量子比特空间的精确认证

Tomasz Białecki[1], Tomasz Rybotycki[2,3], Josep Batle[4], Jakub Tworzydło[1], 和 Adam Bednorz[1],
*[1]波兰华沙大学物理学院，*Pasteura* 街 *5* 号，*PL02-093*，波兰华沙[2]波兰科学院系统研究所，*Newelska* 街 *6* 号，*PL01-447*，波兰华沙[3]波兰科学院理论物理中心，*Lotników* 大道 *32/46* 号，*PL02-668*，波兰华沙[4] *CRISP - Centre de Recerca Independent de sa Pobla*，*07420 sa Pobla*，西班牙巴利阿里群岛

我们使用公开可用的 IBM 量子计算机，通过行列式维数见证量，在量子比特上实现了精确维数检验。与高维情况下见证量的最大可能值相比，准确度低于10^{-3} 。该检验采用最少数量的制备和测量操作（量子门）独立集，既适用于特定配置，也适用于参数化配置。该检验能够抵御非相干泄漏和量子门执行错误等非理想因素。两台 IBM 设备未通过检验，偏差超过 5 个标准差，这一结果尚无简单解释。

arXiv:2301.03296v1 [quant-ph] 9 Jan 2023

I. 引言

物理学是一门精确科学，这一点由基本常数的精确测量，以及通过精确量子实验确立国际单位制定义的过程所证实 [1–6]。每台计算机，包括量子计算机，都需要具备精度。遗憾的是，当前量子技术面临着不可避免的误差来源，既有机械限制，也有无法分离的物理环境。当然，有一些方法可以减轻和纠正误差。然而，这类方法依赖于对可控操作空间的假设。

量子计算机的基本构件是量子比特，即一种通用的二能级系统。由于目标是精确操控多个量子比特，因此有必要确认量子比特空间是否可靠，也就是说，是否未与更大的空间耦合。最有前景的量子比特实现方案会使量子比特与环境及其他态失谐，但仍存在微小的非相干扰动。另一方面，外部态可能造成难以纠正的系统误差。由微波脉冲实现的量子比特操作（量子门）会因波形发生器的非线性而产生失真 [7], 因此，概率分布与理论预测之间的微小偏差尚不能证明存在额外空间 [8]。因此，为了提升经典与量子计算和通信的质量，这些系统需要经过精确认证，并且能够抵御物理实现中的缺陷。

量子空间的维数可以通过维数见证量 [9–14]来检验。见证量的构造基于两阶段协议：初始制备和随后进行的最终测量，它们分别从独立集中选取。制备必须在测量开始前完成。精确的见证量必须基于等式，即某个量在不超过特定维数时恰为零，否则非零。这类良好的见证量检验，是考察特定二分结果概率$p(M|N)$关于制备 N和测量 M的线性无关性，见图1；可通过适当的行列式 [15–17]进行检验。这种检验已在光学态 [18]上实施。它属于一类基于等式的检验，例如三缝实验 [20–22] 中的 Sorkin等式 [19] ，该实验检验玻恩规则 [23], ，并以此为基准评估我们对基础量子模型及其实际实现的信任。

本文将该检验应用于多台 IBM 量子设备。虽然部分结果与 2–能级模型一致，但大样本量的检验揭示了该模型失效的迹象，置信度超过 5 个标准差。当然，这并不立即意味着存在更大的空间，但仍需紧急开展进一步研究以确定原因；问题也可能出在该检验的其他假设上（例如操作不独立）。

II. 理论

我们使用为 $p(M|N) = \mathrm{tr}MN$, $N = N^\dagger \geq 0$, $\mathrm{tr}\, N = 1$ 和测量 $1 \geq M = M^\dagger \geq 0$构造的见证量，对量子比特空间 $d = 2$进行检验。取 5 个制备 N_j, $j = 1..5$和 4 个测量 M_k,$k = 1..4$。那么，对于元素为 $p_{kj} = p(M_j|N_k)$ 和 $p_{5j} = 1$的5×5 矩阵 p，其行列式 $W = \det p$ 必须等于零，前提是所有 N_j 和 M_k 都能在同一个二能级空间中表示。此外，即使所有制备和测量都包含某个恒定的非相干泄漏项，即 $N'_j = N_j + N_e$和 $M'_k = M_k + M_e$, 其中 N_e和 M_e独立于j 和 k ，并且与 N_j 和 M_k对易，行列式仍为零。这样，向高能态的共同泄漏不会影响检验 [14]。对于 $d = 2$ ，我们有 $W = 0$，但 $d = 3$ 在实空间中给出最大 $27\sqrt{2}/64 \simeq 0.6$ ，在复空间中给出最大 $\simeq 0.632$ [16]。对于 $d = 4$ ，最大值（实数和复数）为 $2^{12}/3^7 \simeq 1.87$。更高维空间也达到经典最大值 3。

*电子邮箱：Adam.Bednorz@fuw.edu.pl

IBM量子体验的云计算服务提供了多种设备，即量子比特集合，用户可以通过自定义的量子门（操作）集对其进行操控，这些量子门可以是单量子比特门或双量子比特门，也可以是参数化量子门。用户可以设置屏障（控制操作顺序）或添加重置操作（向基态进行非幺正跃迁）。这些量子比特是物理跨蒙 [24], ，即由于超导性（约瑟夫森效应）与电容相互作用而存在的人工量子态。借助非谐性，可以将工作空间限制为两个态。退相干时间（主要受环境影响）足够长，可执行一系列量子操作并读取可靠的结果。

基态 $|0\rangle$ 还可以通过重置操作进一步确保。量子门通过波形发生器和混频器生成的定时微波脉冲来实现（时间 $30-70$ns，采样间隔为 0.222ns），并调谐至驱动频率（量子比特能级之间的能量差） [25]（约 $4-5$ GHz）。旋转Z 并非真实的脉冲，而是通过瞬时虚拟量子门 VZ(θ) 实现；该门会在后续量子门 [26]的同相和正交分量之间添加旋转。读出通过向谐振器施加另一个频率不同于驱动频率的长微波脉冲，并测量其中占据的光子 [25, 27]来完成。

在下文中，我们假设量子比特的两能级描述成立，误差不超过统计误差 $W=0$。更大的偏差则表明这种描述并不准确。状态和算符可以用两种方式描述：一是在以 $|0\rangle$、$|1\rangle$ 为基底的二维希尔伯特空间中，二是在布洛赫球上用$V=(v_0+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})/2$表示，并采用三分量布洛赫向量 $\boldsymbol{v}$ 和标准泡利矩阵

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\ \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}. \tag{1}$$

那么，初始态 $|0\rangle\langle 0|$ 对应的矢量为 (0，0，1)，而 $n_0=1$ 和 $|\boldsymbol{n}|\le 1$ 和 $2-|\boldsymbol{m}|\ge m_0\ge|\boldsymbol{m}|$。调谐至能级间跃迁驱动频率的微波脉冲对应于参数化量子门、$\pi/2$ 旋转，

$$\begin{aligned}S_\gamma&=Z_\gamma^\dagger S Z_\gamma,\ Z_\theta=\begin{pmatrix}e^{-i\gamma/2}&0\\0&e^{i\gamma/2}\end{pmatrix},\\ S&=RX(\pi/2)=\sqrt{X}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-i\\-i&1\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{2}$$

在基底 $|0\rangle, |1\rangle$ 中，而

$$S=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\ Z_\gamma=\begin{pmatrix}\cos\gamma&-\sin\gamma&0\\\sin\gamma&\cos\gamma&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \tag{3}$$

在布洛赫矢量上，即 $S_\gamma V S_\gamma^\dagger$。

从物理上说，该实验依次包括将量子态 $|0\rangle$制备出来、使用两个量子门 S_α, S_β 进行制备、使用两个量子门 S_ϕ, S_θ，以及再次施加读出脉冲以测量量子态 $|0\rangle$，见图2。共有 5 组角度 α_j，β_j 需要独立于 4 对

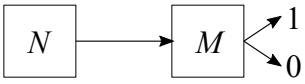

图1：制备与测量场景；制备的量子态为 N，并由 M 测量，得到的结果为 1 或 0。

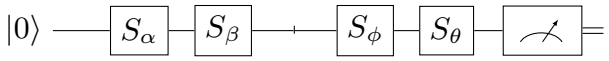

图2：用于维数测试的量子电路。初始态 $|0\rangle$ 和四个量子门 S_γ 分为制备阶段和测量阶段，随后进行最终的二值测量

θ_k，ϕ_k。然后是 $N=S_\beta S_\alpha|0\rangle\langle 0|$ 和 $M=S_\phi^\dagger S_\theta^\dagger|0\rangle\langle 0|S_\theta S_\phi$。图3描绘了一个量子门样本序列的实际脉冲波形。

III. 实验

在完美的理论中，我们可以为 α,β,θ,ϕ的每一种选择预测一个概率。实验结果可能由于各种原因而有所不同。首先，检验是随机的，我们必须估计由有限统计量引起的误差。当实验重复 T 次时，W 的方差可估计为

$$T\langle W^2\rangle\simeq\sum_{kj}p_{kj}(1-p_{kj})(\mathrm{Adj}\ p)_{jk}^2, \tag{4}$$

其中 Adj 是伴随矩阵（ p的余子式矩阵，划去给定的行和列后再转置）。

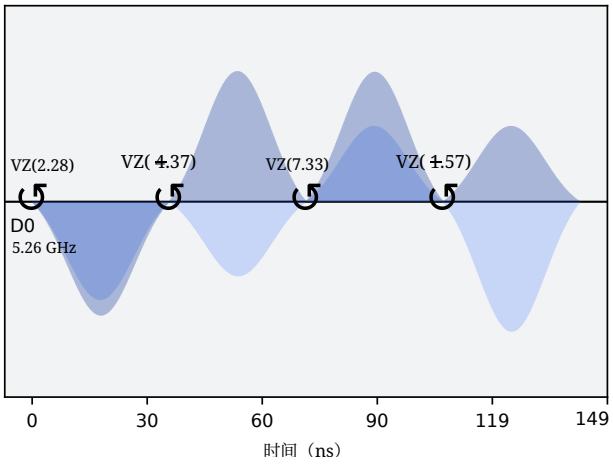

图3：IBM量子计算机（内罗毕）上脉冲的实际波形，其中四个后续量子门 S_γ依次施加，分别为$\gamma=\alpha,\beta,\phi,\theta$。离散化单位时间为$dt=0.222$纳秒。驱动（能级间隔）频率记为 $D0$。浅色/深色阴影分别对应同相/反相振幅分量。元素VZ(ξ)是一个零持续时间的虚拟量子门 Z_ξ，用于后续量子门 $S_\gamma S_\delta$，其 $\xi=\gamma-\delta$ [26]。

请注意，在极限 $T \to \infty$ 下，恒等式 $p^{-1}\det p = \mathrm{Adj}p$ 在此处没有意义，因为 $W = \det p = 0$ 。其次，量子门的实现可能并不忠实。只要泄漏到外部态（例如 $|2\rangle$）的过程是非相干的，且不依赖于参数 α，β，θ，ϕ，我们的检验就能够将其考虑在内。最后，我们必须假设脉冲不依赖于之前的脉冲。换言之，我们只能检验假设、空间维数和操作独立性的组合。我们通过两种方式计算了 W：(i) 针对每个作业确定 p，然后求出 W（各作业对应的数值见图10），最后对 W取平均；(ii) 先对所有作业的 p 取平均，再求出 W。

制备和测量的选择并不存在先验上的最佳方案，但它们不应位于同一个布洛赫圆上。我们决定进行两类检验：（I）两种特殊配置，分别对应于制备和测量采用相同的布洛赫向量，或对于给定的 R 取最大 $\langle W^2\rangle$；（II）一组配置，其中一个制备向量位于布洛赫圆上的 5 个方向之一。在这两种情况下，相应的布洛赫向量均在附录 A 中明确推导。情况（I）中的角度集合见表 I，相应的布洛赫向量如图 4 所示。我们在利马和拉各斯的量子比特 0 上运行了该检验。与理想预期相比，概率矩阵如图 5 所示。偏离零的程度及统计误差见图 6。#jobs·#shots ·#repetitions 的数量。从技术上讲，需要发送一个待执行的作业列表；每个作业最多包含 300 个量子线路，并分配给重复次数相同的实验。每个量子线路运行指定的采样次数。每个量子线路的读出计数，是作业执行完成后返回的数值。

案例 (II) 中的角度组采用了不同的制备方式。四种制备和测量固定不变，而最后一种制备则取决于参数。固定角度见表 II。最后一种制备的角度为 $\alpha_5 = 2\pi i/5 = \beta_5 - \pi/2$ for $i = 0..4$。相应的布洛赫向量如图 7 所示。我们在内罗毕和珀斯的量子比特 0 上进行了检验。与理想预期相比的概率矩阵如图 8 所示。与零的偏差和统计误差如图 9 所示。与预期值 0 的偏差超过 5 个标准差。数据和脚本可在公共代码仓库 [28] 中获取。

A. 非理想因素

有几个因素可能会影响实验的正确性。(A) 每日校准。驱动频率和量子门波形会经过校正，因此不同作业可以依赖于不同的量子门实现。校准的一阶效应会被抵消。不过，我们在附录 B 中对二阶效应进行了更详细的估算。只有较大且意料之外的

j	1	2’	3’	4’	5’	2”	3”	4”	5”
α	0	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$4\pi/3$	$4\pi/3$	0	$\eta-\pi$	$\eta+5\pi/3$	$\eta+\pi/3$
β	0	$\pi/6$	$-\pi/6$	$\pi/6$	$-\pi/6$	π	0	$2\pi/3$	$-2\pi/3$

k	1’	2’	3’	4’	1”	2”	3”	4”
θ	$5\pi/3$	$5\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	π	$\pi/2$	$7\pi/6$	$-\pi/6$
ϕ	$7\pi/6$	$5\pi/6$	$7\pi/6$	$5\pi/6$	0	π	$5\pi/3$	$\pi/3$

表 I：两个特殊案例 ’ 和 ” 的角度，其中 η =acos(1/3)，且 1=1’ =1”。

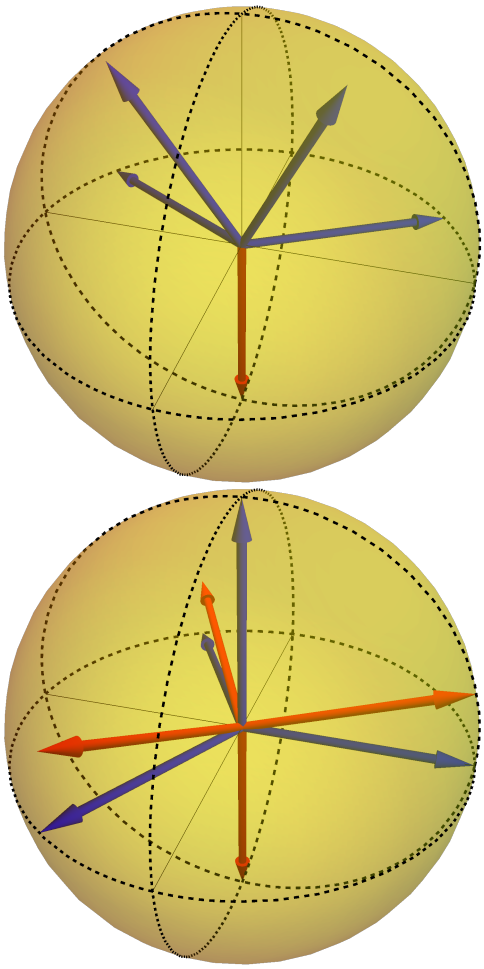

图 4：对应于表 I 中角度的制备（红色）和测量（蓝色）的布洛赫向量，上图为 ’，下图为 ”。对于 ’ 情形，四个测量方向与四种制备完全相同。

j	1	2	3	4
α	0	$\eta-\pi$	$\eta+5\pi/3$	$\eta+\pi/3$
β	0	0	$2\pi/3$	$-2\pi/3$

k	1	2	3	4
θ	π	$\pi/2$	$7\pi/6$	$-\pi/6$
ϕ	0	π	$5\pi/3$	$\pi/3$

表 II：参数情形 (II) 下制备和测量 1..4 的角度

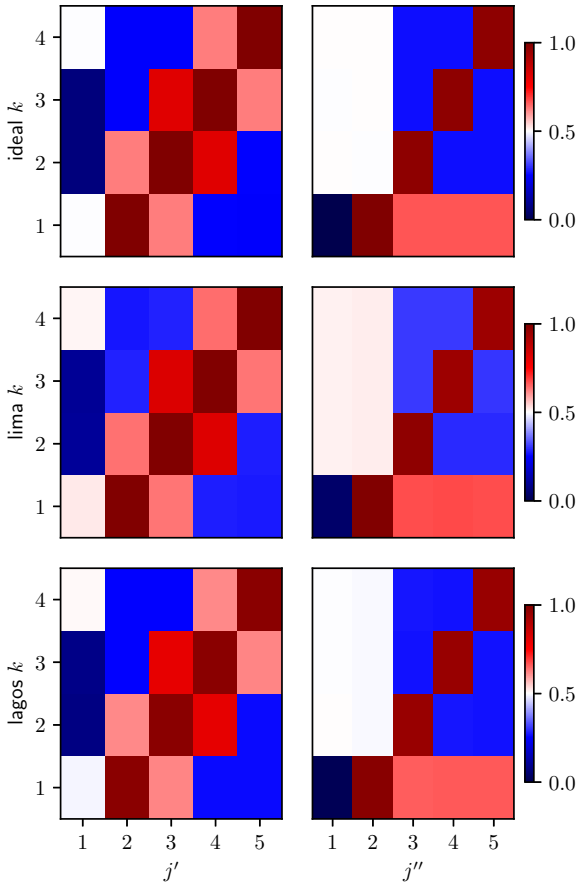

图 5：对表 I 中的角度进行检验 (I) 所得的概率结果 p_{kj}，分别针对利马和拉各斯，并与理想预期值进行比较。拉各斯：60 项作业，32000 次采样，重复 15 次。利马：521'/194" 项作业，20000 次采样，重复 5 次

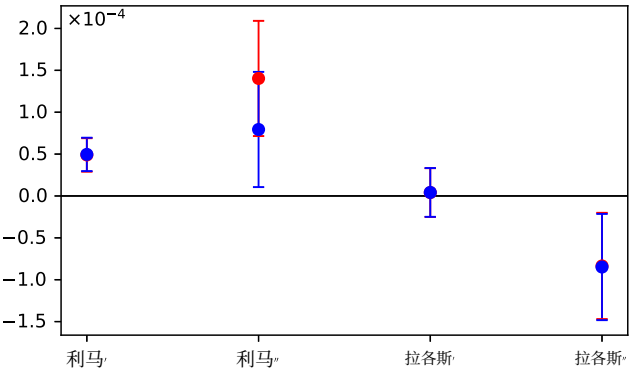

图 6：对表 I 中的角度进行检验 (I) 所得的见证量 $W = \det p$，分别针对利马和拉各斯，误差由 (4) 给出。红色—— W 对每项作业计算后再取平均，蓝色—— p 对所有作业取平均，得到 W。

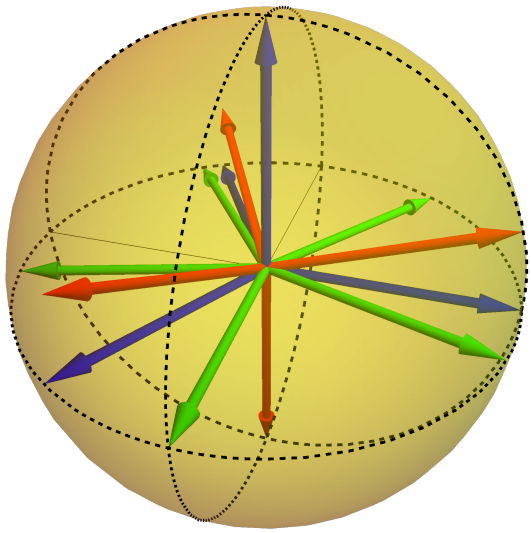

图 7：参数情形 (II) 中的布洛赫向量：固定制备（红色）和测量（蓝色）对应表 I 中的角度，另有参数化制备（绿色）。

故障才可能造成问题。(B) 振幅相关的泄漏和波形失真。泄漏到高能态（例如 $|2\rangle$ ）的程度很小，约为 10^{-4} ，且为非相干泄漏 [8, 14], ；详情见附录 C。波形的振幅失真可能取决于旋转角（相位），但根据我们先前工作中观察到的偏差，我们预计这一效应非常小， 10^{-3}，因此净效应为 10^{-7}。(C) 连续量子门之间的波形记忆。虽然极不可能，但残余电压振幅可能会持续到下一个量子门。原则上，如果这种效应会随时间衰减，可以通过在量子门之间插入延迟来缓解。(D) 其他量子比特。它们通常会失谐，但仍可能存在一些串扰。与泄漏的情况一样，我们预计串扰是非相干的，因此与见证量无关。作为合理性检查，我们使用来自内罗毕和珀斯的噪声模型进行了模拟，没有发现显著偏差，见附录 D。

IV. 讨论

对量子操作线性无关性的检验揭示了细微偏差，而这些偏差在较粗略的检验中无法察觉。还需进一步检验以确定偏差的来源，并排除诸如多世界／复制体等离奇理论的可能性 [29, 30]。我们建议：(i) 在相对较短的时间内收集极端统计数据，以避免校准带来的修正；(ii) 在量子门之间留出时间间隔，以排除其效应可能发生的重叠；(iii) 扫描大量布洛赫矢量，以最大限度地显现可能的偏差；(iv) 在单量子比特设备上运行检验，以避免串扰。也可以开发更复杂的检验，采用不同的假设，或涉及不同的量子比特。无论如何，对量子比特进行精确诊断必须成为量子技术中的标准做法。

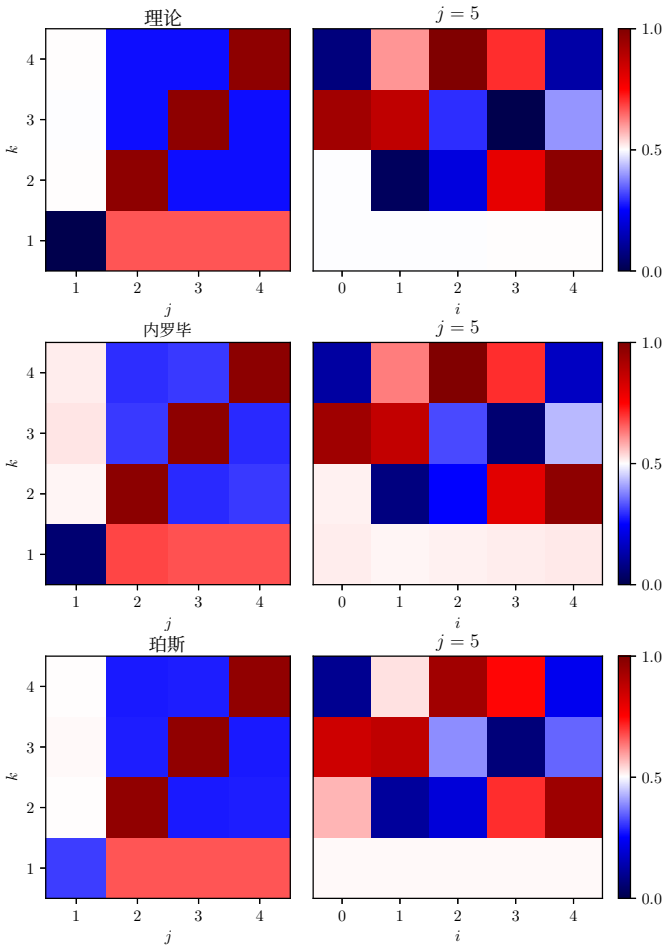

图1：对于表 II 中的角度，内罗毕和珀斯的测试（II）结果及概率 p_{kj}，并与理论预期进行比较。内罗毕/珀斯：115/93 个作业，均为 100000 次采样和 8 次重复

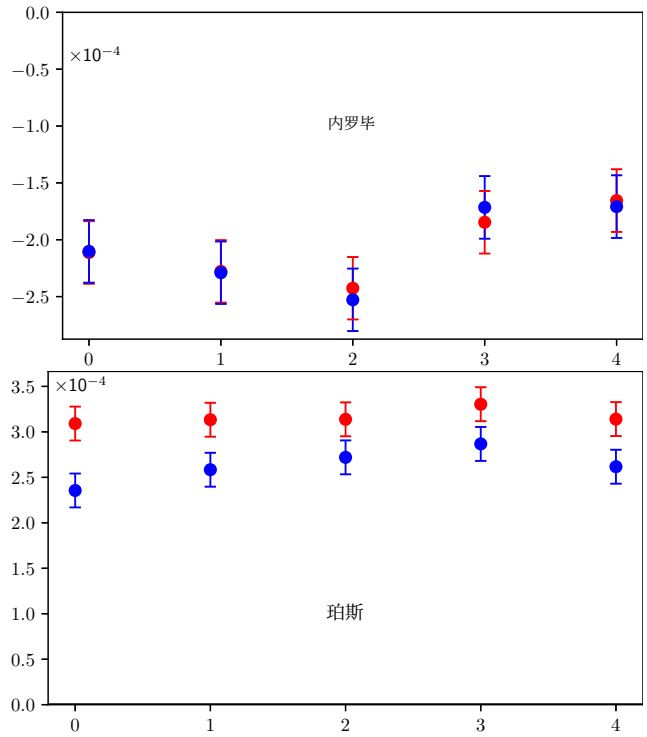

图1：对于表 II 中的角度，内罗毕和珀斯的测试（II）结果中的见证量 $W = \det p$，误差由公式 (4) 给出。红色 —— 对每个作业的 p 计算 W，然后取平均值；蓝色——对所有作业取平均值得到 W 的 p。

附录 A：布洛赫球表示

使用向量 $\boldsymbol{n}$ 表示量子态 $N = |\boldsymbol{n}\rangle\langle\boldsymbol{n}| = (\hat{1} + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})/2$，我们有 $S_\alpha N S_\alpha^\dagger = N_\alpha$ 和 $S_\theta^\dagger M S_\theta = M_\theta$，其中

$$\boldsymbol{n}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{n},$$
$$\boldsymbol{m}_\theta = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & \sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{n}, \quad \text{(A1)}$$

对于 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m} = (0, 0, 1)$ 和 $m_0 = 1$，我们有 $N_{\alpha\beta} = S_\beta S_\alpha N S_\alpha^\dagger S_\beta^\dagger$，其中

$$\boldsymbol{n}'_{\alpha\beta} = (\sin(\beta-\alpha)\cos\beta, \sin(\alpha-\beta)\sin\beta, -\cos(\beta-\alpha)) \quad \text{(A2)}$$

而 $M_{\theta\phi} = S_\phi^\dagger S_\theta^\dagger M S_\theta S_\phi$ wirh

$$\boldsymbol{M}_{\theta\phi} = (\sin(\theta-\phi)\cos\phi, \sin(\phi-\theta)\sin\phi, -\cos(\theta-\phi)). \quad \text{(A3)}$$

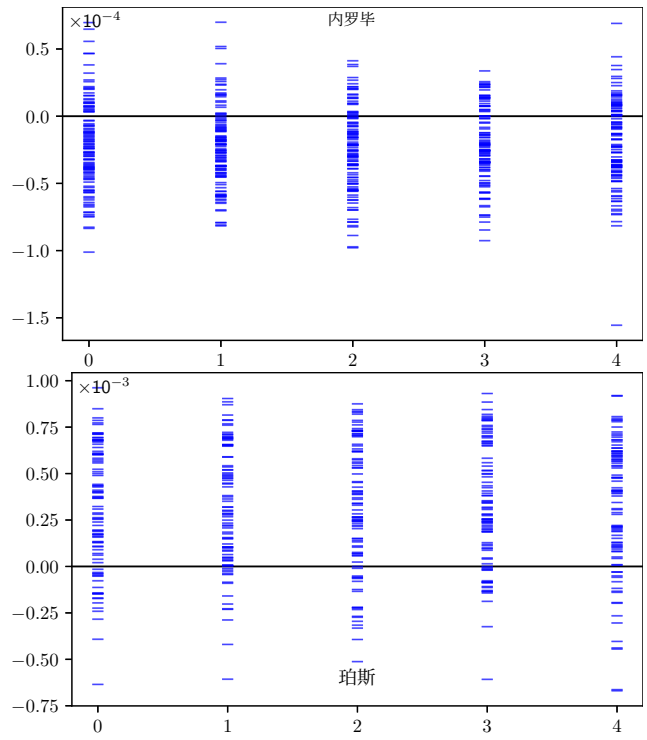

图10：对于表 II 中的角度，内罗毕和珀斯的测试（II）结果中的见证量 $W = \det p$，针对单个作业。内罗毕的两个值超出图示边界：(3，0．0023) 和 (4，0．003)

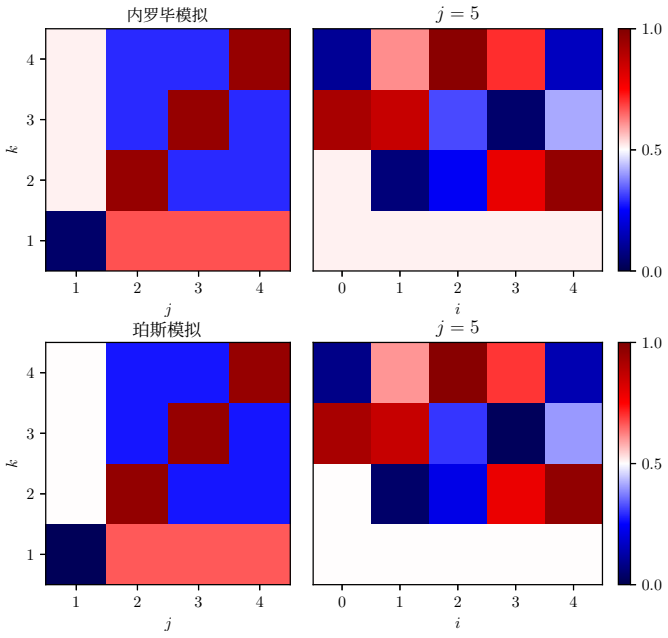

图1 1：对于内罗毕和珀斯，采用表 II 中的角度时，测试（II）在概率 p_{kj} 下的模拟结果。

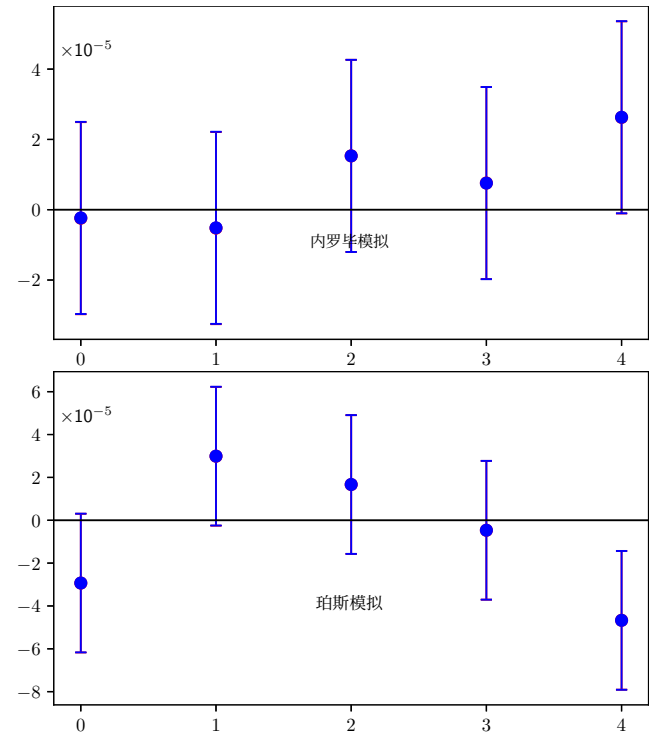

图1 2：对于内罗毕和珀斯噪声模型，采用表 II 中的角度时，测试（II）见证量$W = \det p$的模拟结果。请注意， W的两种计算方式几乎重合（蓝色曲线覆盖了红色曲线），这与我们在附录 B 中对一阶差异被平均抵消的解释一致。

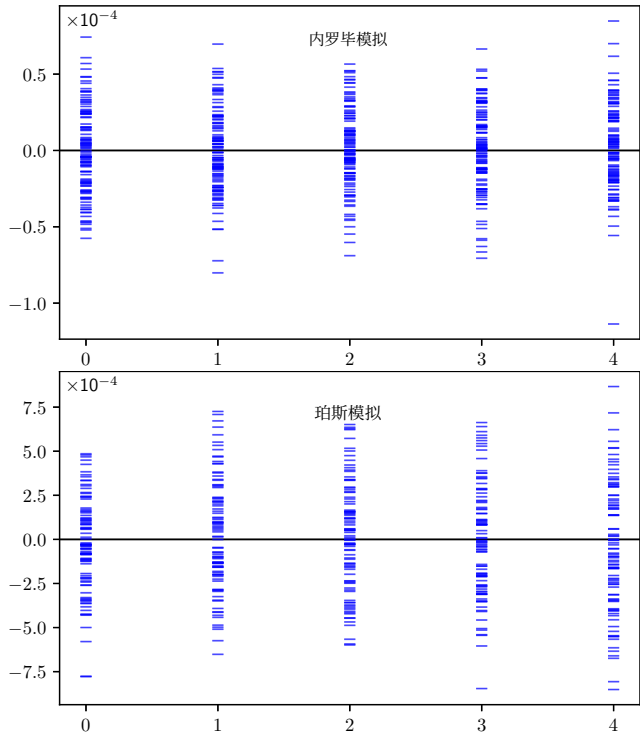

图1 3：对于内罗毕和珀斯噪声模型，采用表 II 中的角度时，针对单个作业的测试（II）见证量$W = \det p$的模拟结果

则概率矩阵元为

$$p_{kj} = \mathrm{Tr} M_k N_j = (1 + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m})/2 \tag{A4}$$

而 $p_{5j} = 1$。

这样，我们便可以表示实验中使用的各项选择。第一种选择中，制备态 $\boldsymbol{n}'_1 = (0, 0, -1)$、 $\boldsymbol{n}'_2 = (-\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$、 $\boldsymbol{n}'_3 = (-\sqrt{3}/4, -1/4, \sqrt{3}/2)$、 $\boldsymbol{n}'_4 = (\sqrt{3}/4, -1/4, \sqrt{3}/2)$、 $\boldsymbol{n}'_5 = (\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$，以及测量 $\boldsymbol{m}'_k = \boldsymbol{n}'_{k-1}$。第二种选择中， $\boldsymbol{n}''_1 = -\boldsymbol{n}''_2 = (0, 0, -1)$、 $\boldsymbol{n}''_3 = (2\sqrt{2}, 0, 1/3)$、 $\boldsymbol{n}''_{4,5} = (-\sqrt{2}/3, \mp\sqrt{2/3}, 1/3)$，以及测量 $\boldsymbol{m}''_1 = (0, 0, 1)$、 $\boldsymbol{m}''_2 = (1, 0, 0)$、 $\boldsymbol{m}''_{3,4} = (-1/2, \mp\sqrt{3}/2, 0)$。

对于参数化检验，我们有 $\boldsymbol{n}_1 = (0, 0, 1)$、 $\boldsymbol{n}_2 = (2\sqrt{2}, 0, 1/3)$、 $\boldsymbol{n}_{3,4} = (-\sqrt{2}/3, \mp\sqrt{2/3}, 1/3)$，而 $\boldsymbol{n}^i_5 = (-\sin(2\pi i/5) - \cos(2\pi i/5), 0)$。

附录 B：每日校准的界限

假设从一个作业到另一个作业的校准会改变概率矩阵。假设每个作业$n = 1..N$ 都满足概率条件 $W^{(n)} = 0 \quad p^{(n)}$，我们要问，对于 $p = \sum_n p^{(n)}/N$ 而言， W 是否可能非零。假设对于某个参考矩阵 $p^{(0)}$， $\delta p^{(n)} = p^{(n)} - p^{(0)}$ 很小，并且对所有 kj 都有 $|\delta p^{(n)}_{kj}| \leq \epsilon$ ，其中 ϵ是某个较小的上界。那么，在 δp 的一阶近似下，将行列式按单列的线性组合展开，仍可得到 $W \simeq 0$

$p^{(n)}$，其余各列保持为 $p^{(0)}$。非零贡献出现在二阶项中，即将两列中的任意一列替换为 $\delta p^{(n)}$时。它们的长度为 $\leq 2\epsilon$。最后一行在被替换的列中为0，在其余列中为1。从其他各行中减去该行的 $1/2$ 。剩余元素的模为 $\leq 1/2$ ，而其余3列的长度为 $\leq \sqrt{2}$。根据Hadamard不等式 $|\det A| \leq \prod_j |A_j|$，其中 $|A_j$ 是矩阵 A的向量（列） A_j 的长度，我们得到上界 $|W| \leq 80\sqrt{2}\epsilon^2$ ，因为从5列中选取2列共有10种选择。

附录 C：高能态的修正

通用哈密顿量在基态 $|n\rangle$, n =0，1，2，.....($\hbar = 1$) 下写作

$$H = \sum_n \omega_n |n\rangle\langle n| + 2\cos(\omega t - \theta)\hat{V}(t) \qquad \text{(C1)}$$

其中能量本征态能级为 ω_n ，外部驱动V的频率为 ω ，相移为 θ （第二项）。原则上，参数 ω，θ和 $V(t)$ 可以模拟完全任意的演化。我们可以通过微扰分析估算偏差，令 $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \omega$ （共振），$\omega_2 = 2\omega + \omega'$（非谐性，即 $\omega' \ll \omega$；在 IBM 中约为 300Mhz，相较之下驱动频率为 $\sim$ 5GHz）。量子态 $|2\rangle$ 应当产生最显著的潜在贡献。我们可以将旋转和相位纳入量子态的定义中，$|n\rangle \to |n'\rangle = e^{-in(\theta+\omega t)}|n\rangle$ 从而

$$H' = \begin{pmatrix} 2\cos(\omega t - \theta)V_{00} & (1 + e^{-2i(\theta+\omega t)})V_{01} & (e^{-i(\theta+\omega t)} + e^{-3i(\theta+\omega t)})V_{02} \\ (1 + e^{2i(\omega t+\theta)})V_{10} & 2\cos(\omega t + \theta)V_{11} & (1 + e^{-2i(\theta+\omega t)})V_{12} \\ (e^{-i(\theta+\omega t)} + e^{3i(\omega t+\theta)})V_{20} & (1 + e^{2i(\omega t+\theta)})V_{21} & 2\cos(\omega t + \theta)V_{22} + \omega' \end{pmatrix} \qquad \text{(C2)}$$

从 $H' = H_{RWA} + \Delta H$ 中提取旋波近似（RWA）部分，

$$H_{RWA} = \begin{pmatrix} 0 & V_{01} & 0 \\ V_{10} & 0 & V_{12} \\ 0 & V_{21} & \omega' \end{pmatrix}, \qquad \text{(C3)}$$

修正项为

$$\Delta H = \begin{pmatrix} 2\cos(\omega t + \theta)V_{00} & e^{-2i(\theta+\omega t)}V_{01} & (e^{-i(\theta+\omega t)} + e^{-3i(\theta+\omega t)})V_{02} \\ e^{2i(\omega t+\theta)}V_{10} & 2\cos(\omega t + \theta)V_{11} & e^{-2i(\theta+\omega t)}V_{12} \\ (e^{-i(\theta+\omega t)} + e^{3i(\omega t+\theta)})V_{20} & e^{2i(\omega t+\theta)}V_{21} & 2\cos(\omega t + \theta)V_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{(C4)}$$

由 RWA 导致的演化形式为

$$U(t) = \mathcal{T} \exp \int_{-\infty}^{t} H_{RWA}(t')dt'/i, \qquad \text{(C5)}$$

其中 $\mathcal{T}$ 表示泰勒展开中的时间序积。于是，U 的一阶修正为

$$\Delta U = U(+\infty) \int dt U^\dagger(t)\Delta H(t)U(t)/i \qquad \text{(C6)}$$

其中完整旋转为 $U(+\infty)$。ΔH 中所有依赖 θ 的项也都包含 $e^{i\omega t}$，它会使缓慢变化的表达式呈指数衰减。二阶修正为

$$\Delta^2 U = -U(+\infty)\times \int dt U^\dagger(t)\Delta H(t)U(t) \int^t dt' U^\dagger(t')\Delta H(t')U(t'). \qquad \text{(C7)}$$

大多数组分也会呈指数衰减，除非 $\Delta H(t)$ 包含 $e^{ik\omega t}$ ，且 $\Delta H(t')$ 包含 $e^{-ik\omega t}$，$k = 1, 2, 3$，因此 $k\theta$ 相互抵消。由此，$\Delta^2 U$ 中不可忽略的部分与 θ 无关，从而产生缓慢的布洛赫-西格特频移 [31]。由于采样时间极短，$dt = 0.222$ 纳秒，因此可以忽略 RWA 的频闪修正 [32] ，

附录 D：模拟

作为对我们检验的交叉验证，我们在 IBM 量子计算机模拟器上运行了相同的程序，并采用了从真实设备珀斯和内罗毕获取的噪声模型。然而，与真实设备不同，结果与理论一致，如图 11、12、13 所示。

[1] L. Eötvös、D. Pekár 和 E. Fekete，关于惯性与引力比例定律的论文，Ann. Phys. (Berlin) 373, 11, 1922。

[2] T. A. Wagner, S. Schlamminger, J. H. Gundlach, and E. G. Adelberger, 《弱等效原理的扭秤检验》, Class. Quantum Grav., 29:184002, 2012. [3] P. Touboul et al., 《MICROSCOPE任务：等效原理检验的最终结果》, Phys. Rev. Lett. 129, 121102 (2022) [4] L. Morel, Zh. Yao, P. Clade, S. Guellati-Khelifa, 《以 81 万亿分之一的准确度测定精细结构常数》, Nature 588, 61 (2020). [5] R.L. Workman et al. (粒子数据组), 《粒子物理学评述》, Prog. Theor. Exp. Phys. 2022, 083C01 (2022) [6] H. Wang, X. Miao, L. Shao, 《利用快速射电暴的宇宙学传播对光子质量设限》, Phys. Lett. B 820, 136596 (2021) [7] K. R. Chaves, X. Wu, Y. J. Rosen, J. L. DuBois, 《通过量子传感修正非线性信号失真》, Appl. Phys. Lett. 118, 014001 (2021) [8] T. Białecki, T. Rybotycki, J. Tworzydło, 《玻恩规则作为公共量子计算机准确性的检验》, arXiv:2112.07567[9] R. Gallego, N. Brunner, C. Hadley, and A. Acin, 《经典与量子维数的设备无关检验》, Phys. Rev. Lett. 105, 230501 (2010) [10] M. Hendrych, R. Gallego, M. Micuda, N. Brunner, A. Acin, J. P. Torres, 《经典与量子系统维数的实验估计》, Nat. Phys. 8, 588 (2012) [11] J. Ahrens, P. Badziag, A. Cabello, and M. Bourennane, 《经典与量子维数的设备无关实验检验》, Nature Phys. 8, 592 (2012). [12] J. Ahrens, P. Badziag, M.Pawlowski, M. Zukowski, M. Bourennane, 《经典与量子维数的实验检验》, Phys. Rev. Lett. 112, 140401 (2014) [13] N. Brunner, M. Navascues, and T. Vertesi, 《维度见证与量子态判别》, Phys. Rev. Lett. 110, 150501 (2013) [14] A. Strikis, A. Datta, G. C. Knee, 《使用模型无关维度见证检测量子泄漏》, Phys. Rev. A 99, 032328 (2019) [15] J. Bowles, M. T. Quintino, and N. Brunner, 《在采用独立设备的制备与测量场景中认证经典与量子系统的维数》, Phys. Rev. Lett. 112, 140407 (2014) [16] J. Batle, A. Bednorz, 《最优经典与量子实数和复数维度见证》, Phys. Rev. A 105, 042433 (2022) [17] X. Chen K. Redeker, R. Garthoff, W. Rosenfeld, J. Wrachtrup, and I. Gerhardt, 《通过远程态制备维度见证认证随机性》, Phys. Rev. A 103, 042211 (2021) [18] Y.-N. Sun et al., 《使用独立设备对量子维数和不可约高维量子系统进行实验认证》, Optica 7, 1073 (2020) [19] R. Sorkin, 《量子力学作为量子测度理论》, Mod. Phys. Lett. A 9, 3119 (1994). [20] U. Sinha, C. Couteau, T. Jennewein, R. Laflamme,and G. Weihs, 《排除量子力学中的多阶干涉》, Science 329, 418 (2010); [21] D. K. Park, O. Moussa, and R. Laflamme, 《利用核磁共振实现三路径干涉：检验玻恩规则的一致性》, New J. Phys. 14, 113025 (2012).

[22] M.-O. Pleinert、J. von Zanthier 和 E. Lutz，多粒子干涉检验玻恩规则，《物理评论研究》2，012051(R)（2020）[23] M. Born，碰撞过程的量子力学，《物理学杂志》37，863（1926）[24] J. Koch、Terri M. Yu、J. Gambetta、A. A. Houck、D. I. Schuster、J. Majer、Alexandre Blais、M. H. Devoret、S. M. Girvin、R. J. Schoelkopf，源自库珀对盒的电荷不敏感量子比特设计，《物理评论 A》76，042319（2007）[25] https://qiskit.org/textbook [26] D. C. McKay、C. J. Wood、S. Sheldon、J. M. Chow、J. M. Gambetta，用于量子计算的高效 Z 门 《物理评论 A》96，022330（2017）[27] D. Sank 等，超导量子比特中的测量诱导态跃迁：超越旋波近似，《物理评论快报》117，190503（2016）[28]欧洲核子研究组织和 Open AIRE，Zenodo，欧洲核子研究中心，2022，http://doi.org/ 10 5281 7470893 . / zenodo。[29] R. Plaga，关于寻找多世界量子力学诠释实验性证据的可能性，《基础物理学》**27**，559（1997）[30] A. Bednorz，量子多副本中的客观实在论与联合可测性，《物理年鉴》（柏林），201800002（2018）[31] F. Bloch 和 A. Siegert，非旋转场的磁共振，《物理评论》57，522（1940）。[32] D. Zeuch、F. Hassler、J. J. Slim、D. P. DiVincenzo，精确旋波近似，《物理年鉴》423，168327（2020）