{(L_J)}$ 上的某些简单 perversity 层。抛物特征层依赖于以下将 $\mathcal{Y}_J$ 分解为 G-稳定片的分解：

$$\mathcal{Y}_J = \bigsqcup_w \mathcal{Y}_{J,w}, \text{ where } \mathcal{Y}_{J,w}\text{“}=\text{”}\frac{P_K \dot{w} P_K}{\Delta(P_K)}, \qquad \text{(e)}$$

这里，w 遍历右陪集$W_J\backslash W$中的最小长度代表元。引号表示我们忽略幺零群的 gerb。精确表述请参见 §2.2。

值得指出的是，如果 (w, K) 与 (w', K') 共轭，那么很容易构造一个同构 $\frac{L_K \dot{w}}{\Delta\ L_K}(\ ) \cong \frac{L_{K'} \dot{w}'}{\Delta}(L_{K'})$。然而，要关联不同组合片 (w, K) 对应的 $\frac{P_K \dot{w} P_K}{\Delta\ P_K}(\ )$ 则更为复杂。关于组合片循环移位的结果 (b) 和 (d)，使我们能够理解与分解 (e) 相关的任意组合片所对应的层的某些性质。

我们在 §4 中给出两个应用。

(1) 左右对称性。

请注意，在分解 (c) 和 (d) 中，我们使用右陪集$W_J\backslash W$。也可以使用左陪集W/W_J定义类似的分解。先验地，使用左陪集和右陪集得到的分解可能不同。然而，利用组合片的循环移位，我们证明左陪集与右陪集之间存在一种对称性，使得 $\Delta^{W}{}_{(W_J)}$和 $\mathcal{Y}_J$ 中的相应子栈重合。

(2) 诱导函子。

设 $J \subset J'$。Lusztig 定义了函子 $f\colon \mathrm{Sh}(\mathcal{Y}_J) \to \mathrm{Sh}(\mathcal{Y}_{J'})$。假设 w（分别地，w'）是其右陪集 $W_J\backslash W$（分别地，$W_{J'}\backslash W$）中的最小长度代表元，w和 w'属于同一个 $W_{J'}$-共轭类，且 $\ell(w) = \ell(w')$。那么我们有

$$\mathcal{Y}_{J,w}\text{“}=\text{”}\frac{P_K \dot{w} P_K}{\Delta(P_K)} \text{ and } \mathcal{Y}_{J',w'}\text{“}=\text{”}\frac{P_{K'} \dot{w}' P_{K'}}{\Delta(P_{K'})}.$$

在定理 4.3 中，我们证明函子 f 到 $\mathcal{Y}_{J,\ w}$和$\mathcal{Y}_{J',\ w'}$ 的限制，本质上就是与约化群 $L_{K'}$ 及其 Levi 子群相关联的 Harish-Chandra 诱导函子。Li、Nadler 和 Yun [11] 的工作中用到了这一结果。

致谢：XH 部分受到香港中文大学周明讲座教授席相关经费、香港研究资助局资助项目 14300221 以及 Xplorer 奖的资助。本文源于恽之伟关于抛物特征层的一个问题，该问题见于 [11]。感谢他向我解释这个问题及相关材料，见 [11]。我们也感谢乔治·卢斯蒂格的宝贵讨论。

1. Cyclic shift classes

1.1. 共轭图。设 W 为一个魏尔群， S 为简单反射集。设 ℓ 为 W 上的长度函数，6 为 W上的布鲁哈特序。设 δ 为 W上的群自同构，且保持 S。我们考虑 δ在 W 上的共轭作用，其定义为 $w \cdot_\delta w' = ww'\delta(w)^{-1}$。

沿用 [3, §3.2], ，我们定义如下的 δ-共轭图。它是一个有向图，其顶点属于 W，边的形式为 $w \xrightarrow{s}_\delta w'$，其中 w、 $w' \in W$、 $s \in S$满足 $w' = sw\delta(s)$ 且 $\ell(w') \leqslant \ell(w)$。

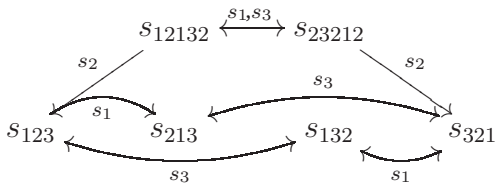
我们将由 δ-共轭图在 W 上诱导的预序关系记为 $\to_\delta$ 。换言之，对于 w 、 $w' \in W$ 、 $w \to_\delta w'$，若存在元素序列 $w = w_1$、 w_2、 $\ldots$、 $w_n = w$ 和 s_1、$\ldots$、$s_{n-1} \in S$，使得对于 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 有 $w_i \xrightarrow{s_i}_\delta w_{i+1}$。

若 $w \to_\delta w'$ 且 $w' \to_\delta w$，我们记为 $w \approx_\delta w'$ 。容易看出， $\approx_\delta$ 在 W 上构成一个等价关系。对于 $w \in W$，我们记 $\mathrm{Cyc}_\delta(w) = \{w' \in W;\ w \approx_\delta w'\}$，并称其为 w 的 δ-循环移位类。

如果 δ 是恒等映射，我们可以省略下标 δ。

现在我们给出一个共轭图的例子。

例 1.1. 设 $W = S_4$ 为类型 A_3 的有限魏尔群，其简单反射集合为 $S = \{s_1, s_2, s_3\}$。我们简写为 $s_{abc\cdots}$，而不写 $s_a s_b s_c \cdots$。容易看出，$s_1s_2s_3$的共轭类构成共轭图的一个连通分支。该连通分支列于下文。



1.2. 几何循环移位。设 G 是代数闭域 k 上的连通约化群。设 $G = \mathrm{G(k)}$，并令 B 为 G 的 Borel 子群，其极大环面为 T，幺幂根基为 U。设 $\mathcal{R}$ 为 G 的根数据，且 δ 为 $\mathcal{R}$ 的自同构。特别地，

$\delta(B)=B$。我们仍用 δ 表示其在 G 及其魏尔群 $W=N_G(T)/T$ 上的相应自同构。对于任意 $w\in W$，我们在 $N_G(T)$ 中选取一个代表元 $\dot{w}$。

考虑由 $g\cdot_\delta g'=gg'\delta(g)^{-1}$ 定义的 δ-共轭作用 G。令 ${}^G\text{伴随作用}_\delta(G)$ 为商栈。我们有布鲁哈特分解 $G=\sqcup_{w\in W}B\dot{w}B$。每个布鲁哈特胞腔 $B\dot{w}B$ 在由 B 给出的 δ- 共轭作用下保持不变。令 ${}^{B\dot{w}B}\text{伴随作用}_{\delta(B)}$ 为相应的商栈，并且

$$\pi_w:\frac{B\dot{w}B}{\mathrm{Ad}_\delta(B)}\longrightarrow\frac{G}{\mathrm{Ad}_\delta(G)}$$

为自然态射。

另一方面，我们有 T 上由 $t\mapsto\dot{w}\delta(t)\,\dot{w}^{-1}$ 定义的自同构。令 ${}^T\text{伴随作用}_{\dot{w}\circ\delta(T)}$ 为商栈，并且

$$p_w:\frac{B\dot{w}B}{\mathrm{Ad}_\delta(B)}\longrightarrow\frac{T}{\mathrm{Ad}_{\dot{w}\circ\delta}(T)}$$

为自然态射。

我们有如下循环移位的（提升后的）几何版本。

命题 1.2. 设 $w,w'\in W$。假设 $w\approx_\delta w'$。那么存在同构 ${}^{B\dot{w}B}\text{伴随作用}_{\delta(B)}\cong{}^{B\dot{w}'B}\text{伴随作用}_{\delta(B)}$ 以及 ${}^T\text{伴随作用}_{\dot{w}\circ\delta(T)}\cong{}^T\text{伴随作用}_{\dot{w}'\circ\delta(T)}$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{T}{\mathrm{Ad}_{\dot{w}\circ\delta}(T)} & \xleftarrow{p_w} & \frac{B\dot{w}B}{\mathrm{Ad}_\delta(B)} & \xrightarrow{\pi_w} & \frac{G}{\mathrm{Ad}_\delta(G)} \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \| \\
\frac{T}{\mathrm{Ad}_{\dot{w}'\circ\delta}(T)} & \xleftarrow{p_{w'}} & \frac{B\dot{w}'B}{\mathrm{Ad}_\delta(B)} & \xrightarrow{\pi_{w'}} & \frac{G}{\mathrm{Ad}_\delta(G)}.
\end{array}$$

注记1.3. (1) 同构 ${}^{B\dot{w}B}\text{伴随作用}_{\delta(B)}\to{}^{B\dot{w}'B}\text{伴随作用}_{\delta(B)}$ 已在[6, §3.4]中构造。我们沿用上述文献中的证明。

(2) 我们构造的同构 ${}^{B\dot{w}B}\text{伴随作用}_{\delta(B)}\cong{}^{B\dot{w}'B}\text{伴随作用}_{\delta(B)}$ 和 ${}^T\text{伴随作用}_{\dot{w}\circ\delta(T)}\cong{}^T\text{伴随作用}_{\dot{w}'\circ\delta(T)}$ 可视为循环移位路径 $w=w_1\xrightarrow{s_1}\cdots\xrightarrow{s_{n-1}}w_n=w'$ 的几何提升。这类同构取决于此类路径的选择，而且似乎不存在规范的同构选择。

证明. 只需考虑 $w\xrightarrow{s}w'$ 的情形。在这种情形下，$\ell(w')=\ell(w)$。容易看出，若 $sw>w$ 且 $w(s)>w$，则$w'=w$。不失一般性，我们还可以假设$sw<w$。令 $w_1=sw$。于是 $w_1\delta(s)=w'$。我们有

$$B\dot{s}B\times^B B\dot{w}_1B\cong B\dot{w}B,$$

其中 B通过 $b\cdot(g_1,g_2)=(g_1b^{-1},bg_2)$作用于 $B\dot{s}B\times B\dot{w}_1B$，且 $B\dot{s}B\times^B B\dot{w}_1B$ 是商空间。同理，我们有

$$B\dot{w}_1B\times^B B\delta(\dot{s})B\cong B\dot{w}'B.$$

我们有一个自然同构

$$B\dot{s}B \times B\dot{w}_1B \cong B\dot{w}_1B \times B\delta(\dot{s})B, \qquad (g_1, g_2) \longmapsto (g_2, \delta(g_1)).$$

根据定义， g_1g_2 和 $g_2\delta(g_1)$ 属于 G 的同一个 δ-共轭类。这个同构诱导出所需的同构 $^{B\dot{w}B}$伴随作用$_{\delta(B)} \cong \overline{^{B\dot{w}'B}\text{伴随作用}_{\delta(B)}}$。

注意，在 T 上，$\mathrm{Ad}(\dot{s}) \circ \mathrm{Ad}(\dot{w}) \circ \delta = \mathrm{Ad}(\dot{w}') \circ \delta \circ \mathrm{Ad}(\dot{s})$。所需的同构 ^{T}伴随作用$_{\dot{w}\circ\delta(T)} \cong \overline{^{T}\text{伴随作用}_{\dot{w}'\circ\delta(T)}}$ 由 $\dot{s}$ 的共轭作用诱导。□

推论 1.4. 设 $w, w' \in W$，且 $w \approx_\delta w'$。设 $f: {}^{T}$伴随作用$_{\dot{w}\circ\delta(T)} \cong {}^{T}$伴随作用$_{\dot{w}'\circ\delta(T)}$ 是命题 1.2 中的一个同构。那么我们有

$$(\pi_w)_!(p_w)^* = (\pi_{w'})_!(p_{w'})^* f : Sh(\frac{T}{\mathrm{Ad}_{\dot{w}\circ\delta}(T)}) \longrightarrow Sh(\frac{G}{\mathrm{Ad}_\delta(G)}).$$

这里，Sh(–) 表示层复形的导出范畴。

2. Parabolic character sheaves

2.1. 在 W 上的部分共轭。令 $J \subset S$。回顾一下， W_J 是由 J 中的简单反射生成的 W 的子群。令 W^J（分别为 ${}^JW$）表示 W/W_J（分别为 $W_J\backslash W$）中的最小陪集代表元集合。对于 J、$K \subset S$，我们简记 ${}^JW \cap W^K$ 为 ${}^JW^K$。

考虑 W_J 在 W 上的 δ-共轭作用，其定义为：对于 $w \in W_J$ 和 $w' \in W$， $w \cdot_\delta w' = ww'\delta(w)^{-1}$。对于 $w \in W$，若对于任意简单反射 $s \in J$，都存在一个简单反射 $s' \in J$，使得 $w\delta(s)w^{-1} = s'$，则记 $\mathrm{Ad}(w)\delta(J) = J$。在此情形下， $w \in {}^JW$ 当且仅当 $w \in W^{\delta(J)}$。

对于任意 $J \subset S$ 和 $w \in W$，我们设

$$I(J, w, \delta) = \max\{K \subset J; \mathrm{Ad}(w)\delta(K) = K\}.$$

现在我们回顾 B´édard 对 ${}^JW$ 的描述 [1]。

令 $\mathcal{T}(J, \delta)$ 为由序列 $(J_n, w_n)_{n\geqslant 0}$ 组成的集合，其中 $J_n \subset J$ 且 $w_n \in W$，满足

(1) $J_0 = J$；(2) $J_n = J_{n-1} \cap \mathrm{Ad}(w_{n-1})(\delta(J_{n-1}))$，其中 $n \geqslant 1$；(3) $w_n \in {}^{J_n}W^{\delta(J_n)}$ 其中 $n \geqslant 0$；(4) $w_n \in W_{J_n} w_{n-1} W_{\delta(J_{n-1})}$ 其中 $n \geqslant 1$。

那么，对于任意序列 $(J_n, w_n)_{n\geqslant 0}$，我们有 $w_m = w_{m+1} = \cdots$ 且 $J_m = J_{m+1} = \cdots$，其中 $m \geqslant 0$。根据 [8, 命题 2.5]，，赋值 $(J_n, w_n)_{n\geqslant 0} \mapsto w_m$ 对于 $m \gg 0$ 定义了一个双射 $\mathcal{T}(J, \delta) \to {}^JW$。此外，对于所有 $n \geqslant 0$， $w_n \in wW_{\delta(J_n)}$，且 $(J, w, \delta) = J_m$ 对于$m \gg 0$。

我们对 $W_{I(J,w,\delta)}$ 有如下描述。

引理 2.1. 设 $w \in {}^JW$。那么 $W_{I(J,w,\delta)} = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}}$(伴随作用$(w) \circ \delta)^n(W_J)$。

证明。根据定义，伴随作用$(w)\circ\delta(W_{I(J,w,\delta)})=W_{I(J,w,\delta)}\subset W_J$。

令$(J_n,w_n)_{n\geqslant 0}$为$\mathcal{T}(J,\delta)$中对应于w的序列。现在我们证明，对于所有n，$\cap_{n\in\mathbb{Z}}(\mathrm{Ad}(w)\circ\delta)^n(W_J)\subset W_{J_n}$。

根据定义，$\cap_{n\in\mathbb{Z}}(\mathrm{Ad}(w)\circ\delta)^n(W_J)\subset W_J=W_{J_0}$。假设我们已经证明了对于某个$i$，$\cap_{n\in\mathbb{Z}}(\mathrm{Ad}(w)\circ\delta)^n(W_J)\subset W_{J_i}$。根据定义，对于某个$a\in W_{J_i}$，$w=w_i\delta(a)$。因此

$$\begin{aligned}
&\cap_{n\in\mathbb{Z}}\left(\mathrm{Ad}(w)\circ\delta\right)^n(W_J)\\
&=\left(\cap_{n\in\mathbb{Z}}(\mathrm{Ad}(w)\circ\delta)^n(W_J)\right)\cap\mathrm{Ad}(w)\circ\delta\left(\cap_{n\in\mathbb{Z}}(\mathrm{Ad}(w)\circ\delta)^n(W_J)\right)\\
&\subset W_{J_i}\cap\mathrm{Ad}(w)\circ\delta(W_{J_i})=W_{J_i}\cap\mathrm{Ad}(w_i)\circ\delta(W_{J_i})\\
&=W_{J_{i+1}}.
\end{aligned}$$

证明完毕。 □

我们对W上的$\mathrm{Ad}_\delta(W_J)$-轨道有如下分类。

命题 2.2。设$J\subset S$。则

(1) $W=\bigsqcup_{w\in{}^JW}W_J\cdot_\delta(W_{I(J,w,\delta)}w)$；(2) 对任意$w\in{}^JW$，嵌入$W_{I(J,w,\delta)}\to W$, $u\mapsto uw$诱导出商栈之间的双射

$$\frac{W_{I(J,w,\delta)}}{\mathrm{Ad}_{w\circ\delta}(W_{I(J,w,\delta)})}\cong\frac{W_J\cdot_\delta(W_{I(J,w,\delta)}w)}{\mathrm{Ad}_\delta(W_J)}.$$

证明。第 (1) 部分以及第 (2) 部分中轨道的双射已在 [5,推论 2.6] 中证明。接下来只需证明，轨道上的双射也给出了各向同性群之间的同构。换言之，只需证明，若$(a,b)\in W_J\times W_{I(J,w,\delta)}w$ with $ab\delta(a)^{-1}\in W_{I(J,w,\delta)}w$，则$a\in W_{I(J,w,\delta)}$。

令$(J_n,w_n)_{n\geqslant 0}$be 为$\mathcal{T}(J,\delta)$中与w对应的元素。我们用归纳法证明，对所有n，均有$a\in W_{J_n}$。

根据定义，$a\in W_J=W_{J_0}$。假设对某个i有$a\in W_{J_i}$。那么$W_{I(J,w,\delta)}w\subset w_iW_{\delta(J_i)}$且$ab\delta(a)^{-1}\in aw_iW_{\delta(J_i)}$。因此

$$a\in W_{J_i}\cap w_iW_{\delta(J_i)}w_i^{-1}=W_{J_{i+1}}.$$

因此，对所有$n\geqslant 0$，$a\in W_{J_n}$。特别地，$a\in W_{I(J,w,\delta)}$。 □

2.2. Lusztig 簇$Z_{J,\ \delta}$。对于任意$J\subset S$，令$P_J\supset B$为类型J的标准抛物子群。令$\mathcal{P}_J=G/P_J$为部分旗簇。我们可以将$\mathcal{P}_J$识别为G中与P_J共轭的抛物子群的集合。对于G的任意抛物子群P，用U_P表示其幺幂根基。对于$g\in G$和$H\subset G$，我们简写gHg^{-1}为${}^gH$。沿用 [8]，我们定义

$$Z_{J,\delta}=\{(P,P',g\delta(U_P));P\in\mathcal{P}_J,P'\in\mathcal{P}_{\delta(J)},g\in G,{}^g\delta(P)=P'\}.$$

定义$G\times G$对$Z_{J,\ \delta}$的作用为

$$(g_1,g_2)\cdot(P,P',g\delta(U_P))=({}^{g_2}P,{}^{g_1}P',g_1g\delta(g_2)^{-1}\,\delta(U_{{}^{g_2}P})).$$

于是 $G\times G$ 在 $Z_{J,\delta}$ 上传递地作用。令 $h_{J,\delta}=(P_J,P_{\delta(J)},U_{P_{\delta(J)}})$ 为基点。那么 $h_{J,\delta}$ 的各向同性群为 $\{(\delta(l)u',lu);l\in L_J,u\in U_{P_J},u'\in U_{P_{\delta(J)}}\}$。映射 $G\times G\to G,(g,g')\mapsto(g')^{-1}g$ 诱导出代数栈的一个同构

$$\frac{Z_{J,\delta}}{\Delta(G)}\cong\mathcal{Y}_{J,\delta}.$$

这里 $\frac{Z_J,_\delta}{\Delta G}()$ 是对角 G-作用下的商栈 $Z_{J,\delta}$ 而 $\mathcal{Y}_{J,\delta}=\frac{U_{P_J}\backslash G/U_{P_{\delta(J)}}}{\text{伴随作用}_\delta(L_J)}$ 是 L_J 在 $U_{P_J}\backslash G/U_{P_{\delta(J)}}$ 上的 δ-共轭作用所对应的商栈。

现在我们回顾 $Z_{J,\delta}$ 按 G-稳定部分所作的分解，这是 Lusztig 在 [8]中引入的。对于 $w\in{}^JW$，我们定义

$$Z_{J,\delta;w}=G_\Delta\cdot(B\dot{w},B)h_{J,\delta}.$$

下面的结果由 Lusztig 在 [8]中证明。

命题 2.3。设 $J\subset S$。则

(1) $Z_{J,\delta}=\bigsqcup_{w\in{}^JW}Z_{J,\delta;w}$ 是光滑局部闭子簇的一个分解。

(2) 对于任意 $w\in{}^JW$，存在一个典范映射

$$\pi_{J,\delta;w}:\frac{Z_{J,\delta;w}}{\Delta(G)}\longrightarrow\frac{L_{I(J,w,\delta)}}{\mathrm{Ad}_{\dot{w}\circ\delta}(L_{I(J,w,\delta)})}$$

它是关于幺幂群的迭代纤维丛。

在同构 $\frac{Z_J,_\delta}{\Delta G}()\cong\mathcal{Y}_{J,\delta}$ 下，我们可以将上述分解重新表述如下。对于任意 $w\in W$，令 $\mathcal{Y}_{J,\delta;w}$ 为 $B\dot{w}B$ 在 $\mathcal{Y}_{J,\delta}$ 中的像。那么对于任意 $w\in{}^JW$，$\frac{Z_J,_{\delta;w}}{\Delta G}()\cong\mathcal{Y}_{J,\delta;w}$ 以及 $\mathcal{Y}_{J,\delta}=\sqcup_{w\in{}^JW}\mathcal{Y}_{J,\delta;w}$。

根据 [4, 命题 1.10 (1)],

$$Z_{J,\delta;w}\cong G\times^{P_{I(J,w,\delta)}}(P_{I(J,w,\delta)}\dot{w},P_{I(J,w,\delta)})\cdot h_{J,\delta},$$

其中，$P_{I(J,w,\delta)}$ 作用于 $G\times(P_{I(J,w,\delta)}\dot{w},P_{I(J,w,\delta)})\cdot h_{J,\delta}$ 通过 $p\cdot(g,z)=(gp^{-1},(p,p)\cdot z)$，而 $G\times^{P_{I(J,w,\delta)}}(P_{I(J,w,\delta)}\dot{w},P_{I(J,w,\delta)})\cdot h_{J,\delta}$ 是商空间。我们可以将其重新表述如下。

命题 2.4。设 $w\in{}^JW$。嵌入 $P_{I(J,w,\delta)}\dot{w}P_{\delta(I(J,w,\delta)}\to G$ 诱导出一个同构

$$\frac{U_{P_J}\backslash P_{I(J,w,\delta)}\dot{w}P_{\delta(I(J,w,\delta)}/U_{P_{\delta(J)}}}{\mathrm{Ad}_\delta(L_J\cap P_{I(J,w,\delta)})}\cong\mathcal{Y}_{J,\delta;w}.$$

2.3. 抛物特征层。我们沿用 [8]。对于任意 $w\in W$，我们考虑以下图

$$\frac{T}{\mathrm{Ad}_{\dot{w}\circ\delta}(T)}\xleftarrow{p_w}\frac{B\dot{w}B}{\mathrm{Ad}_\delta(B)}\xrightarrow{\pi_{J,w}}\mathcal{Y}_{J,\delta}.$$

$\mathcal{Y}_{J,\ \delta}$ 上的抛物特征层是一个简单反常层，它是某个 $w \in W$、$i \in \mathbb{Z}$、$\mathcal{L} \in$ 的 Sh(^{T}伴随作用 $_{\dot{w}\circ\delta(T)}$) 的 $^{p}H^{i}((\pi_{J,\ w})_{!}p_{w}^{*}\mathcal{L})$ 的一个合成因子。

另一方面，根据命题 2.3，对于任意 $w \in {}^{J}W$，映射$\pi_{J,\ w}$ 诱导出一个范畴等价

$$\pi_{J,\delta;w}^{*} : \mathrm{Sh}(\frac{L_{I(J,w,\delta)}}{\mathrm{Ad}_{\dot{w}\circ\delta}(L_{I(J,w,\delta)})}) \cong \mathrm{Sh}(\frac{Z_{J,\delta;w}}{\Delta(G)}) = \mathrm{Sh}(\mathcal{Y}_{J,\delta;w}).$$

注意，$L_{I(J,w,\delta)}$ 是一个连通约化群。$^{L_{I(J,w,\delta)}}$ 伴随作用$_{\dot{w}\circ\delta(L_{I(J,w,\delta)})}$ 上的特征层由~~Lusztig 在~~ [7] 中定义。

Lusztig 在 [8] 中证明了

定理 2.5. 设 $J \subset S$。那么

(1) $\mathcal{Y}_{J,\ \delta}$ 上的任意抛物特征层都是 $\pi_{J,\ \delta;w}^{*}(A)$ 的中间延拓，其中 $w \in {}^{J}W$ 唯一，且 A 是$^{L_{I(J,w,\delta)}}$伴随作用 $_{\dot{w}\circ\delta(L_{I(J,w,\delta)})}$上的一个特征层。

(2) 若 B 是 $\mathcal{Y}_{J,\ \delta}$ 上的一个抛物特征层，且 $w \in {}^{J}W$，则 $^{p}H^{i}(B\ |_{\mathcal{Y}_{J,\ \delta;w}})$ 的任意合成因子都具有如下形式：对于某个特征层 A，有 $\pi_{J,\ \delta;w}^{*}(A)$，其中 A 是~~$^{L_{I(J,w,\delta)}}$~~伴随作用 $_{\dot{w}\circ\delta(L_{I(J,w,\delta)})}$ 上的特征层。

2.4. 部分共轭图。设 $J \subset S$。我们考虑 W 上的 $\mathrm{Ad}_{\delta}(W_J)$-轨道。按定义，$(J,\delta)$-共轭图是一个有向图，其顶点属于 W，边的形式为 $w \xrightarrow{s}_{\delta} w'$，其中 w、$w' \in W$、$s \in J$。

我们用 $\to_{J,\delta}$ 表示由 $\xrightarrow{s}_{\delta}$ 在 $s \in J$ 上诱导的预序关系。若 $w \to_{J,\delta} w'$ 且 $w' \to_{J,\delta} w$，则记作 $w \approx_{J,\delta} w'$。我们称等价类 $\approx_{J,\delta}$ 为 W 上的 (J,δ)-循环移位类。

我们有以下结果。

命题 2.6。 [5, 命题 3.4] 对任意 $w \in W$，存在 $w' \in {}^{J}W$ 和 $u \in W_{I(J,w',\delta)}$，使得 $w \to_{J,\delta} uw'$。

此外，如果 w 在 $W_J \cdot_{\delta} w$ 中具有最小长度，那么 u 在 $W_{I(J,w',\delta)}$ $\cdot_{\delta'} u$ 和 $w \approx_{J,\ \delta} uw'$ 中也具有最小长度，其中 $\delta' =$ 伴随作用$(w') \circ \delta$。

注 2.7. 根据命题 2.2 (1)，w' 由 w 唯一确定。然而，一般来说，u 并不唯一。

2.5. 偏序。对于任意 $w \in W$ 和 $w' \in {}^{J}W$，我们记 $w' \leqslant_{J,\ \delta} w$，若存在 $u \in W_J$ 使得 $uw'\delta(u)^{-1} \leqslant w$。根据 [5, 推论 4.6],

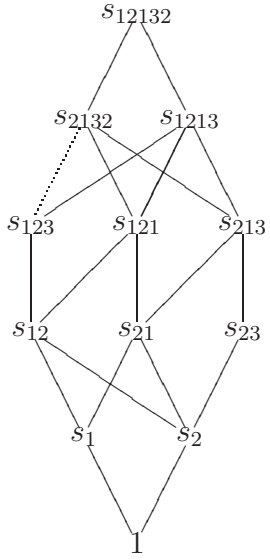
(a) 将 $\leqslant_{J,\ \delta}$ 限制到 ^{J}W，可在 ^{J}W 上得到一个偏序。

容易看出，对于 w、$w' \in {}^{J}W$、$w' \leqslant w$，可推出 $w' \leqslant_{J,\ \delta w}$；对于 $w' \leqslant_{J,\ \delta} w$，可推出 $\ell(w') \leqslant \ell(w)$。然而，反向结论一般不成立。

例 2.8。设 $W = S_4$ 和 $J = \{3\}$。W的简单反射为 s_1、s_2、s_3。我们将 $s_a s_b s_c \cdots$ 简单记作 $s_{abc\cdots}$。在图 1 中，

我们画出了 ${}^JW$的哈斯图，其中考虑了通常的布鲁哈特序和偏序 $\leqslant_{J,\ \mathrm{id}}$（额外的关系用虚线表示）。

FIGURE 1. ${}^JW$上的偏序哈斯图



由 [5, 命题 5.8],可得

(a) 设 $w \in W$。则 $\mathcal{Y}_{J,\ \delta;w} = \bigsqcup_{w' \in {}^JW;\ w' \leqslant_{J,\ \delta} w} \mathcal{Y}_{J,\ \delta;w'}$。

由于$\mathcal{Y}_{J,\ \delta;w}$是不可约的，因此存在唯一的几何片 $\mathcal{Y}_{J,\ \delta;w'}$，其在 $\mathcal{Y}_{J,\ \delta;w}$ 中稠密。因此我们有

(b) 对于任意 $w \in W$，集合 $\{w' \in W^J;\ w' \leqslant_{J,\ \delta} w\}$ 关于 $\leqslant_{J,\ \delta}$ 含有唯一的极大元。

我们还想指出 (a) 的特殊情形，它将在 [11]中使用。

(c) 设 $w \in W$。若 $W_J \cdot_\delta w \cap {}^JW = \emptyset$或 w在 $W_J \cdot_\delta w$中不具有最小长度，则 $\mathcal{Y}_{J,\ \delta;w} \subset \bigsqcup_{w' \in {}^JW;\ \ell(w')<\ell(w)} \mathcal{Y}_{J,\ \delta;w'}$。

3. CYCLIC SHIFTS OF PIECES

3.1. 组合片。 δ-组合片是一个有序对 (w, K)，其中 $w \in W$ 和 $K \subset S$ 满足 $w \in {}^KW$ 且伴随作用 $\mathrm{Ad}(w)\delta(K) = K$ （因此 $w \in W^{\delta(K)}$）。对于每个 δ-组合片 (w, K)，我们关联一个子集 $W_K w$，它是 W的子集。特别地，若 $K = \emptyset$，则我们自然地将 δ-组合片 $(w, \emptyset)$ 与 W中的元素 w 等同。这样，我们将 W 视为 δ-组合片集合的子集。

我们称两个 δ-组合片 (w, K) 和 (w', K') 被元素 $x \in W$ δ-共轭，如果 $w' = x^{-1}w\delta(x)$，且 $\mathrm{Ad}(x)^{-1}(K) = K'$（因此 $x \in W^K$）。在这种情形下，$x^{-1}(W_K w)\delta(x) = W_{K'} w'$。

值得指出的是，整个魏尔群 W 并不作用于 δ-组合片的集合。元素 x 仅当 $\mathrm{Ad}(x)^{-1}(K) \subset S$ 时才作用于 (w, K)。

3.2. 组合片的循环移位。§1.1 中对 W 的循环移位定义无法推广到 δ-组合片的集合。

然而，Brou´e 和 Michel 在 [2] 中给出了 W 上循环移位的一个等价定义。定义如下。设 $w, w' \in W$。那么 $w \approx_\delta w'$，当且仅当存在一列元素 $w = w_1, \dots, w_n = w'$ 以及元素 $x_i, y_i \in W$，使得 $w_i = x_i y_i$，$w_{i+1} = y_i \delta(x_i)$ 且 $\ell(w_i) = \ell(x_i) + \ell(y_i) = \ell(w_{i+1})$ 对所有 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 均成立。参见 [3, 练习 3.7]。

现在我们来定义组合片的循环移位。

设 (w, K) 和 (w', K') 是 δ-组合片。若 (w, K) 和 (w', K') 被 x 共轭为 δ，且 $\ell(w) = \ell(x) + \ell(x^{-1}w) = \ell(w')$，则记 $(w, K) \overset{x}{\approx}_\delta (w', K')$。设 $\approx_\delta$ 为由 $x \in W$ 下的 $\overset{x}{\approx}_\delta$ 在 δ-组合片集合上生成的等价关系。我们称其为 δ-组合片的循环移位关系。将定义限制在 W 上时，它与 Brou´e 和 Michel 的定义一致。

类似地，对于任意 $J \subset S$，令 $\approx_{J,\,\delta}$ 为由 $\overset{x}{\approx}_\delta$ for $x \in W_J$ 生成的 δ-组合片集合上的等价关系。在几何应用中，我们通常考虑 δ-组合片 (w, K) 集合上的 $\approx_{J,\,\delta}$，并附加假设 $K \subset J$。

命题 3.1. 设 (w, K) 和 (w', K') 是满足 $K, K' \subset J$ 的 δ-组合片。假设 $(w, K) \approx_{J,\,\delta} (w', K')$。则存在同构 $\frac{U_{P_J} \backslash P_K \dot{w} P_{\delta(K)} / U_{P_{\delta(J)}}}{\text{伴随作用 } {}_{\dot{w}\circ\delta}(L_J \cap P_K)} \cong \frac{U_{P_J} \backslash P_{K'} \dot{w}' P_{\delta(K')} / U_{P_{\delta(J)}}}{\text{伴随作用 } {}_{\dot{w}'\circ\delta}(L_J \cap P_{K'})}$ 以及 $\frac{L_K}{\text{伴随作用 } {}_{\dot{w}\circ\delta}(L_K)} \cong \frac{L_{K'}}{\text{伴随作用 } {}_{\dot{w}'\circ\delta}(L_{K'})}$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{L_K}{\mathrm{Ad}_{\dot{w}\circ\delta}(L_K)} & \longleftarrow & \dfrac{U_{P_J} \backslash P_K \dot{w} P_{\delta(K)} / U_{P_{\delta(J)}}}{\mathrm{Ad}_{\dot{w}\circ\delta}(L_J \cap P_K)} & \longrightarrow & \mathcal{Y}_{J,\delta} \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \| \\
\dfrac{L_{K'}}{\mathrm{Ad}_{\dot{w}'\circ\delta}(L_{K'})} & \longleftarrow & \dfrac{U_{P_J} \backslash P_{K'} \dot{w}' P_{\delta(K')} / U_{P_{\delta(J)}}}{\mathrm{Ad}_{\dot{w}'\circ\delta}(L_J \cap P_{K'})} & \longrightarrow & \mathcal{Y}_{J,\delta}.
\end{array}$$

证明。只需考虑存在某个 $x \in W_J$，使得 $(w, K) \overset{x}{\approx}_\delta (w', K')$ 的情形。设 $y = x^{-1}w$。则 $w' = y\delta(x)$。我们有

$$P_K \dot{w} P_{\delta(K)} = U_{P_K} \dot{w} P_{\delta(K)} \cong (U_{P_K} \cap \dot{w} U^- \dot{w}^{-1}) \times P_{\delta(K)}.$$

此外，$U_{P_K} \cap \dot{w} U^- \dot{w}^{-1} = U \cap \dot{w} U^- \dot{w}^{-1}$。注意，伴随作用 $(y)\delta(K) =$ 伴随作用 $(x^{-1}w)\delta(K) =$ 伴随作用 $(x)^{-1}(K) = K'$。类似地，我们有

$$P_K \dot{x} P_{K'} \cong (U \cap \dot{x} U^- \dot{x}^{-1}) \times P_{K'};$$
$$P_{K'} \dot{y} P_{\delta(K)} \cong (U \cap \dot{y} U^- \dot{y}^{-1}) \times P_{\delta(K)}.$$

由于 $\ell(w) = \ell(x) + \ell(y)$，我们有 $U \cap \dot{w}U^-\dot{w}^{-1} \cong (U \cap \dot{x}U^-\dot{x}^{-1}) \times (U \cap \dot{y}U^-\dot{y}^{-1})$。因此

$$\begin{aligned} P_K\dot{w}P_{\delta(K)} &\cong U \cap \dot{w}U^-\dot{w}^{-1} \times P_{\delta(K)} \\ &\cong (U \cap \dot{x}U^-\dot{x}^{-1}) \times (U \cap \dot{y}U^-\dot{y}^{-1}) \times P_{\delta(K)} \\ &\cong (U \cap \dot{x}U^-\dot{x}^{-1}) \times P_{K'}\dot{y}P_{\delta(K)} \\ &\cong \big((U \cap \dot{x}U^-\dot{x}^{-1}) \times P_{K'}\big) \times^{P_{K'}} P_{K'}\dot{y}P_{\delta(K)} \\ &\cong P_K\dot{x}P_{K'} \times^{P_{K'}} P_{K'}\dot{y}P_{\delta(K)}. \end{aligned}$$

映射 $(g_1, g_2) \mapsto (g_2, \delta(g_1))$ 给出一个自然同构

$$f : \frac{P_K\dot{x}P_{K'} \times^{P_{K'}} P_{K'}\dot{y}P_{\delta(K)}}{\mathrm{Ad}_\delta(P_K)} \cong \frac{P_{K'}\dot{y}P_{\delta(K)} \times^{P_{\delta(K)}} P_{\delta(K)}\delta(\dot{x})P_{\delta(K')}}{\mathrm{Ad}_\delta(P_{K'})}.$$

由于 $K, K' \subset J$ 以及 $x \in W_J$，我们有 $P_K\dot{x}P_{K'} \subset P_K$，因此 $P_K\dot{x}P_{K'}$ 的共轭作用正规化了 U_{P_J}。于是 f 诱导出所需的同构 $\frac{U_{P_J}\backslash P_K\dot{w}P_{\delta(K)}/U_{P_{\delta(J)}}}{\text{伴随作用}_\delta(L_J\cap P_K)} \cong \frac{U_{P_J}\backslash P_{K'}\dot{w}'P_{\delta(K')}/U_{P_{\delta(J)}}}{\text{伴随作用}_\delta(L_J\cap P_{K'})}$。

注意，w' 在 $N_G(T)$ 中的代表元在右乘 T 的意义下唯一。由于我们考虑的是商栈上的态射，我们还可以进一步假设选择 $\dot{w}'$ 使得 $\dot{w}' = \dot{x}^{-1}\dot{w}\delta(\dot{x})$。于是 $\mathrm{Ad}(\dot{x})^{-1} \circ \mathrm{Ad}(\dot{w}) \circ \delta = \mathrm{Ad}(\dot{w}') \circ \delta \circ \mathrm{Ad}(\dot{x})^{-1}$ 作用于 L_K 上。所需的同构 $\frac{L_K}{\text{伴随作用}_{\dot{w}\circ\delta}(L_K)} \cong \frac{L_{K'}}{\text{伴随作用}_{\dot{w}'\circ\delta}(L_{K'})}$ 由 $\dot{x}^{-1}$ 的共轭作用诱导。□

定理 3.2. 设 $J \subset S$ 和 (w, K) 是一个 δ-组合片。假设 $K \subset J$ 和 w 在 $W_J \cdot_\delta w$ 中具有最小长度。则存在唯一的 $w' \in {}^JW$，$x \in W_J \cap W^{I(J,w',\delta)}$，$u \in W_{I(J,w',\delta)}$ 使得 $x^{-1}w\delta(x) = uw'$，伴随作用$(x)^{-1}(K) \subset J$ 且 $(w, K) \approx_{J,\delta} (uw'$，伴随作用$(x)^{-1}(K))$。

证明. 根据命题 2.2 (1)，存在唯一的 $w' \in {}^JW$ 使得 $w \in W_J \cdot_\delta W_{I(J,w',\delta)}w'$。根据命题 2.2 (2)，存在唯一的 $x \in W_J \cap W^{I(J,w',\delta)}$ 使得 $x^{-1}w\delta(x) \in W_{I(J,w',\delta)}w'$。令 $u \in W_{I(J,w',\delta)}$，且 $x^{-1}w\delta(x) = uw'$。

根据引理 2.1，

$$\begin{aligned} W_{I(J,w',\delta)} &= \cap_{n\in\mathbb{Z}}(\mathrm{Ad}(w') \circ \delta)^n(W_J) = \cap_{n\in\mathbb{Z}}(\mathrm{Ad}(uw') \circ \delta)^n(W_J) \\ &= \cap_{n\in\mathbb{Z}}(\mathrm{Ad}(x)^{-1}\mathrm{Ad}(w) \circ \delta \circ \mathrm{Ad}(x))^n(W_J) \\ &= \cap_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ad}(x)^{-1}(\mathrm{Ad}(w) \circ \delta)^n\mathrm{Ad}(x)(W_J) \\ &= \mathrm{Ad}(x)^{-1}\big(\cap_{n\in\mathbb{Z}}(\mathrm{Ad}(w) \circ \delta)^n(W_J)\big) \\ &\supset \mathrm{Ad}(x)^{-1}(W_K). \end{aligned}$$

第二个等式利用了这样一个事实：对于某个 $u' \in W_{I(J,w',\delta}$，(伴随作用$(uw') \circ \delta)^n =$ (伴随作用$(w') \circ\delta)^n$伴随作用(u')。

因此，x^{-1} 将 K 中的任意简单根映射为由$I(J, w', \delta)$张成的根。由于 $x \in W^{I(J,w',\delta}_{)}$，我们有伴随作用$(x)^{-1}(K) \subset I(J, w', \delta)$。令

K' =伴随作用$(x)^{-1}(K)$。于是

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(uw')\delta(K') &= \mathrm{Ad}(x)^{-1}\mathrm{Ad}(w)\delta\mathrm{Ad}(x)(K') = \mathrm{Ad}(x)^{-1}\mathrm{Ad}(w)\delta(K)\\ &= \mathrm{Ad}(x)^{-1}(K) = K'.\end{aligned}$$

因此，(uw', K') 是一个 δ-组合片。接下来要证明 $(w, K) \approx_{J,\ \delta} (uw', K')$。

我们将四元组 $(J_n, w_n, x_n, y_n)_{n\geqslant 0}$ 与 w关联。这里 $J_n \subset J$，$w_n \in {}^{J_n}W^{\delta(J_n)}$、$x_n \in W_{J_n} \cap W^{J_{n+1}}$，且对所有 n 都有 $y_n \in W_{J_{n+1}}$。该四元组按如下方式构造。

令 $J_0 = J$。假设已为$0 \leqslant m < n$定义了 $n \geqslant 0$ 和 (J_m, x_m)。我们令 $w'_n = (x_0 \cdots x_{n-1})^{-1} w \delta(x_0 \cdots x_{n-1})$。我们可以将 w'_n 写成 $w'_n = z_n w''_n$，其中 $w''_n \in {}^{J_n}W$ 和 $z_n \in W_{J_n}$。令 $w_n =$为 $\min(w''_n W_{\delta(J_n)})$，且 $J_{n+1} = J_n \cap$为 $\mathrm{Ad}(w_n)\delta(J_n)$。我们将 z_n 写成 $z_n = x_n y_n$，其中 $x_n \in W_{J_n} \cap W^{J_{n+1}}$ 和 $y_n \in W_{J_{n+1}}$。四元组 $(J_n, w_n, x_n, y_n)_{n\geqslant 0}$ 是归纳地定义的。

根据定义，$(J_n, w_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{T}(J, \delta)$。于是存在 m 使得$J_m = J_{m+1} = \cdots$，$w_m = w_{m+1} = \cdots$。因此我们有 $x_m = x_{m+1} = \cdots = 1$和 $y_m = y_{m+1} = \cdots$。此外，$J_m = I(J, w_m, \delta)$。设 $x' = x_0 x_1 \cdots x_m \in W_J \cap W^{I(J,w_m,\delta)}$。则 $(x')^{-1} w x' \in W_{J_m} w_m = W_{I(J,w_m,\delta)} w_m$。根据命题 2.2，我们有 $w_m = w'$ 和 $x' = x$。

此外，我们有 $\ell(w'_n) = \ell(w''_n) + \ell(z_n) = \ell(w''_n) + \ell(x_n) + \ell(y_n) = \ell(y_n w''_n) + \ell(x_n)$。因此

$$\begin{aligned}\ell(w'_{n+1}) &= \ell(x_n^{-1} w'_n \delta(x_n)) \leqslant \ell(x_n^{-1} w'_n) + \ell(x_n) = \ell(y_n w''_n) + \ell(x_n)\\ &= \ell(w'_n).\end{aligned}$$

特别地，我们有 $\ell(w) = \ell(w'_0) \geqslant \ell(w'_1) \geqslant \cdots \geqslant \ell(w'_m) = \ell(x^{-1} w \delta(x))$。根据我们的假设，$w$ 在 $W_J \cdot_\delta w$ 中具有最小长度。因此，$\ell(w) = \ell(w'_1) = \cdots = \ell(w'_m) = \ell(x^{-1} w \delta(x))$。此外，我们有$w = w'_0 \approx_{J,\ \delta} w'_1 \approx_{J,\ \delta} \cdots \approx_{J,\ \delta} w'_m = x^{-1} w \delta(x)$。

注意，$\mathrm{Ad}(x_0)^{-1}(W_K) = \mathrm{Ad}(x_1 \cdots x_m) W_{K'} \subset W_{J_1}$。由于 $x_0 \in W^{J_1}$，我们有 $\mathrm{Ad}(x_0)^{-1}(K) \subset J_1$。用同样的论证，我们可以证明，对所有 $i \geqslant 0$，$\mathrm{Ad}(x_0 \cdots x_i)^{-1}(K) \subset J_{i+1}$。

因此，我们有 $(w, K) \overset{x_0}{\approx}_\delta (w'_1, {}^{-1}(K)$ 的伴随作用 $(x_0)) \overset{x_1}{\approx}_\delta \cdots \overset{x_m}{\approx}_\delta (uw', K')$。□

4. Applications

4.1. 左右对称性。回顾一下，

$$W = \bigsqcup_{w \in {}^J W} W_J \cdot_\delta (W_{I(J,w,\delta)} w).$$

由 [5, §2], ，我们得到如下由 $W^{\delta(J)}$ 而非 ${}^J W$ 索引的 W 分解：

$$W = \bigsqcup_{w \in W^{\delta(J)}} W_J \cdot_\delta (W_{I(J,w,\delta)} w).$$

现在我们证明，${}^JW$ 与 $W^{\delta(J)}$ 之间存在一个自然的双射，使得 W 的相应子集彼此相同。

命题 4.1. 设 $J \subset S$。那么存在唯一的双射ι： $W^{\delta}{}_{(J)} \to {}^JW$，使得

$$\big(w, I(J,w,\delta)\big) \approx_{J,\delta} \big(\iota(w), I(J,\iota(w),\delta)\big).$$

特别地，$W_J \cdot_\delta (W_{I(J,w,\delta)}w) = W_J \cdot_\delta (W_{I(J,\iota(w),\delta)}\iota(w))$.

证明. 设 $w \in W^{\delta(J)}$ 且 $K = I(J,w,\delta)$。根据定义，(w,K) 是一个δ-组合片。对于任意 $u \in W_J$，我们有

$$\ell(uw\delta(u)^{-1}) \geqslant \ell(w\delta(u)^{-1}) - \ell(u) = \ell(w) + \ell(\delta(u)) - \ell(u) = \ell(w).$$

因此，w 在 $W_J \cdot_\delta w$ 中具有最小长度。由定理 3.2，存在唯一的 $w' \in {}^JW$，$x \in W_J \cap W^I{}_{(J,w',\delta)}, u \in W_{I(J,w',\delta)}$，使得$x^{-1}w\delta(x) = uw'$，伴随作用 $\mathrm{Ad}(x)^{-1}(K) \subset J$，并且 $(w,K) \approx_{J,\delta} (uw', \mathrm{Ad}(x)^{-1}(K))$。

令 $K' =$ 伴随作用$(x)^{-1}(K)$。根据引理 2.1，$W_K = \cap_{n\in\mathbb{Z}}$(伴随作用$(w)\circ\delta)^n(W_J)$。因此

$$\begin{aligned} W_{K'} &= \mathrm{Ad}(x)^{-1}(W_K) = \cap_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ad}(x)^{-1}(\mathrm{Ad}(w)\circ\delta)^n(W_J) \\ &= \cap_{n\in\mathbb{Z}}(\mathrm{Ad}(uw')\circ\delta)^n\mathrm{Ad}(x)^{-1}(W_J) \\ &= \cap_{n\in\mathbb{Z}}(\mathrm{Ad}(uw')\circ\delta)^n(W_J) \\ &= \cap_{n\in\mathbb{Z}}(\mathrm{Ad}(w')\circ\delta)^n(W_J) \\ &= W_{I(J,w',\delta)}. \end{aligned}$$

倒数第二个等式利用了这样一个事实：对于某个 $u' \in W_{I(J,w',\delta)}$，(伴随作用$(uw')\circ\delta)^n =$ (伴随作用$(w')\circ\delta)^n$伴随作用(u')。

因此 $K' = I(J,w',\delta)$。于是 $xuw' = w\delta(x) \in W^{\delta(I(J,w',\delta}{}_)}$。这意味着 $u = 1$。所以 $(w,K) \approx_{J,\ \delta} (w',K')$。根据组合片的循环移位的定义，我们还有 $W_J \cdot_\delta (W_K w) = W_J \cdot_\delta (W_{K'}w')$。□

令 $w \in W^{\delta}{}_{(J)}$，并令 $w' = \iota(w) \in {}^JW$。由于 $w \approx_{J,\ \delta} w'$，我们有$\mathcal{Y}_{J,\ \delta;w} = \mathcal{Y}_{J,\ \delta;w'}$。此外，根据命题 3.1，我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sh}\left(\frac{L_{I(J,w,\delta)}}{\mathrm{Ad}_{\dot{w}\circ\delta}(L_{I(J,w,\delta)})}\right) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Sh}(\mathcal{Y}_{J,\delta;w}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}(\dot{x})^{-1}} & & \Big\| \\ \mathrm{Sh}\left(\frac{L_{I(J,w',\delta)}}{\mathrm{Ad}_{\dot{w}'\circ\delta}(L_{I(J,w',\delta)})}\right) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Sh}(\mathcal{Y}_{J,\delta;w'}), \end{array}$$

其中，x 是 $W_J \cap W^{I(J,w',\delta}{}_)$ 中满足 $w' = x^{-1}w\delta(x)$的唯一元素。

现在我们给出映射 ι的一个非平凡例子。

例 4.2. 令 $W = S_5$、$J = \{1,3\}$ 和 δ 为恒等映射。于是可以验证，$\iota(s_{121324}) = s_{213243}$。特别地，映射 ι 是

不同于取逆，也不同于对 $x \in W_J$ 和 $y \in {}^J W$ 执行的一步操作 $xy \mapsto yx$。

4.2. 函子 $f^J_{J'}$。我们遵循 [8, §6]。令 $J \subset J' \subset S$。令$\pi : \mathcal{P}_J \to \mathcal{P}_{J'}$ 为投影映射。设

$$Z_{J,J',\delta} = \{(P, P', g\delta(U_{\pi(P)})); P \in \mathcal{P}_J, P' \in \mathcal{P}_{\delta(J)}, {}^g\delta(P) = P'\}.$$

定义 $G \times G$ 在 $Z_{J,J',\delta}$ 上的作用为 $(g_1, g_2) \cdot (P, P', gU_{\pi(P)}) = (g_2 P, {}^{g_1}P', g_1 g\delta(g_2)^{-1}\delta(U_{\pi(g_2 P)}))$。于是 $G\times G$ 在 $Z_{J,J',\delta}$ 上传递地作用。令 $h_{J,J',\delta} = (P_J, P_{\delta(J)}, U_{P_{\delta(J')}})$ 为基点。于是我们可以将$Z_{J,J',\delta}$与 $(G \times G)/(U_{P_{J'}} \times U_{P_{\delta(J')}})\mathrm{Ad}_\delta(L_{J'} \cap P_J)$ 识别，其中 $L_{J'} \cap P_J$ 是 $L_{J'}$ 的标准抛物子群。

我们考虑以下图

$$Z_{J,\delta} \xleftarrow{c} Z_{J,J',\delta} \xrightarrow{d} Z_{J',\delta},$$

其中

$$c(P, P', g\delta(U_{\pi(P)})) = (P, P', g\delta(U_P)),$$
$$d(P, P', g\delta(U_{\pi(P)})) = (\pi(P), \pi(P'), g\delta(U_{\pi(P)})).$$

容易看出，c 是一个局部平凡纤维化，其纤维同构于仿射空间 $U_{P_J}/U_{P_{J'}}$；d 是一个局部平凡纤维化，其纤维同构于旗簇 $L_{J'}/(L_{J'} \cap P_J)$。令

$$f^J_{J'} = d_! c^* : \mathrm{Sh}(\frac{Z_{J,\delta}}{\Delta G}) \longrightarrow \mathrm{Sh}(\frac{Z_{J',\delta}}{\Delta G}).$$

我们可以将这些函子重新表述如下。考虑以下代数栈图:

$$\mathcal{Y}_{J,\delta} \xleftarrow{q} \mathcal{Y}_{J,J',\delta} \xrightarrow{p} \mathcal{Y}_{J',\delta}$$

其中 $\mathcal{Y}_{J,\ J',\ \delta} = \frac{U_{P_{J'}} \backslash G / U_{P_{\delta(J')}}}{\text{伴随作用}_{\delta(L_{J'} \cap P_J)}}$，且 q 和 p 是自然投影映射。在同构 ${}^{Z_{J,\ \frac{\delta}{\Delta G}}}() \cong \mathcal{Y}_{J,\ \delta}$ 和 ${}^{Z_{J',\ \frac{\delta}{\Delta G}}}() \cong \mathcal{Y}_{J',\ \delta}$ 下，我们可以将函子 $f^J_{J'}$ 改写为

$$f^J_{J'} = p_! q^* : \mathrm{Sh}(\mathcal{Y}_{J,\delta}) \longrightarrow \mathrm{Sh}(\mathcal{Y}_{J',\delta}).$$

设 $w \in {}^J W$ 和 $w' \in {}^{J'}W$。令 $i_{J,\ \delta;w} : \mathcal{Y}_{J,\ \delta;w} \to \mathcal{Y}_{J,\ \delta}$ 以及 $i_{J',\ \delta;\ w'} : \mathcal{Y}_{J',\ \delta;\ w'} \to \mathcal{Y}_{J',\ \delta}$ 为嵌入。我们定义

$$f^{J,w}_{J',w'} = i^*_{J',\delta;w'}\, p_! q^* (i_{J,\delta;w})_! : \mathrm{Sh}(\mathcal{Y}_{J,\delta;w}) \longrightarrow \mathrm{Sh}(\mathcal{Y}_{J',\delta;w'}).$$

根据定义，对于任意 $w \in {}^J W$, $p(q^{-1}(\mathcal{Y}_{J,\delta;w})) = \mathcal{Y}_{J',\delta;w_\circ}$。因此，由 §2.5 (c) 可得

(a) 设 $w \in {}^J W$ 和 A 是定义在 $\mathcal{Y}_{J,\delta}$ 上的抛物特征层，其支集包含于 $\mathcal{Y}_{J,\delta;w_\circ}$。假设 $W_{J'} \cdot_\delta w \cap {}^{J'}W = \emptyset$ 或 w 在 $W_{J'} \cdot_\delta w$中不是最小长度。那么 $f^J_{J'}(A)$ 的支集包含于$\sqcup_{w' \in {}^{J'}W; \ell(w') < \ell(w)} \mathcal{Y}_{J',\delta;w'}$。

4.3. 诱导函子。设 (w,K) 是一个 δ-组合片。考虑以下图

$$\frac{L_K}{\mathrm{Ad}_{\dot{w}\circ\delta}(L_K)} \cong \frac{L_K\dot{w}}{\mathrm{Ad}_{\delta}(L_K)} \xleftarrow{a} \frac{P_K\dot{w}P_{\delta(K)}}{\mathrm{Ad}_{\delta}(P_K)} \xrightarrow{b} \frac{G}{\mathrm{Ad}_{\delta}(G)},$$

其中 a 由投影映射 $P_K\dot{w}P_{\delta(K)} \to L_K\dot{w}$ 诱导， b由嵌入 $P_K\dot{w}P_{\delta(K)} \to G$诱导。

按照 [12,§4.1], ， 我们定义

$$\mathrm{Ind}_{(L_K,\dot{w})}^{(G,\delta)} = b_!a^* : \mathrm{Sh}(\frac{L_K}{\mathrm{Ad}_{\dot{w}\circ\delta}(L_K)}) \longrightarrow \mathrm{Sh}(\frac{G}{\mathrm{Ad}_{\delta}(G)}).$$

若 $w=1$, 则 $K=\delta(K)$, 且 P_K 是 δ-稳定的 G的标准抛物子群。在这种情形下， Ind 是 Harish-Chandra 诱导函子。若 $K=\emptyset$, 则 $P_K=B$ ， 且 Ind 是 Deligne-Lusztig 诱导函子。

现在我们证明

定理 4.3. 设 $J\subset J'\subset S$。设 $w\in {}^JW$, 使得 w在 $W_J\cdot_\delta w$中具有最小长度。设 $w'\in {}^{J'}W$, $u\in W_{I(J',w',\delta)}$和 $x\in W_{J'}\cap W^I{}_{(J',\ w',\ \delta)}$满足 $x^{-1}w\delta(x) = uw'$。令 $K=I(J,w,\delta)$, $K_1=\mathrm{Ad}(x)^{-1}(K)$,$K'=I(J',w',\delta)$ 以及 $\delta' = \mathrm{Ad}(\dot{w}')\circ\delta$。则有以下交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sh}(\frac{L_K}{\mathrm{Ad}_{\dot{w}\circ\delta}(L_K)}) & \xrightarrow[\cong]{\pi^*_{J,\delta;w}} & \mathrm{Sh}(\mathcal{Y}_{J,\delta;w}) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ind}_{(L_{K_1},\dot{u})}^{(L_{K'},\delta')}\circ\mathrm{Ad}(\dot{x})^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f^{J,w}_{J',w'}} \\
\mathrm{Sh}(\frac{L_{K'}}{\mathrm{Ad}_{\dot{w}'\circ\delta}(L_{K'})}) & \xrightarrow[\cong]{\pi^*_{J',\delta;w'}} & \mathrm{Sh}(\mathcal{Y}_{J',\delta;w'}).
\end{array}$$

证明。我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{L_K}{\mathrm{Ad}_{\dot{w}\circ\delta}(L_K)} & \xleftarrow{\pi_{J,\delta;w}} & \mathcal{Y}_{J,\delta;w} & \xrightarrow{i_{J,\delta;w}} & \mathcal{Y}_{J,\delta} \\
 & & \uparrow{\scriptstyle q} & \square & \uparrow{\scriptstyle q} \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}(\dot{x})^{-1}}\ \cong & & q^{-1}(\mathcal{Y}_{J,\delta;w}) & \xrightarrow{i} & \mathcal{Y}_{J,J',\delta} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f}\ \cong & & \\
\frac{L_{K_1}}{\mathrm{Ad}_{\dot{u}\circ\delta'}(L_{K_1})} & \xleftarrow{\pi_1} & X & & \\
\uparrow{\scriptstyle a} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle p} \\
\frac{(L_{K'}\cap P_{K_1})\dot{u}\delta'(L_{K'}\cap P_{K_1})}{\mathrm{Ad}_{\delta'}(L_{K'}\cap P_{K_1})} & \xleftarrow{\pi_2} & X & & \\
\downarrow{\scriptstyle b} & \square & \downarrow{\scriptstyle b'} & & \\
\frac{L_{K'}}{\mathrm{Ad}_{\delta'}(L_{K'})} & \xleftarrow[\pi_{J',\delta;w'}]{} & \mathcal{Y}_{J',\delta;w'} & \xrightarrow[i_{J',\delta;w'}]{} & \mathcal{Y}_{J',\delta}.
\end{array}$$

此处为 $X = \frac{U_{P_{J'}} \backslash P_{K_1} \dot{u}\dot{w}' P_{\delta(K_1)} / U_{P_{\delta(J')}}}{}$伴随作用 $\dot{u}\dot{w}' \circ \delta(L_{J'} \cap P_{K_1})$。

根据命题 2.4，$\mathcal{Y}_{J\delta;w} \cong \frac{U_{P_J} \backslash P_K \dot{w} P_{\delta(K)} / U_{P_{\delta(J)}}}{}$伴随作用 $_{\dot{w}\circ\delta}(L_J \cap P_K)$。因此，根据定义，$q^{-1}(\mathcal{Y}_{J,\delta;w}) \cong \frac{U_{P_{J'}} \backslash P_K \dot{w} P_{\delta(K)} / U_{P_{\delta(J')}}}{}$伴随作用 $_{\dot{w}\circ\delta}(L_{J'} \cap P_K)$。由定理 3.2，$(w, K) \approx_{J,\delta} (uw', K_1)$。同构 $f\colon q^{-1}(\mathcal{Y}_{J,\delta;w}) \to X_1$ 见命题 3.1。映射 $\pi_1\colon X \to \underline{\quad}^{L_{K_1}}$伴随作用 $_{\dot{u}\circ\delta'}(L_{K_1})$ 由投影映射 $P_{K_1}\dot{u}\dot{w}'P_{\delta(K_1)} \to L_{K_1}\dot{u}\dot{w}'$诱导。映射 $\pi_2\colon X \to \underline{(L_{K'} \cap P_{K_1})}_{\dot{u}\delta'(L_{K'} \cap P_{K_1})}$ 伴随作用 $_{\delta'}(L_{K'} \cap P_{K_1})$ 由投影诱导

$$P_{K_1}\dot{u}\dot{w}'P_{\delta(K_1)} \longrightarrow P_{K_1}\dot{u}\dot{w}'P_{\delta(K_1)} \cap L_{K'}\dot{w}' = (L_{K'} \cap P_{K_1})\dot{u}\delta'(L_{K'} \cap P_{K_1})。$$

根据命题 2.4，$\mathcal{Y}_{J',\delta;w'} \cong \frac{U_{P_{J'}} \backslash P_{K'} \dot{w}' P_{\delta(K')} / U_{P_{\delta(J')}}}{}$伴随作用 $_{\dot{w}'\circ\delta}(L_{J'} \cap P_{K'})$。映射 $b'\colon X \to \mathcal{Y}_{J',\delta;w'}$ 由嵌入 $P_{K_1}\dot{u}\dot{w}'P_{\delta(K_1)} \subset P_{K'}\dot{w}'P_{\delta(K')}$诱导而来。因此

$$\begin{aligned} f^{J,w}_{J',w'}\pi^*_{J,\delta;w} &= i^*_{J',\delta;w'}p_!q^*(i_{J,\delta;w})_!\pi^*_{J,w,\delta} = i^*_{J',\delta;w'}p_!i_!q^*\pi^*_{J,w,\delta} \\ &= (b')_!f_!q^*\pi^*_{J,w,\delta} = (b')_!\pi_1^*\mathrm{Ad}(\dot{x})^{-1} \\ &= (b')_!\pi_2^*a^*\mathrm{Ad}(\dot{x})^{-1} = \pi^*_{J',\delta;w'}b_!a^*\mathrm{Ad}(\dot{x})^{-1} \\ &= \pi^*_{J',\delta;w'}\mathrm{Ind}_{(L_{K_1},\dot{u})}^{(L_{K'},\delta')} \circ \mathrm{Ad}(\dot{x})^{-1}. \end{aligned}$$

证明完成。 □

4.4. 特殊情形。现在我们讨论定理 4.3 的一个特殊情形。

设 $J \subset J' \subset S$。设 $w \in {}^{J}W$和 $w' \in {}^{J'}W$，使得 $w \in W_{J'} \cdot_\delta w'$和 $\ell(w) = \ell(w')$。令 $K = I(J, w, \delta)$ 和 $K' = I(J', w', \delta)$。由定理 3.2，存在唯一的 $x \in W_{J'} \cap W^{K'}$，使得 $x^{-1}w\delta(x) = w'$且 $(w, K) \approx_{J,\delta} (w', K_1)$，其中 $K_1 =$ 伴随作用$(x)^{-1}(K) \subset K'$。由于伴随作用$(w)\delta(K) = K$，因此有伴随作用$(w')\delta(K_1) = K_1$。令 $\delta' =$ 伴随作用$(\dot{w}') \circ \delta$。那么 L_{K_1} 是一个 δ'-稳定的 Levi 子群，而 $L_{K'} \cap P_{K_1}$ 是 δ'-稳定的抛物子群 $L_{K'}$。在此情形下，定理 4.3 中的函子 $\mathrm{Ind}^{(L_{K'},\delta')}_{(L_{K_1},\dot{u})}$ 是 Harish-Chandra 诱导函子。

在这种情形下，函子 $f^{J}{}_{,J'}{}^{w}{}_{,w'}$ 就是 Harish-Chandra 诱导函子与 $\dot{x}^{-1}$ 的共轭作用的复合。

4.5. 推广到环群。定理 3.2 不仅对魏尔群成立，也对任意 Coxeter 群成立。相同的证明在如此一般的情形下仍然适用。特别地，定理 3.2 对任意仿射 Weyl 群及其上的保长度自同构都成立。

设 k 是一个代数闭域，$F = \mathrm{k}((\epsilon))$ 是形式 Laurent 级数域。设 G 是一个定义在 F 上的连通约化群~，且 $G = \mathrm{G}(F)$。设 I 是 G 的一个 Iwahori 子群，W 是 G 的 Iwahori-Weyl 群。设 $P \supset I$ 是一个抛物型子群。它是一个前代数群。设 U_P 是 P 的前幺幂根，$L \cong P/U_P$ 是它的约化商群。在 [9], 中，Lusztig 引入了

抛物特征层的仿射类比。它们是归纳极限栈 $\frac{U_P\backslash G/U_P}{\Delta\ L}()$ 上的某些简单 perversity 层。

˜注意，Iwahori-Weyl 群 W 一般而言并非 Coxeter 群，而是拟 Coxeter 群。具体来说，令 G^0 为由G 的所有旁典子群生成的子群。 G^0 的 Iwahori-Weyl 群是仿射 Weyl 群 W_a。并且 $\tilde{W} = W_a \rtimes \Omega$，其中 Ω 是˜ W中长度为零的元素所成的子群。Ω 中任一元素在 W_a 上的共轭作用都是保长度自同构。我们有

$$\frac{U_P\backslash G/U_P}{\Delta(L)} = \bigsqcup_{\tau\in\Omega} \frac{U_P\backslash G^0\dot{\tau}/U_P}{\Delta(L)} \cong \bigsqcup_{\tau\in\Omega} \frac{U_P\backslash G^0/U_{\delta_{\dot{\tau}}(P)}}{\mathrm{Ad}_{\delta_{\dot{\tau}}}(L)}.$$

这里， $\delta_{\dot{\tau}}$ 是由$\dot{\tau}$的共轭作用给出的 G^0 上的自同构。现在，可以将定理 4.3 应用于 $U_P\backslash G^0/U_{\delta_{\dot{\tau}}(P)}$ 伴随作用$\delta_{\dot{\tau}}(L)$，并~~对 (W_a,~~伴随作用(τ)) 使用定理 3.2。

References

[1] R. B´edard，关于模表示的 Brauer 提升，《代数杂志》93 (2) (1985) 332–353。[2] M. Brou´e 和 J. Michel，关于魏尔群中的某些正则元素及其对应的 Deligne-Lusztig 簇，载于《有限约化群》（Luminy，1994），《数学进展》141，73–139，Birkh¨auser Boston，Boston，MA，1997。[3] M. Geck 和 G. Pfeiffer，《有限 Coxeter 群与 Iwahori–Hecke 代数的特征》，伦敦数学学会专著，新系列，第 21 卷，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2000。[4] X. He，《美妙紧化的 G-稳定片》，《美国数学会汇刊》359 (2007)，第 7 期，3005–3024。[5] X. He，《Coxeter 群某些双陪集中的最短长度元素》，《数学进展》215 (2007)，469–503。[6] X. He 和 G. Lusztig，《Steinberg 截面的一种推广》，《美国数学会杂志》25 (2012)，739–757。[7] G. Lusztig，《非连通群上的特征层》I，《表示论》7 (2003)，374–403。[8] G. Lusztig，《抛物特征层》I，《莫斯科数学杂志》4 (2004)，第 1 期，153–179。[9] G. Lusztig，《抛物特征层》III，《莫斯科数学杂志》10 (2010)，第 3 期，603–609。[10] G. Lusztig，《从魏尔群中的共轭类到幺幂类》，《表示论》15 (2011)，494–530。[11] P. Li、D. Nadler 和 Z. Yun，《通过朗兰兹对偶研究交换栈上的函数》，arXiv:2301.02618。[12] T. Shoji，《约化群的特征层与几乎特征》I，《数学进展》111 (1995)，第 2 期，244–313。

The Institute of Mathematical Sciences and Department of Math-ematics, The Chinese University of Hong Kong, Shatin, N.T., HongKong SAR, China.

电子邮件地址：xuhuahe@math.cuhk.edu.hk