紧复流形上局部共形凯勒度量研究的泛函

Dan Popovici 和 Erfan Soheil

摘要。我们通过引入并研究一个泛函，提出了一种解决紧复流形上局部共形 K¨ahler 度量存在性问题的方法。该泛函根据流形的复维数是 2 还是更高而有所不同。

arXiv:2301.03277v2 [math.DG] 2 Aug 2023

1 引言

设 X 是一个带有 $n \geq 2$ 的 n 维紧复流形。本文针对 $n = 2$ 和 $n \geq 3$ 两种情形，分别通过引入并分析一个泛函，提出一种关于 X 上局部共形 K¨ahler（lcK）度量存在性的变分方法。该泛函定义在 X 上所有厄米度量构成的非空集合 $\mathcal{H}_X$ 上，取非负值，且当且仅当度量为 lcK 度量时取零。我们计算了该泛函在曲面和高维流形上的一阶变分。

我们将 X 上的厄米度量与其对应的 C^∞ 正定 (1,1) 形式ω等同。所有这些度量构成一个非空开凸锥，它位于无穷维实向量空间 $C^{\infty}_{1,1}(X, \mathbb{R})$ 中；该空间由 X 上所有实值光滑 (1,1) 形式构成。众所周知，若厄米度量 ω 满足 $d\omega = 0$ ，则称其为 K¨ahler 度量；若复流形 X 上存在 K¨ahler 度量，则称其为 K¨ahler 流形。同时，局部共形 K¨ahler（lcK）流形这一概念由 I. Vaisman 于 [Vai76] 中提出。lcK 流形有几种等价定义。本文采用的定义规定，若复流形 X 上存在 lcK 度量，则称其为 lcK 流形；而若厄米度量 ω 定义在 X 上，且存在一个 C^∞1-形式 θ ，使得 X 上有 $d\theta = 0$ ，则称其为 lcK 度量，并且

$$d\omega = \omega \wedge \theta.$$

若该 1-形式 θ 存在，则它是唯一的，称为 ω的李形式。关于局部共形 Kähler 流形的等价定义，读者可参阅例如 [OV22]中的定义 3.18 和 3.29。

局部共形 Kähler 流形理论的早期结果之一是 Vaisman 定理：紧 K¨ahler 流形上的任何局部共形凯勒度量实际上都是整体共形 K¨ahler 的。Preda 和 Stanciu 在 [PS22]中将该定理推广到了带奇点的紧复空间。

关于给定紧复流形 X 何时存在局部共形凯勒度量的问题，已有大量研究。例如，Oti man 根据流刻画了具有指定李形式的此类度量何时存在：给定 X 上的一个 d-闭 1-形式 θ ，并考虑相应的扭曲算子 $d_\theta = d + \theta\wedge\cdot$， [Oti14] 中的定理 2.1 指出， X 存在李形式为 θ 的局部共形凯勒度量，当且仅当 X 上不存在非平凡的正 (1,1) 流，且这些流是d_θ-边界的 (1, 1) 分量。

另一方面，Istrati 研究了紧复流形上特殊局部共形凯勒度量的存在性与该流形的全纯自同构群之间的关系。具体而言，根据 [Ist19], 中的定理0.2，若一个紧局部共形 Kähler流形 X 的全纯自同构群 X 包含一个并非纯实的环面 $\mathbb{T}$ ，则该流形 $\mathbb{T}$ 具有一个 Vaisman度量。一个紧环面 $\mathbb{T}$ 的

紧复流形的全纯自同构群（X, J）被称为纯实的（按照 [Ist19] 中定义0.1的第（1）条），如果其李代数 $\mathfrak{t}$ 满足条件 $\mathfrak{t} \cap J\mathfrak{t} = 0$，其中 J 是 X的复结构。回顾一下，若一个局部共形凯勒度量 ω 满足 $\nabla^\omega \theta = 0$，则称其为 Vaisman度量，其中 θ 是 ω 的李形式， ∇^ω 是由 ω确定的 Levi-Civita联络。

本文针对紧复 n 维流形 X 上局部共形凯勒度量是否存在这一问题，提出了一种解析方法。给定 X 上任意一个厄米度量 ω ，Lefschetz 分解

$$d\omega = (d\omega)_{prim} + \omega \wedge \theta_\omega$$

的 $d\omega$ 可唯一分解为 ω-本原部分和一个可被 ω 整除的部分，且相应的商1-形式唯一确定 θ_ω（即 ω的李形式），由此得到以下二分情形（参见引理2.2）：

(i) 要么 $n = 2$，此时 $(d\omega)_{prim} = 0$ ，但李形式 θ_ω 不一定是 d-闭的，因此 ω 上的局部共形凯勒条件等价于 $d\theta_\omega = 0$。事实证明，这又等价于 $\partial\theta^{1,0}_\omega = 0$。因此，在这种情况下，我们将泛函 $L : \mathcal{H}_X \longrightarrow [0, +\infty)$ 定义为

$$L(\omega) = ||\partial\theta^{1,0}_\omega||^2_\omega,$$

即其在每个 厄米度量 ω 上的取值定义为 $\partial\theta^{1,0}_\omega$ 的平方 L^2_ω-范数, ω .

(ii) 或 $n \geq 3$，在此情况下， ω 上的局部共形凯勒条件等价于消失条件 $(d\omega)_{prim} = 0$。这又等价于 $(\partial\omega)_{prim}$ 或 $(\bar{\partial}\omega)_{prim}$中的任一个消失。因此，我们将此情况下的泛函 $L : \mathcal{H}_X \longrightarrow [0, +\infty)$ 定义为

$$L(\omega) = ||(\bar{\partial}\omega)_{prim}||^2_\omega,$$

即，对于 X 上的每个厄米度量 ω ，其值定义为 ω 的 (1, 2)-形式 $\partial\omega$的本原部分的平方 L^2_ω-范数。

在 [Vai90], Vaisman 在复维数 2 的情形下考察了两个泛函，其中一个是我们用于 L 复曲面的泛函的一个变体。事实上，它与我们在引理的证明中考察的辅助泛函3.2完全一致。Vaisman 计算了其泛函的一阶和二阶变分，但他采用的方法与我们不同。据我们所知，在复维数 > 2下，尚无与我们的泛函类似的对象。

本文的主要结果是分别计算我们的泛函在 L 各个情形下的 $n = 2$ 一阶变分（参见定理4.4）以及 $n \geq 3$ （参见定理5.1）。由此，我们推出欧拉-拉格朗日方程（参见推论4.5 和5.2）。关于 $n = 2$ 的方程在[Vai90], 中有一个类似形式，而关于 $n \geq 3$ 的方程似乎完全是新的。

虽然泛函 L 在 $n = 2$时具有尺度不变性，但当 $n \geq 3$时则不再如此。在后一种情形下，我们通过两种方式证明其等价性：一种是作为我们泛函一阶变分公式的推论（参见命题5.4），另一种则直接由泛函沿缩放方向的行为得到（参见命题6.2）：

ω 是泛函 L 的临界点，当且仅当 ω 是局部共形 Kähler。

˜仍在 $n \geq 3$这一情形下，我们在定义6.5 中引入泛函 L_ρ 的一个归一化版本 L˜，它依赖于任意给定的背景厄米度量 ρ。随后，命题 L_ρ 6.6 中的一阶变分由定理 L 5.1中对 ρ所作的类似计算推导得出。我们提出这种归一化方式的一个动机，是关于（可能平衡且可能变化的）度量的猜想：该猜想预言，在紧复流形上，平衡度量与局部共形凯勒度量同时存在，应当意味着凯勒度量的存在。我们希望今后能够进一步发展这一思路。¨

在 §.6 的结尾，我们使用尺度不变泛函 L （适用于紧复˜曲面）和 L_ρ （适用于高维紧复流形）构造正 (1,1) 流；这些流不满足本原形式或严格正的条件，可能构成局部共形凯勒度量存在性的障碍。

致谢。本文是第二作者在第一作者指导下完成的学位论文的一部分。第二作者谨此感谢第一作者始终如一的支持。两位作者衷心感谢审稿人认真阅读本文并提出有益的意见和建议，也感谢其指出文献 [Vai90] ；作者在撰写本文初稿时遗憾地未曾注意到这篇文献。

2 预备知识

本节将一些标准内容用本原形式的语言重新表述，并作若干观察，这些内容将在后续各节中用到。

设 X 是一个复流形，其维数为 $\dim_{\mathbb{C}} X = n$。我们用以下符号表示：

(i) $C_k^\infty(X, \mathbb{C})$，分别表示 X上次数为 k的 C^∞ 微分形式空间，以及双次数为(p, q)的微分形式空间。当这些形式 α 为实（即满足 $\overline{\alpha} = \alpha$）时，相应的空间分别记为 $C_k^\infty(X, \mathbb{R})$和$C_{p,\ q}^\infty(X, \mathbb{R})$。

(ii) $\Lambda^k T^\star X$和 $\Lambda^{p,\ q} T^\star X$，分别表示次数为 k以及双次数为(p, q)的微分形式向量丛，以及逐点考虑的这类形式空间。

对于任意(1, 1)形式 $\rho \geq 0$，我们还将使用以下记号：

$$\rho_k := \frac{\rho^k}{k!}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

当 $\rho = \omega$ 为 C^∞ 且正定时（即 ω 是 X上的厄米度量），可以立即验证

$$d\omega_k = \omega_{k-1} \wedge d\omega \quad \text{and} \quad \star_\omega \omega_k = \omega_{n-k}$$

对所有 $1 \leq k \leq n$，其中 $\star = \star_\omega$ 是由 ω诱导的霍奇星算子 .

回顾以下标准

定义 2.1 若复流形 X 上的正定 (1,1) 形式（即厄米度量） ω 局部共形 K¨ahler（lcK），则称其为局部共形 Kähler 度量，当且仅当

$$d\omega = \omega \wedge \theta \quad \textit{for some } C^\infty \textit{ 1-form } \theta \textit{ satisfying } d\theta = 0.$$

The 1-形式 θ 是唯一确定的实形式，称为 ω的李形式 .

（A）厄米几何预备知识

•回顾一下 对于任意 $k \leq n$ 以及 X上的任意厄米度量 ω，乘法映射

$$L_\omega^l = \omega^l \wedge \cdot : \Lambda^k T^\star X \longrightarrow \Lambda^{k+2l} T^\star X$$

在 X 的每个点定义；当 $l = n-k$时它是一个同构，对于每个 $l < n-k$ 它是单射（但一般不是满射），对于每个 $l > n-k$它是满射（但一般不是单射）。如果一个 k-形式属于乘法映射 L_ω^{n-k+1} 的核，则称其为 ω-primitive。等价地， ω-primitive k-形式恰好是属于以下映射的核的那些形式： $\Lambda^k T^\star X \longrightarrow \Lambda^{k-2} T^\star X$，Lefschetz 算子 $L_\omega = \omega \wedge \cdot$ 关于逐点内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ 的伴随（因此也是关于 L^2-内积 $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_\omega$的伴随）： $\Lambda^k T^\star X \longrightarrow \Lambda^{k+2} T^\star X$。

• 还要回顾一下，对于每个 $k \leq n$，每个 k-形式 α 都存在唯一的 $\langle\ ,\ \rangle_\omega$-正交逐点分解（称为 Lefschetz 分解）：

$$\alpha = \alpha_{prim} + \omega \wedge \beta_{prim}^{(1)} + \omega^2 \wedge \beta_{prim}^{(2)} + \cdots + \omega^r \wedge \beta_{prim}^{(r)}, \tag{1}$$

其中， r 是满足以下条件的最大非负整数： $2r \leq k$, α_{prim}, $\beta_{prim}^{(1)}, \ldots, \beta_{prim}^{(r)}$ 是 ω-本原形式，其次数依次为 $k, k-2, \ldots, k-2r \geq 0$；而 $\langle\ ,\ \rangle_\omega$ 是由 ω定义的逐点内积。我们将 α_{prim} 称为 α的本原部分。

• 以下一般公式（例如参见 [Voi02，命题 6.29，第 150] 页）适用于任意复 n 维流形上任意双次数为（p, q）的本原形式 v，将会非常有用：

$$\star\, v = (-1)^{k(k+1)/2}\, i^{p-q}\, \omega_{n-p-q} \wedge v, \quad \text{where } k := p+q, \tag{2}$$

• 我们将经常使用标准记号 $[A, B] := AB - (-1)^{ab} BA$，其中 A 和 B 是任意的线性算子，次数分别为 a 和 b，作用于 X的微分形式。以下公式（例如参见 [Dem97，VI， §5.2，推论 5.9]）将会多次派上用场：

$$[\Lambda_\omega,\, L_\omega] = (n-k)\,\mathrm{Id} \tag{3}$$

当作用于 k上的 X形式时。

•最后，回顾厄米交换关系：

$$i[\Lambda_\omega,\, \partial] = -(\bar\partial_\omega^\star + \bar\tau_\omega^\star) \tag{4}$$

在 [Dem84], 中证明，其中 $\tau_\omega := [\Lambda_\omega,\, \partial\omega \wedge \cdot]$ 是阶数为 0、双次数为 (1, 0) 的挠率算子。 τ_ω 的这一定义给出

$$\bar\tau_\omega^\star \omega = [(\bar\partial\omega \wedge \cdot)^\star, L_\omega](\omega) = (\bar\partial\omega \wedge \cdot)^\star(\omega^2).$$

•另一方面，若 $\alpha^{1,0}$ 是 X 上任意一个 (1, 0)-形式，令 $\xi_{\alpha^{1,0}}$ 为由条件 $\xi_{\alpha^{1,0}} \lrcorner \omega = \alpha^{1,0}$ 定义的 (1, 0)-向量场。若设 $\alpha^{0,1} := \alpha^{1,0}$，则有 $\xi_{\alpha^{1,0}} = \xi_{\alpha^{0,1}}$，其中 $\xi_{\alpha^{0,1}}$ 是由条件 $\bar{\xi}_{\alpha^{0,1}} \lrcorner \omega = \alpha^{0,1}$ 定义的 (0,1)-向量场。

容易验证，在给定点 x 附近选取局部坐标，使度量 ω 在 x处由单位矩阵给出，则相对于 $\langle , \rangle_\omega$，由 $-\xi_{\alpha^{1,0}} = \xi_{\alpha^{0,1}}$ 作用的收缩算子的伴随由下列公式给出

$$(\bar{\xi}_{\alpha^{1,0}} \lrcorner \cdot)^\star = (\xi_{\alpha^{0,1}} \lrcorner \cdot)^\star = -i\alpha^{0,1} \wedge \cdot, \quad \text{or equivalently} \quad -i\bar{\xi}_{\alpha^{1,0}} \lrcorner \cdot = -i\xi_{\alpha^{0,1}} \lrcorner \cdot = (\alpha^{0,1} \wedge \cdot)^\star. \tag{5}$$

取共轭后，得到:

$$(\xi_{\alpha^{1,0}} \lrcorner \cdot)^\star = i\alpha^{1,0} \wedge \cdot, \quad \text{or equivalently} \quad i\xi_{\alpha^{1,0}} \lrcorner \cdot = (\alpha^{1,0} \wedge \cdot)^\star. \tag{6}$$

具体而言，若 $\alpha^{0,1} = \sum_k \bar{a}_k d\bar{z}_k$ 在 x的一个邻域内成立，则 $-i\bar{\xi}_\alpha \lrcorner \cdot = (\alpha^{0,1} \wedge \cdot)^\star = \sum_k a_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \lrcorner \cdot$ 在x处成立。因此，$-i\bar{\xi}_\alpha \lrcorner \alpha^{0,1} = \sum |a_k|^2 = |\alpha^{0,1}|^2_\omega$ 在 x处成立。由此得到逐点公式：

$$-i\bar{\xi}_\alpha \lrcorner \alpha^{0,1} = |\alpha^{0,1}|^2_\omega = |\alpha^{1,0}|^2_\omega \tag{7}$$

在 X的每一点处。

（B）局部共形 Kähler 几何预备知识

现在，假设 $d\omega = \omega \wedge \theta_\omega$ 对于某个（必为实的）1-形式 θ_ω成立。那么，$\bar{\partial}\omega = \omega \wedge \theta^{0,1}_\omega$，因此 $\bar{(\partial\omega \wedge \cdot)^\star} = -i\Lambda_\omega(\xi_\theta \lrcorner \cdot)$，其中 $\xi_\theta := \xi_\alpha$ 且 $\alpha^{1,0} = \theta^{1,0}_\omega$。上述关于 $\bar{\tau}^\star_\omega\omega$的公式可改写为

$$\bar{\tau}^\star_\omega\omega = -i\Lambda_\omega(\bar{\xi}_\theta \lrcorner \omega^2) = -2i\Lambda_\omega(\omega \wedge (\bar{\xi}_\theta \lrcorner \omega)) = -2i[\Lambda_\omega, L_\omega](\bar{\xi}_\theta \lrcorner \omega) = -2i(n-1)\theta^{1,0}_\omega$$

本讨论的结论是，当 $d\omega = \omega \wedge \theta_\omega$时，公式（10）（将在下文的引理 2.2 的证明中给出）可化为

$$\theta^{1,0}_\omega = \frac{1}{n-1}\Lambda_\omega(\partial\omega) = \frac{1}{n-1}[\Lambda_\omega, \partial](\omega) = \frac{1}{n-1} i\bar{\partial}^\star_\omega\omega + \frac{1}{n-1} i\bar{\tau}^\star_\omega\omega = \frac{1}{n-1} i\bar{\partial}^\star_\omega\omega + 2\theta^{1,0}_\omega,$$

这相当于 $\theta^{1,0}_\omega = -\frac{1}{n-1} i\bar{\partial}^\star_\omega\omega$. 这就证明了（11）对任意 n成立，因此，若引理 9中的其他陈述已得到证明，则当 $n = 2$时，（2.2 ）也成立。

给定厄米度量 ω 是否为局部共形 Kähler 度量，取决于 $n = 2$ 还是 $n \geq 3$。

引理 2.2 设 X 为复流形，且 $\dim_{\mathbb{C}} X = n$。

（i）若 $n = 2$，则对任意厄米度量 ω，存在唯一的、可能不闭的 C^∞ 1-形式$\theta = \theta_\omega$，使得 $d\omega = \omega \wedge \theta$。因此，$\omega$ 是局部共形 Kähler 度量，当且仅当 θ_ω 是 d-闭的。

此外，对于任意厄米度量 ω，2-形式 $d\theta_\omega$ 是 ω-原始的，即 $\Lambda_\omega(d\theta_\omega) = 0$，或等价地，$\omega \wedge d\theta_\omega = 0$；而李形式是实的，其显式表达式如下：

$$\theta_\omega = \Lambda_\omega(d\omega). \tag{8}$$

或者，如果 $\theta_\omega = \theta^{1,0}_\omega + \theta^{0,1}_\omega$是将 θ_ω 分解为纯型分量的分解，我们有 e

$$\theta^{1,0}_\omega = \Lambda_\omega(\partial\omega) = -i\bar{\partial}^\star\omega \tag{9}$$

以及通过取共轭得到的 $\theta^{0,1}_{\omega} = \theta^{1,0}_{\omega}$ 的类似公式。

(*ii*) 若 $n \geq 3$，则对任意厄米度量 ω，存在唯一的 ω-原始 C^∞ 3-形式 $(d\omega)_{prim}$，以及唯一的 C^∞ 1-形式 $\theta = \theta_\omega$，使得 $d\omega = (d\omega)_{prim} + \omega \wedge \theta$。李形式为实形式，其显式表达式由下列公式给出

$$\theta_\omega = \frac{1}{n-1} \Lambda_\omega(d\omega). \tag{10}$$

此外，ω 是局部共形 Kähler，当且仅当 $(d\omega)_{prim} = 0$。

若 ω 是局部共形 Kähler，则

$$\theta^{1,0}_\omega = \frac{1}{n-1} \Lambda_\omega(\partial\omega) = -\frac{i}{n-1} \bar{\partial}^\star \omega \tag{11}$$

and 通过取共轭得到的类似公式对 $\theta^{0,1}_{\omega} = \theta^{1,0}_{\omega}$ 成立.

证明。(*i*) 当 $n = 2$ 时，映射 $\omega \wedge \cdot : \Lambda^1 T^\star X \longrightarrow \Lambda^3 T^\star X$ 在 X 的每一点都是同构。特别地，3-形式 $d\omega$ 是该映射下唯一一个 1-形式 θ 的像。

为证明 $d\theta$ 是原始形式，我们将 d 应用于恒等式 $d\omega = \omega \wedge \theta$，得到

$$0 = d^2\omega = d\omega \wedge \theta + \omega \wedge d\theta.$$

同时，将同一恒等式乘以 θ，可得 $d\omega \wedge \theta = \omega \wedge \theta \wedge \theta = 0$，因为 $\theta \wedge \theta = 0$，这是由于 θ 的次数为 1。因此，$\omega \wedge d\theta = 0$，这意味着 2-形式 $d\theta$ 是 ω-本原的。

为证明公式（8），我们对恒等式 Λ_ω 应用 $d\omega = \omega \wedge \theta$，得到

$$\Lambda_\omega(d\omega) = [\Lambda_\omega, L_\omega](\theta) = \theta,$$

其中我们用到了恒等式 $\Lambda_\omega(\theta) = 0$（基于双次数的理由）以及（3）（其中 $k = 1$ 且 $n = 2$）。

（*ii*）分解 $d\omega = (d\omega)_{prim} + \omega \wedge \theta$ 是相对于度量 $d\omega$ 的 Lefschetz 分解ω。应用 Λ_ω，得到 $\Lambda_\omega(d\omega) = [\Lambda_\omega, L_\omega](\theta) = (n-1)\theta$（应用（3）并取 $k = 1$，可得后一个恒等式），这就证明了（10）。

蕴含关系“ω 局部共形 Kähler $\implies (d\omega)_{prim} = 0$“可直接由定义得出。为证明反向蕴含，假设$(d\omega)_{prim} = 0$。我们需要证明 θ 是 d-闭的。根据假设，$d\omega = \omega \wedge \theta$，因此 $d\omega \wedge \theta = \omega \wedge \theta \wedge \theta = 0$ 且 $0 = d^2\omega = d\omega \wedge \theta + \omega \wedge d\theta$。于是，$\omega \wedge d\theta = 0$。现在，只要 $l \leq n - k$，用 ω^l 乘 k-形式就是单射。当 $n \geq 3$时，若取 $l = 1$ 和 $k = 2$，则可得用 ω 乘2-形式是单射。因此，恒等式 $\omega \wedge d\theta = 0$ 蕴含 $d\theta = 0$，所以 ω 是局部共形 Kähler。□

另一个标准观察是，Lefschetz 分解在共形缩放下具有良好的变换性质，因此局部共形 Kähler 性质得以保持。

引理 2.3 设 ω 为任意厄米度量，f 为紧致复 n 维流形 X 上任意光滑实值函数。若 $d\omega = (d\omega)_{prim} + \omega \wedge \theta_\omega$ 是关于度量 ω 的 $d\omega$ 的 Lefschetz 分解（约定当 $n = 2$ 时 $(d\omega)_{prim} = 0$），则

$$d(e^f\omega) = e^f(d\omega)_{prim} + e^f\omega \wedge (\theta_\omega + df) \tag{12}$$

是关于度量 $\widetilde{\omega}:=e^f\omega$ 的 $d(e^f\omega)$ 的 Lefschetz 分解。

因此， ω 是局部共形 Kähler，当且仅当 ω 的任意共形缩放 $e^f\omega$ 都是局部共形 Kähler，而李形式按 $\theta_{e^f\omega}=\theta_\omega+df$变换。特别地，当局部共形凯勒度量 ω在固定的共形类中变化时，李形式 θ_ω 在固定的德拉姆 1-类 $\{\theta_\omega\}_{DR}\in H^1(X,\mathbb{R})$中变化，该类称为与给定共形类相关联的 Lee 德拉姆类。此外，映射 $\omega\mapsto\theta_\omega$ 定义了给定共形类中的局部共形凯勒度量集合到相应 Lee 德拉姆类中元素集合的一个双射。

证明。求导可得 $d(e^f\omega)=e^fd\omega+e^f\omega\wedge df=e^f(d\omega)_{prim}+e^f\omega\wedge(\theta_\omega+df)$。同时，可以立即验证

$$\Lambda_{e^f\omega}=e^{-f}\Lambda_\omega,$$

因此，核 $\Lambda_{e^f\omega}=$核 Λ_ω。于是， ω-本原形式与 $\widetilde{\omega}$-本原形式一致。由于 $\Lambda_{\widetilde{\omega}}$与乘以任意实值函数的运算可交换， $e^f(d\omega)^{prim}$ 是 $\widetilde{\omega}$-本原的，因此（12）是 $d\widetilde{\omega}$ 关于 $\widetilde{\omega}$的 Lefschetz 分解。□

当 X 是紧的时，根据 [Gau77]，我们知道，每个厄米度量 ω 在 X 上都允许进行共形缩放（在正的乘法常数意义下唯一） $\widetilde{\omega}:=e^f\omega$ 使其成为Gauduchon 度量。这些度量的定义（参见 [Gau77]）要求 $\partial\bar\partial\widetilde{\omega}^{n-1}=0$，其中 n 是 X的复维数。结合引理2.3可知，在研究紧复流形上局部共形凯勒度量的存在性时，将范围限于 Gauduchon 度量并不会造成任何一般性的损失。

我们以如下关于曲面上 Gauduchon 度量及其李形式的刻画（参见 [AD15，引理 2.5]）结束对已知结果的回顾。看来在任意维数下，度量 ω 是 Gauduchon 度量当且仅当 $d^\star_\omega\theta_\omega=0$[1]，但我们将讨论限于二维情形。

引理 2.4 设 ω 是一个 复曲面 X 上的厄米度量。以下等价关系成立：

$$\partial\bar\partial\omega=0\quad(i.e.\ \omega\ is\ a\ Gauduchon\ metric)\quad\Longleftrightarrow\quad\bar\partial^\star_\omega\theta^{0,1}_\omega=0,$$

其中 $\theta^{0,1}_\omega$ 是 ω 的李形式 θ_ω 的 (0, 1) 型分量。

证明。我们借助厄米交换关系，给出一种不同于 [AD15] 中证明的方法。对恒等式 $\bar\partial\omega=\omega\wedge\theta^{0,1}_\omega$ 应用 ∂，并利用恒等式 $\partial\omega=\omega\wedge\theta^{1,0}_\omega$，可得

$$\partial\bar\partial\omega=\partial\omega\wedge\theta^{0,1}_\omega+\omega\wedge\partial\theta^{0,1}_\omega=\omega\wedge(\theta^{1,0}_\omega\wedge\theta^{0,1}_\omega+\partial\theta^{0,1}_\omega).$$

取 Λ_ω，可得

$$\Lambda_\omega(\partial\bar\partial\omega)=[\Lambda_\omega,L_\omega](\theta^{1,0}_\omega\wedge\theta^{0,1}_\omega+\partial\theta^{0,1}_\omega)+\omega\wedge\Lambda_\omega(\theta^{1,0}_\omega\wedge\theta^{0,1}_\omega+\partial\theta^{0,1}_\omega)=\Lambda_\omega(\theta^{1,0}_\omega\wedge\theta^{0,1}_\omega+\partial\theta^{0,1}_\omega)\,\omega,$$

其中，第二个恒等式由复曲面上 2-形式的 $[\Lambda_\omega,L_\omega]=-(2-2)\,\mathrm{Id}=0$ 得出。现在， $\Lambda_\omega(\theta^{1,0}_\omega\wedge\theta^{0,1}_\omega+\partial\theta^{0,1}_\omega)$ 是一个函数，因此由上述恒等式可得以下等价关系

$$\begin{aligned}\Lambda_\omega(\partial\bar\partial\omega)=0\quad&\Longleftrightarrow\quad\Lambda_\omega(\theta^{1,0}_\omega\wedge\theta^{0,1}_\omega+\partial\theta^{0,1}_\omega)=0\iff\theta^{1,0}_\omega\wedge\theta^{0,1}_\omega+\partial\theta^{0,1}_\omega\ \text{is }\omega\text{-primitive}\\&\Longleftrightarrow\quad\omega\wedge(\theta^{1,0}_\omega\wedge\theta^{0,1}_\omega+\partial\theta^{0,1}_\omega)=0\iff\partial\bar\partial\omega=0.\end{aligned}$$

[1]作者感谢审稿人指出这一事实。

我们记得等价关系 $\partial\bar{\partial}\omega = 0 \iff \Lambda_\omega(\theta^{1,0}_\omega \wedge \theta^{0,1}_\omega) + \Lambda_\omega(\partial\theta^{0,1}_\omega) = 0$。由于 $\Lambda_\omega(i\theta^{1,0}_\omega \wedge \theta^{0,1}_\omega) = |\theta^{1,0}_\omega|^2_\omega$（可直接验证），且 $\Lambda_\omega\theta^{0,1}_\omega = 0$（由双次数的原因），我们得到以下等价关系：

$$\partial\bar{\partial}\omega = 0 \iff |\theta^{1,0}_\omega|^2_\omega + i[\Lambda_\omega, \partial]\,\theta^{0,1}_\omega = 0.$$

厄米交换关系 $i[\Lambda_\omega, \partial] = -(\partial^\star_\omega + \bar{\tau}^\star_\omega)$（参见 4），见 [Dem84]）将最后一个等价关系变换为

$$\partial\bar{\partial}\omega = 0 \iff |\theta^{1,0}_\omega|^2_\omega - (\bar{\partial}^\star_\omega\theta^{0,1}_\omega + \bar{\tau}^\star_\omega\theta^{0,1}_\omega) = 0. \tag{13}$$

另一方面，$\bar{\tau}^\star_\omega = [(\partial\omega\wedge\cdot)^\star,\ \omega\wedge\cdot]$。由此得到

F公式 2.5 对于复曲面上的任意厄米度量 ω，有

$$\bar{\tau}^\star_\omega\theta^{0,1}_\omega = |\theta^{0,1}_\omega|^2_\omega.$$

公式 *2.5* 的证明。由于 $(\bar{\partial}\omega\wedge\cdot)^\star\theta^{0,1}_\omega = 0$根据双次数的原因，我们得到 $\bar{\tau}^\star_\omega\theta^{0,1}_\omega = (\bar{\partial}\omega\wedge\cdot)^\star(\omega\wedge\theta^{0,1}_\omega)$。由于 $\bar{\partial}\omega = \omega\wedge\theta^{0,1}_\omega$，我们有 $(\bar{\partial}\omega\wedge\cdot)^\star = -i\Lambda_\omega(\bar{\xi}_\theta\lrcorner\cdot)$（见（7）及其下方的讨论），其中$\bar{\xi}_\theta$ 是由条件 $\bar{\xi}_\theta\lrcorner\omega = \theta^{1,0}_\omega$定义的 (0,1)-向量场。因此

$$\bar{\tau}^\star_\omega\theta^{0,1}_\omega = -i\Lambda_\omega(\theta^{1,0}_\omega\wedge\theta^{0,1}_\omega) - i\Lambda_\omega[\omega\wedge(\bar{\xi}_\theta\lrcorner\theta^{0,1}_\omega)].$$

由于 $-i\bar{\xi}_\theta\lrcorner\theta^{0,1}_\omega = |\theta^{0,1}_\omega|^2_\omega$（参见（7）），我们推得

$$\bar{\tau}^\star_\omega\theta^{0,1}_\omega = -\Lambda_\omega(i\theta^{1,0}_\omega\wedge\theta^{0,1}_\omega) + 2\,|\theta^{0,1}_\omega|^2_\omega,$$

由于 $\Lambda_\omega(\omega) = n = 2$。同时，$\theta^{1,0}_\omega = \overline{\theta^{0,1}_\omega}$，因此得到 $\Lambda_\omega(i\theta^{1,0}_\omega\wedge\theta^{0,1}_\omega) = |\theta^{1,0}_\omega|^2_\omega = |\theta^{0,1}_\omega|^2_\omega$（在局部坐标中可直接验证）。公式 2.5 现已证明。□

引理 *2.4* 的证明结束。公式 2.5将等价关系（13）变为

$$\partial\bar{\partial}\omega = 0 \iff (|\theta^{1,0}_\omega|^2_\omega - |\theta^{0,1}_\omega|^2_\omega) - \bar{\partial}^\star_\omega\theta^{0,1}_\omega = 0 \iff \bar{\partial}^\star_\omega\theta^{0,1}_\omega = 0$$

至此证明完毕 □

3 研究局部共形凯勒度量的能量泛函

在下文中，我们将把注意力限制在集合

$$\mathcal{H}_X := \{\omega \in C^\infty_{1,1}(X, \mathbb{R}) \mid \omega > 0\}$$

X 上所有厄米度量的集合。这是无限维向量空间 $C^\infty_{1,1}(X, \mathbb{R})$ 中的一个非空开锥，该空间由 X 上所有光滑实（1,1）形式构成。它将称为 X 的 Hermitian 锥。

基于引理2.2，我们引入以下能量泛函。分别用 $||\ ||_\omega$和 $|\ |_\omega$表示 L^2-范数和逐点范数，它们定义为 ω。

定义 3.1 设 X 是一个紧复流形，其维数为 $_{\mathbb{C}}X = n$。

(*i*) 若 $n = 2$，则令 $L : \mathcal{H}_X \longrightarrow [0, +\infty)$ 定义为

$$L(\omega) := \int_X \partial\theta_\omega^{1,0} \wedge \bar{\partial}\theta_\omega^{0,1} = ||\partial\theta_\omega^{1,0}||_\omega^2,$$

其中 θ_ω 是 ω 的李形式。

(*ii*) 若 $n \geq 3$，则由以下方式定义 $L : \mathcal{H}_X \longrightarrow [0, +\infty)$

$$L(\omega) := \int_X i(\bar{\partial}\omega)_{prim} \wedge \overline{(\bar{\partial}\omega)_{prim}} \wedge \omega_{n-3} = ||(\bar{\partial}\omega)_{prim}||_\omega^2,$$

其中 $(\partial\omega)_{prim}$ 是 ω-本原部分 $\partial\omega$ 在其 Lefschetz 分解 (*1*) 中。

以下观察为这一定义提供了依据。

引理 3.2 在上述设定中　定义 *3.1*中，对于每个度量 $\omega \in \mathcal{H}_X$，以下等价关系成立：

$$\omega \quad is\ an\ lcK\ metric \iff L(\omega) = 0.$$

证明。 • 在 $n = 2$的情形下，由引理 i 的（i）可知， ω 是局部共形 Kähler 当且仅当 $d\theta_\omega = 0$。此条件等价于 $\mathcal{L}(\omega) = 0$，其中令

$$\mathcal{L}(\omega) := ||d\theta_\omega||_\omega^2 = \int_X d\theta_\omega \wedge \star(d\bar{\theta}_\omega).$$

我们还从引理 i 的（2.2 ）可知， $d\theta_\omega$ 是 ω-原始的，因此得到

$$0 = \Lambda_\omega(d\theta_\omega) = \Lambda_\omega(\partial\theta_\omega^{1,0}) + \Lambda_\omega(\partial\theta_\omega^{0,1} + \bar{\partial}\theta_\omega^{1,0}) + \Lambda_\omega(\bar{\partial}\theta_\omega^{0,1}) = \Lambda_\omega(\partial\theta_\omega^{0,1} + \bar{\partial}\theta_\omega^{1,0}),$$

最后一个等式由前一个等式根据双次数可得。我们推知，(1, 1) 次形式 $\partial\theta^{0,}{}_{\omega}{}^{1} + \bar{\partial}\theta^{1,}{}_{\omega}{}^{0}$是 ω-原始的。但根据双次数， $\partial\theta^{1,}{}_{\omega}{}^{0}$和 $\bar{\partial}\theta^{0,}{}_{\omega}{}^{1}$也都是原始的，因此我们可以应用标准公式（2），得到 $\star(d\theta_\omega) = \partial\theta^{1,}{}_{\omega}{}^{0} - (\partial\theta^{0,}{}_{\omega}{}^{1} + \partial\theta^{1,}{}_{\omega}{}^{0}) + \partial\theta^{0,}{}_{\omega}{}^{1}$. 我们推知

$$\begin{aligned} d\theta_\omega \wedge \star(d\bar{\theta}_\omega) &= [\partial\theta_\omega^{1,0} + (\partial\theta_\omega^{0,1} + \bar{\partial}\theta_\omega^{1,0}) + \bar{\partial}\theta_\omega^{0,1}] \wedge [\partial\theta_\omega^{1,0} - (\partial\theta_\omega^{0,1} + \bar{\partial}\theta_\omega^{1,0}) + \bar{\partial}\theta_\omega^{0,1}] \\ &= 2\,\partial\theta_\omega^{1,0} \wedge \bar{\partial}\theta_\omega^{0,1} - (\partial\theta_\omega^{0,1} + \bar{\partial}\theta_\omega^{1,0})^2 \end{aligned}$$

最后这一点

$$\mathcal{L}(\omega) = 2\,L(\omega) - \int_X (\partial\theta_\omega^{0,1} + \bar{\partial}\theta_\omega^{1,0})^2. \tag{14}$$

另一方面，斯托克斯公式推出以下第一个等式

$$\begin{aligned} 0 &= \int_X d\theta_\omega \wedge d\theta_\omega = \int_X [\partial\theta_\omega^{1,0} + (\partial\theta_\omega^{0,1} + \bar{\partial}\theta_\omega^{1,0}) + \bar{\partial}\theta_\omega^{0,1}] \wedge [\partial\theta_\omega^{1,0} + (\partial\theta_\omega^{0,1} + \bar{\partial}\theta_\omega^{1,0}) + \bar{\partial}\theta_\omega^{0,1}] \\ &= 2\,L(\omega) + \int_X (\partial\theta_\omega^{0,1} + \bar{\partial}\theta_\omega^{1,0})^2. \end{aligned} \tag{15}$$

由（14）和（15）可得 $\mathcal{L}(\omega)=0$ 当且仅当 $L(\omega)$。因此，我们证明了ω 是局部共形 Kähler，当且仅当 $L(\omega)=0$，如所声称。

恒等式 $L(\omega)=||\partial\theta^{1,\,0}_{\omega}||^2_{\omega}$ 可直接由应用于本原 (2, 0) 形式 $\partial\theta^{1,\,0}_{\omega}$的一般公式（2）得出。事实上，$\star\partial\theta^{1,\,0}_{\omega}=\partial\theta^{1,\,0}_{\omega}$，因此 $\partial\theta^{1,\,0}_{\omega}\wedge\bar\partial\theta^{0,\,1}_{\omega}=\partial\theta^{1,\,0}_{\omega}\wedge\star(\partial\theta^{1,\,0}_{\omega})=|\partial\theta^{1,\,0}_{\omega}|^2_{\omega}\,dV_\omega$。

- 在 $n\geq 3$ 的情形下，由引理 2.2 中的（ii）可知，ω 是局部共形 Kähler，当且仅当$(d\omega)_{prim}=0$。现在，$(d\omega)_{prim}=(\partial\omega)_{prim}+(\bar\partial\omega)_{prim}$，形式 $(\partial\omega)_{prim}$ 与 $(\bar\partial\omega)_{prim}$ 互为共轭且属于不同的纯型（分别为 (2, 1) 型和 (1, 2) 型），因此 $(d\omega)_{prim}$ 的消失等价于$(\partial\omega)_{prim}$ 的消失。

同时，将标准公式（2）应用于原始 (2，1)-形式$(\partial\omega)_{prim}=\overline{(\partial\omega)_{prim}}$可得：

$$\star\,\overline{(\bar\partial\omega)_{prim}}=i\,\overline{(\bar\partial\omega)_{prim}}\wedge\omega_{n-3}.$$

这证明了恒等式 $L(\omega)=||(\bar\partial\omega)_{prim}||^2_{\omega}$。

综合这些信息，我们得到以下等价关系：

$$\omega\ \text{ lcK}\iff(d\omega)_{prim}=0\iff(\bar\partial\omega)_{prim}=0\iff L(\omega)=0.$$

证明完毕。 □

4 泛函的一阶变分：复曲面的情形

设 S 是一个紧致复曲面。（因此，当 $n=2$时，我们令 $X=S$。）我们将计算定义在 S的 Hermitian 锥上的泛函 $L:\mathcal{H}_S\longrightarrow[0,+\infty)$ 的微分。设 $\omega\in\mathcal{H}_S$。那么，$T_\omega\mathcal{H}_S=C^\infty_{1,\,1}(S,\mathbb{R})$，因此我们将计算微分

$$d_\omega L:C^\infty_{1,\,1}(S,\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}$$

通过计算 $t=0$ 处 $L(\omega+t\gamma)$ 关于 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 的导数，其中 γ 为任意给定的实 (1, 1) 形式。

引理 4.1 映射 $\mathcal{H}_S\ni\omega\mapsto\theta^{0,\,1}_{\omega}=\Lambda_\omega(\bar\partial\omega)$ 在 ω处的微分为

$$(d_\omega\theta^{0,\,1}_{\omega})(\gamma)=\frac{d}{dt}_{|t=0}\Lambda_{\omega+t\gamma}(\bar\partial\omega+t\,\bar\partial\gamma)=\star(\gamma\wedge\star\bar\partial\omega)+\Lambda_\omega(\bar\partial\gamma),$$

而 L 在 ω 处的微分为

$$(d_\omega L)(\gamma)=2\,Re\int_S\partial\theta^{1,\,0}_{\omega}\wedge\bar\partial\Big(\star\,(\gamma\wedge\star\bar\partial\omega)+\Lambda_\omega(\bar\partial\gamma)\Big),$$

对于每个形式 $\gamma\in C^\infty_{1,1}(S,\mathbb{R})$，其中 $\star=\star_\omega$ 是由度量 ω 定义的霍奇星算子。

在给出此引理的证明之前，我们先回顾 [DP22] 中的以下结果，后文将多次用到。

引理 4.2（[DP22], 引理 3.5 和 3.3）对于任意维数为 $n \geq 2$ 的复流形 X，任意双次数 (p, q) 以及任意 C^∞ 形式族 $(\alpha_t)_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ $(X, \mathbb{C})^{\alpha_t \in C^\infty_{p,\ q}}$，只要 $\varepsilon > 0$ 足够小，使得对所有 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 都有 $\omega + t\gamma > 0$，以下公式成立：

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\Lambda_{\omega+t\gamma}\alpha_t) = \Lambda_\omega\left(\frac{d\alpha_t}{dt}\Big|_{t=0}\right) - (\gamma\wedge\cdot)^\star_\omega\,\alpha_0 = \Lambda_\omega\left(\frac{d\alpha_t}{dt}\Big|_{t=0}\right) + (-1)^{p+q+1}\ \star_\omega(\gamma\wedge\star_\omega\alpha_0).$$

上述等式中的前一个以原样出现在 [DP22], 的引理 3.5 中，而后一个等式则由前一个等式以及 [DP22] 的引理 3.3 中的公式（27）推出，该公式指出，对于 X上的任意 $(1, 1)$形式 η，有$\star_\omega(\eta\wedge\cdot) = (\overline{\eta}\wedge\cdot)^\star_\omega\star_\omega$。事实上，在我们的情形下，取 $\eta = \gamma$ 可得$\bar\eta = \gamma$，因为 γ 是实的。此外，在右侧复合 $\star_\omega$ 并使用标准等式 $\star_\omega\star_\omega = (-1)^{p+q}$Id（作用于$(p, q)$形式）后，我们得到 $\star_\omega(\gamma\wedge\cdot)\star_\omega = (-1)^{p+q}(\gamma\wedge\cdot)^\star_\omega$（作用于$(p, q)$形式）。

引理的证明 *4.1*。 关于 $(d_\omega\theta^{0,\ 1}_\omega)(\gamma)$ 的公式可由引理 4.2 应用$^-$ $^-$并令 $\alpha_t = \partial\omega + t\,\partial\gamma$ (因此也可令 $(p, q) = (1, 2)$) 直接推出。进一步可得：

$$\begin{aligned}(d_\omega L)(\gamma) &= \frac{d}{dt}_{|t=0} L(\omega + t\gamma) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\int_S \partial\theta^{1,0}_{\omega+t\gamma}\wedge\bar\partial\theta^{0,1}_{\omega+t\gamma}\\ &= \int_S \partial\Big(\star\,(\gamma\wedge\star\partial\omega) + \Lambda_\omega(\partial\gamma)\Big)\wedge\bar\partial\theta^{0,\ 1}_\omega + \int_S \partial\theta^{1,\ 0}_\omega\wedge\bar\partial\Big(\star\,(\gamma\wedge\star\bar\partial\omega) + \Lambda_\omega(\bar\partial\gamma)\Big).\end{aligned}$$

这就是 $(d_\omega L)(\gamma)$ 的公式，因为右端表达式的两项互为共轭。□

现在，我们先作一个初步观察，以简化上述 $(d_\omega L)(\gamma)$ 的表达式。

引理 4.3 设 (X, ω) 是一个 n 维复厄米流形，并设 $\star = \star_\omega$ 是由 ω 定义的霍奇星算子。

(i) 对于 X 上的任意 $(0, 1)$形式 α，有：

$$\star(\alpha\wedge\omega) = i\Lambda_\omega(\alpha\wedge\omega_{n-1}).$$

此外，若 $n = 2$，则对于 X 上任意的 $(0, 1)$形式 α，有 $\star(\alpha\wedge\omega) = i\alpha$。

(ii) 若 $n = 2$，则对于 X 上任意的 $(1, 1)$形式 γ 和任意的 $(0, 1)$形式 α，有 $\star(\gamma\wedge\alpha) = i\Lambda_\omega($ $\gamma\wedge\alpha)$。特别地，对于复曲面上的任意厄米度量 ω，有 $\star\bar\partial\omega = i\theta^{0,\ 1}_{,\ \omega}$

（iii）对于任意维数 n，对 X 上任意 $(1, 1)$形式 γ 和 $(0, 1)$形式 α，我们有：

$$\Lambda_\omega(\gamma\wedge\alpha) = (\Lambda_\omega\gamma)\,\alpha + i\,\xi_\alpha\lrcorner\gamma,$$

其中，ξ_α 是由该条件定义的（唯一）$(1, 0)$ 型向量场

$$\xi_\alpha\lrcorner\omega = i\alpha.$$

证明。（i）由标准公式 $\star\Lambda_\omega = L_\omega\star$（参见例如 [Dem97, VI, §.5.1]）可得

$\Lambda_\omega = \star L_\omega\star$ 作用于偶数次形式， $\Lambda_\omega = -\star L_\omega\star$ 作用于奇数次形式。

因此， $\star(\alpha\wedge\omega) = \star L_\omega\alpha = -(\star L_\omega\star)\star\alpha = \Lambda_\omega(\star\alpha) = \Lambda_\omega(-(1/i)\,\alpha\wedge\omega^{n-1}/(n-1)!$ 其中，我们用到了如下事实： $\star\star = -1$ 作用于奇数次形式，以及将标准公式（2）应用于（必然是本原的）（0, 1）形式 α。

当 $n = 2$时，利用 $[L_\omega, \Lambda_\omega] = (k-n)$这一适用于复维数为 n的复流形上 k-形式的一般公式，可得 $\star(\alpha\wedge\omega) = i\Lambda_\omega(\alpha\wedge\omega) = i[\Lambda_\omega, L_\omega]\,\alpha = -i(1-2)\,\alpha = i\alpha$。

(*ii*) 若 $n = 2$，则映射 $\omega\wedge\cdot\colon \Lambda^1T^\star X \longrightarrow \Lambda^3T^\star X$ 在 X 的每一点处都是同构。由于 $\gamma\wedge\alpha$ 是一个 3-形式，存在唯一的 1-形式 β（必为 (0, 1) 型），使得 $\gamma\wedge\alpha = \omega\wedge\beta$。此外， $\beta = \Lambda_\omega(\gamma\wedge\alpha)$，因为 $\omega\wedge\Lambda_\omega(\gamma\wedge\alpha) = [L_\omega, \Lambda_\omega](\gamma\wedge\alpha) = \gamma\wedge\alpha$。事实上， $\omega\wedge(\gamma\wedge\alpha) = 0$，这是由双次数的原因所致（这里 $n = 2$），而且 $[L_\omega, \Lambda_\omega] = (k-n)$ 作用于 k-形式上。

因此， $\gamma\wedge\alpha = \omega\wedge\Lambda_\omega(\gamma\wedge\alpha)$。于是，对下面第二个等式应用 (*i*)，得到:

$$\star(\gamma\wedge\alpha) = \star\Big(\omega\wedge\Lambda_\omega(\gamma\wedge\alpha)\Big) = i\Lambda_\omega(\gamma\wedge\alpha).$$

T为得到最后一个等式，我们对 $n = 2$ 使用 (i)，并将 α 替换为 $\Lambda_\omega(\gamma\wedge\alpha)$.

I为了证明 $\star\bar\partial\omega$ 的公式，回想 $\bar\partial\omega = \omega\wedge\theta^{0,\,1}_\omega$，于是得到

$$\star\bar\partial\omega = \star(\omega\wedge\theta^{0,\,1}_\omega) = i\theta^{0,\,1}_\omega,$$

这里我们再次对 $n = 2$ 使用 (i)，并将 α 替换为 $\theta^{0,\,1}_\omega$。

(*iii*) 由于所述恒等式是逐点成立的，且只涉及零阶算子，我们固定任意一点 $x\in X$，并在 x 附近选取局部全纯坐标，使得在 x 处有

$$\omega = \sum_{a=1}^n i dz_a\wedge d\bar z_a \quad\text{and}\quad \gamma = \sum_{j=1}^n \gamma_{j\bar j}\, i dz_j\wedge d\bar z_j.$$

于是，$\Lambda_\omega = -i\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial\bar z_j}\lrcorner\frac{\partial}{\partial z_j}\lrcorner\cdot$ 在 x 处。若令 $\alpha = \sum_{j=1}\alpha_j\,d\bar z_j$（在任意一点处），则得到 $\xi_\alpha = \sum_{j=1}\alpha_j\frac{\partial}{\partial z_j}$（在 x 处）以及以下等式（在 x 处）：

$$\begin{aligned}
\Lambda_\omega(\gamma\wedge\alpha) &= -i\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial\bar z_j}\lrcorner\frac{\partial}{\partial z_j}\lrcorner(\gamma\wedge\alpha) \overset{(a)}{=} -i\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial\bar z_j}\lrcorner\left(\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\lrcorner\gamma\right)\wedge\alpha\right)\\
&= -i\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial\bar z_j}\lrcorner\frac{\partial}{\partial z_j}\lrcorner\gamma\right)\wedge\alpha + i\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\lrcorner\gamma\right)\wedge\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_j}\lrcorner\alpha\right)\\
&\overset{(b)}{=} \left(\sum_{j=1}^n\gamma_{j\bar j}\right)\alpha - \sum_{j=1}^n\alpha_j\gamma_{j\bar j}\,d\bar z_j = (\Lambda_\omega\gamma)\,\alpha + i\xi_\alpha\lrcorner\gamma,
\end{aligned}$$

其中，(a) 由 $(\partial/\partial z_j)\lrcorner\alpha = 0$ 根据双次数的原因得出，而 (b) 由 $(\partial/\partial z_j)\lrcorner\gamma = i\gamma_{j\bar j}\,d\bar z_j$ 和 $(\partial/\partial\bar z_j)\lrcorner\alpha = \alpha_j$ 得出。

This 证明了在 x 处所需的等式，因此在任意点处也成立，因为 x 是任意的 . □

We 现在可以推导出泛函 L 的一阶变分的简化形式 .

定理 4.4 设 S 是一个已固定厄米度量 ω 的紧致复曲面。

(*i*) 泛函 L 在 $\omega \in \mathcal{H}_S$ 处的微分： $\mathcal{H}_S \longrightarrow [0, +\infty)$ 在任意形式$\gamma \in C^{\infty}_{1,1}(S, \mathbb{R})$ 处的取值可由以下三个公式中的任意一个给出：

$$
\begin{aligned}
(d_\omega L)(\gamma) &= -2\,Re \int_S \Lambda_\omega(\gamma)\,\partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial\theta^{0,1}_\omega - 2\,Re \int_S \partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial\Lambda_\omega(\gamma) \wedge \theta^{0,1}_\omega + 2\,Re \int_S \partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial\Lambda_\omega(\bar\partial\gamma) \\
&\quad -2\,Re \int_S i\partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial(\xi_{\theta^{0,1}_\omega} \lrcorner \gamma) \qquad (16) \\
&= -2\,Re \int_S \Lambda_\omega(\gamma)\,|\partial\theta^{1,0}_\omega|^2_\omega\, dV_\omega - 2\,Re \int_S \partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial\Lambda_\omega(\gamma) \wedge \theta^{0,1}_\omega - 2\,Re\, i\langle\langle \partial\bar\partial\theta^{1,0}_\omega,\, \partial\gamma\rangle\rangle_\omega \\
&\quad -2\,Re \int_S i\partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial(\xi_{\theta^{0,1}_\omega} \lrcorner \gamma) \qquad (17) \\
&= -2\,Re \int_S \partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial\Lambda_\omega(\gamma \wedge \theta^{0,1}_\omega) - 2\,Re\, i\langle\langle \partial\bar\partial\theta^{1,0}_\omega,\, \partial\gamma\rangle\rangle_\omega, \qquad (18)
\end{aligned}
$$

其中， $\star = \star_\omega$ 是由度量 ω 定义的霍奇星算子，而 $\xi_{\theta^{0,1}_\omega}$ 是由条件 $\xi_{\theta^{0,1}_\omega} \lrcorner \omega = i\theta^{0,1}_\omega$ 确定的 (1, 0) 型向量场。

(*ii*) 特别地，对于任意给定的 $\omega \in \mathcal{H}_S$，若取 $\gamma = \partial\theta^{0,1}_\omega + \bar\partial\theta^{1,0}_\omega$，则有

$$
(d_\omega L)(\gamma) = -2\,Re \int_S i\partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial\Big(\xi_{\theta^{0,1}_\omega} \lrcorner \gamma\Big) = -2\,Re \int_S \partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial\Lambda_\omega(\gamma \wedge \theta^{0,1}_\omega).
$$

证明。 (*i*) 由引理 4.3 中的（*ii*）和（*iii*），取 $\alpha := i\theta^{0,1}_\omega$，可得

$$
\star(\gamma \wedge \star\bar\partial\omega) = \star(\gamma \wedge i\theta^{0,1}_\omega) = i\,\Lambda_\omega(\gamma \wedge i\theta^{0,1}_\omega) = -\Lambda_\omega(\gamma)\,\theta^{0,1}_\omega - i\xi_{\theta^{0,1}_\omega} \lrcorner \gamma.
$$

公式（16）由此及引理 4.1 得出。

为得到（17），我们首先注意到 $\bar\partial\theta^{0,1}_\omega = \star\bar\partial\theta^{0,1}_\omega$，根据标准公式（2），应用于（必为原始的）(0, 2) 形式 $\bar\partial\theta^{0,1}_\omega$。这给出了（17）右侧的第一项。接着，我们将（16）右侧的第三项作如下变换：

$$
\begin{aligned}
2\,\mathrm{Re} \int_S \partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial\Lambda_\omega(\bar\partial\gamma) &\overset{(a)}{=} -2\,\mathrm{Re} \int_S \partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial \star L_\omega \star (\bar\partial\gamma) \overset{(b)}{=} 2\,\mathrm{Re} \int_S \bar\partial\partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \star(\omega \wedge \star(\bar\partial\gamma)) \\
&\overset{(c)}{=} 2\,\mathrm{Re}\, i \int_S \bar\partial\partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \star(\bar\partial\gamma) \overset{(d)}{=} 2\,\mathrm{Re}\, i \int_S \langle\bar\partial\partial\theta^{1,0}_\omega,\, \partial\bar\gamma\rangle_\omega\, dV_\omega,
\end{aligned}
$$

其中，我们使用奇数次形式上的标准恒等式 $\Lambda_\omega = -\star L_\omega\star$ 得到 (a)，使用斯托克斯定理得到 (b)，使用引理 *i*的第 (4.3) 部分得到 (c)，并使用 $\star$ 的定义得到 (d)。最后，我们回顾一下， $\bar\gamma = \gamma$因为 γ 是实的。

最后，（18）由引理 4.1 在使用等式 $\star\,(\gamma \wedge \star\bar\partial\omega) = -\Lambda_\omega\,(\gamma \wedge \theta^{0,1}_\omega)$ 后得到（该等式已在（16）的证明中出现），并且将（16）中的第三项按照我们在（17）的证明中所做的那样进行变换即可。

（ii）所述的 γ 的选取意味着， γ 是本原2-形式 $d\theta_\omega$的（$d\theta_\omega$）^{1,1} 型（1，1）分量。（关于本原性陈述，请参见引理 2.2 中的（i）。由于出于双次数的原因， Λ_ω（（$d\theta_\omega$）^{2,0}）$=0$ 以及Λ_ω（（$d\theta_\omega$）^{0,2}）$=0$，我们推得

$$\Lambda_\omega(\gamma)=\Lambda_\omega((d\theta_\omega)^{1,1})=\Lambda_\omega(d\theta_\omega)=0.$$

因此，等式（17）右侧的前两个积分为零。

同时，为了处理等式（17）右侧的第三个积分，我们注意到 $\partial\bar\gamma=\partial\bar\partial\theta^{1,0}_\omega$由此得到下面的第二个等式:

$$2\,\mathrm{Re}\int_S\partial\theta^{1,0}_\omega\wedge\bar\partial\Lambda_\omega(\bar\partial\gamma)=2\,\mathrm{Re}\,i\int_S\langle\bar\partial\partial\theta^{1,0}_\omega,\,\partial\bar\gamma\rangle_\omega\,dV_\omega=-2\,\mathrm{Re}\,i||\bar\partial\partial\theta^{1,0}_\omega||^2_\omega=0,$$

上面的第一个等式由（17）的证明得出。

因此，对于 $d_\omega L(\gamma)$，公式（17）右侧化简为在此 γ取值下的最后一个积分。这就证明了第一个所声称的等式。

出于与上文相同的原因，对于 $d_\omega L(\gamma)$，公式（18）右侧的后一项为零。这就证明了第二个所声称的等式。 □

作为定理 4.4（i）的一项初步应用，我们推导出维数 2 下该泛函的欧拉-拉格朗日方程。下一个结果可与 [Vai90]中的公式 (2.15) 进行比较。

推论 4.5 设 S 是一个紧致复 曲面。泛函 欧拉-拉格朗日方程 对应于在定义 L 3.1 的 (i) 中引入的泛函 *3.1* 为

$$\xi_{\theta^{1,0}_\omega}\lrcorner\bar\partial\partial\theta^{1,0}_\omega+\xi_{\theta^{0,1}_\omega}\lrcorner\partial\bar\partial\theta^{0,1}_\omega-i\partial^\star\partial\bar\partial\theta^{1,0}_\omega+i\bar\partial^\star\bar\partial\partial\theta^{0,1}_\omega=0.$$

证明。 • 我们将使用公式（18）。其右端的第二项为

$$-2\mathrm{Re}\,i\langle\langle\partial\bar\partial\theta^{1,0}_\omega,\,\partial\gamma\rangle\rangle_\omega=\langle\langle-i\partial^\star\partial\bar\partial\theta^{1,0}_\omega+i\bar\partial^\star\bar\partial\partial\theta^{0,1}_\omega,\,\gamma\rangle\rangle_\omega \tag{19}$$

对每个实值 (1, 1)-形式 γ。

• 公式（18）右端第一项中的积分为

$$\begin{aligned}\int_S\partial\theta^{1,0}_\omega\wedge\bar\partial\Lambda_\omega(\gamma\wedge\theta^{0,1}_\omega)&\overset{(a)}{=}\int_S\partial\theta^{1,0}_\omega\wedge\star\Big(\bar\partial\Lambda_\omega(\gamma\wedge\theta^{0,1}_\omega)\Big)=\langle\langle\partial\theta^{1,0}_\omega,\,\partial\Lambda_\omega(\gamma\wedge\theta^{1,0}_\omega)\rangle\rangle_\omega\\&\overset{(b)}{=}-\langle\langle\star\bar\partial\star\partial\theta^{1,0}_\omega,\,\Lambda_\omega(\gamma\wedge\theta^{1,0}_\omega)\rangle\rangle_\omega\overset{(c)}{=}-\langle\langle\star\bar\partial\partial\theta^{1,0}_\omega,\,\Lambda_\omega(\gamma\wedge\theta^{1,0}_\omega)\rangle\rangle_\omega,\end{aligned} \tag{20}$$

其中 (a) 和 (c) 是将标准公式（2）分别应用于 (0，2)-形式和 (2，0)-形式得到的，¯而 (b) 则由标准恒等式 $\partial^\star=-\star\partial\star$得到。

现在， $\bar\partial\partial\theta^{1,0}_\omega$是二维复流形 S上的一个 (2，1)-形式。由于逐点映射$L_\omega=\omega\wedge\cdot\colon\Lambda^{1,0}T^\star S\longrightarrow\Lambda^{2,1}T^\star S$是双射（参见§2中的 (A)），对于，1)-形式 Γ 上的 S，存在唯一的 (1，0)-形式 α 使得 $\Gamma=\omega\wedge\alpha$。将标准公式 (2) 应用于 α，得到$\star\alpha=-i\omega\wedge\alpha=-i\Gamma$。在最后一个等式中取 $\star$，可得:

$$\alpha=i\star(\omega\wedge\alpha). \tag{21}$$

另一方面，

$$\Lambda_\omega(\omega \wedge \alpha) = [\Lambda_\omega,\, L_\omega]\,\alpha = \alpha, \tag{22}$$

其中我们应用了（3），并结合 $n = 2$ 和 $k = 1$，得到了最后一个等式。将（21）和（22）合并起来，我们得出

$$\star(\omega \wedge \alpha) = -i\,\Lambda_\omega(\omega \wedge \alpha)$$

对于厄米复曲面（S，ω）上的任意 (1, 0)-形式 α。

在我们的情形中，考虑 (2，1)-形式 $\Gamma := \bar\partial\partial\theta^{1,\,0}_{\omega}$以及唯一的 (1，0)-形式 α 使得$\Gamma = \omega \wedge \alpha$，我们得出 $\star\bar\partial\partial\theta^{1,\,0}_{\omega} = \star\,(\omega \wedge \alpha) = -i\,\Lambda_\omega\,(\omega \wedge \alpha)$。因此，（20）变为：

$$\begin{aligned}\int_S \partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial\Lambda_\omega(\gamma \wedge \theta^{0,1}_\omega) \;&=\; i\,\langle\langle \Lambda_\omega(\omega\wedge\alpha),\, \Lambda_\omega(\gamma\wedge\theta^{1,0}_\omega)\rangle\rangle_\omega = i\,\langle\langle [L_\omega,\, \Lambda_\omega](\omega\wedge\alpha),\, \gamma\wedge\theta^{1,0}_\omega\rangle\rangle_\omega \\ &\overset{(a)}{=}\; -\langle\langle \bar\partial\partial\theta^{1,0}_\omega,\, i\theta^{1,0}_\omega\wedge\gamma\rangle\rangle_\omega \overset{(b)}{=} -\langle\langle \xi_{\theta^{1,0}_\omega}\lrcorner\,\bar\partial\partial\theta^{1,0}_\omega,\, \gamma\rangle\rangle_\omega,\end{aligned}$$

其中 (a) 可由 $\omega \wedge \alpha = \bar\partial\partial\theta^{1,\,0}_{\omega}$以及将公式（3）应用于 $k = 3$ 和 $n = 2$得出，而 (b) 则由公式（6）得出。

因此，(18) 右端的第一项为：

$$-2\,\mathrm{Re}\int_S \partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial\Lambda_\omega(\gamma\wedge\theta^{0,1}_\omega) = \langle\langle \xi_{\theta^{1,0}_\omega}\lrcorner\,\bar\partial\partial\theta^{1,0}_\omega + \xi_{\theta^{0,1}_\omega}\lrcorner\,\partial\bar\partial\theta^{0,1}_\omega,\, \gamma\rangle\rangle_\omega, \tag{23}$$

对于每个实值 (1, 1)-形式 γ。

- 公式 (19) 和 (23) 证明了这一论断。 □

作为定理 4.4 的 (i) 的另一个应用，我们现在将看到，微分 $d_\omega L$ 在所有满足 γ -反本原（意即 γ 与所有 $\langle$ -本原 (1,1)-形式正交；这一条件等价于 γ 是 ω 的函数倍） $d_\omega L$ 的实 (1,1)-形式 γ 上均为零。由于 $(d_\omega L)(f\omega)$ 计算的是 L 在一个共形类中的变分，因此，根据命题 6.1，以下结论也可直接得出，无需任何计算；该命题表明，当 $n = 2$ 时，泛函 L 是共形不变的。不过，我们更倾向于在此处给出直接证明。

推论 4.6 设 S 是一个固定了厄米度量 ω 的紧致复曲面。对于 X上的任意实值 C^∞ 函数 f，有

$$(d_\omega L)(f\omega) = 0.$$

特别地，对于 S 上任意实 (1, 1) 形式 γ，我们有

$$(d_\omega L)(\gamma) = (d_\omega L)(\gamma_{prim}),$$

其中 γ_{prim} γ 的 Lefschetz 分解中的 ω-本原分量为 γ。

证明。 应用公式 (16)，取 $\gamma = f\omega$ ，并利用显然的等式 $\Lambda_\omega(f\omega) = 2f$ （回忆一下 $\dim_{\mathbb{C}} S = 2$）以及 $\xi_{\theta^{0,1}_\omega} \lrcorner (f\omega) = f(i\theta^{0,1}_\omega)$，我们得到：

$$\begin{aligned}(d_\omega L)(f\omega) &= -4\,\mathrm{Re}\int_S f\,\partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial\theta^{0,1}_\omega - 4\,\mathrm{Re}\int_S \partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial f \wedge \theta^{0,1}_\omega \\ &\quad +2\,\mathrm{Re}\int_S \partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial\Lambda_\omega(f\bar\partial\omega + \bar\partial f\wedge\omega) - 2\,\mathrm{Re}\int_S i\partial\theta^{1,0}_\omega \wedge (if\bar\partial\theta^{0,1}_\omega + i\bar\partial f\wedge\theta^{0,1}_\omega) \\ &= T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \end{aligned} \tag{24}$$

其中， T_1、 T_2、 T_3 和 T_4 分别表示上述$(d_\omega L)(f\omega)$表达式右端按顺序列出的四项。

计算 T_3，得到：

$$T_3 = 2\,\mathrm{Re}\int_S \partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial(f\,\theta^{0,1}_\omega) + 2\,\mathrm{Re}\int_S \partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial\Big([\Lambda_\omega,\, L_\omega](\bar\partial f)\Big),$$

其中我们使用了等式 $\Lambda_\omega(\bar\partial\omega) = \theta^{0,1}_\omega$（见(8)）以及 $\Lambda_\omega(\bar\partial f) = 0$（其导出 $\Lambda_\omega(\bar\partial f\wedge\omega) = \lrcorner[\Lambda_\omega, L_\omega](\partial f)$）。现在，众所周知，在维数为 n的复流形上的 k-形式上， $[\Lambda_\omega, L_\omega] = (n-k)\,\mathrm{Id}$，因此在我们的情形中，由于 $n = 2$ 和 $k = 1$，我们得到 $[\Lambda_\omega, L_\omega](\partial f) = \partial f$。由此可得 $\bar\partial([\Lambda_\omega, L_\omega](\bar\partial f)) = \bar\partial^2 f = 0$，从而

$$T_3 = 2\,\mathrm{Re}\int_S f\,\partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial\theta^{0,1}_\omega + 2\,\mathrm{Re}\int_S \partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial f \wedge \theta^{0,1}_\omega = T_4,$$

最后一个等式显然由 T_4 的定义得出。

因此，公式（24）可改写为

$$\begin{aligned}(d_\omega L)(f\omega) &= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \\ &= (-4+4)\,\mathrm{Re}\int_S f\,\partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial\theta^{0,1}_\omega + (-4+4)\,\mathrm{Re}\int_S \partial\theta^{1,0}_\omega \wedge \bar\partial f \wedge \theta^{0,1}_\omega \\ &= 0.\end{aligned}$$

这就证明了第一个结论。

第二个结论显然由第一个结论、映射 $d_\omega L$ 的线性以及 Lefschetz 分解 $\gamma = \gamma_{prim} + (1/2)\,\Lambda_\omega(\gamma)\,\omega$ 得出。□

我们希望将来能够证明，在紧致复曲面上，任何作为泛函 L 临界点的厄米度量 ω 实际上都是局部共形凯勒度量。

5 泛函的一阶变分：维数 ≥ 3 的情形

在本节中，我们假设 X 的复维数为 $n \geq 3$。我们的目标是计算能量泛函 L （定义 3.1-（ii）中引入）的微分。设 ω 是 X 上的厄米度量，并设 γ 是一个实 (1，1)形式。后者可以看作 $\mathcal{H}_X$ 在 ω处的一个切向量。

定理 5.1 对于任意厄米度量 ω 和任意实 (1, 1) 形式 γ，有：

$$\begin{aligned}(d_\omega L)(\gamma) &= \int_X i(\bar\partial\omega)_{prim}\wedge\overline{(\bar\partial\omega)_{prim}}\wedge\gamma\wedge\omega_{n-4}\\ &\quad +2Re\,\langle\langle(\bar\partial\omega)_{prim},\,(\bar\partial\gamma)_{prim}\rangle\rangle_\omega - 2Re\,\langle\langle\theta^{0,1}_\omega\wedge\gamma,\,(\bar\partial\omega)_{prim}\rangle\rangle_\omega.\end{aligned}\tag{25}$$

证明。回忆（参见（11）的共轭式），有：$n-1)$ $\theta^{0,}{}_{\omega}{}^{1}=\Lambda_\omega(\bar\partial\omega)$ 对于任意厄米度量 ω。现在，$\bar{}$ $\bar{}$ 对于任意实 t 且充分接近 0 的 $\omega+t\gamma$，其仍然是 X上的厄米度量。取 $\alpha_t=\partial\omega+t\,\partial\gamma$于引理 4.2中，我们得到下面的第二个等式：

$$(n-1)\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\theta^{0,1}_{\omega+t\gamma}=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Lambda_{\omega+t\gamma}(\bar\partial\omega+t\bar\partial\gamma)=\Lambda_\omega(\bar\partial\gamma)-(\gamma\wedge\cdot)^\star_\omega(\bar\partial\omega).\tag{26}$$

另一方面，将 $(d/dt)_{|t=0}$ 代入 $L(\omega+t\gamma)$ 的表达式中，该表达式见定义3.1 的（ii）中（用 $\omega+t\gamma$ 替代 ω），我们得到：

$$(d_\omega L)(\gamma)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}L(\omega+t\gamma)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int_X i(\bar\partial\omega+t\bar\partial\gamma)_{prim}\wedge\overline{(\bar\partial\omega+t\bar\partial\gamma)_{prim}}\wedge(\omega+t\gamma)_{n-3},\tag{27}$$

其中，下标 $prim$ 表示其所附着的形式的（$\omega+t\gamma$）-本原部分。$\bar{}$ $\bar{}$现在，考虑 $\partial\omega$ 和 $\partial\gamma$ 关于 ω的 Lefschetz 分解（参见（1））：

$$\begin{aligned}\bar\partial\omega &= (\bar\partial\omega)_{prim}+\theta^{0,1}_\omega\wedge\omega\\ \bar\partial\gamma &= (\bar\partial\gamma)_{prim}+\theta^{0,1}_\gamma\wedge\omega\end{aligned}$$

$\bar{}$ $\bar{}$以及相对于 $\omega+t\gamma$的 $\partial\omega+t\partial\gamma$ 的 Lefschetz 分解：

$$\bar\partial\omega+t\bar\partial\gamma = (\bar\partial\omega+t\bar\partial\gamma)_{prim}+\theta^{0,1}_{\omega+t\gamma}\wedge(\omega+t\gamma).$$

由上述方程可得：

$$(\bar\partial\omega+t\bar\partial\gamma)_{prim}=(\bar\partial\omega)_{prim}+\theta^{0,1}_\omega\wedge\omega+t\,(\bar\partial\gamma)_{prim}+t\,\theta^{0,1}_\gamma\wedge\omega-\theta^{0,1}_{\omega+t\gamma}\wedge(\omega+t\gamma),\tag{28}$$

其中，在左侧项中，本原性是相对于度量 $\omega+t\gamma$ 而言的；而在（$\partial\omega$）$_{prim}$ 和（$\partial\gamma$）$_{prim}$中，本原性是相对于度量 ω 而言的。

由（28），等式（27）变为：

$$\begin{aligned}(d_\omega L)(\gamma) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int_X i\Big((\bar\partial\omega)_{prim}+\theta^{0,1}_\omega\wedge\omega+t\,(\bar\partial\gamma)_{prim}+t\,\theta^{0,1}_\gamma\wedge\omega-\theta^{0,1}_{\omega+t\gamma}\wedge(\omega+t\gamma)\Big)\\ &\quad\wedge\Big(\overline{(\bar\partial\omega)_{prim}}+\overline{\theta^{0,1}_\omega}\wedge\omega+t\,\overline{(\bar\partial\gamma)_{prim}}+t\,\overline{\theta^{0,1}_\gamma}\wedge\omega-\overline{\theta^{0,1}_{\omega+t\gamma}}\wedge(\omega+t\gamma)\Big)\wedge(\omega+t\gamma)_{n-3}.\end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(\theta^{0,1}_{\omega+t\gamma}\wedge(\omega+t\gamma)\Big) &= \theta^{0,1}_\omega\wedge\gamma+\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\theta^{0,1}_{\omega+t\gamma}\right)\wedge\omega\\ &= \theta^{0,1}_\omega\wedge\gamma+\frac{1}{n-1}\Big(\Lambda_\omega(\bar\partial\gamma)-(\gamma\wedge\cdot)^\star_\omega(\bar\partial\omega)\Big)\wedge\omega,\end{aligned}$$

其中使用了公式（26）来得到最后一个等式。由此，经过直接计算可得：

$$(d_\omega L)(\gamma) = I_1 + \overline{I_1} + I_2, \tag{29}$$

其中

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_X i\left((\bar\partial\omega)_{prim} + \theta_\omega^{0,1}\wedge\omega - \theta_\omega^{0,1}\wedge\omega\right)\wedge\left(\overline{(\bar\partial\omega)_{prim}} + \overline{\theta_\omega^{0,1}}\wedge\omega - \overline{\theta_\omega^{0,1}}\wedge\omega\right)\wedge\omega_{n-4}\wedge\gamma \\ &= \int_X i(\bar\partial\omega)_{prim}\wedge\overline{(\bar\partial\omega)_{prim}}\wedge\omega_{n-4}\wedge\gamma \end{aligned} \tag{30}$$

and

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_X i\left[(\bar\partial\gamma)_{prim} + \theta_\gamma^{0,1}\wedge\omega - \theta_\omega^{0,1}\wedge\gamma - \frac{1}{n-1}\left(\Lambda_\omega(\bar\partial\gamma) - (\gamma\wedge\cdot)_\omega^\star(\bar\partial\omega)\right)\wedge\omega\right]\wedge(\partial\omega)_{prim}\wedge\omega_{n-3} \\ &= \int_X i(\bar\partial\gamma)_{prim}\wedge(\partial\omega)_{prim}\wedge\omega_{n-3} - \int_X i\,\theta_\omega^{0,1}\wedge\gamma\wedge(\partial\omega)_{prim}\wedge\omega_{n-3}, \end{aligned} \tag{31}$$

其中最后一个等式由$(\partial\omega)_{prim}\wedge\omega_{n-2}=0$推出（这是$\omega$-本原3-形式$(\partial\omega)_{prim}$的结果），因此大括号内第二项和第四项（它们都是$\omega$的倍数）与$(\partial\omega)_{prim}\wedge\omega_{n-3}$的乘积为零。这里的大括号出现在（31）第一行的积分中。

现在，由于3-形式$(\omega)\partial\omega$的$prim$-本原性，标准公式（2）给出：

$$\star(\partial\omega)_{prim} = i\,(\partial\omega)_{prim}\wedge\omega_{n-3}, \tag{32}$$

其中$\star=\star_\omega$是由ω诱导的霍奇星算子。因此，（31）可写为

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_X (\bar\partial\gamma)_{prim}\wedge\star\overline{(\bar\partial\omega)_{prim}} - \int_X \theta_\omega^{0,1}\wedge\gamma\wedge\star\overline{(\bar\partial\omega)_{prim}} \\ &= \langle\langle(\bar\partial\gamma)_{prim},\,(\bar\partial\omega)_{prim}\rangle\rangle_\omega - \langle\langle\theta_\omega^{0,1}\wedge\gamma,\,(\bar\partial\omega)_{prim}\rangle\rangle_\omega. \end{aligned}$$

这个关于I_1的最后一个公式，结合（29）和（30），证明了命题的内容 n. □

我们给出的定理5.1的第一个应用，是计算维数为L的情形下，能量泛函$n>2$的欧拉-拉格朗日方程。

推论5.2 设X是一个紧复流形，其维数为$_{\mathbb{C}}X=n\geq 3$。泛函的欧拉-拉格朗日方程对于L（定义*3.1*中的(ii)所引入）为

$$\star\left(i(\bar\partial\omega)_{prim}\wedge\overline{(\bar\partial\omega)_{prim}}\wedge\omega_{n-4}\right) + \left(\bar\partial^\star + i\xi_{\theta_\omega^{0,1}\lrcorner}\cdot\right)(\bar\partial\omega)_{prim} + \left(\partial^\star - i\xi_{\theta_\omega^{1,0}\lrcorner}\cdot\right)(\partial\omega)_{prim} = 0,$$

其中，霍奇星算子$\star$、伴随算子和本原部分均是相对于方程中的未知量——厄米度量ω——计算的。

证明。 利用 $\alpha\wedge\beta=\star\alpha\wedge\star\beta$ [Pop22] 中引理 5.1 给出的通用公式，对于满足 $\deg\alpha+\deg\beta=2n$ 的任意微分形式，等式（25）右端的第一项可化为

$$\begin{aligned}\int_X i(\bar\partial\omega)_{prim}\wedge\overline{(\bar\partial\omega)_{prim}}\wedge\gamma\wedge\omega_{n-4} &= \int_X\star\left(i(\bar\partial\omega)_{prim}\wedge\overline{(\bar\partial\omega)_{prim}}\wedge\omega_{n-4}\right)\wedge\star\overline{\gamma}\\ &= \left\langle\left\langle\star\left(i(\bar\partial\omega)_{prim}\wedge\overline{(\bar\partial\omega)_{prim}}\wedge\omega_{n-4}\right),\gamma\right\rangle\right\rangle \qquad (33)\end{aligned}$$

对任意实 (1, 1) 形式 γ。

（25）右端的第二项变换为

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{Re}\,\langle\langle(\bar\partial\omega)_{prim},(\bar\partial\gamma)_{prim}\rangle\rangle_\omega &= 2\mathrm{Re}\,\langle\langle(\bar\partial\omega)_{prim},\bar\partial\gamma\rangle\rangle_\omega = 2\,\mathrm{Re}\,\langle\langle\bar\partial^\star(\bar\partial\omega)_{prim},\gamma\rangle\rangle_\omega\\ &= \langle\langle\bar\partial^\star(\bar\partial\omega)_{prim}+\partial^\star(\partial\omega)_{prim},\gamma\rangle\rangle_\omega \qquad (34)\end{aligned}$$

对任意实 (1, 1) 形式 γ。上面的第一个等式由 Lefschetz 分解 $\partial\gamma=(\partial\gamma)_{prim}+\omega\wedge u$（其中有一个 (0, 1) 形式 u）以及 $\Lambda_\omega((\partial\omega)_{prim})=0$ 得出。

（25）右端的第三项对任意实 (1，1) 形式 γ变换为

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{Re}\,\langle\langle\theta^{0,1}_\omega\wedge\gamma,(\bar\partial\omega)_{prim}\rangle\rangle_\omega &= 2\,\mathrm{Re}\,\langle\langle(\bar\partial\omega)_{prim},\theta^{0,1}_\omega\wedge\gamma\rangle\rangle_\omega = 2\,\mathrm{Re}\,\langle\langle-i\xi_{\theta^{0,1}_\omega}\lrcorner(\bar\partial\omega)_{prim},\gamma\rangle\rangle_\omega\\ &= \langle\langle-i\xi_{\theta^{0,1}_\omega}\lrcorner(\bar\partial\omega)_{prim}+i\xi_{\theta^{1,0}_\omega}\lrcorner(\partial\omega)_{prim},\gamma\rangle\rangle_\omega, \qquad (35)\end{aligned}$$

这里我们使用公式（5）得到第一行的最后一个等式。

将（33）、（34）和（35）结合起来，即可由定理 5.1得出该结论。 □

回顾一下，我们关注的是 L的临界点集合。现在我们注意到，在前面的结果中对 γ 作适当选择，便可明确描述这个集合。由于方程（25）对所有实（1，1）形式 γ均成立，因此选择 $\gamma=\omega$ 是允许的，其他选择也一样。由此得到以下结果

推论 5.3 设 X 是一个紧复流形，且 $\dim_{\mathbb{C}}X=n\geq 3$，并设 L 是3.1-（ii）中定义的泛函。对于上的任意厄米度量 ω， X，有:

$$(d_\omega L)(\omega)=(n-1)\,\|(\bar\partial\omega)_{prim}\|^2_\omega=(n-1)\,L(\omega). \qquad (36)$$

证明。在方程（ $\gamma=\omega$ （25）中取，得到:

$$\begin{aligned}(d_\omega L)(\omega) &= \int_X i(\bar\partial\omega)_{prim}\wedge\overline{(\bar\partial\omega)_{prim}}\wedge\omega\wedge\omega_{n-4}+2\mathrm{Re}\,\langle\langle(\bar\partial\omega)_{prim},(\bar\partial\omega)_{prim}\rangle\rangle_\omega\\ &\quad -2\mathrm{Re}\,\langle\langle\overline{\theta^{0,1}_\omega}\wedge\omega,\overline{(\bar\partial\omega)_{prim}}\rangle\rangle_\omega\\ &= (n-3)i\int_X(\bar\partial\omega)_{prim}\wedge\overline{(\bar\partial\omega)_{prim}}\wedge\omega_{n-3}+2\,\|(\bar\partial\omega)_{prim}\|^2_\omega-2\mathrm{Re}\,\langle\langle\overline{\theta^{0,1}_\omega},\Lambda_\omega((\partial\omega)_{prim})\rangle\rangle_\omega\\ &= (n-1)\|(\bar\partial\omega)_{prim}\|^2_\omega,\end{aligned}$$

其中最后一个等式由 $(\partial\omega)_{prim}\overline{\wedge\omega_{n-3}}=-i\star(\partial\omega)_{prim}$（见（32））以及由 Λ_ω（$(\partial\omega)_{prim}$）=0（因为任意 ω-本原形式都属于 Λ_ω的核）。

□

推论 5.3 的一个直接推论如下

命题 5.4 设 X 是一个维数为$_{\mathbb{C}}X = n \geq 3$ 的紧复流形，并设 ω 是 X上的一个厄米度量。

若 ω 是泛函 L （定义于3.1-(ii)）的临界点，则 ω 是局部共形 Kähler。

证明。若 ω 是 L的临界点，则对任意实（1，1）-形式 γ 在 X上都有$d_\omega L)(\gamma) = 0$ 。令 $\gamma = \omega^-$并利用（36），可得$\partial\omega)_{prim} = 0$。根据引理2.2的（ii），这等价于 ω 是局部共形 Kähler。□

反向结论可由我们已知的结果直接得出。事实上，若 ω 是局部共形 Kähler 度量， $L(\omega) = 0$（由引理3.2），因此 L 在 ω 处取得最小值，因为 $L \geq 0$。显然，任何最小值点都是临界点。

6 归一化 当 $\dim_{\mathbb{C}} X \geq 3$ 时的能量泛函

首先注意到，定义 3.1 的（i）中引入的泛函，在紧致复曲面的情形下是共形不变的。特别地，它是尺度不变的，因此无需归一化。

命题 6.1 设 S 为紧致复曲面。

(i) 对任意 S 上的厄米度量 ω 以及任意 C^∞ 函数 λ： $S \longrightarrow (0, +\infty)$，以下公式成立：

$$\theta^{1,0}_{\lambda\omega} = \theta^{1,0}_{\omega} + \frac{1}{\lambda}\,\partial\lambda.$$

(ii) 泛函 L： $\mathcal{H}_S \longrightarrow [0, +\infty)$， $L(\omega) = \int_X \partial\theta^{1,}{}_{\omega}{}^{0} \wedge \bar{\partial}\theta^{0,}{}_{\omega}{}^{1}$，具有如下性质：

$$L(\lambda\omega) = L(\omega)$$

for 每个 C^∞ 函数 λ： $S \longrightarrow (0, +\infty)$以及 S上的每个厄米度量 ω .

证明。(i) 回忆（参见（9））， $\theta^{1,}{}_{\omega}{}^{0} = \Lambda_\omega(\partial\omega)$且 $\theta^{0,}{}_{\omega}{}^{1} = \Lambda_\omega(\bar{\partial}\omega)$。

另一方面 ，对于任意函数 $\lambda > 0$ 和任意双次数为 (p, q) 的形式 α，我们有：

$$\Lambda_{\lambda\omega}\alpha = \frac{1}{\lambda}\,\Lambda_\omega\alpha,$$

这显然可以直接验证。因此，我们得到：

$$\theta^{1,0}_{\lambda\omega} = \Lambda_{\lambda\omega}\Big(\partial(\lambda\omega)\Big) = \frac{1}{\lambda}\,\Lambda_\omega(\lambda\,\partial\omega) + \frac{1}{\lambda}\,\Lambda_\omega(\partial\lambda \wedge \omega) = \theta^{1,0}_{\omega} + \frac{1}{\lambda}\,[\Lambda_\omega,\, L_\omega](\partial\lambda) = \theta^{1,0}_{\omega} + \frac{1}{\lambda}\,\partial\lambda,$$

其中我们应用了 (3)，并利用 $n = 2$ 和 $k = 1$ 得到最后一个等式。

（ii）在（i）中证明的公式中取 ∂，我们得到：

$$\partial\theta^{1,0}_{\lambda\omega} = \partial\theta^{1,0}_{\omega} - \frac{1}{\lambda^2}\,\partial\lambda \wedge \partial\lambda = \partial\theta^{1,0}_{\omega}.$$

由共轭可得 $\bar{\partial}\theta^{0,}{}_{\lambda\omega}{}^{1} = \bar{\partial}\theta^{0,}{}_{\omega}{}^{1}$，结论随即成立。 □

相比之下，定义 $L:\ \mathcal{H}_X \longrightarrow [0,\ +\infty$3.1 的 (ii) 中引入的泛函 在紧复流形 X 且维数 $_{\mathbb{C}}X = n \geq 3$ 的情况下并非尺度不变。事实上，根据其定义可立即得出

$$L(\lambda\omega) = \lambda^{n-1}\, L(\omega) \tag{37}$$

对每个常数 $\lambda > 0$ 以及 X上的每个厄米度量 ω。

L 的这一齐次性可用于简短地证明 L的主要性质；该性质是 §.5 根据 L的一阶变分计算结果推导出的，即根据定理 5.1。

命题 6.2 (命题 *5.4* 重述) 设 X 是一个紧复流形，且 $\dim_{\mathbb{C}}X = n \geq 3$；再设 ω 是 X上的厄米度量。以下等价关系成立：

ω 是泛函的临界点 L，该泛函定义于 *3.1*-(ii) 当且仅当 ω 是局部共形 Kähler。

证明。设 ω 是 L的临界点。这意味着，对 X上的每个实 (1, 1) 形式γ，都有 $(d_\omega L)(\gamma) = 0$。取 $\gamma = \omega$，便得到下面的第一个等式：

$$0 = (d_\omega L)(\omega) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L(\omega + t\omega) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Big((1+t)^{n-1}\, L(\omega) \Big) = (n-1)\, L(\omega).$$

因此，只要 ω 是 L的临界点，$L(\omega) = 0$。根据引理 ω是局部共形 Kähler 度量，当且仅当3.2。

反之，若 ω 是局部共形 Kähler，则它是 L的极小点，因此也是临界点，因为 $L(\omega) = 0$根据引理3.2。
□

另一方面，回顾如下如今已是标准结论的

观察 6.3 设 ω 是复流形 X 上一个厄米度量，且 $\dim_{\mathbb{C}}X = n \geq 2$。若$\omega$ 既是局部共形 Kähler 又是平衡的，则 ω 是 K¨ahler。

证明。 $d\omega$ 的 Lefschetz 分解写作 $d\omega = (d\omega)_{prim} + \omega \wedge \theta$，其中 $(d\omega)_{prim}$ 是一个ω-原始三形式，而 θ 是 X上的一个 1-形式。

我们在引理 2.2 中看到，ω 是局部共形 Kähler，当且仅当 $(d\omega)_{prim} = 0$。另一方面，以下等价关系成立：

$$\omega \text{ 是平衡的} \iff d\omega^{n-1} = 0 \iff \omega^{n-2} \wedge d\omega = 0 \iff d\omega \text{ 是 } \omega\text{-原始的} \iff d\omega = (d\omega)_{prim}.$$

由此可推知，若 ω 既是局部共形 Kähler 度量又是平衡度量，则 $d\omega = 0$，因此 ω 是 K¨ahler。 □

在更一般的情形下，局部共形 Kähler 与平衡这两个假设可能分别由不同的度量满足，因此不禁猜想，此时也存在一个 K¨ahler 度量。

猜想 6.4 设 X 是一个维数为 $_{\mathbb{C}}X \geq 3$ 的紧复流形。如果 X 上存在局部共形凯勒度量 ω 和平衡度量 ρ，则 X 上存在一个 K¨ahler 度量。

结合 L 在缩放下的行为（见（37）），这一猜想为我们的泛函 L 在 $n \geq 3$ 时提供了一种自然的归一化。

定义 6.5 设 X 是一个维数为 ${}_{\mathbb{C}}X = n \geq 3$ 的紧复流形。固定 X 上的厄米度量 ρ 。我们定义作用于 X 上厄米度量的 ρ-依赖泛函：

$$\widetilde{L}_\rho : \mathcal{H}_X \to [0, +\infty), \qquad \widetilde{L}_\rho(\omega) := \frac{L(\omega)}{\left(\int_X \omega \wedge \rho_{n-1}\right)^{n-1}}, \tag{38}$$

其中 L 是定义*3.1*（ii）中引入的泛函。

由（37）可知，归一化泛函 L_ρ 具有尺度不变性：

$$\widetilde{L}_\rho(\lambda\,\omega) = \widetilde{L}_\rho(\omega)$$

对任意常数 $\lambda > 0$均成立。此外，由引理 3.2可知， L_ρ（ω） $= 0$ 当且仅当 ω 是 X上的局部共形凯勒度量。

现在，我们推导归一化泛函的变分公式。

L_ρ，并将其表示为一个泛函的一阶变分公式表达式；该表达式已在定理 5.1中计算得出。

命题 6.6 设 X 是一个紧复流形，且 $\dim_{\mathbb{C}} X = n \geq 3$。固定 X上的厄米度量 ρ 。那么，对于 X上的任意厄米度量 ω 和任意实 (1, 1) 形式 γ ，有：

$$(d_\omega \widetilde{L}_\rho)(\gamma) = \frac{1}{\left(\int_X \omega \wedge \rho_{n-1}\right)^{n-1}} \left((d_\omega L)(\gamma) - (n-1)\, \frac{\int_X \gamma \wedge \rho_{n-1}}{\int_X \omega \wedge \rho_{n-1}}\, L(\omega) \right), \tag{39}$$

其中$(d_\omega L)(\gamma)$ 由定理5.1中的公式（25）给出。

证明。直接计算可得：

$$\begin{aligned}(d_\omega \widetilde{L}_\rho)(\gamma) \;&=\; \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\left(\int_X (\omega + t\gamma) \wedge \rho_{n-1}\right)^{n-1}}\, L(\omega + t\gamma)\right]_{t=0} = \frac{1}{\left(\int_X \omega \wedge \rho_{n-1}\right)^{n-1}}\, (d_\omega L)(\gamma) \\ &\quad - \frac{1}{\left(\int_X \omega \wedge \rho_{n-1}\right)^{2(n-1)}}\, (n-1) \left(\int_X \omega \wedge \rho_{n-1}\right)^{n-2} \left(\int_X \gamma \wedge \rho_{n-1}\right) L(\omega).\end{aligned}$$

这就是公式（39）。 □

一个自然的问题是，归一化泛函$_\sim L_\rho$ 中任意一个（或某些）的临界点是否恰好就是 X上的局部共形凯勒度量（如果存在）。下面的结果在一定程度上给出了回答。

推论 6.7 设 X 是一个紧复流形，且 $\dim_{\mathbb{C}} X = n \geq 3$。固定 X上的厄米度量 $_\sim\rho$ 。假设厄米度量 ω 是 L_ρ的一个临界点。那么：

(i) 对于每个 ρ-本原实 (1, 1) 形式 γ，$(d_\omega L)(\gamma) = 0$。

(ii) 如果度量 ρ i s Gauduchon，$(d_\omega L)(i\partial\bar{\partial}\varphi) = 0$ 对于任意实值 C^2 函数 φ 在 X .

证明。 (i) 若 γ 是 ρ-原始的，则 $\gamma \wedge \rho_{n-1} = 0$，因此公式 (39) 化简为

$$(d_\omega \widetilde{L}_\rho)(\gamma) = \frac{(d_\omega L)(\gamma)}{\left(\int_X \omega \wedge \rho_{n-1}\right)^{n-1}}.$$

同时，对于每个实（1,1）形式 γ，$(d_\omega L_\rho)(\gamma) = 0$，因为 ω 是 L_ρ的临界点。断言得证。

(ii) 取 $\gamma := \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$ 对于陈述中所述的任意函数 φ。我们得到：

$$0 \overset{(a)}{=} \left(\int_X \omega \wedge \rho_{n-1}\right)^{n-1} (d_\omega \widetilde{L}_\rho)(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi) \overset{(b)}{=} (d_\omega L)(\omega) - (n-1)\, L(\omega) + (d_\omega L)(i\partial\bar{\partial}\varphi) \overset{(c)}{=} (d_\omega L)(i\partial\bar{\partial}\varphi),$$

其中 ω 是 L_ρ 的临界点，这给出 (a)；公式 (39) 以及度量 ρ是 Gauduchon 度量（后者意味着 $\int_X i\partial\bar{\partial}\varphi \wedge \rho_{n-1} = 0$，由斯托克斯定理可知），这给出 (b)；推论 5.3给出 (c)。□

与曲面的情形一样，我们希望未来能够证明，在维数为 ≥ 3 的紧复流形上，任何厄米度量 ω，只要它是某个（或所有）归一化泛函 L_ρ 的临界点，实际上就是一个局部共形凯勒度量。

总结性说明。

(a) 设 X 是一个维数为 $_{\mathbb{C}}X = n \geq 3$ 的紧复流形。固定 X 上的一个厄米度量 ρ，并考虑 X 上满足下述条件的 ρ 归一化厄米度量 ω 所构成的集合 U_ρ：

$$\int_X \omega \wedge \rho_{n-1} = 1.$$

根据定义 6.5，我们有 $L_\rho(\omega) = L(\omega)$，对每个 $\omega \in U_\rho$ 均成立。此外，由于 L_ρ 具有尺度不变性，因此完全由其在 U_ρ上的限制决定。令

$$c_\rho := \inf_{\omega \in \mathcal{H}_X} \widetilde{L}_\rho(\omega) = \inf_{\omega \in U_\rho} \widetilde{L}_\rho(\omega) = \inf_{\omega \in U_\rho} L(\omega) \geq 0.$$

对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个厄米度量 $\omega_\varepsilon \in U_\rho$，使得 $c_\rho \leq L(\omega_\varepsilon) < c_\rho + \varepsilon$。由于$U_\rho$ 是赋予流的弱拓扑的正 (1,1) 流空间中的相对紧子集，因此存在一个子列 $\varepsilon_k \downarrow 0$ 以及一个正的（参见例如[Dem97, III-1.B.]中的术语）(1,1) 流 $T_\rho \geq 0$，其定义在 X 上，使得数列 $(\omega_{\varepsilon_k})_k$ 在 $k \to +\infty$ 时弱收敛于 T_ρ。根据构造，我们有：

$$\int_X T_\rho \wedge \rho_{n-1} = 1.$$

流 $T_\rho \geq 0$ 可能既不是 C^∞ 形式，也不严格正（例如，不满足其在 X上有一个厄米度量的正倍数作为下界），这构成

~泛函 L_ρ存在极小化子的一个障碍。如果最终发现，~泛函 L_ρ的临界点（若存在）恰好是 X的局部共形凯勒度量（若存在），那么它们也将与泛函 L_ρ的极小化子重合。在这种情况下，流 T_ρ 将构成 X上局部共形凯勒度量存在的障碍。

(b) 对于紧致复曲面 S，若能证明其临界点与其上的局部共形凯勒度量重合，则可采用上述 (a) 中相同的讨论，并使用 L 定义 3.1 的 (i) 中引入的（已是尺度不变的）泛函 S。

参考文献

[AD15] V. Apostolov, G. Dloussky — 紧致非 K ¨ahler 复曲面上的局部共形辛结构 — 《国际数学研究通知》，第 9 期（2016），2717-2747 页。[Dem 84] J.-P. Demailly — 关于 Hermite 几何中的 Bochner-Kodaira-Nakano 恒等式 — P. Lelong、P. Dolbeault、H. Skoda（编），《分析研讨会》，1983/1984，数学讲义第 1198 卷，施普林格出版社（1986），88-97 页。[Dem97] J.-P. Demailly — 复解析几何与代数几何 — http://www-fourier.ujf- grenoble.fr/ demailly/books.html[DP22] S. Dinew, D. Popovici — SKT 与平衡度量的变分方法 — arXiv:2209.12813v

1.

[Gau77] P. Gauduchon — 零偏心率定理 — 巴黎科学院院报，A 辑，第 285 卷（1977），387-390.[Ist 19]N. Istrati — 特殊局部共形 Kähler 度量的存在性判据 — 《纯粹与应用数学年刊》198（2）（2019），335-353.[Mic83] M. L. Michelsohn — 复几何中特殊度量的存在性 — 《数学学报》143（1983）261-295.[OV22] L. Ornea, M. Verbitsky — 局部共形 Kähler 几何原理 — arXiv:2208.07188v2

.

[Oti14] A. Otiman — 局部共形 Kähler 流形上的流 — 《几何与物理学杂志》86（2014），564-570.[PS22] O. Perdu, M. Stanciu — 局部共形 Kähler 空间的 Vaisman 定理 — arXiv:2109.01000v3.[Pop22] D. Popovici — 多重闭星分裂厄米度量 — arXiv 预印本 DG 2211.10267v1.[Vai76] I. Vaisman, — 局部共形近 Kähler 流形 — 《以色列数学杂志》24（1976）338-351.[Vai90] I. Vaisman, — 二维厄米度量的若干变分问题 — 《全球分析与几何年刊》8，第 2 期（1990），137-145.[Voi02] C. Voisin — 霍奇理论与复代数几何。I. — 剑桥高等数学研究丛书，76，剑桥大学出版社，剑桥，2002。

保罗·萨巴蒂耶大学，图卢兹数学研究所

纳博讷路118号，31062，图卢兹邮政专递9号，法国 电子邮箱：
popovici@math.univ-toulouse.fr 和 Soheil.Erfan@math.univ-toulouse.fr