arXiv:2301.03276v1 [physics.atom-ph] 9 Jan 2023

囚禁离子实验中可调谐激光冷却的系统研究

A. P. Kulosa[1], **O. N.Prudnikov**[3,4], **D. Vadlejch**[1], **H. A. F¨urst**[1,2],**A. A. Kirpichnikova**[3],**A. V. Taichenachev**[3,4],**V. I. Yudin**[3,4,5],**和 T.E. Mehlst¨aubler**[1,2]

[1] 德国联邦物理技术研究院，Bundesallee 100，38116 不伦瑞克，德国[2] 莱布尼茨汉诺威大学量子光学研究所，Welfengarten 1，30167 汉诺威，德国¨激光物理研究所，630090，新西伯利亚，俄罗斯¨新西伯利亚国立大学，630090，新西伯利亚，俄罗斯[3] 新西伯利亚国立技术大学，630073，新西伯利亚，俄罗斯

电子邮件：andre.kulosa@ptb.de

摘要。本文对囚禁离子中的淬火边带冷却进行了比较分析。我们提出了一种理论方法，可高效模拟冷却时间特性，并推导出实现离子快速激光冷却至运动基态的最优条件。我们使用囚禁在线性保罗阱中的单个 $^{172}Yb^{+}$ 离子进行了实验基准验证。边带冷却在窄四极跃迁上进行，并通过额外的清除激光调控冷却跃迁的有效线宽。由此，我们首次在分辨边带、过渡和半经典区域研究了淬火冷却。我们讨论了激光冷却过程中福克态的非热分布，并揭示了其对光学原子钟时间膨胀频移的影响。

关键词：可调谐激光冷却、原子动力学、冷却动力学、囚禁离子

1. 引言

激光冷却是现代囚禁离子量子光学实验不可或缺的工具，例如研究离子库仑晶体中的拓扑缺陷形成 [1, 2, 3, 4],、量子模拟 [5, 6, 7]和量子计算 [8]。高精度离子光学原子钟传统上在多普勒冷却极限 [9, 10]下运行。由于其频率不确定度不断提高，多普勒温度下离子剩余世俗运动导致的时间膨胀如今已成为低 10^{-18} 水平下误差预算中的限制性因素。为了实现具有更低不确定度的离子光学钟，它们必须在超低温 [11, 12]下运行。

自首次实现激光冷却以来（例如参见 [13]），人们已经开发并改进了多种亚多普勒冷却机制。电磁诱导透明（EIT）是一种成熟的工具，可将囚禁离子快速冷却至运动基态 [14, 15]。最近，研究人员利用该方法在数 $100\,\mu$s [16, 17]内，将单个 $^{171}Yb^{+}$ 离子的强横向模冷却至运动基态。采用沿阱轴方向由驻波场 [19]产生的偏振梯度（PG）[18]进行冷却，也报道了类似的冷却速率。迄今为止，利用PG将单个 $^{171}Yb^{+}$ 离子的所有运动模冷却至 $\bar{n} \simeq 1$，最快可在数毫秒内完成 [20]。

除上述方案外，兰姆-迪克区内的边带冷却是囚禁离子的成熟技术 [21]。通过光学淬灭，即利用激光提高冷却跃迁的自然线宽 $\gamma/2\pi$，可以进一步增强窄光学跃迁上的冷却效果 [22, 23, 24]。该方法已用于囚禁离子实验 [25, 26, 27]和中性原子实验 [28, 29]。通过调节猝灭激光的强度，可以控制有效线宽$\gamma_{\text{eff}}/2\pi$；猝灭激光将冷却跃迁的激发态耦合到一个短寿命中间态（见图 1a）。这使得激光冷却能够覆盖多种不同区间，从分辨边带区（$\gamma_{\text{eff}} \ll \omega_{\text{osc}}$）到半经典区（$\gamma_{\text{eff}} > \omega_{\text{osc}}$）；在半经典区中，可以用共振光场作用于离子的亚多普勒 [18, 19]力或多普勒力来描述（例如参见 [30, 31, 32, 33]）。这里，ω_{osc} 是离子在射频保罗阱的谐伪势中表现出的运动频率。迄今为止，淬火冷却的优化研究要么针对冷却跃迁低饱和度的极限 [23, 34, 35]，要么针对强边带区，在该区间内（$\gamma_{\text{eff}}/2\omega_{\text{osc}}$）$^2 \ll \eta$ [36, 37]。 $\eta = \sqrt{\omega_{\text{rec}}/\omega_{\text{osc}}}$ 是兰姆-迪克参数，它将离子因频率为 ω_{rec} 的光子反冲而产生的动能变化与其在谐势中的囚禁联系起来。

在本研究中，我们通过研究边带区、半经典区和中间区（$\gamma_{\text{eff}} \simeq \omega_{\text{osc}}$）的优化冷却，克服了上述局限。我们尤其研究了这些区域对原子福克态分布的影响。中间区自然存在于例如 In^{+} 离子 [38]的冷却过程中，并可用于同时冷却多个离子在径向上的运动模。我们特别关注冷却时间对冷却场强度的非线性依赖关系。我们提出了一种通用方法来计算特征冷却时间，无需求解系统密度矩阵的动力学演化。借助该方法，我们确定了实现快速、深度激光冷却的最优条件；与完整密度矩阵方法相比，计算量显著降低。我们推导出关于最优冷却激光拉比频率和最短冷却时间的一般解析表达式，适用于任何囚禁离子种类。

我们将模拟结果与在高精度射频保罗阱 [39]中囚禁单个 $^{172}Yb^{+}$ 离子所获得的实验数据进行基准比较。我们研究淬火冷却过程中福克态分布的时间演化，并讨论其对原子钟热时间膨胀频移的影响。我们的发现为实现

fas由离子库仑晶体构成的较大离子系综的深度冷却铺平了道路 .

本文结构安排如下：在**第 2 章**中，我们回顾用于描述离子与光相互作用的量子模型，以及在光学淬灭框架下将其化简为有效二能级系统的过程。**第 3 章**介绍我们采用“$\hat{}\tau$-矩阵”加速冷却动力学计算的模拟方法，并在**第 4 章**中用该方法系统研究边带冷却区。在**第 5 章**中，我们将“$\hat{}\tau$- 矩阵方法”应用于具体情形：一个被囚禁在射频保罗阱中的 $^{172}Yb^{+}$ 离子，并研究从分辨边带区到多普勒区的冷却过程。最后，我们将在**第 6 章**中讨论冷却过程中的非热福克态分布及其对光学原子钟时间膨胀频移的影响。

2. 离子与光相互作用的量子模型

在单粒子近似下，囚禁于射频保罗阱中的离子的冷却动力学可由密度矩阵的量子动力学方程描述

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t}=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{\rho}\right]+\hat{\Gamma}\{\hat{\rho}\},\tag{1}$$

$\hat{}\hat{}$其中 H 是哈密顿量，而项 $\Gamma\{\hat{}\rho\}$ 描述了由自发衰变引起的密度 $\hat{}\hat{}\hat{}$ 矩阵弛豫。哈密顿量由 $H=H_{\mathrm{ext}}+H_{\mathrm{int}}+\hat{}\hat{}V_1+V_2$构成，其中

$$\hat{H}_{\mathrm{ext}}=\frac{\hat{p}_z^2}{2M}+\frac{M\omega_{\mathrm{osc}}^2\hat{z}^2}{2}\tag{2}$$

是质量为 M 的谐振束缚离子在一维近似下的运动贡献。算符 V_1 描述了由冷却激光诱导的跃迁

$$\mathbf{E}_1=\frac{\mathbf{E}_{01}}{2}\exp(ik_1z-i\omega_1t)+c.c.,\tag{3}$$

$\hat{}$ 与 $|0\rangle\rightarrow|1\rangle$ 跃迁共振，而 V_2 描述了淬灭场的作用

$$\mathbf{E}_2=\frac{\mathbf{E}_{02}}{2}\exp(ik_2z-i\omega_2t)+c.c.,\tag{4}$$

与 $|1\rangle\rightarrow|2\rangle$ 跃迁共振，如图 **1(a)** 所示。在旋转波基底中，离子内部态的哈密顿量为

$$\hat{H}_{\mathrm{int}}=-\delta_2\hat{P}_2-\delta_1\hat{P}_1,\tag{5}$$

$\hat{}\hat{}$其中 P_1 和 P_2 是态 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$的投影算符。 $\delta_1=\omega_1-\omega_{10}$ 和$\delta_2=\omega_2-\omega_{21}$ 是相应光场 **(3)** 和 **(4)** 的失谐，其中ω_{10} 和 ω_{21} 分别是未受扰动的 $|0\rangle\rightarrow|1\rangle$ 和 $|1\rangle\rightarrow|2\rangle$跃迁的共振频率。

$\hat{}\hat{}$ 在福克态基底下，相互作用算符 V_1 和 V_2 包含决定不同振动态量子数态之间跃迁振幅的分量

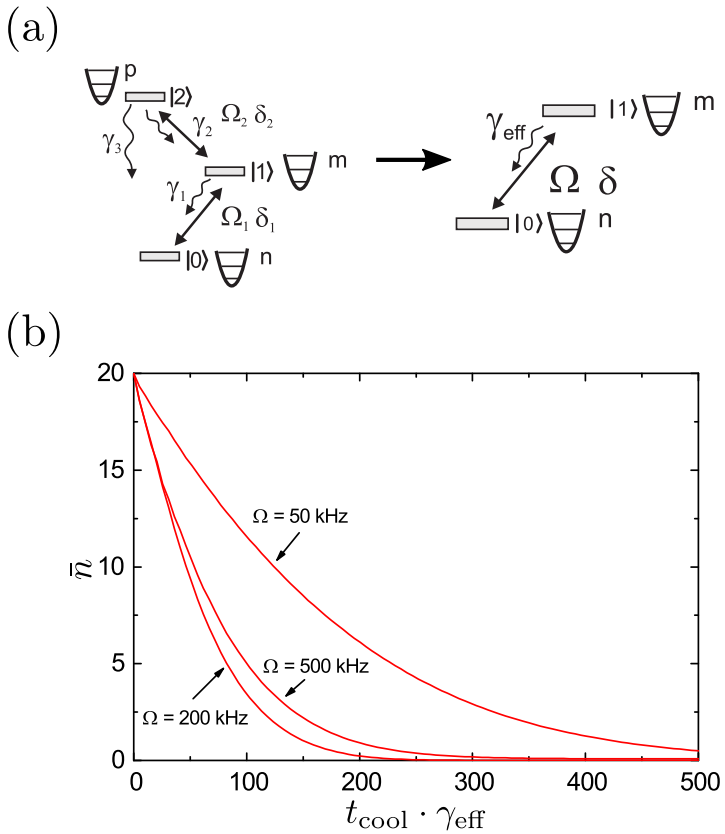


图 1. **(a)** 在三能级系统中，通过激光耦合到更高能级的态 $|2\rangle$，可以提高态 $|1\rangle$ 的衰减率 γ_1；该高能级态会快速衰减 $\gamma_3 \gg \gamma_1$ 至基态 $|0\rangle$。对于 $|1\rangle \to |2\rangle$ 跃迁的低饱和度，态 $|2\rangle$ 可以绝热消去，从而得到一个衰减率为 $\gamma_{\rm eff}$ 的有效二能级系统，其中态 $|1\rangle$ [23]。**(b)** 淬火冷却过程中平均占据数随时间的演化，其中 $\gamma_{\rm eff}/2\pi = 50$ 千赫兹且 $\bar{n}_{\rm ini} = 20$。久期频率设为 $\omega_{\rm osc}/2\pi = 600$ 千赫兹，冷却光失谐为 $\delta = -\omega_{\rm osc}$。当冷却光的拉比频率 $\Omega_{\rm opt}$ 取某一特定值时，观测到最快的冷却速率；这与此前的理论讨论预期不符 [34]。

。由耦合不同振动态量子数 m （n）的场（冷却光对应 $i = 1$，淬火光对应 $i = 2$）所诱导的拉比频率，在基态（激发态）中由下列表达式确定（详情请参见 [21, 40] ）：

$$\Omega_{nm}^{(i)} = \Omega^{(i)} C_{nm}(\eta_i), \tag{6}$$

with

$$C_{nm}(\eta_i) = L_{n_<}^{|n-m|}\left(\eta_i^2\right) \sqrt{\frac{n_<!}{n_>!}} \left(i\eta_i\right)^{|n-m|} \exp\left(-\frac{\eta_i^2}{2}\right), \tag{7}$$

其中 $n_< = \min\{n, m\}$, $n_> = \max\{n, m\}$，且 $L_{n_<}^{|n-m|}(x)$ 是广义拉盖尔多项式。较小的兰姆-迪克参数 $\eta_i = \sqrt{\hbar k_i^2/(2M\omega_{\rm osc})} \ll 1$，即紧密的谐振子囚禁，会显著降低振动态量子数不同的能态之间发生受激跃迁和自发跃迁的概率 $m \neq n$，其中

k_i 是相应光场的波矢。附录 A 讨论了三能级系统的完整量子处理，以及密度矩阵元的动力学演化。

如 [23], 淬灭场$\mathbf{E}_2$ 作用于三能级系统所示，该作用使系统快速衰减至基态，因此可将 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 态（见图 1(a)）简化为有效二能级系统，其有效衰减率为

$$\gamma_{\text{eff}} = \gamma_1 + \gamma_3 \frac{\rho^{22}}{\rho^{11}} \simeq \gamma_1 \left(1 + \frac{\gamma_3}{\gamma_1} S_2\right), \tag{8}$$

其中， $S_2 = \Omega_2^2/[(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)^2 + 4\delta_2^2]$ 为淬灭场的饱和参数，γ_i $(i = 1..3)$为相关跃迁的衰减率。根据 [34], ，通过分析福克态平均占据数$\bar{n}$随时间的演化，可定量评估冷却性能；该演化可用指数衰减进行拟合

$$\bar{n}(t) = (\bar{n}_{\text{ini}} - \bar{n}_{\infty})\, e^{-a\,t} + \bar{n}_{\infty}, \tag{9}$$

其中， $\bar{n}_{\infty}$ 为稳态下的平均占据数。基于动力学方程 (A.1)，我们推导了冷却光在不同拉比频率下 $\bar{n}$ 的时间演化，并假设有效衰减率为 $\gamma_{\text{eff}} = 2\pi \times 50$ 千赫兹。初始条件为电子基态下的福克态热分布，其中$\bar{n}_{\text{ini}} = 20$；离子世俗频率为 $\omega_{\text{osc}}/2\pi = 600$千赫兹。如图 1(b) 所示，我们预计存在一个使冷却速率最大化的最佳冷却激光强度，而 [34] 并未预测到这一点。接下来，我们将研究在分辨边带区、中间区和半经典区实现最快冷却至运动基态的最佳冷却参数。

3. 用于快速模拟冷却动力学的“$\hat{\tau}$-矩阵方法”

方程（9）中的指数插值需要对动力学方程（A.1）进行数值求解。考虑到福克态数量庞大，要计算二能级原子的密度矩阵，需要大量计算资源。最近， [41] 提出了用于中性原子冷却的“$\hat{\tau}$-矩阵方法”，可作为推导冷却时间的另一种方法。$\hat{\tau}$-矩阵由原子密度矩阵 $\hat{\rho}(t)$ 与其稳态解 $\hat{\rho}_{\text{st}} = \hat{\rho}(t)|_{t=\infty}$ 之差对时间的积分给出

$$\hat{\tau} = \int_0^{\infty} \left(\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_{\text{st}}\right) dt\,. \tag{10}$$

$\hat{\tau}$-矩阵的基本方程为

$$-\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{\tau}\right] + \hat{\Gamma}\left\{\hat{\tau}\right\} = \hat{\rho}_{\text{st}} - \hat{\rho}_{\text{ini}}, \tag{11}$$

其中，$\hat{\rho}_{\text{ini}} = \hat{\rho}(t)|_{t=0}$ 是初始时刻的密度矩阵。由于密度矩阵$\hat{\rho}$包含量子系统外部态和内部态的所有信息，因此

$\hat{}\tau$-矩阵包含系统时间特性的所有信息。以由量子算符 A表征的可观测量 A 为例，可通过以下表达式 [41]从$\hat{}\tau$-矩阵中提取特征演化时间：

$$\tau_A = \frac{\mathrm{Tr}\left\{\hat{A}\,\hat{\tau}\right\}}{\left(\mathrm{Tr}\left\{\hat{A}\,\hat{\rho}_{\mathrm{ini}}\right\} - \mathrm{Tr}\left\{\hat{A}\,\hat{\rho}_{\mathrm{st}}\right\}\right)}\,. \tag{12}$$

冷却时间由外部自由度的演化速率决定，该速率由方程（2）中的算符 H_{ext} 决定，因此可定义为

$$\tau_{\mathrm{eff}} = \frac{\mathrm{Tr}\left\{\hat{H}_{\mathrm{ext}}\,\hat{\tau}\right\}}{\left(\mathrm{Tr}\left\{\hat{H}_{\mathrm{ext}}\,\hat{\rho}_{\mathrm{ini}}\right\} - \mathrm{Tr}\left\{\hat{H}_{\mathrm{ext}}\,\hat{\rho}_{\mathrm{st}}\right\}\right)}\,. \tag{13}$$

对于囚禁离子，这个表达式可简化为

$$\tau_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{(\overline{n}_{\mathrm{ini}} - \overline{n}_{\infty})}\int_0^{\infty} (\overline{n}(t) - \overline{n}_{\infty})\; dt \tag{14}$$

这恰好对应于指数衰减 $\bar{n}(t)$ 的 $1/e$ 值，如方程（9）所示，其特征时间为 $\tau = 1/a$。例如，对于图 1(b) 所示的结果，“$\hat{}\tau$-矩阵方法”得出以下数值 $\tau_{\mathrm{eff}} \simeq$(115，31，55) $\gamma^{-1}_{\mathrm{eff}}$，对应的拉比频率为 $\Omega/2\pi =$(50，200，500) 千赫兹；这些结果与通过指数函数（9）拟合直接数值解 $\bar{n}(t)$ 得到的结果非常吻合，后者在相应拉比频率下为 $\tau \simeq$ (115，29，50)$\gamma^{-1}_{\mathrm{eff}}$。如果 $\bar{n}(t)$ 的演化并非由指数衰减支配，那么 τ 与 τ_{eff} 之间的差异应当会变得明显。

“$\hat{}\tau$-矩阵方法”将基于求解密度矩阵动力学方程的分析简化为一个更简单的问题，即求解线性方程（11）。例如，考虑到 $n = 30$ 个福克态，在我们的情况下，使用“$\hat{}\tau$-矩阵方法”计算有效冷却时间约需 45 秒，而直接求解方程（1）则需 430 秒。这使我们能够在考虑足够多振动态（$n_{\max} \simeq 120$）的情况下，详细分析囚禁离子的特征冷却时间。

4. 边带冷却区中囚禁离子的动力学

现在，我们使用“$\hat{}\tau$-矩阵方法”对分辨边带冷却区中的冷却动力学进行一般性研究（其中 $\gamma_{\mathrm{eff}} \ll \omega_{\mathrm{osc}}$），原则上，该方法可用于任何具有图 1(a) 所示能级结构的原子种类。

在图 2(a) 和 (b) 中，我们分别绘出了平均占据数 $\bar{n}_{\infty}$ 和冷却时间 τ_{eff}随冷却光拉比频率 Ω 的变化。我们将结果与基于低强度极限下的简化平衡速率方程 $S_1 \ll 1$（S_1 为冷却跃迁的饱和参数）以及强兰姆-迪克极限 $\eta \ll 1$（虚线）得出的计算结果进行比较，且未考虑福克态 [34, 35]的相干性。在低强度极限下得到相似结果后，

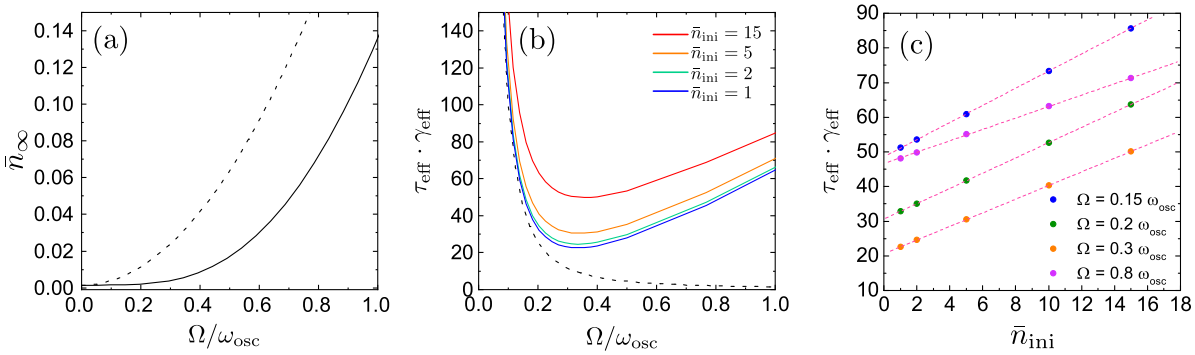


图 2. (a) 稳态平均占据数和 (b) 冷却时间 $\tau_{\rm eff}$ 随冷却激光拉比频率 Ω 的变化。最佳拉比频率 Ω_τ处观察到最短冷却时间 $\tau_{\rm min}$。(a) 和 (b) 中的虚线根据 [34, 35] 中给出的简化平衡速率方程得出。(c) 不同拉比频率下，冷却时间 $\tau_{\rm eff}$ 随初始 $\bar{n}_{\rm ini}$ 的变化。(a)–(c) 中的淬火冷却参数为$\gamma_{\rm eff}/\omega_{\rm osc}=0.1$、$\eta=0.1$，失谐为 $\delta=-\omega_{\rm osc}$。

我们的计算表明，冷却时间存在一个全局最小值 $\tau_{\rm min}$，对应的拉比频率介于 $\Omega_\tau=0.3\,\omega_{\rm osc}$ 和 $\Omega_\tau=0.4\,\omega_{\rm osc}$之间。由于平均占据数相较于低强度极限下的最小值并未显著改变，这一点确定了实现快速且同时深度冷却的最优参数。此外，如图 2(c) 所示，我们观察到冷却时间 $\tau_{\rm eff}$ 与初始平均占据数$\bar{n}_{\rm ini}$呈线性关系。接下来，我们研究最优参数对有效淬火速率 $\gamma_{\rm eff}$的依赖关系。如图 3(a) 所示，在边带冷却区，Ω_τ 强烈依赖于 $\gamma_{\rm eff}$，但对兰姆-迪克参数 η的依赖较弱。边带区中参数为 $\gamma_{\rm eff}/\omega_{\rm osc}<0.5$、$\eta<0.3$ 和 $\bar{n}_{\rm ini}<20$ 的冷却模拟数据足以让我们根据拟合结果推导出最优拉比频率Ω_τ的解析表达式

$$\Omega_\tau\simeq\sqrt{1.24\cdot\gamma_{\rm eff}\cdot\omega_{\rm osc}} \tag{15}$$

以及 Ω_τ 和失谐 $\delta=-\omega_{\rm osc}$ 时的最短冷却时间 $\tau_{\rm min}$：

$$\tau_{\rm min}\simeq\frac{1.2+2\,\bar{n}_{\rm ini}}{\gamma_{\rm eff}}+\frac{1.9}{\eta^2\omega_{\rm osc}}. \tag{16}$$

请注意，这些是适用于任何受限于谐势阱、衰减率为 $\gamma_{\rm eff}$ 且兰姆-迪克参数为 η的两能级离子的通用表达式。我们使用方程（15）和（16）绘制图3中的黑色虚线，并观察到它们与通过直接模拟得到的 Ω_τ 和 $\tau_{\rm min}$ 结果吻合良好。特别是，根据方程（15），对于图1(b)中使用的参数，能够实现快速冷却的最优拉比频率为 $\Omega_\tau/2\pi\simeq193$ 千赫兹，这与图中所示冷却动力学的直接模拟结果高度一致。

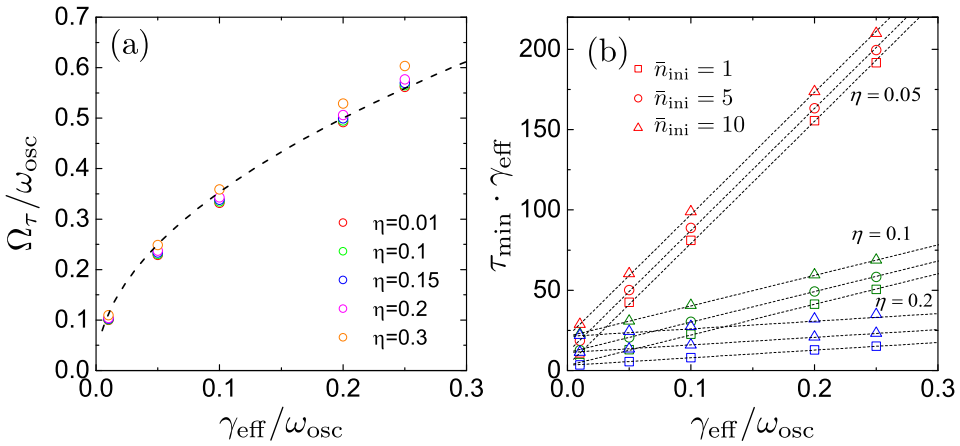


图 3. (a) 在不同朗姆–迪克参数 η下，使 $\tau_{\min}$ 达到目标值时的最佳拉比频率 Ω_τ 与 $\gamma_{\rm eff}$ 的关系。黑色虚线根据公式 (15) 给出的解析表达式计算得出。(b) 在不同 $\bar{n}_{\rm ini}$（以不同符号表示）和朗姆–迪克参数 η（以不同颜色表示）下，最佳拉比频率 Ω_τ 对应的最短冷却时间与有效衰减率的关系。冷却激光的失谐对应于第一个红边带共振 $\delta=-\omega_{\rm osc}$。黑色虚线根据公式 (16) 中给出的 $\tau_{\min}$ 表达式计算得出，并以 $\gamma^{-1}_{\rm eff}$为单位绘制。

5. $^{172}Yb^{+}$中各种淬火冷却区间的分析

从一般处理转向具体情形，我们现在将“^τ-矩阵方法”应用于受限在射频保罗阱中的 $^{172}Yb^{+}$ 离子。图4展示了淬火冷却过程中涉及的相关原子态。$|0\rangle\to|1\rangle$ 冷却跃迁为接近 411 nm 的 $^2S_{1/2}\to{}^2D_{5/2}$ 四极跃迁，而接近 1650 nm 的 $^2D_{5/2}\to{}^2P_{3/2}$ 偶极跃迁则用作 $|1\rangle\to|2\rangle$ 淬火跃迁。下文将比较分辨边带区$\gamma_{\rm eff}\ll\omega_{\rm osc}$、半经典区间 $\gamma_{\rm eff}>\omega_{\rm osc}$ 和中间冷却区间$\gamma_{\rm eff}\simeq\omega_{\rm osc}$中的淬火冷却速率与极限。

对于这些区间，图 5 展示了冷却场 $\mathbf{E}_1$ 所诱导的不同拉比频率下，平均占据数 $\bar{n}_\infty$ 和冷却时间的结果。在分辨边带区，我们观察到，在低强度下（$\Omega=1/12\,\omega_{\rm osc}$），当失谐为 $\delta=-\omega_{\rm osc}$ 时，$\bar{n}\simeq0.0012$ 达到最小值；这接近低强度极限$\bar{n}_{\min}\simeq7/48\,(\gamma_{\rm eff}/\omega_{\rm osc})^2\simeq0.001$，与 [21]中的 [34, 35],或 $\bar{n}_{\min}\simeq5/16\,(\gamma_{\rm eff}/\omega_{\rm osc})^2\simeq0.002$ 所得结果类似。简化平衡速率方程 [34, 35],中仅考虑了 $\bar{n}$ 对光场强度的线性依赖，因此与通过“^τ-矩阵方法”得到的直接模拟相比，该方法对平均占据数的估计略低。为便于观察，我们在图 5(a) 中采用对数刻度，以突出低强度下的差异（黑色虚线和实线）。在低激光强度下，冷却时间的结果在 $\delta=-\omega_{\rm osc}$ 附近与 [34, 35] 一致。然而，随着强度增加，简单模型与直接模拟结果之间的差异变得更加

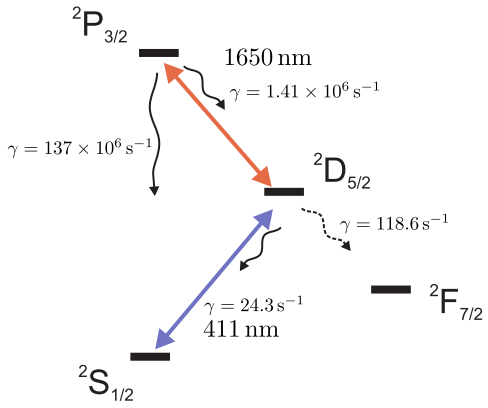


图 4. $^{172}Yb^+$ 中淬火冷却相关的原子能级及其衰减率。边带冷却在约 411 nm 处的电子 $^2S_{1/2} \rightarrow {}^2D_{5/2}$ 四极跃迁上进行。通过约 1650 nm 的激光，将 $^2D_{5/2}$ 态耦合到寿命较短的 $^2P_{3/2}$ 态。

明显（$\Omega = 1/3\,\omega_{\mathrm{osc}}$对应的绿色虚线和实线）。我们还观察到，使 $\bar{n}_\infty$ 和冷却时间达到最小值的最佳失谐向绝对值较小的方向移动。此外，在低强度下，$\delta/\omega_{\mathrm{osc}} = -2, -3, \ldots$附近也可见局部极小值。这些效应无法由简化模型 [34, 35]预测。

请注意，温度和冷却时间对冷却激光强度的依赖关系有所不同：在弱场极限下，离子温度（或平均占据数$\bar{n}$）基本不受强度影响，但冷却时间会随强度增大而缩短。在高强度激光场下，温度会显著升高，但冷却时间不会因此进一步明显缩短。冷却时间和温度对场强的这种依赖关系，使我们能够确定一种适用于高效（即快速且同时深度）淬火冷却的最佳冷却光强。在中间冷却区间（图 5(b)）和半经典冷却区间（图 5(c)）中也能观察到类似行为。

为选择最佳冷却参数，我们采用以下算法：对于冷却光场的各种强度，确定能够提供最大冷却速率的最佳失谐 δ^*。在这些 δ^*值下，随后分析稳态温度。结果如图 6 所示。随着强度增大，最佳失谐 δ^* 逐渐偏离边带共振 $\delta = -\omega_{\mathrm{osc}}$（图 6(a、d、g)）。在所研究的每种冷却区间中，冷却时间都在一定范围的冷却光强下达到最小值（图 6(b、e、h)），据此可以选择实现快速冷却的最佳强度。在图 6(c、f、i)中，我们绘出了在最佳失谐 δ^*下冷却所得的稳态温度 T 和平均原子能量 E_{av}。我们以 $\hbar\omega_{\mathrm{osc}}/k_{\mathrm{B}}$为单位绘制稳态温度，该温度通过对由 $\hat{\rho}_{\mathrm{st}}$决定的稳态布居进行指数分布拟合而得。平均原子能量则为平均值 $E_{\mathrm{av}} = \sum_n nP_n$，其中 P_n 是具有稳态温度 T 的玻尔兹曼分布，分布在久期频率为 $\omega_{\mathrm{osc}}/2\pi = 600$千赫兹的原子态上。请注意，$E_{\mathrm{av}}$ 以$\hbar\omega_{\mathrm{osc}}$ 为单位绘制，并加上 0.5 的偏移，以计入量子力学基态能量。

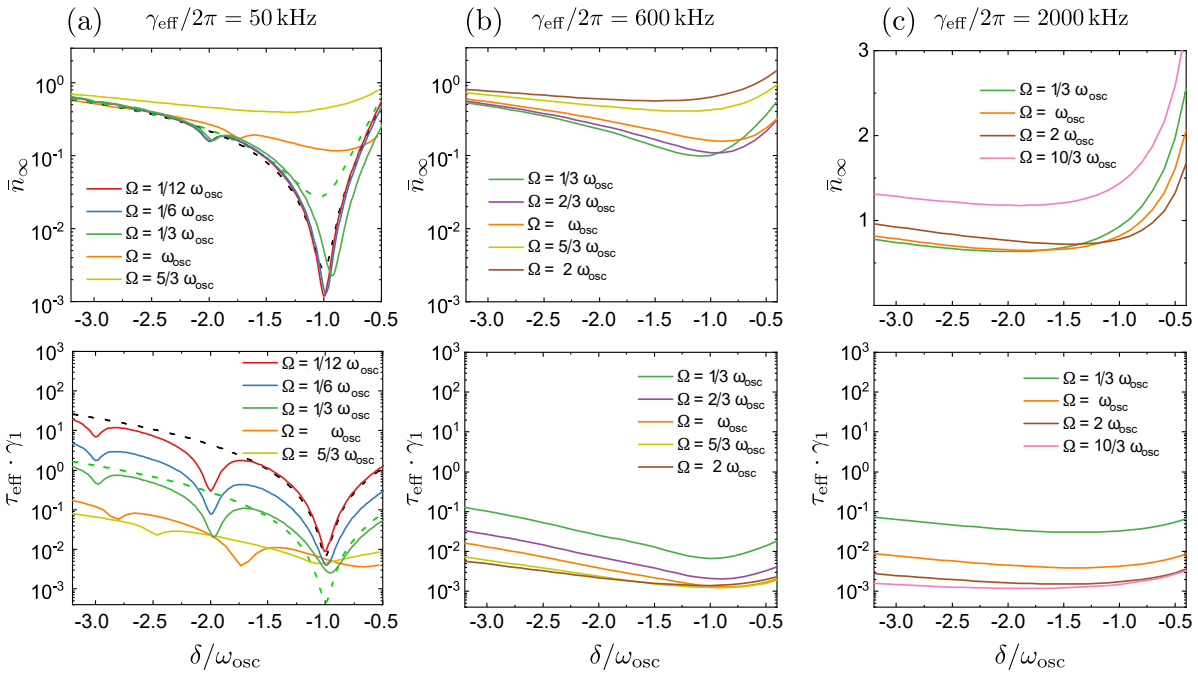


图 5. （a）边带冷却区中的淬火冷却（$\gamma_{\rm eff}/2\pi = 50$千赫兹）、（b）中间冷却区间中的淬火冷却（$\gamma_{\rm eff}/2\pi = 600$千赫兹）和（c）半经典冷却区间中的淬火冷却（$\gamma_{\rm eff}/2\pi = 2000$千赫兹）的比较。对于每种区间，均绘出了不同冷却光场拉比频率下的 $\bar{n}_\infty$ 和冷却时间 $\tau_{\rm eff}$ （以 $^2{\rm S}_{1/2} \rightarrow {}^2{\rm D}^{5/2}$ 跃迁的衰减率 γ_1^{-1}为单位）$\mathbf{E}_1$。所有冷却激光参数（Ω 和 δ）均以离子世俗频率 $\omega_{\rm osc} = 2\pi \times 600$千赫兹为单位。每次冷却模拟均以初始玻尔兹曼分布开始，其 $\bar{n}_{\rm ini} = 20$。（a）中的黑色和绿色虚线分别对应于 $\bar{n}_\infty$ 以及 $\Omega/\omega_{\rm osc} = 1/12$ 时的冷却时间；这些结果取自 [34]中给出的解析表达式，且 $1/3$ 。

绝对最低冷却温度出现在分辨边带冷却区 $\gamma_{\rm eff} \ll \omega_{\rm osc}$。在最佳失谐 $\delta^* \simeq -0.89\,\omega_{\rm osc}$ 下，当冷却光的拉比频率 $\Omega^* \simeq \omega_{\rm osc}/2$时，可达到相应的最短冷却时间 $\tau^* \simeq 2.4 \times 10^{-3}\,\gamma_1^{-1} \simeq 100\,\mu$秒。此时，稳态温度仅略高于低强度极限下得到的最小值。在中间冷却区和半经典冷却区间，最短冷却时间对应的冷却光拉比频率为

$$\Omega^* \simeq \sqrt{\gamma_{\rm eff}^2/2 + 2\,\omega_{\rm osc}^2}\,, \tag{17}$$

其中，离子温度随着拉比频率 Ω^* 的增加而成比例升高。请注意，最佳拉比频率的解析近似再次具有很强的通用性，可应用于具有类似能级结构的原子种类中的淬火冷却。

首先，对我们的研究结果可以得出结论：中间区在快速激光冷却至 $\bar{n} < 1$ 方面前景广阔，因为观测到的最短冷却时间$\tau^* \simeq 1.2 \times 10^{-3}\,\gamma_1^{-1} \simeq 50\,\mu$s与半经典冷却区间非常相近，但代价是温度略有升高。

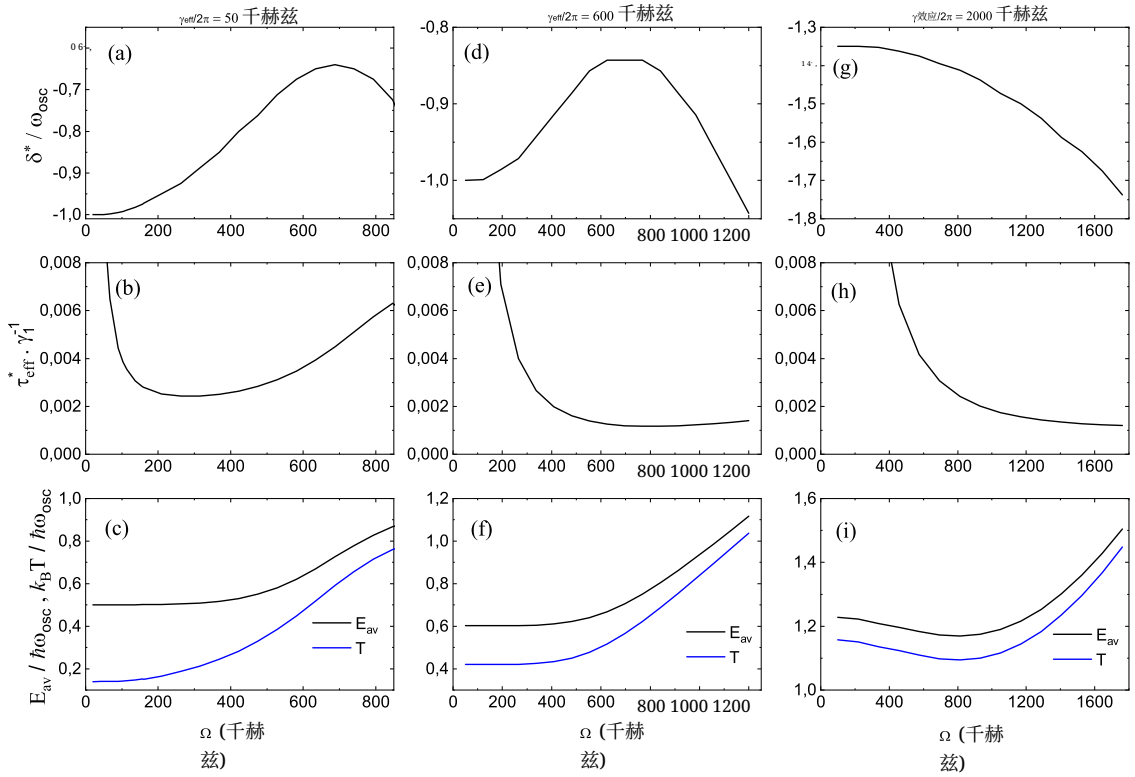


图 6. 不同区间中实现最快淬火冷却的最优参数：分辨边带区（a、b、c）、中间区（d、e、f）和半经典冷却区间（g、h、i）。在每种情况下，最优失谐 δ^* 将带来最优冷却时间 τ^* （以 $^2\mathrm{S}_{1/2} \to {}^2\mathrm{D}_{5/2}$ 跃迁的衰减率 γ_1^{-1}为单位）。离子温度 T 通过对由 $\hat{}\rho_{\mathrm{st}}$控制的稳态布居进行指数分布拟合得到。将此 T 用于玻尔兹曼分布，可得平均冷却能量 E_{av}。在此处所示的各个冷却区间中，离子世俗频率为 $\omega_{\mathrm{osc}}/2\pi = 600$千赫兹，模拟均从初始热分布 $\bar{n}_{\mathrm{ini}} = 20$开始。

我们使用单个被囚禁在高精度射频保罗阱 [39]中的 $^{172}\mathrm{Yb}^+$ 离子所获取的数据，对“$\hat{}\tau$-矩阵方法”模拟进行基准验证。射频驱动频率 $\Omega_{\mathrm{rf}} = 2\pi \times 24.4\,\mathrm{MHz}$，对应强径向模的典型久期频率为 $\omega_x = 2\pi \times 565(5)$ 千赫兹。首先，将离子在 370 nm 附近的 $^2\mathrm{S}_{1/2} \to {}^2\mathrm{P}_{1/2}$ 跃迁上多普勒冷却至$T_{\mathrm{D}} \sim 0.5\,\mathrm{mK}$。所得福克态热分布的平均占据数为 $\bar{n} = 18(1)$，通过在 411 nm 附近的 $^2\mathrm{S}_{1/2} \to {}^2\mathrm{D}_{5/2}$ 跃迁上记录拉比振荡测得。

经过多普勒冷却阶段后，离子被初始化到 $m_J = -1/2$基态。将波长接近 411nm 的冷却激光设为拉比频率 $\Omega/2\pi = 50(2)\mathrm{kHz}$ 和失谐 δ，据此我们通过蓝边带与红边带的振幅比 $R = I_{\mathrm{BSB}}/I_{\mathrm{RSB}}$，推导出离子温度与淬火冷却时间$t_{\mathrm{cool}}$ 之间的关系 [22]。平均

占据数为

$$\bar{n}_{\mathrm{SB}} = \frac{1}{R-1}. \tag{18}$$

为获得可靠的统计结果，边带扫描中的每个数据点均重复测量200次。有效冷却时间 τ_{eff} 由指数拟合得出的衰减参数确定，如图7的插图所示。我们在频率区间 -0.75 至 $-2.25\,\omega_{\mathrm{osc}}$ 内表征冷却速率，该区间至少涵盖前两个红色世俗边带，即分别为 $\delta = -\omega_{\mathrm{osc}}$ 和 $\delta = -2\omega_{\mathrm{osc}}$。当淬火程度适中、$\gamma_{\mathrm{eff}}/2\pi = 50(2)$ 千赫兹时（黑色曲线），边带冷却的影响十分明显；我们的测量结果与直接模拟高度吻合，尤其是在 $-\omega_{\mathrm{osc}}$ 和 $-2\,\omega_{\mathrm{osc}}$ 附近。然而，我们观察到，在第一和第二个红边带之间的区域，冷却速度更快。我们认为这是由于350千赫兹处的激光噪声（半峰全宽约为170千赫兹，另见附录B中的图B1）导致边带发生非共振激发，从而带来额外冷却。正如预期的那样，当冷却接近中间区、$\gamma_{\mathrm{eff}}/2\pi = 404(21)$ 千赫兹时，边带特征消失（蓝色曲线）。由于冷却激光拉比频率受可用激光功率限制，我们无法分辨该区域中更快的冷却速率，而图6(e)中的预测显示该速率还会更快。

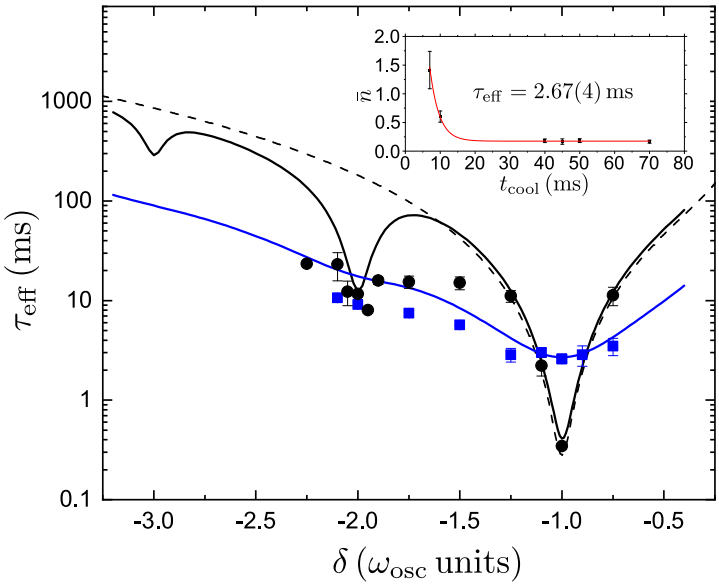


图7。 在分辨边带区中，采用 $\gamma_{\mathrm{eff}}/2\pi = 48(2)$ 千赫兹（黑色）的淬火冷却，以及接近中间区、采用$\gamma_{\mathrm{eff}}/2\pi = 404(21)$ 千赫兹（蓝色）的淬火冷却时，有效冷却时间 τ_{eff} 随冷却激光失谐（以离子久期频率 $\omega_{\mathrm{osc}} = 2\pi \times 565(5)$ 千赫兹为单位）的变化。虚线由 [34] 中的解析表达式推导得出，实线曲线对应于 $\Omega = 2\pi\times 50$千赫兹时的直接模拟。实心方块和圆点表示实验数据。每次实验均采用与 $\Omega = 2\pi\times 50(2)$ 千赫兹相对应的激光强度，并以 $\bar{n} \simeq 18(1)$ 为初始热分布。插图示例性地展示了如何确定 $\gamma_{\mathrm{eff}}/2\pi = 404(21)$ 千赫兹和 $\delta = -\omega_{\mathrm{osc}}$ 时的有效冷却时间。

6. 淬火边带冷却过程中的福克态分布

已知冷却后福克态分布若高度非热，会导致温度被显著低估 [42, 43, 44]。在此，我们使用蒙特卡洛模拟，模拟离子阱中不同冷却时间下离子的福克态分布；这与 [45], 类似，因为我们此前引入的“^τ-矩阵方法”只能给出稳态下的布居分布。由于实验上是根据边带振幅比 R推导离子温度，我们基于模拟得到的福克态分布对红、蓝边带强度进行建模，并依据方程（18）得出相应的理论温度值。对于任意福克态分布 P_n ，边带振幅比 R 可表示如下：

$$R(t) = \frac{1 - \sum_n P_n \cos\left(C_{n+1,n}(\eta)\Omega_0 t\right)}{1 - \sum_n P_n \cos\left(C_{n-1,n}(\eta)\Omega_0 t\right)}, \tag{19}$$

其中，$C_{n+1,\ n}(\eta)$ 和 $C_{n-1,\ n}(\eta)$ 分别是蓝边带和红边带的边带强度系数，如方程（7）所示。请注意，通常比值 R 是激发脉冲时间的函数，而对应于热分布的 P_n 则不是。对于热分布，方程（19）直接得出表达式（18）所示的、关于 $\bar{n}$ 的众所周知的关系。

图 8(a) 至 (c) 展示了不同有效线宽 $\gamma_{\text{eff}}/2\pi$ 下温度随冷却时间的变化，其中分别绘出了理论计算所得的 $\bar{n}_{\text{SB}}$ （黑色曲线）和分布平均值 $\sum_n nP_n$ （红色曲线）。边带冷却一开始，测量所得数据（蓝色方块）确实显示，在有效线宽较小时（图 8(a) 和 (b)），福克态呈现非热分布，这与计算得到的温度 $\bar{n}_{\text{SB}}$ 符合良好。请注意，分别根据 $\bar{n}_{\text{SB}}$ 和分布平均值推得的 $1/e$ 冷却时间 $\tau_{\text{ratio}} = 0.125$（2）毫秒和 $\tau_{\text{mean}} = 0.714$（9）毫秒存在显著差异。为突出原子温度和冷却时间被低估的情况，我们在图 8(d) 至 (f) 中绘出了 $\bar{n} = \bar{n}_{\text{SB}}$ （橙色）和 $\bar{n} = \sum_n n \cdot P_n$ （米色）的热分布，并同时展示此前模拟得到的福克态分布（蓝色）。对于较大的有效线宽，即 $\gamma_{\text{eff}}/2\pi = 64$ 千赫兹，福克态分布逐渐接近热分布，如图 8(c) 和 (f) 所示。然而，我们仍观察到实验中的非热分布略强。无论如何，只要冷却时间足够长， $\bar{n} \simeq 0.06$（2）总能达到热平衡。我们的研究结果表明，中间区（其中 $\gamma_{\text{eff}} \simeq \omega_{\text{osc}}$）不仅适用于快速、深度地淬火冷却至 $\bar{n} < 1$，而且预计在冷却过程中也相当不易受福克态非热分布的影响。

对于囚禁离子的光学钟而言，这一点至关重要。我们计算了线性保罗阱中囚禁的 $^{172}\text{Yb}^+$ ion 所经历的热时间膨胀随时间的演化。我们以福克态模拟分布的平均 $\sum_n nP_n$ 作为动能的依据。图9(a)显示了三维相对时间膨胀频移 $\Delta f/f_0 = -5/2E_{\text{kin}}/mc^2$ [46] 随每个运动模的冷却时间

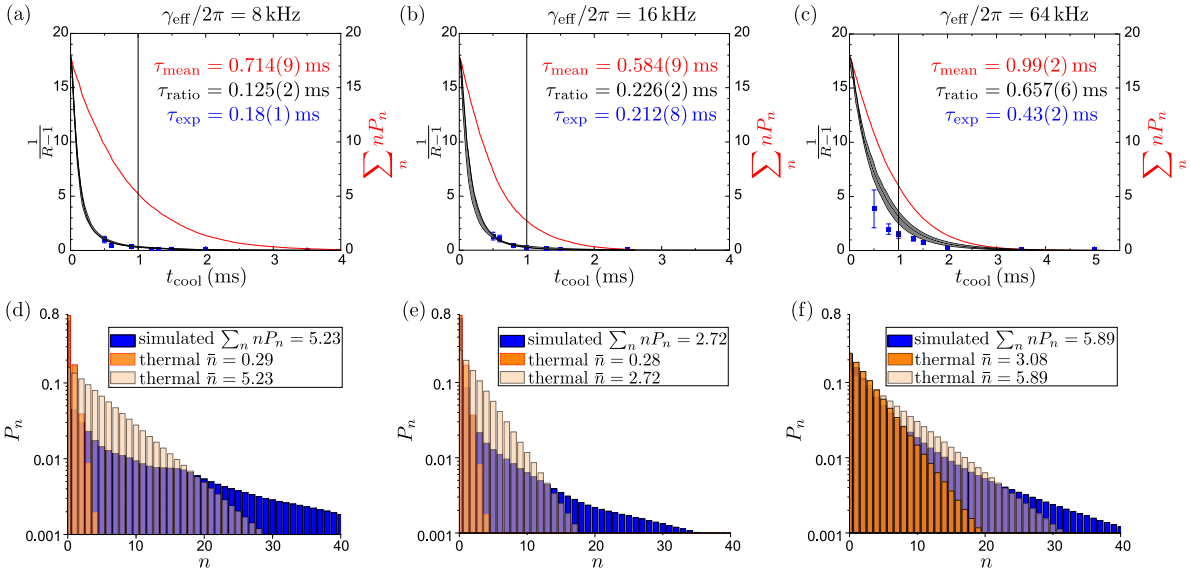


图 8. 原子福克态的非热分布对温度评估的影响。采用蒙特卡洛模拟计算了不同冷却时间下的布居分布，模拟中以 $\gamma_{\rm eff}/2\pi = 8$，16，64 千赫兹进行淬火冷却。对于 $t_{\rm cool}$ 的每个取值，均使用该福克态分布计算以拉比频率 $\Omega_{411} = 2\pi\times$40千赫兹驱动时红边带和蓝边带的强度。(a)–(c) 中绘出了计算得到的边带比（黑色曲线）和分布的平均值（红色曲线）随冷却时间 $t_{\rm cool}$的变化。蓝色方块表示实验推导的边带比，分别是在 (a) $\gamma_{\rm eff}/2\pi = 8.2$(2) 千赫兹、(b) $\gamma_{\rm eff}/2\pi = 16.4$(7) 千赫兹和 (c) $\gamma_{\rm eff}/2\pi = 62$(4) 千赫兹下获取的。黑色曲线周围的阴影区域表示实验拉比频率 $\Omega_{411} = 2\pi \times 40$(2) 千赫兹的不确定度。对每条理论曲线和实验数据拟合指数衰减，以确定初始温度为 $\bar{n}_{\rm ini} = 18$时的特征冷却时间。拟合结果列于 (a)–(c) 中。(d)–(f) 展示了相应的模拟福克态分布（蓝色）以及温度为 $\bar{n} = 1/(R-1)$（橙色）和 $\bar{n} = \sum_n nP_n$（米黄色）时的热分布；示例为 $t_{\rm cool} = 1$ 毫秒。

的变化，其中 $\omega_{\rm osc} = 2\pi \times 600$千赫兹，对应不同的有效淬火速率。每种情况下，初始时间膨胀频移均对应多普勒冷却后的温度。除非冷却达到热平衡，否则我们会观察到时间膨胀频移显著依赖于有效淬火速率。如果在达到热平衡之前停止冷却，如图8(d)–(f)所示，那么用边带比确定的温度将会有误，进而导致时间膨胀频移的估算错误。例如，若在边带区以 $\gamma_{\rm eff} = 8$千赫兹冷却1毫秒（图8d），边带比会表明时间膨胀频移为-2.3×10^{-20}（根据 $\bar{n} = 0.29$），而福克态的实际分布则显示频移为 -2.2×10^{-19}（根据 $\bar{n} = 5.23$）。在此区域，原子钟的误差预算会被低估一个数量级。为减小偏差，建议在满足 $\gamma_{\rm eff}/\omega_{\rm osc} > 0.1$ 的区域进行冷却，如图8(f)所示。最后，我们想指出，离子所经历的时间膨胀频移高度依赖于冷却激光强度。在图9(b)中，我们固定了

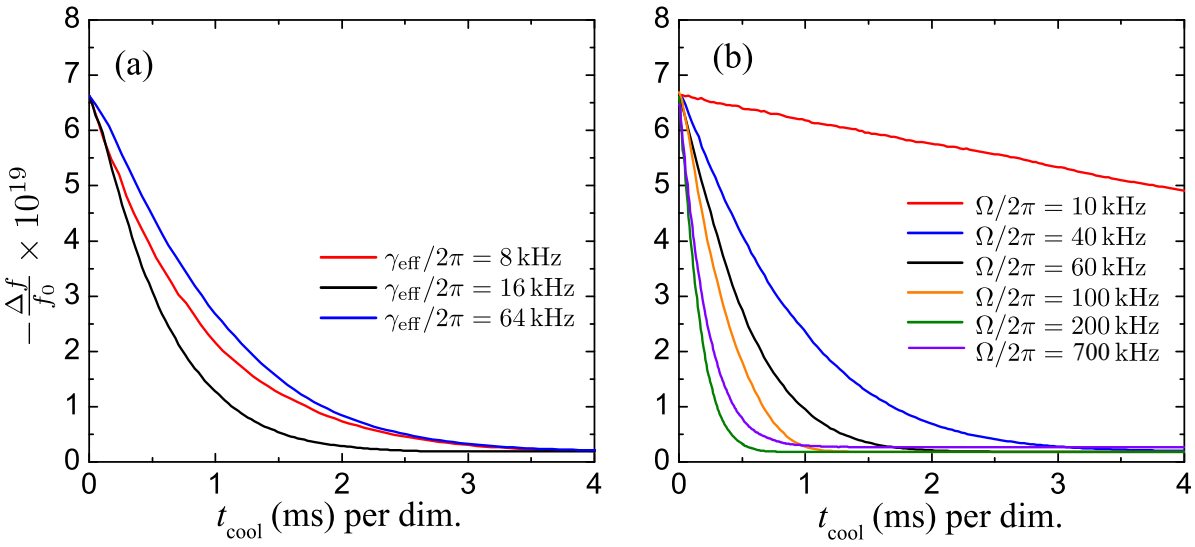


图 9. 线性保罗阱中囚禁的 $^{172}Yb^+$ 离子所经历的三维相对时间膨胀频移。这里假设每个运动模的久期频率为 $\omega_{\rm osc} = 2\pi \times 600$千赫兹，并绘制时间膨胀频移随每个维度的淬火冷却时间变化的曲线。分布在福克态中的模拟平均值 $\sum_n nP_n$ （如图 8 中蓝色所示）用于计算频移。(a) 拉比频率设为 $\Omega/2\pi = 40$千赫兹，同时改变有效淬火速率。(b) 对于 $\gamma_{\rm eff} = 64$千赫兹的有效淬火速率，我们观察到最佳拉比频率为 $\Omega/2\pi = 200$ 千赫兹，可实现快速淬火冷却，直至达到热平衡。

将有效淬火速率设为 $\gamma_{\rm eff} = 64$千赫兹，并研究了不同冷却激光强度的影响。与我们在图 1(b) 和图 6(b) 中观察到的最快冷却对应最佳拉比频率的结果一致，该值也能使系统尽可能快地达到热平衡。

7. 总结

总而言之，我们研究了淬火边带冷却的机制，并提出了一种用于快速计算特征冷却时间的通用方法，该方法无需考虑系统密度矩阵元的动力学演化。我们的“$\hat{}\tau$-矩阵方法”大幅降低了计算量，且与完整量子模型的结果相差不超过$90-100\%$。

基于我们强大的模拟工具，我们推导出了适用于分辨边带区冷却的最优拉比频率 Ω_τ 及由此得到的最短冷却时间 $\tau_{\rm min}$ 的普适解析表达式，这些表达式可用于任何被囚禁在射频保罗阱中的原子种类，其衰减率为 $\gamma_{\rm eff}$ 。我们将模拟应用于一个具体案例，研究了 $^{172}Yb^+$ 离子的淬火冷却，重点考察了三种不同区间：(I) $\gamma_{\rm eff}/2\pi = 50$ 千赫兹下的分辨边带冷却，(II) $\gamma_{\rm eff}/2\pi = 600$千赫兹下的中间冷却，以及 (III) $\gamma_{\rm eff}/2\pi = 2000$千赫兹下的半经典冷却。对于这些区间，我们推导出了稳态温度和有效冷却

时间随各种冷却激光参数（如拉比频率和失谐）变化的关系。通过这项全面分析，我们提取出各个上述区间中实现快速冷却至运动基态的最优参数。我们使用一个被囚禁、久期频率为 $\omega_{\mathrm{osc}} = 2\pi \times 565(5)$ 千赫兹的单个 $^{172}\mathrm{Yb}^{+}$ 离子的实验数据对模拟代码进行了基准测试，发现实验结果与理论相符。

我们详细分析了冷却过程中福克态布居分布的变化。具体而言，我们比较了通过边带比值法得出的温度随时间的变化与福克态的实际平均占据数，发现若未冷却至热平衡，两者之间的差异可能超过一个数量级。此外，我们研究了淬火冷却过程中，光学钟中 $^{172}\mathrm{Yb}^{+}$ 热时间膨胀的时间演变。我们得出结论，必须在满足 $\gamma_{\mathrm{eff}}/\omega_{\mathrm{osc}} > 0.1$ 的条件下进行淬火，才能使福克态保持接近热分布。

本研究的结果为灵活地淬火冷却离子库仑晶体铺平了道路，有望实现快速激光冷却，使离子进入运动基态。由 N 个离子组成的晶体需要冷却 $3N$ 个运动模，因此，巧妙组合囚禁参数与淬火速率，有望比逐个冷却各个运动模缩短冷却时间。

致谢

感谢 Jonas Keller 对存在激光噪声时的光学光谱学提出宝贵意见。本研究由德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）通过德国卓越战略项目——EXC-2123 QuantumFrontiers——390837967 资助，并获得 DFG 项目资助，编号为 ME 3648/5-1。H. A. F¨urst 获得 EMPIR 项目 18SIB05“国际时间尺度用稳健光学钟”的支持。

参考文献

[1] Mielenz M, Brox J, Kahra S, Leschhorn G, Albert M, Schaetz T, Landa H and Reznik B 2013《物理评论快报》**110**133004[2] Ulm S, Roßnagel J, Jacob G, Deg¨unther C, Dawkins S T, Poschinger U G, Nigmatullin R, Retzker A, Plenio M B, Schmidt-Kaler F and Singer K 2013《自然·通信》**4** 2290[3] S E and Haljan P C 2013《物理评论*A*》**87** 051401(R)[4] Kiethe J, Timm L, Landa H, Kalincev D, Morigi G and Mehlst¨aubler T E 2021《物理评论*B*》**103**104106 [5] Blatt R and Roos C F 2012《自然·物理学》**8** 277–284[6] Joshi M K, Elben A, Vermersch B, Brydges T, Maier C, Zoller P, Blatt R and Roos C F 2020《物理评论快报》**124**240505[7] Monroe C, Campbell W C, Duan L M, Gong Z X, Gorshkov A V, Hess P W, Islam R, Kim K, Linke N M, Pagano G, Richerme P, Senko C and Yao N Y 2021《现代物理评论》**93** 025001[8] Gill S S, Kumar A, Singh H, Singh M, Kaur K, Usman M and Buyya R 2022《软件：实践与经验》**52** 66–114

[9] Huntemann N, Sanner C, Lipphardt B, Tamm C and Peik E 2016 《物理评论快报》 116 063001[10] Huang Y, Zhang B, Zeng M, Hao Y, Ma Z, Zhang H, Guan H, Chen Z, Wang M and Gao K 2022 《物理评论应用》 17 034041[11] Brewer S M, Chen J S, Hankin A M, Clements E R, Chou C W, Wineland D J, Hume D B and Leibrandt D R 2019 《物理评论快报》 123 033201[12] Keller J, Burgermeister T, Kalincev D, Didier A, Kulosa A P, Nordmann T, Kiethe J and Mehlst¨aubler T E 2019 《物理评论A》 99 013405[13] Phillips W D 1998 《现代物理评论》 70 721[14] Morigi G, Eschner J and Keitel C H 2000 《物理评论快报》 85 4458[15] Roos C F, Leibfried D, Mundt A, Schmidt-Kaler F, Eschner J and Blatt R 2000 《物理评论快报》 85 5547 [16] Feng L, Tan W L, De A, Menon A, Chu A, Pagano G and Monroe C 2020 《物理评论快报》 125 053001[17] Qiao M, Wang Y, Cai Z, Du B, Wang P, Luan C, Chen W, Noh H R and Kim K 2021 《物理评论快报》 126 023604[18] Dalibard J and Cohen-Tannoudji C 1989 《美国光学学会杂志B》 6 2023–2045[19] Joshi M K, Fabre A, Maier C, Brydges T, Kiesenhofer D, Hainzer H, Blatt R and Roos C F 2020 《新物理学杂志》 22 103013[20] Ejtemaee S and Haljan P C 2017 《物理评论快报》 119[21] Wineland D J and Itano W M 1979 《物理评论A》 20 1521[22] Diedrich F, Bergquist J C, Itano W M and Wineland D J 1989 《物理评论快报》 62 403[23] Marzoli I, Cirac J I, Blatt R and Zoller P 1994 《物理评论A》 49 2771[24] Mehlst¨aubler T E, Keupp J, Douillet A, Rehbein N, Rasel E M and Ertmer W 2003 《光学杂志B辑：量子与半经典光学》 5 S183–S189[25] Letchumanan V, Wilpers G, Brownnutt M, Gill P and Sinclair A G 2007 《物理评论A》 75 063425[26] Sawamura H, Kanda K, Yamazaki R, Toyoda K and Urabe S 2008 《应用物理B》 93 381–388[27] Chiaverini J and Sage J M 2014 《物理评论A》 89 012318[28] Binnewies T, Wilpers G, Sterr U, Riehle F, Helmcke J, Mehlst¨aubler T E, Rasel E M and Ertmer W 2001 《物理评论快报》 87 123002[29] Rehbein N, Mehlst¨aubler T E, Keupp J, Moldenhauer K, Rasel E M, Ertmer W, Douillet A, Michels V, Porsev S G, Derevianko A, Froese Fischer C, Tachiev G I and Pal'chikov V G 2007 《物理评论A》 76 043406[30] Minogin V G and Letokhov V S 1987 《激光对原子的光压》（纽约：Gordon and Breach Science Publishers）[31] Metcalf H J and van der Straten P 1999 激光冷却与囚禁（纽约：Springer-Verlag）[32] Wesenberg J H, Epstein R J, Leibfried D, Blakestad R B, Britton J, Home J P, Itano W M, Jost J D, Knill E, Langer C, Ozeri R, Seidelin S and Wineland D J 2007 《物理评论A》 76 053416[33] Prudnikov O N, Chepurov S V, Lugovoy A A, Rumynin K M, Kuznetsov S N, Taichenachev A V, Yudin V I and Bagayev S N 2017 《量子电子学》 47 806[34] Javanainen J and Stenholm S 1981 《应用物理》 24 151[35] Javanainen J, Lindberg M and Stenholm S 1984 《美国光学学会杂志B》 1 111[36] Blockley C A and Walls D F 1993 《物理评论A》 47 2115[37] Zhang S, Zhang J Q, Wu W, Bao W S and Guo C 2021 《新物理学杂志》 23 023018[38] Peik E, Abel J, Becker T, von Zanthier J and Walther H 1999 《物理评论A》 60 439[39]Keller J, Kalincev D, Burgermeister T, Kulosa A P, Didier A, Nordmann T, Kiethe J and Mehlst¨aubler T E 2019 《物理评论应用》 11 011002[40] Leibfried D, Blatt R, Monroe C and Wineland D 2003 《现代物理评论》 75 281[41] Il'enkov R Y, Prudnikov O N, Taichenachev A V and Yudin V I 2016 《实验与理论物理学杂志》 123 1–11[42] Che H, Deng K, Xu Z T, Yuan W H, Zhang J and Lu Z H 2017 《物理评论A》 96 013417[43] Chen J S, Brewer S M, Chou C W, Wineland D J, Leibrandt D R and Hume D B 2017 《物理评论》

物理评论快报**118** 053002[44] Rasmusson A J、D'Onofrio M、XieY、Cui J 和 Richerme P 2021 《物理评论*A*》**104** 043108[45] Mølmer K、Castin Y 和 Dalibard J 1993 《美国光学学会杂志*B*》**10** 524–538[46] Herschbach N、Pyka K、Keller J 和 Mehlst¨aubler T E 2012 《应用物理*B*》**107** 891–906[47] Prudnikov O N、Taichenachev A V、Tumaikin A M 和 Yudin V I 2007《物理评论*A*》**75** 023413[48] Kirpichnikova A A、Prudnikov O N 和 Wilkowski D 2019 《量子电子学》**49** 443

附录 A. 密度矩阵元的动力学演化

振动态密度矩阵各分量的演化方程 $n,\ m$ （见图 1(a)）具有以下形式:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_{nm}^{22}}{\partial t} =& -(\gamma_3+\gamma_2)\rho_{nm}^{22} - i\omega_{osc}(n-m)\rho_{nm}^{22} \\
&- \frac{i}{2}\sum_{\mu}\left[\Omega_{n\mu}^{(2)}\rho_{\mu m}^{12} - \rho_{n\mu}^{21}\Omega_{\mu m}^{*(2)}\right] \\
\frac{\partial \rho_{nm}^{11}}{\partial t} =& -\gamma_1\rho_{nm}^{11} + \hat{\gamma}_2\{\rho^{22}\}_{nm} - i\omega_{osc}(n-m)\rho_{nm}^{11} \\
&- \frac{i}{2}\sum_{\mu}\left[\Omega_{n\mu}^{*(2)}\rho_{\mu m}^{21} + \Omega_{n\mu}^{(1)}\rho_{\mu m}^{01} - \rho_{n\mu}^{12}\Omega_{\mu m}^{(2)} - \rho_{n\mu}^{10}\Omega_{\mu m}^{*(1)}\right] \\
\frac{\partial \rho_{nm}^{00}}{\partial t} =& \hat{\gamma}_3\{\rho^{22}\}_{nm} + \hat{\gamma}_1\{\rho^{11}\}_{nm} - i\omega_{osc}(n-m)\rho_{nm}^{00} \\
&- \frac{i}{2}\sum_{\mu}\left[\Omega_{n\mu}^{*(1)}\rho_{\mu m}^{10} - \rho_{n\mu}^{01}\Omega_{\mu m}^{(1)}\right] \\
\frac{\partial \rho_{nm}^{01}}{\partial t} =& -(\gamma_1/2+i\delta_1)\,\rho_{nm}^{01} - i\omega_{osc}(n-m)\rho_{nm}^{01} \\
&- \frac{i}{2}\sum_{\mu}\left[\Omega_{n\mu}^{*(1)}\rho_{\mu m}^{11} - \rho_{n\mu}^{00}\Omega_{\mu m}^{*(1)} - \rho_{n\mu}^{02}\Omega_{\mu m}^{(2)}\right] \\
\frac{\partial \rho_{nm}^{10}}{\partial t} =& -(\gamma_1/2-i\delta_1)\,\rho_{nm}^{10} - i\omega_{osc}(n-m)\rho_{nm}^{10} \\
&- \frac{i}{2}\sum_{\mu}\left[\Omega_{n\mu}^{(1)}\rho_{\mu m}^{00} + \Omega_{n\mu}^{*(2)}\rho_{\mu m}^{20} - \rho_{n\mu}^{11}\Omega_{\mu m}^{(1)}\right] \\
\frac{\partial \rho_{nm}^{12}}{\partial t} =& -(\gamma_1/2+\gamma_2/2+\gamma_3/2+i\delta_2)\,\rho_{nm}^{12} \\
&- i\omega_{osc}(n-m)\rho_{nm}^{12} \\
&- \frac{i}{2}\sum_{\mu}\left[\Omega_{n\mu}^{(1)}\rho_{\mu m}^{02} + \Omega_{n\mu}^{*(2)}\rho_{\mu m}^{22} - \rho_{n\mu}^{11}\Omega_{\mu m}^{*(2)}\right] \\
\frac{\partial \rho_{nm}^{21}}{\partial t} =& -(\gamma_1/2+\gamma_2/2+\gamma_3/2-i\delta_2)\,\rho_{nm}^{21} \\
&- i\omega_{osc}(n-m)\rho_{nm}^{21} \\
&- \frac{i}{2}\sum_{\mu}\left[\Omega_{n\mu}^{(2)}\rho_{\mu m}^{11} - \rho_{n\mu}^{20}\Omega_{\mu m}^{*(1)} - \rho_{n\mu}^{22}\Omega_{\mu m}^{(2)}\right]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho^{02}_{nm}}{\partial t} =& -(\gamma_2/2+\gamma_3/2+\gamma+i\delta_1+i\delta_2)\,\rho^{02}_{nm}\\ &- i\omega_{osc}(n-m)\rho^{02}_{nm}\\ &- \frac{i}{2}\sum_{\mu}\left[\Omega^{*\,(1)}_{n\mu}\rho^{12}_{\mu m}-\rho^{01}_{n\mu}\Omega^{*\,(2)}_{\mu m}\right]\\ \frac{\partial\rho^{20}_{nm}}{\partial t} =& -(\gamma_2/2+\gamma_3/2+\Gamma-i\delta_1-i\delta_2)\,\rho^{20}_{nm}\\ &- i\omega_{osc}(n-m)\rho^{20}_{nm}\\ &- \frac{i}{2}\sum_{\mu}\left[\Omega^{(2)}_{n\mu}\rho^{10}_{\mu m}-\rho^{21}_{n\mu}\Omega^{(1)}_{\mu m}\right]\end{aligned} \tag{A.1}$$

密度矩阵元的上标索引 0、1、2 分别表示状态$|0\rangle$、 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$，下标索引 n、 m 和 μ 则与振动态有关。 Γ 描述了激光场 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$ 的相位不相关所导致的 $|2\rangle$ 态与$|0\rangle$态之间相干性的衰减。

自发弛豫算符 $\hat{}\gamma\{\rho\}_{nm}$ 决定了自发衰减率 γ_1、 γ_2 和 γ_3 （见图 1 (a)）、密度矩阵非对角元的衰减，以及激发态对基态的贡献。式 (A.1) 中这些项的形式为

$$\hat{\gamma}_i\{\rho^{jj}\}_{nm}=\sum_{\nu\mu}\Gamma^{(i)\,\nu\mu}_{nm}\rho^{jj}_{\nu\mu}. \tag{A.2}$$

偶极跃迁 $|2\rangle\to|1\rangle$ 和 $|2\rangle\to|0\rangle$ 的衰减率 $\Gamma^{(i)\,\nu\mu}_{nm}$ 可由考虑反冲效应的自发弛豫算符一般表达式求得（例如参见 [47]）

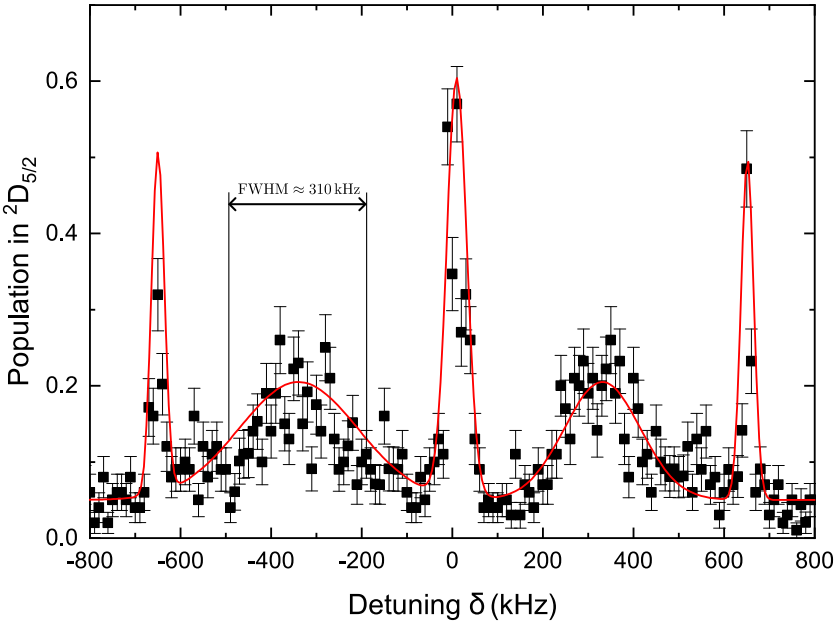
$$\Gamma^{(i)\,\nu\mu}_{nm}=\gamma_i\int_{-1}^{+1}K^{(d)}(h)\left(C_{\nu n}(\eta_i h)\right)^{+}C_{\mu m}(\eta_i h)\,dh, \tag{A.3}$$

其中， $K^{(d)}(h)$ 为衰变的偶极辐射方向图， η_i 为相应偶极跃迁的兰姆-迪克参数（图 1 (a) 中的 $i=2,\ 3$）。对于四极跃迁，弛豫算符的形式与式 (A.3) 类似，只需将偶极辐射方向图替换为衰变的四极辐射方向图 $K^{(q)}(h)$，并使用相应的兰姆-迪克参数 η_1 [48]。

附录B. 通过激光噪声产生的非共振激发

我们将实验中在冷却激光失谐约为 $-1.5\,\omega_{\rm osc}$ 时观察到的更快冷却速率（见图7）归因于激光噪声引起的非共振激发。为进行验证，我们研究了 $^2S_{1/2}\to{}^2D_{5/2}$ 跃迁在411 nm附近、从一阶红边带到一阶蓝边带范围内的频谱。图B1显示了这样一个频谱，该频谱在探测时间为 $t\simeq 7\cdot\tau_\pi$的条件下过驱动记录。位于 ±350千赫兹处的谱特征对应于激光

光的噪声调制，这很可能是由411 nm二次谐波产生腔的锁定电子设备带宽引起的。虽然411 nm冷却激光的频率失谐设定为 $-1.5\,\omega_{\mathrm{osc}}$，且 $\omega_{\mathrm{osc}} = 2\pi \times 565(5)$千赫兹，但一阶和二阶红边带之间相隔283(5)千赫兹。噪声谱特征的半峰全宽约为310千赫兹，与两个红边带均存在显著重叠，这很可能是在该频率范围内实验观察到更快冷却的原因。



图B1. $^2S_{1/2} \rightarrow {}^2D_{5/2}$ 跃迁在 411 nm 附近相对于载波跃迁的频谱。进行这项测量时，$^{172}Yb^+$ 离子被限制在离子阱中，久期频率为 $\omega_{\mathrm{osc}} = 2\pi \times 654(6)$ 千赫兹，并以 $t \simeq 7 \cdot \tau_\pi$ 为脉冲时间进行探测，以增强边带共振之间激光噪声的特征。我们对载波和边带拟合了洛伦兹函数，以供目视参考。