arXiv:2301.03297v1 [math.PR] 9 Jan 2023

截面 Voronoi 镶嵌：刻画与高维极限

Anna Gusakova[a]、Zakhar Kabluchko[b] 和 Christoph Thäle[c]

摘要

beta-Voronoi、beta-prime-Voronoi 和高斯-Voronoi 镶嵌与 $\mathbb{R}^d$ withℓ 维仿射子空间 $1 \leq \ell \leq d-1$ 的交集，被证明是同类型但模型参数不同的随机镶嵌。特别地，经典泊松-沃罗诺伊镶嵌与一个仿射子空间的交集，被证明与某种 beta-Voronoi 镶嵌具有相同的分布。本文详细研究了截面泊松-沃罗诺伊镶嵌的典型胞以及更一般的典型 k-面所具有的几何性质。本文证明，在高维情形下，也就是说，当 $d \to \infty$ 时， d 维泊松-沃罗诺伊镶嵌与固定维数 ℓ 的仿射子空间的交集收敛于 ℓ 维高斯-沃罗诺伊镶嵌。

关键词： Beta-沃罗诺伊镶嵌，高斯-沃罗诺伊镶嵌，高维极限，拉盖尔镶嵌，泊松点过程，泊松-沃罗诺伊镶嵌，截面镶嵌，随机几何，典型胞**MSC：** 60D05, 60G55

1 引言

本文致力于研究泊松-沃罗诺伊镶嵌的仿射截面。为定义这些截面，设 $\zeta \subset \mathbb{R}^d$ 是 $\mathbb{R}^d$中一个平稳点过程的原子集合。对于每个点 $x \in \zeta$ ，我们将 x 的**沃罗诺伊胞腔** $V(x,\ \zeta)$构造为 $\mathbb{R}^d$ 中所有满足到 x 的距离小于到 ζ中任意其他点距离的点所构成的集合：

$$V(x,\zeta) := \{z \in \mathbb{R}^d : \|x-z\| \leq \|y-z\| \quad \text{for all } y \in \zeta \setminus \{x\}\},$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数。沃罗诺伊胞腔可以看作点 x 的影响区或吸引区。已知每个沃罗诺伊胞腔以概率1都是 $\mathbb{R}^d$中的凸多胞体。这些多胞体的集合就是与 ζ相关联的**沃罗诺伊镶嵌**。如果ζ 是强度恒为 $\rho > 0$的齐次泊松点过程，那么这一构造便得到**泊松-沃罗诺伊镶嵌**，在此记作$\mathcal{W}_{d,\ \rho}$——这是随机几何中研究最经典的模型之一。关于沃罗诺伊镶嵌，尤其是泊松-沃罗诺伊镶嵌的更多详细信息、应用及参考文献，请参阅专著 [22, 27, 29] 。

随机几何中研究的许多随机镶嵌，例如泊松超平面镶嵌或 STIT 镶嵌，都具有一个显著特征：与低维仿射子空间相交后仍保持稳定。也就是说，这些随机镶嵌与某个仿射子空间的交集，在该相交子空间内仍是同一类型的模型。例如，泊松超平面镶嵌与仿射子空间 L 的交集，在 L内仍是泊松超平面镶嵌。然而，泊松-沃罗诺伊镶嵌并不具有类似性质。事实上，Chiu、Van De Weygaert 和 Stoyan [6] 已证明，泊松-沃罗诺伊镶嵌与仿射子空间的交集，不可能是由该子空间内任何平稳点过程诱导的沃罗诺伊镶嵌。换言之，截面泊松-沃罗诺伊镶嵌必然是一种“非沃罗诺伊”镶嵌。然而，除 [6, 20] 中确定的少数均值外，进一步的概率

[a]德国明斯特大学。邮箱：gusakova@uni-muenster.de[b]德国明斯特大学。邮箱：zakhar.kabluchko@uni-muenster.de[c]德国波鸿鲁尔大学。邮箱：christoph.thaele@rub.de

或几何信息在现有文献中似乎尚未见报道，尽管这些信息对体视学应用十分重要（参见 [29, 第 11.5 章 4]或 [21, 第 14.4 节6] ，以及其中引用的文献）。本文的主要目的之一，是对截面泊松-沃罗诺伊镶嵌作出精确描述，并研究其典型胞。为此，我们建立了它与所谓的 β-沃罗诺伊镶嵌之间的联系；这是我们近期在系列论文 [10, 7, 8, 9]中引入并研究的一种随机镶嵌模型。对该模型的分析又建立在它与贝塔随机多胞体这一类对象之间的联系之上，而贝塔随机多胞体已在随机几何中得到多种应用 [11, 13, 14, 15]。

我们将在一个更一般的框架下研究刚才解释过的截面泊松-沃罗诺伊镶嵌问题。事实上，我们研究的随机镶嵌要么是

- 一个 β-沃罗诺伊镶嵌 $\mathcal{V}_{d,\,\beta,\,\gamma}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中，参数为 $\beta \geq -1$ 和 $\gamma > 0$,
- 一个 β'-沃罗诺伊镶嵌 $\mathcal{V}'_{d,\,\beta,\,\gamma}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中，参数为 $\beta > \frac{d}{2} + 1$和 $\gamma > 0$,
- 或是一个高斯-沃罗诺伊镶嵌 $\mathcal{G}_{d,\,\lambda}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中，参数为 $\lambda > 0$;

所有这些模型的描述将在第 3 节中给出。我们指出，由强度为 $\rho > 0$ 的平稳泊松点过程在 $\mathbb{R}^d$ 中生成的经典泊松-沃罗诺伊镶嵌，在此框架下表现为与参数 $\beta = -1$ 和 $\gamma = \pi^{\frac{d+1}{2}}\rho/\Gamma(\frac{d+1}{2})$ 相对应的 β-沃罗诺伊镶嵌。现在，设 $L \subset \mathbb{R}^d$ 是一个维数为 $1 \leq \ell \leq d-1$ 的仿射子空间。我们将在下文的定理 4.1 中证明，

- 截面镶嵌 $\mathcal{V}_{d,\,\beta,\,\gamma} \cap L$ 是 L 中的一个 $(\beta + \frac{d-\ell}{2})$ -沃罗诺伊镶嵌，具有相同的 γ,
- 截面镶嵌 $\mathcal{V}'_{d,\,\beta,\,\gamma} \cap L$ 是 L 中的一个 $(\beta - \frac{d-\ell}{2})$ ′-沃罗诺伊镶嵌，具有相同的 γ,
- 截面镶嵌 $\mathcal{G}_{d,\,\lambda} \cap L$ 又是 L 中的一个高斯-沃罗诺伊镶嵌，具有相同的 λ.

特别地，经典泊松-沃罗诺伊镶嵌 $\mathcal{W}_{d,\,\rho}$ 与 L 的交集结果是 L 中的一个 β-沃罗诺伊镶嵌，具有 $\beta = \frac{d-\ell}{2} - 1$和 $\gamma = \pi^{\frac{d+1}{2}}\rho/\Gamma(\frac{d+1}{2})$。为清楚起见，我们应当指出，随机镶嵌 $\mathcal{V}_{d,\,\beta,\,\gamma}$ 与 $\beta > -1$ 并非真正的沃罗诺伊镶嵌。我们的术语之所以如此，是因为 $\mathcal{V}_{d,\,\beta,\,\gamma}$ 可视为经典泊松-沃罗诺伊镶嵌的一种形变 （经典泊松-沃罗诺伊镶嵌对应于 $\beta = -1$）。

在确定了截面泊松-沃罗诺伊镶嵌之后，本文第二部分将研究其几何性质。更确切地说，我们在定理 5.1 中用贝塔随机多胞体研究中已经出现的量来确定其面强度 [11, 15]。接下来，我们将确定截面泊松-沃罗诺伊镶嵌中典型胞（甚至更一般地，典型 k 面）的期望体积、期望内在体积以及期望 f-向量。此外，我们推广 Miles [20] 的早期结果，考察当 $d \to \infty$ 时截面泊松-沃罗诺伊镶嵌若干特征（例如典型胞的体积）的渐近行为，并将其极限与适当的高斯-沃罗诺伊镶嵌的相应特征联系起来。我们还借助与 [8] 中类似的耦合构造，讨论镶嵌层面的弱收敛。

2 随机镶嵌的预备知识

本节汇总关于 $\mathbb{R}^d$中一般平稳随机镶嵌的一些定义和事实。更详细的讨论请参阅 [27,第 4 章和 10], 以及 [29,第 10] 章。

在 $\mathbb{R}^d$ 中， T 是由可数个、局部有限的 d 维多胞体组成的集合，它们覆盖整个空间，且内部非空且互不相交。 T 的元素称为 T 的**胞**。给定多胞体 $c \subset \mathbb{R}^d$，我们用 $\mathcal{F}_k(c)$ 表示其 k 维面的集合，即 $0 \leq k \leq d$，其中 $\mathcal{F}_d(c) = \{c\}$，并令 $\mathcal{F}(c) := \bigcup_{k=0}^{d} \mathcal{F}_k(c)$。若镶嵌 T 满足以下条件，则称其为**面面对齐**：对于其中任意两个胞 c_1， $c_2 \in T$，

$$c_1 \cap c_2 \in (\mathcal{F}(c_1) \cap \mathcal{F}(c_2)) \cup \{\varnothing\},$$

也就是说，两个胞的交集要么为空，要么是它们的一个公共面。对于面面对齐镶嵌 T，定义 $\mathcal{F}_k(T) = \bigcup_{c\in T} \mathcal{F}_k(c)$，以及 $\mathcal{F}(T) = \bigcup_{c\in T} \mathcal{F}(c)$。若 $\mathbb{R}^d$ 中的面面对齐镶嵌满足以下条件，则称其为**正规**：对于所有 $k \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$，镶嵌的每个 k 维面恰好包含在 $d+1-k$ 个胞的边界中。

我们用 $\mathbb{T}$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中所有面面对齐剖分的集合，该集合配备了如 [27, 第 10] 章所述的可测结构。随机剖分是指满足 $\operatorname{supp}\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ 几乎必然成立的 $\mathbb{R}^d$ 中的粒子过程 $\mathcal{T}$（采用随机几何中的通常定义，参见 [27, 第 4.1] 节）。将随机点过程 $\mathcal{T}$ 与其支集等同起来会更方便。若平稳随机剖分的分布在 $\mathbb{R}^d$ 中所有平移下保持不变，则称其为平稳的；若其分布在 $\mathbb{R}^d$ 中所有旋转下保持不变，则称其为各向同性。对于平稳随机剖分 $\mathcal{T}$ 和 $k \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$，我们定义平稳粒子过程 $\mathcal{T}_{(k)} := \sum_{F\in\mathcal{F}_k(\mathcal{T})} \delta_F$，它由 k 维多胞体组成，称为 **k-面过程**。

接下来，我们回顾平稳随机剖分 $\mathcal{T}$ 的典型胞（以及典型 k-面）的概念；更多细节参见 [27, 第 4.1、4.2], [27, 页及第 4.3] 节。令 $\mathcal{C}'$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中非空紧子集构成的空间，并赋予豪斯多夫度量。中心函数是一个博雷尔函数 $z\colon \mathcal{C}' \to \mathbb{R}^d$，满足对于所有 $C \in \mathcal{C}'$ 和 $m \in \mathbb{R}^d$，$z(C+m) = z(C) + m$。$\mathcal{T}$ 的 **k-面强度**定义为

$$\gamma_k(\mathcal{T}) := \mathbb{E} \sum_{F\in\mathcal{F}_k(\mathcal{T})} \mathbf{1}(z(F) \in [0,1]^d), \qquad k = 0, \ldots, d.$$

众所周知，这些量与中心函数 z 的选择无关。假设 $\gamma_k(\mathcal{T}) \in (0, \infty)$，则关于中心函数 z 的典型 **k-面** $\mathcal{T}$ 是一个 k 维随机多面体，其分布由下式给出

$$\mathbb{P}^z_{\mathcal{T},k}(\,\cdot\,) := \frac{1}{\gamma_k(\mathcal{T})}\, \mathbb{E} \sum_{F\in\mathcal{F}_k(\mathcal{T})} \mathbf{1}(F - z(F) \in \cdot\,)\mathbf{1}(z(F) \in [0,1]^d).$$

特别地，对于 $k = d$，我们得到 $\mathcal{T}$ 的典型胞这一概念。值得注意的是，典型 k-面的分布的平移不变特征不依赖于 z 的选择。更准确地说，若 z 和 z' 是两个中心函数，则 $\mathbb{P}^{z'}_{\mathcal{T},k}$ 是 $\mathbb{P}^z_{\mathcal{T},k}$ 在映射 $F \mapsto F - z'(F)$ 下的推前。

3 β-、β'-及高斯-沃罗诺伊镶嵌的构造

3.1 一般拉盖尔镶嵌

本节仅简要回顾拉盖尔镶嵌的一些事实，并请读者参阅 [7,第 3.2–3.4] 节和 [8, 第 2.3 及 3.1] 节，以了解更多细节。

我们首先定义一般的拉盖尔镶嵌。给定两个点 v、$w \in \mathbb{R}^d$ 和 $h \in \mathbb{R}$，我们将 w 相对于点对 (v, h) 的**幂**定义为

$$\operatorname{pow}(w, (v, h)) := \|w - v\|^2 + h.$$

在这种情况下，h 称为点 v的**权重**（或**高度**）。设 X 为形如 $(v, h) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 的带标记点可数集。那么，$(v, h) \in X$ 的**拉盖尔胞**是集合

$$C((v,h), X) := \{w \in \mathbb{R}^d\colon \operatorname{pow}(w, (v,h)) \le \operatorname{pow}(w, (v', h')) \text{ for all } (v', h') \in X\}.$$

点 v 称为胞腔 $C((v, h), X)$ 的核点。请注意，拉盖尔胞可能为空；即使非空，也不一定包含其核点。X 的所有非空拉盖尔胞构成的集合称为**拉盖尔图**：

$$\mathcal{L}(X) := \{C((v,h), X)\colon (v,h) \in X, C((v,h), X) \neq \varnothing\}.$$

在所有点的高度 h 都相同（例如，$h_0 \in \mathbb{R}$）这一特殊情形下，上述定义导出经典的**Voronoi 胞腔**。更准确地说，设 Y 是 $\mathbb{R}^d$ 中点的一个可数集，其“标记”版本 X 是通过为每个点附加一个固定权重 h_0 得到的。那么 $v \in Y$ 的 Voronoi 胞腔为

$$V(v, Y) = C((v, h_0), X) = \{w \in \mathbb{R}^d \colon \|w - v\| \le \|w - v'\| \text{ for all } v' \in Y\}.$$

所有 $v \in Y$ 的沃罗诺伊胞腔集合称为**沃罗诺伊图** $\mathcal{V}(Y)$。需要指出的是，拉盖尔图不一定是 $\mathbb{R}^d$中的镶嵌，至少在对集合 X 的几何性质施加额外假设之前是如此。这些假设已在 [18, 19, 25]中详细阐述。本文关注基于泊松点过程构造的随机镶嵌。更确切地说，我们考虑 $\mathbb{R}^d \times E$中的泊松点过程 ξ，其中 $E \subset \mathbb{R}$ 是一个博雷尔集（一个区间），以及相应的拉盖尔图 $\mathcal{L}(\xi)$。[7] 中的引理 1 和 2（另见 [8, 引理 2.1]）给出了关于 ξ 的充分条件，确保 $\mathcal{L}(\xi)$几乎必然是 $\mathbb{R}^d$中的平稳随机面面相接正规镶嵌。下文中我们均假设这些条件成立，并指出，从第 3.3 节开始讨论的三个情形会自动满足这些条件。

3.2 通过抛物面生长过程构造拉盖尔镶嵌

构造拉盖尔图的另一种方法是使用所谓的带重叠抛物面生长过程（或简称抛物面生长过程）。这种方法最初在 [1, 28] 中提出，旨在研究随机多胞体的渐近几何；另请参见 [2, 3, 4, 5]。本节简要介绍这一颇为实用的构造方法，更多细节请参见 [8, 第 3 节1]。令

$$\Pi_{\pm,x} := \{(v', h') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \colon h' = \pm\|v' - v\|^2 + h\}$$

分别表示顶点为 x 的向上（+）和向下（−）标准 **抛物面**：$= (v, h) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$，记作顶点$\Pi_{\pm, x}$：$= x$。在情形 $(v, h) = (0, 0)$ 下，我们简记为 $\Pi_{\pm} = \Pi_{\pm, (0,0)}$。给定集合 $A \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$，令

$$A^{\downarrow} := \{(v, h') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \colon (v, h) \in A \text{ for some } h \ge h'\},$$
$$A^{\uparrow} := \{(v, h') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \colon (v, h) \in A \text{ for some } h \le h'\}.$$

按照 [1], 中的定义，对于 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 中给定的泊松点过程 ξ，我们引入**抛物面生长过程** $\Psi(\xi)$：

$$\Psi(\xi) := \bigcup_{x \in \xi} \Pi^{\uparrow}_{+,x}.$$

需要指出的是，在典型情况下，大多数抛物面都会被其他抛物面完全覆盖，这意味着它们不会对模型产生“贡献”，因此可以将其省略，而不会丢失关于集合 $\Psi(\xi)$ 的任何信息。这便引出了极点的定义。若点 $x \in \xi$ 所关联的抛物面未被 ξ 中其他点所关联的抛物面完全覆盖，则称点 $x \in \xi$ 在抛物面生长过程 $\Psi(\xi)$ 中是**极点**，当且仅当

$$\Pi^{\uparrow}_{+,x} \not\subset \bigcup_{y \in \xi, y \ne x} \Pi^{\uparrow}_{+,y}.$$

我们用 $\operatorname{ext}(\Psi(\xi))$ 表示抛物面生长过程 $\Psi(\xi)$ 的所有极点构成的集合。利用抛物面生长过程，我们可以在 $\mathbb{R}^d$中构造一个随机图。给定一点 $x = (v, h) \in \xi$，定义 x 的 Ψ**胞腔**为

$$C_{\Psi}(x, \xi) := \begin{cases} \{w \in \mathbb{R}^d \colon \left[(w, 0)^{\uparrow} \cup (w, 0)^{\downarrow}\right] \cap \operatorname{bd} \Psi(\xi) \in \Pi_{+,x}\}, & \text{if } x \in \operatorname{ext}(\Psi(\xi)), \\ \varnothing, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中，$\operatorname{bd} A$ 表示集合 A 的边界。换句话说，w 属于 $C_{\Psi}(x, \xi)$，当且仅当 $\|w - v\|^2 + h \le \|w - v'\| + h'$ 对所有 $(v', h') \in \xi$ 均成立。因此，抛物面生长过程 $\Psi(\xi)$ 的极点 x 的 Ψ 胞腔非空，且与拉盖尔胞 $C(x, \xi)$ 重合。接下来，我们将所有非空的 Ψ胞腔收集起来，构造图 $\mathcal{L}_{\Psi}(\xi)$:

$$\mathcal{L}_{\Psi}(\xi) := \{C_{\Psi}(x, \xi) \colon C_{\Psi}(x, \xi) \ne \varnothing\} = \{C_{\Psi}(x, \xi) \colon x \in \operatorname{ext}(\Psi(\xi))\}.$$

我们可以直接得到 $\mathcal{L}_{\Psi}(\xi) = \mathcal{L}(\xi)$。

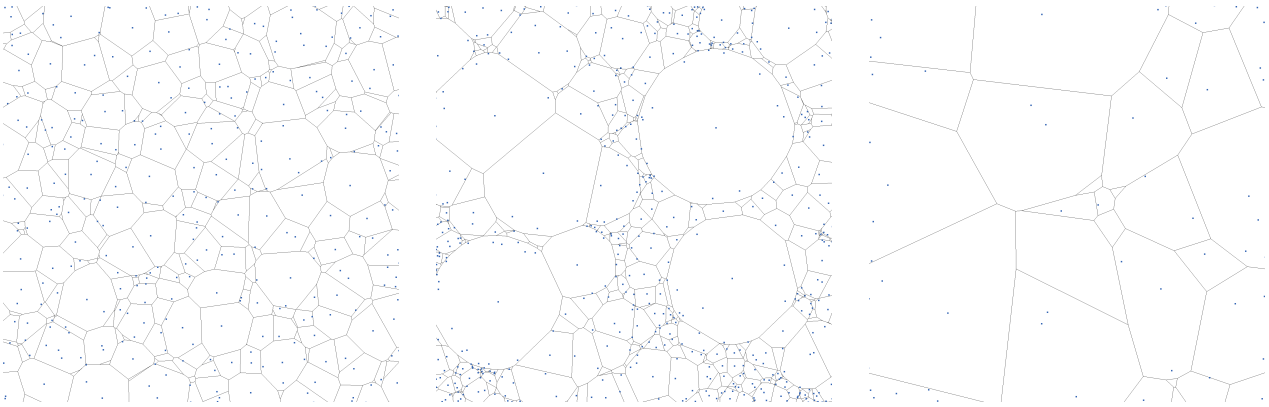


图 3.1：左图：在 $\mathbb{R}^2$ 中模拟的 β-沃罗诺伊镶嵌，$\beta = 5$。中图：在 $\mathbb{R}^2$ 中模拟的 β'-沃罗诺伊镶嵌，$\beta = 2.5$。右图：在 $\mathbb{R}^2$ 中模拟的高斯-沃罗诺伊镶嵌。

3.3 三类随机镶嵌

本文考虑 $\mathbb{R}^d$ build 中的随机镶嵌，它们基于以下三类泊松点过程。对于 $\beta > -1$ 和 $0 < \gamma < \infty$，我们考虑一个泊松点过程 $\eta_{d,\beta,\gamma}$，它位于 $\mathbb{R}^d \times [0, +\infty)$，其强度测度的密度为

$$(v, h) \mapsto \gamma\, c_{d+1,\beta} h^{\beta}, \qquad c_{d+1,\beta} := \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2} + \beta + 1\right)}{\pi^{\frac{d+1}{2}} \Gamma(\beta + 1)}, \tag{3.1}$$

关于 $\mathbb{R}^d \times [0, +\infty$ 上的勒贝格测度）。此外，对于 $\beta > \frac{d}{2} + 1$ 和 $0 < \gamma < \infty$，我们考虑 $\mathbb{R}^d \times (-\infty, 0)$ 中的泊松点过程 $\eta'_{d,\ \beta,\ \gamma}$，其强度测度具有密度

$$(v, h) \mapsto \gamma\, c'_{d+1,\beta} (-h)^{-\beta}, \qquad c'_{d+1,\beta} := \frac{\Gamma(\beta)}{\pi^{\frac{d+1}{2}} \Gamma(\beta - \frac{d+1}{2})}, \tag{3.2}$$

关于 $\mathbb{R}^d \times (-\infty,\ 0)$ 上的勒贝格测度。上述定义中的常数 $c_{d+1,\ \beta}$ 和 $c'_{d+1,\ \beta}$ 是为方便起见而引入的。例如，它们使下文定理 4.1 的陈述更加清晰。最后，对于 $\lambda > 0$ 和 $0 < \gamma < \infty$，我们考虑 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 中的泊松点过程 $\zeta_{d,\ \lambda,\ \gamma}$，其强度测度的密度为

$$(v, h) \mapsto \gamma\, e^{\lambda h},$$

关于 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 上的勒贝格测度。文献 [7, 引理 3] 以及 [8, 第 3.3] 节证明了，泊松点过程 $\eta_{d、\ \beta、\ \gamma}$ 和 $\zeta_{d、\ \lambda、\ \gamma}$ 满足文献 [7] 中引理 1 和引理 2 的充分条件，因此，相应的拉盖尔图 $\mathcal{V}_{d、\ \beta、\ \gamma} := \mathcal{L}(\eta_{d,\beta,\gamma})$、$\mathcal{V}'_{d、\ \beta、\ \gamma} := \mathcal{L}(\eta'_{d,\beta,\gamma})$ 和 $\mathcal{G}_{d、\ \lambda} := \mathcal{L}(\zeta_{d,\lambda,\gamma})$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的平稳随机正规镶嵌，分别称为 β-沃罗诺伊镶嵌、β'-沃罗诺伊镶嵌和高斯-沃罗诺伊镶嵌。文献 [10, 7, 8, 9]，对这些镶嵌进行了研究，其中采用的是 $\mathbb{R}^{d-1}$，而非 $\mathbb{R}^d$。图 3.1 展示了这些镶嵌在平面上的模拟结果。请注意，尽管点过程 $\eta'_{d、\ \beta、\ \gamma}$ 在范围 $\beta > \frac{d+1}{2}$ 内定义良好，但相应的 β'- 沃罗诺伊镶嵌仅在更小的范围 $\beta > \frac{d}{2} + 1$ 内存在，见 [7, 引理 3]。

注释 3.1。注意，改变参数 γ 相当于沿高度坐标 h平移泊松点过程$\zeta_{d,\ \lambda,\ \gamma}$。特别地，点过程 $\mathcal{G}_{d,\ \lambda}$ 的分布不取决于 γ 的选择，这一点也体现在我们的记号中。

注记 3.2。 将上述 β-沃罗诺伊镶嵌的定义推广至 $\beta = -1$ （ $\gamma > 0$任意取值）的情形会很方便：定义 $\mathcal{V}_{d,\ -1,\ \gamma} := \mathcal{W}_{d,\ r(d)\gamma}$ 为构造在齐次泊松点过程上的经典泊松-沃罗诺伊

镶嵌，该齐次泊松点过程定义在 $\mathbb{R}^d$ 上，具有常数强度 $r(d)\gamma$，其中

$$r(d) := \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\pi^{-\frac{d+1}{2}}.$$

以下命题为该定义提供了依据。关于点过程和弱收敛所需的背景知识，请参阅 [24, 第 3] 章。

命题 3.3. 当 $\beta \downarrow -1$ 时，泊松过程 $\eta_{d,\,\beta,\,\gamma}$ 在 $\mathbb{R}^d \times [0,\infty)$ 上的局部有限整数值测度空间中弱收敛至一个泊松点过程，其强度测度为 $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ *times* $r(d)\gamma$ 上的勒贝格测度。

*P*证明。 令 $\beta = -1+\varepsilon$，其中 $\varepsilon \downarrow 0$。则 (3.1) 中出现的常数满足

$$c_{d+1,\beta} = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}+\varepsilon\right)}{\pi^{\frac{d+1}{2}}\Gamma(\varepsilon)} = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{d+1}{2}}}\varepsilon(1+o(1)),$$

当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时。因此，对于每个 $c>0$ 以及每个有界博雷尔集 $B \subset \mathbb{R}^d$，泊松点过程 $\eta_{d,\,\beta,\,\gamma}$ 中落在 $B\times[0,c]$ 内的点数服从泊松分布，其期望为

$$\gamma\lambda_d(B)c_{d+1,\beta}\int_0^c h^{-1+\varepsilon}\mathrm{d}h \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\pi^{-\frac{d+1}{2}}\gamma\lambda_d(B) = r(d)\gamma\lambda_d(B),$$

其中 λ_d 表示 d 维勒贝格测度。由于右侧与 c 无关，因此对于每个 $0<c_1<c_2$，$\eta_{d,\,\beta,\,\gamma}$ 中位于 $B\times[c_1,c_2]$ 的点的期望数量在 $\varepsilon\downarrow 0$ 时收敛于 0。因此，$\eta_{d,\,\beta,\,\gamma}$ 的强度测度在 $\beta\downarrow -1$ 时，于空间 $\mathbb{R}^d\times[0,\infty)$ 上按模糊拓扑收敛至 $\mathbb{R}^d\times\{0\}$ times $r(d)\gamma$ 上的勒贝格测度。于是，根据 [16, 定理 16.16 (iv)] 或 [24, 命题 3.6 和 3.19]，即可得出该命题的结论。 □

4 仿射截面：β、β'和高斯-Voronoi 镶嵌

本节研究 d维随机镶嵌$\mathcal{V}_{d,\,\beta,\,\gamma}$、$\mathcal{V}'_{d,\,\beta,\,\gamma}$和$\mathcal{G}_{d,\,\lambda}$与维数为 $\ell\in\{1,\dots,d-1\}$的仿射子空间 $L\subset\mathbb{R}^d$ 的交集。由于这些镶嵌具有平稳性和各向同性，不失一般性，我们可以并且将假设 $L=\mathbb{R}^\ell$ 是 $\mathbb{R}^d$中由标准正交基的前 ℓ 个向量张成的线性子空间 $\mathbb{R}^d$。镶嵌$\mathcal{V}_{d,\,\beta,\,\gamma}$ 与 $\mathbb{R}^\ell$ 的交集记为$\mathcal{V}_{d,\,\beta,\,\gamma}\cap\mathbb{R}^\ell$。对于镶嵌$\mathcal{V}'_{d,\,\beta,\,\gamma}$和$\mathcal{G}_{d,\,\lambda}$，也采用类似的记法。下一个定理给出了$\mathcal{V}_{d,\,\beta,\,\gamma}\cap\mathbb{R}^\ell$、$\mathcal{V}'_{d,\,\beta,\,\gamma}\cap\mathbb{R}^\ell$和$\mathcal{G}_{d,\,\lambda}\cap\mathbb{R}^\ell$的分布。

定理 4.1。 固定整数 $d\geq 2$ 和 $1\leq\ell\leq d-1$。

(i) 对任意 $\beta\geq -1$ 和 $\gamma>0$，$\mathcal{V}_{d,\beta,\gamma}\cap\mathbb{R}^\ell$ 与 $\mathcal{V}_{\ell,\beta+\frac{d-\ell}{2},\gamma}$,具有相同的分布 — γ.

(ii) 对任意 $\beta>\frac{d}{2}-1$ 和 $\gamma>0$，$\mathcal{V}'_{d,\beta,\gamma}\cap\mathbb{R}^\ell$ 与 $\mathcal{V}'_{\ell,\beta-\frac{d-\ell}{2},\gamma}$,具有相同的分布 —.

(iii) 对任意 $\lambda>0$, $\mathcal{G}_{d,\,\lambda}\cap\mathbb{R}^\ell$ 与 $\mathcal{G}_{\ell,\,\lambda}$具有相同的分布。

在继续证明定理 4.1 之前，我们想强调以下特殊情形，它讨论的是经典泊松-沃罗诺伊镶嵌的截面。结合我们下面得到的结果，这就完整地回答并解决了 [6, 20, 21, 29] 中提出的问题。

推论 4.2。 固定整数 $d\geq 2$ 和 $1\leq\ell\leq d-1$。那么，对于任意 $\rho>0$，强度为 ρ 的d维泊松-沃罗诺伊镶嵌$\mathcal{W}_{d,\,\rho}$ 与 $\mathbb{R}^\ell$ 的交集具有与下式相同的分布

$$\mathcal{V}_{\ell,\frac{d-\ell}{2}-1,\pi^{\frac{d+1}{2}}\rho/\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}.$$

定理 4.1 的证明。 我们先考虑 $\ell = d-1$ 的情形，也就是说，我们与一个超平面相交。令 ξ 为以下泊松点过程之一：$\eta_{d,\,\beta,\,\gamma}$, $\eta'_{d,\,\beta,\,\gamma}$ 或 $\zeta_{d,\,\lambda,\,\gamma}$。$\xi$ 的原子位于空间 $\mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 中；该空间中的一般点记为 $(v,\ h)$，其中 $v = (v_1,\ \ldots,\ v_d) \in \mathbb{R}^d$ 是空间坐标，$h \in \mathbb{R}$ 是高度坐标。拉盖尔镶嵌 $\mathcal{L}(\xi)$ 位于由方程 $h = 0$ 定义的空间 $\mathbb{R}^d$ 中。我们的镶嵌与之相交的线性超平面 $L \equiv \mathbb{R}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 由方程 $\{v_d = 0, h = 0\}$ 给出。

为了证明该结论，我们将使用第 3.2 节所述的抛物面生长过程 $\Psi(\xi)$ 来表示拉盖尔镶嵌 $\mathcal{L}(\xi)$。我们通过添加高度坐标来扩展超平面 $L \subset \mathbb{R}^d$，具体而言，我们考虑

$$L' := \{(v,h) = (v_1,\ldots,v_d,h) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \colon v_d = 0\}.$$

对于每个点 $\mathbf{x} = (v,\ h) \in \mathbb{R}^{d+1}$，$d$ 维抛物面 $\Pi_{+,\,\mathbf{x}}$ 与 L' 的交集是一个位于 L' 中的（$d-1$）维向上抛物面 $\Pi_{+,\,\mathbf{x}'} \cap L'$，其顶点为

$$\mathbf{x}' = f(v,h) := (v_1,\ldots,v_{d-1},0,h+v_d^2) \in L'.$$

若 $\mathbf{x}$ 遍历 ξ 的所有原子，则 $\mathbf{x}'$ 遍历点过程 $f(\xi) := \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \xi\}$ 在 L' 上的所有原子。根据映射定理，该点过程也是一个泊松点过程；参见 [17, 定理 5.1]。拉盖尔镶嵌 $\mathcal{L}(\xi)$ 与 L 的交集，恰好是由点过程 $f(\xi)$ 生成的拉盖尔镶嵌（在 L 内）。

现在，我们将确定泊松点过程 $f(\xi)$ 的强度测度 μ。为此，我们分别考虑泊松点过程 $\eta_{d,\,\beta,\,\gamma}$, $\eta'_{d,\,\beta,\,\gamma}$ 和 $\zeta_{d,\,\lambda,\,\gamma}$。

情形 (i)。 首先令 $\beta > -1$。根据泊松点过程的映射定理 [17, 定理 5.1]，$f(\eta_{d,\,\beta,\,\gamma}) := \{f(x) : x \in \eta_{d,\,\beta,\,\gamma}\}$ 是 $\mathbb{R}^{d-1} \times [0,+\infty$ 中的泊松点过程$) \subset L'$。为计算其强度测度 μ，取任意博雷尔集 $B \subset L$ 和任意 $s > 0$，并注意到，$\eta_{d,\,\beta,\,\gamma}$ 的一个原子 $(v,\ \ldots,\ h)$ 当且仅当 $(v_1,\ \ldots,\ v_{d-1}) \in B$ 且 $h + v_d^2 \le s$ 时，经由 f 映射为 $B \times [0,s]$。后一条件意味着 $h \le s$ 和 $|v_d| \le \sqrt{s-h}$。因此，强度测度 μ 满足

$$\begin{aligned}
\mu(B \times [0,s]) &= \gamma\, c_{d+1,\beta} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty h^\beta \mathbf{1}(f(v,h) \in B \times [0,s])\, \mathrm{d}h \mathrm{d}v \\
&= \gamma\, c_{d+1,\beta} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^s h^\beta \mathbf{1}(v \in B \times [-\sqrt{s-h}, \sqrt{s-h}])\, \mathrm{d}h \mathrm{d}v \\
&= 2\gamma\, c_{d+1,\beta}\, \lambda_{d-1}(B) \int_0^s h^\beta \sqrt{s-h}\, \mathrm{d}h \\
&= \gamma\, \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2} + \beta + 1)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\beta + \frac{3}{2})}\, \lambda_{d-1}(B) \frac{s^{\beta+\frac{3}{2}}}{\beta + \frac{3}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

在 $\beta = -1$ 的情形下，令 $\eta_{d,-1,\gamma}$ 为定义在 $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ 上（视为 $\mathbb{R}^{d+1}$ 的子集）的泊松点过程，其相对于 $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ 上勒贝格测度的强度为常数，等于 $\Gamma(\frac{d+1}{2})\pi^{-\frac{d+1}{2}}\gamma$。因此，$\eta_{d,-1,\gamma}$ 中所有点的高度均为 0。根据注记 3.2 中所述的约定，由 $\eta_{d,-1,\gamma}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上生成的拉盖尔镶嵌与 $\mathcal{V}_{d,-1,\gamma}$ 重合。为了计算泊松点过程 $f(\eta_{d,-1,\gamma})$ 的强度测度 μ，取任意博雷尔集 $B \subset L$ 和任意 $s > 0$，并注意到 $\eta_{d,-1,\gamma}$ 的一个原子 $(v,\ 0)$ 经 f 映射到 $B \times [0,s]$，当且仅当 $(v_1,\ldots,v_{d-1}) \in B$ 且 $v_d^2 \le s$。由此可知，强度测度 μ 满足

$$\begin{aligned}
\mu(B \times [0,s]) &= \gamma\, \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}(f(v,0) \in B \times [0,s])\, \mathrm{d}v \\
&= \gamma\, \frac{2\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{d+1}{2}}}\, \lambda_{d-1}(B) \sqrt{s}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

对 (4.1) 和 (4.2) 关于 s求导可得，对于所有 $\beta \geq -1$， $f(\eta_{d,\beta,\gamma})$ 的强度测度具有密度

$$(v', 0, h) \mapsto \gamma\, c_{d,\beta+\frac{1}{2}} h^{\beta+\frac{1}{2}}, \qquad v' \in \mathbb{R}^{d-1},\, h > 0,$$

关于 $L \times [0, +\infty$ 上的勒贝格测度。因此，由 $f(\eta_{d,\ \beta,\ \gamma})$ 生成的拉盖尔镶嵌在 L 内与 $\mathcal{V}_{d-1,\ \beta+\frac{1}{2},\ \gamma}$ 具有相同的分布。

情形 (ii)。接下来，我们处理 $f(\eta'_{d,\beta,\gamma}) := \{f(x) : x \in \eta'_{d,\beta,\gamma}\}$。我们先只考虑 $f(\eta'_{d,\beta,\gamma})$ 中高度为负的那些点，并计算这些点的强度测度 μ。高度坐标为正的点不会影响最终得到的镶嵌，下面将对此作出说明。为确定 μ，取任意博雷尔集 $B \subset L$ 和任意 $s < 0$，并注意到，$\eta'_{d,\beta,\gamma}$ 中的一个原子 $(v, -g)$（其中 $g > 0$）经 f 映射到 $B \times (-\infty, s]$，当且仅当 $(v_1, \ldots, v_{d-1}) \in B$ 且 $v_d^2 \leq s + g$。后一条件意味着 $g \geq -s$ 且 $|v_d| \leq \sqrt{s+g}$。由此可得，强度测度 μ 满足

$$\begin{aligned}
\mu(B \times (-\infty, s]) &= \gamma\, c'_{d+1,\beta} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty g^{-\beta} \mathbf{1}(f(v, -g) \in B \times [-s, \infty))\, \mathrm{d}g \mathrm{d}v \\
&= \gamma\, c'_{d+1,\beta} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-s}^\infty g^{-\beta} \mathbf{1}(v \in B \times [-\sqrt{s+g}, \sqrt{s+g}])\, \mathrm{d}g \mathrm{d}v \\
&= 2\gamma\, c'_{d+1,\beta}\, \lambda_{d-1}(B) \int_{-s}^\infty g^{-\beta} \sqrt{g+s}\, \mathrm{d}g \\
&= \gamma\, \frac{\Gamma(\beta - \frac{1}{2})}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\beta - \frac{d+1}{2})}\, \lambda_{d-1}(B) \frac{(-s)^{-\beta+\frac{3}{2}}}{\beta - \frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

求导后，我们得出强度测度 μ 具有如下密度

$$(v', 0, h) \mapsto \gamma\, c'_{d,\beta+\frac{1}{2}} (-h)^{-\beta+\frac{1}{2}}, \qquad v' \in \mathbb{R}^{d-1},\, h < 0,$$

相对于 $L \times (-\infty, 0)$ 上的勒贝格测度而言。因此，根据映射定理 [17, 定理 5.1]，将 $f(\eta'_{d,\beta,\gamma})$ 限制在 $L \times (-\infty, 0)$ 上，得到的泊松点过程具有与 $\eta'_{d-1,\beta-\frac{1}{2},\gamma}$ 相同的强度测度。该泊松点过程在 $L \equiv \mathbb{R}^{d-1}$ 内生成的拉盖尔镶嵌，其分布与 $\mathcal{V}'_{d-1,\beta-\frac{1}{2},\gamma}$ 相同。还需注意的是，加入 $f(\eta'_{d,\beta,\gamma})$ 中高度坐标为正的点，不会改变拉盖尔镶嵌。事实上， $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ 中的每个点都是 $\eta'_{d-1,\beta-\frac{1}{2},\gamma}$ 的聚点，因此抛物面生长过程$\Psi(\eta'_{d-1,\beta-\frac{1}{2},\gamma})$ 的下边界包含于 $\mathbb{R}^{d-1} \times (-\infty, 0]$，而高度坐标为正的点对镶嵌没有影响。

情形 (iii)。最后，我们考虑 $f(\zeta_{d,\ \lambda,\ \gamma})$，它是 L' 中的一个泊松点过程。为计算其强度测度 μ，取任意博雷尔集 $B \subset L$ 和任意 $s \in \mathbb{R}$，并注意到 $\zeta_{d,\ \lambda,\ \gamma}$ 的一个原子 $(v,\ h)$ 经 f 映射后得到 $B \times (-\infty,\ s]$)，当且仅当 $(v_1,\ \ldots, v_{d-1}) \in B$ 且 $h + v_d^2 \leq s$。由此可得

$$\begin{aligned}
\mu(B \times (-\infty, s]) &= \gamma \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda h} \mathbf{1}(f(v, h) \in B \times (-\infty, s))\, \mathrm{d}h \mathrm{d}v \\
&= 2\gamma\, \lambda_{d-1}(B) \int_{-\infty}^s e^{h\lambda} \sqrt{s-h}\, \mathrm{d}h \\
&= \gamma\, \lambda_{d-1}(B) \frac{\sqrt{\pi} e^{\lambda s}}{\lambda^{3/2}}.
\end{aligned}$$

$f(\zeta_{d,\ \lambda,\ \gamma})$的强度测度密度为

$$(v', 0, h) \mapsto \gamma \sqrt{\pi/\lambda}\, e^{\lambda h}, \qquad v' \in \mathbb{R}^{d-1},\, h \in \mathbb{R}.$$

因此， $f(\zeta_{d,\ \lambda,\ \gamma})$在 L 内生成的拉盖尔镶嵌与$\mathcal{G}_{d-1,\ \lambda}$具有相同的分布（请注意，参数 γ 不会影响高斯-沃罗诺伊镶嵌的分布）。

这就证明了关于 $\ell = d-1$ 的结论。对于一般的 $1 \le \ell \le d-2$，我们可以将上述论证重复 $d-\ell$ 次。

□

5 截面泊松-沃罗诺伊镶嵌

5.1 面强度与典型胞的期望体积

正如我们在推论 4.2 中所证明的，截面泊松-沃罗诺伊镶嵌 $\mathcal{W}_{d,\ \rho} \cap \mathbb{R}^\ell$ 可识别为一种适当的 β-沃罗诺伊镶嵌。这使得我们能够显式计算截面泊松-沃罗诺伊镶嵌的若干泛函。我们首先给出一个关于 j 维面的强度公式。该量记为 $\gamma_j(\mathcal{W}_{d,\ \rho} \cap \mathbb{R}^\ell)$，其定义见第 2 节。

Th定理 5.1. 设 $d \ge 2$、$1 \le \ell \le d-1$ 和 $0 \le j \le \ell$。那么，对于任意 $\rho > 0$，有

$$\gamma_j(\mathcal{W}_{d,\rho} \cap \mathbb{R}^\ell) = \rho^{\frac{\ell}{d}} \frac{2\mathbb{J}_{\ell+1,\ell-j+1}(\frac{d-\ell-1}{2})\pi^{\frac{\ell}{2}}}{d(\ell+1)} \frac{\Gamma(\frac{(\ell+1)(d-1)}{2}+1)\Gamma(\ell+1-\frac{\ell}{d})\Gamma(\frac{d}{2}+1)^{\ell+1-\frac{\ell}{d}}}{\Gamma(\frac{(\ell+1)(d-1)+1}{2})\Gamma(\frac{\ell+2}{2})\Gamma(\frac{d+1}{2})^{\ell+1}},$$

wher

$$\mathbb{J}_{\ell+1,\ell-j+1}\left(\frac{d-\ell-1}{2}\right) = \binom{\ell+1}{j} \frac{\Gamma(\frac{(d-1)(\ell+1)+3}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{(d-1)(\ell+1)}{2}+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} (\cosh u)^{-(d-1)(\ell+1)-2} \times \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^u (\cosh v)^{d-1}\mathrm{d}v\right)^j \mathrm{d}u \tag{5.1}$$

且 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 表示虚数单位。

证明。根据推论 4.2，我们有 $\gamma_j(\mathcal{W}_{d,\rho} \cap \mathbb{R}^\ell) = \gamma_j(\mathcal{V}_{\ell,\ \frac{d-\ell-2}{2},r})$，其中 $r = r(d)\rho = \pi^{\frac{d+1}{2}}\rho/\Gamma(\frac{d+1}{2})$。将 [7, 定理 6]（应用时取参数$d := \ell+1$、$\beta := \frac{d-\ell-2}{2}$和 $j := \ell - j$）与 [7, 命题 3]（取参数 $d := \ell+1$、$k := \ell+1-j$）结合，即可得到 $\gamma_j(\mathcal{V}_{\ell,\ \frac{d-\ell-2}{2},r})$ 的公式。注意，[7, 定理 6] 引用了 [7, 定理 2]，应用后者时需取参数 $d := \ell+1$、$s := 1$、$\nu := 0$、$\gamma := r$。

□

注记 5.2。对于一般的 $d \ge 0$、$k \in \{1, \dots, d+1\}$ 和 $\beta \ge -1$，量 $\mathbb{J}_{d+1,\ k}(\beta)$ 具有自然的几何意义。具体而言，$\mathbb{J}_{d+1,\ k}(\beta)$ 等于随机 β-单纯形的 k 顶点面处内角和的期望；随机 β-单纯形定义为 d 维单位球中 $d+1$ 个独立随机点的凸包，这些点的密度与 $(1-\|x\|^2)^\beta$ 成正比，详见 [7, 第 6 节。1] 根据这一解释可直接推出 [11]

$$\begin{aligned}
&\mathbb{J}_{1,1}(\beta) = \mathbb{J}_{2,1}(\beta) = \mathbb{J}_{2,2}(\beta) = 1,\\
&\mathbb{J}_{3,1}(\beta) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{J}_{3,2}(\beta) = \frac{3}{2}, \qquad \mathbb{J}_{3,3}(\beta) = 1,\\
&\mathbb{J}_{\ell+1,\ell}(\beta) = \frac{\ell+1}{2}, \qquad \mathbb{J}_{\ell+1,\ell+1}(\beta) = 1,
\end{aligned}$$

对任意 $\ell \ge 1$ 和 $\beta \ge -1$ 均成立。此外，若用 Σ_d 表示一个正则 d 维单纯形，并用 $\sigma_k(\Sigma_d)$ 表示其 k 顶点面处的内角和，则

$$\mathbb{J}_{d+1,k}(\infty) := \lim_{\beta\to\infty} \mathbb{J}_{d+1,k}(\beta) = \sigma_k(\Sigma_d)$$

根据 [7,命题 2]。

	$d=2$	$d=3$	$d=4$	$d=5$	$d=6$
$\ell=1$	$\frac{\pi}{4\sqrt{\rho}}$	$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4\pi\rho}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}$	$\frac{15\pi^{3/2}}{64\cdot\sqrt[4]{8\rho}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$	$\frac{7\sqrt[5]{5}}{3\cdot\sqrt[5]{648\pi^2\rho}\cdot\Gamma\left(\frac{9}{5}\right)}$	$\frac{2835\cdot\sqrt[6]{3}\cdot\pi^{3/2}}{16384\cdot\sqrt[6]{32\rho}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}$
$\ell=2$	–	$\frac{5\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3\pi^5\rho^2}\cdot\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}$	$\frac{24\sqrt{2}}{35\sqrt{\pi\rho}}$	$\frac{77\cdot 2^{4/5}}{5\cdot 15^{3/5}\cdot\pi^{9/5}\cdot\rho^{2/5}\cdot\Gamma\left(\frac{13}{5}\right)}$	$\frac{50\cdot\sqrt[3]{6}}{143\cdot\sqrt[3]{\rho}\cdot\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)}$
$\ell=3$	–	–	$\frac{280665\cdot\pi^{3/2}}{821248\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\rho^{3/4}\cdot\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)}$	$\frac{56\cdot 15^{3/5}\cdot\sqrt[5]{2/\pi}}{187\cdot\rho^{3/5}\cdot\Gamma\left(\frac{17}{5}\right)}$	$\frac{17320875\cdot\sqrt{3/2}\cdot\pi}{176201728\cdot\sqrt{\rho}}$
$\ell=4$	–	–	–	$\frac{144848704\cdot 2^{3/5}}{15^{6/5}\pi^{8/5}\left(1692197-141120\pi^2\right)\rho^{4/5}\Gamma\left(\frac{21}{5}\right)}$	$\frac{15\cdot 6^{2/3}}{13\cdot\rho^{2/3}\cdot\Gamma\left(\frac{13}{3}\right)}$
$\ell=5$	–	–	–	–	$\frac{6823504578515625\cdot 3^{5/6}\cdot\pi^{3/2}}{4912276871446528\cdot\sqrt[6]{2}\cdot\rho^{5/6}\cdot\Gamma\left(\frac{31}{6}\right)}$

表 5.1： $\mathbb{E}\mathrm{vol}(Z_{d,\,\ell,\,\rho})$ 在 d 和 ℓ取较小值时的结果。

作为定理 5.1的推论，我们可以计算截面泊松-沃罗诺伊镶嵌的典型胞$Z_{d,\,\ell,\,\rho}$ 的期望体积$\mathcal{W}_{d,\,\rho}\cap\mathbb{R}^{\ell}$。注意，体积在平移下保持不变，因此在定义典型胞时，中心函数的选择并不重要。对于 $\ell=1$ 和 $\ell=2$ ，Miles [20] 研究了这一量，并证明

$$\mathbb{E}\,\mathrm{vol}(Z_{d,1,\rho})=\rho^{-\frac{1}{d}}\frac{\Gamma(d-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{d+1}{2})^2}{(d-1)!\Gamma(2-\frac{1}{d})\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2}+1)^{1-\frac{1}{d}}},$$
$$\mathbb{E}\,\mathrm{vol}(Z_{d,2,\rho})=\rho^{-\frac{2}{d}}\frac{3d\cdot\Gamma(\frac{3d}{2}-1)\Gamma(\frac{d+1}{2})^3}{\pi\Gamma(\frac{3d-1}{2})\Gamma(3-\frac{2}{d})\Gamma(\frac{d}{2}+1)^{3-\frac{2}{d}}},$$

参见 [20]中的公式（4.1）和（4.4）。我们的结果将其推广到任意 $1\le\ell\le d-1$； d 和 ℓ 取较小值时的特殊情形汇总于表 5.1。

推论 5.3。 设 $\rho>0$。那么，对于任意 $d\ge 2$ 和 $1\le\ell\le d-1$ ，我们有

$$\mathbb{E}\,\mathrm{vol}(Z_{d,\ell,\rho})=\rho^{-\frac{\ell}{d}}\frac{d(\ell+1)}{2\mathbb{J}_{\ell+1,1}(\frac{d-\ell-1}{2})\pi^{\frac{\ell}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{(\ell+1)(d-1)+1}{2})}{\Gamma(\frac{(\ell+1)(d-1)}{2}+1)}\frac{\Gamma(\frac{\ell+2}{2})}{\Gamma(\ell+1-\frac{\ell}{d})}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})^{\ell+1}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)^{\ell+1-\frac{\ell}{d}}}.$$

证明。 由 [27, 公式（10.4）] 可知， $\mathbb{E}\mathrm{vol}(Z_{d,\,\ell,\,\rho})=\gamma_{\ell}(\mathcal{W}_{d,\,\rho}\cap\mathbb{R}^{\ell})^{-1}$。右端由定理 5.1 给出。 □

注 5.4。 对于 $\ell=d$ ，推论 5.3 仍然成立，此时它给出的典型泊松-沃罗诺伊胞腔的期望体积为 $\mathbb{E}\,\mathrm{vol}(Z_{d,\,d,\,\rho})=1/\rho$。量 $\mathbb{J}_{\ell+1,\,1}(-\frac{1}{2})$ 根据 [12, 定理 3.9] 中给出的公式以及伽马函数的勒让德倍增公式，与伽马因子相消。对于 $\ell=d$ ，定理 5.1 也仍然成立，并给出泊松-沃罗诺伊镶嵌中 j-面的强度；另一公式见 [11, 注 2.10] 。

在下一个结果中，我们计算当 $d\to\infty$ 且 $\ell\in\mathbb{N}$ 保持固定时， d 维泊松-沃罗诺伊镶嵌与 $\mathbb{R}^{\ell}$ 相交所得的 j 维面的强度极限。

命题 5.5. 固定一些 $\ell\in\mathbb{N}$ 和 $0\le j\le\ell$。设 $(\rho_d)_{d\in\mathbb{N}}$ 是一个正数列，满足$\lim_{d\to\infty}(\rho_d)^{1/d}=\kappa>0$。那么，

$$\lim_{d\to\infty}\gamma_j(\mathcal{W}_{d,\rho_d}\cap\mathbb{R}^{\ell})=\frac{\mathbb{J}_{\ell+1,\ell-j+1}(\infty)(\kappa^2\pi e)^{\frac{\ell}{2}}}{\sqrt{\ell+1}}\frac{2(\ell-1)!}{\Gamma(\frac{\ell}{2})},$$

其中 $\mathbb{J}_{\ell+1,\,\ell-j+1}(\infty)$ 是正则 ℓ 维单纯形Σ_{ℓ}的$(\ell-j)$维面处的角度和；参见注 *5.2*。

*Re*标记 5.6. 例如，我们可以令 $\rho_d=\rho>0$ 为常数，此时 $\kappa=1$.

命题 *5.5* 的证明。由定理 5.1,

$$\begin{aligned}\lim_{d\to\infty}\gamma_j(\mathcal{W}_{d,\rho_d}\cap\mathbb{R}^\ell) &= \lim_{d\to\infty}\frac{2\mathbb{J}_{\ell+1,\ell-j+1}(\frac{d-\ell-1}{2})\pi^{\frac{\ell}{2}}}{d(\ell+1)\rho_d^{-\frac{\ell}{d}}}\frac{\Gamma(\frac{(\ell+1)(d-1)}{2}+1)}{\Gamma(\frac{(\ell+1)(d-1)+1}{2})}\frac{\Gamma(\ell+1-\frac{\ell}{d})}{\Gamma(\frac{\ell+2}{2})}\frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)^{\ell+1-\frac{\ell}{d}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})^{\ell+1}}\\ &= \frac{2\mathbb{J}_{\ell+1,\ell-j+1}(\infty)(\kappa^2\pi)^{\frac{\ell}{2}}}{\ell+1}\frac{2\Gamma(\ell)}{\Gamma(\frac{\ell}{2})}\lim_{d\to\infty}\frac{1}{d}\frac{\Gamma(\frac{(\ell+1)(d-1)}{2}+1)}{\Gamma(\frac{(\ell+1)(d-1)+1}{2})}\frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)^{\ell+1-\frac{\ell}{d}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})^{\ell+1}}.\end{aligned}$$

根据伽马函数的斯特林公式，$\Gamma(z)=\sqrt{2\pi/z}(z/e)^z(1+O(z^{-1}))$。由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n\,n^z)()}{\Gamma\,n+z}=1$，我们得到

$$\lim_{d\to\infty}\gamma_j(\mathcal{W}_{d,\rho_d}\cap\mathbb{R}^\ell)=\frac{\mathbb{J}_{\ell+1,\ell-j+1}(\infty)(\kappa^2\pi e)^{\frac{\ell}{2}}}{\sqrt{\ell+1}}\frac{2\Gamma(\ell)}{\Gamma(\frac{\ell}{2})}\lim_{d\to\infty}\Big(\frac{d}{4\pi}\Big)^{\frac{\ell}{2d}}=\frac{\mathbb{J}_{\ell+1,\ell-j+1}(\infty)(\kappa^2\pi e)^{\frac{\ell}{2}}}{\sqrt{\ell+1}}\frac{2\Gamma(\ell)}{\Gamma(\frac{\ell}{2})}.$$

至此，论证完成。 □

现在我们研究高维泊松-沃罗诺伊镶嵌在固定维数截面 ℓ 中的典型胞期望体积的渐近行为。

推论 5.7。 设$(\rho_d)_{d\in\mathbb{N}}$ 为正数列，且$\lim_{d\to\infty}(\rho_d)^{1/d}=\kappa>0$。那么，对每个 $\ell\in\mathbb{N}$,

$$\lim_{d\to\infty}\mathbb{E}\,\mathrm{vol}(Z_{d,\ell,\rho_d})=\frac{\sqrt{\ell+1}}{\mathbb{J}_{\ell+1,1}(\infty)(\kappa^2\pi e)^{\frac{\ell}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{\ell}{2})}{2(\ell-1)!},$$

其中 $\mathbb{J}_{\ell+1,1}(\infty)$ 是正则 ℓ 维单纯形 Σ_ℓ 各顶点处立体角之和；见注 *5.2*。

证明。 由 $\mathbb{E}\mathrm{vol}(Z_{d,\ell,\rho_d})=\gamma_\ell(\mathcal{W}_{d,\rho_d}\cap\mathbb{R}^\ell)^{-1}$ 这一事实（见 [27, 公式（10.4）]），再对 $j=\ell$ 应用命题 5.5，即可得出结论。 □

在特殊情形 $\ell=1,2$ 下，对于每个固定的 $\rho>0$，推论 5.7 结合注 5.2 的结果可得，对于任意常数 $\rho>0$，极限关系为

$$\lim_{d\to\infty}\mathbb{E}\,\mathrm{vol}(Z_{d,1,\rho})=\frac{1}{\sqrt{2e}},\qquad\text{and}\qquad\lim_{d\to\infty}\mathbb{E}\,\mathrm{vol}(Z_{d,2,\rho})=\frac{\sqrt{3}}{e\pi},$$

这已由 Miles 的研究 [20, pp. 318, 319] 得知。此外，对于 $\ell=3$，我们得到

$$\lim_{d\to\infty}\mathbb{E}\,\mathrm{vol}(Z_{d,3,\rho})=\big(4e^{3/2}(3\arccos(1/3)-\pi)\big)^{-1},$$

例如。这是因为正四面体顶点处的立体角为$\theta:=\frac{1}{4\pi}(3\arccos(1/3)-\pi)$，这意味着 $\mathbb{J}_{4,1}(\infty)=\sigma_1(\Sigma_3)=4\theta=\frac{3}{\pi}\arccos(1/3)-1$。

5.2 典型 k-面 的期望内在体积和 f-向量

结合截面泊松-沃罗诺伊镶嵌的典型胞体积 $Z_{d,\ell,\rho}$，我们还可以考察其内在体积。根据 [27, p. 222]，我们回顾一下：紧凸集 $K\subset\mathbb{R}^d$ 的第 $0\le m\le d$ 阶内在体积 $V_m(K)$ 可定义为

$$V_m(K):=\frac{d!}{m!(d-m)!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)\Gamma(\frac{d-m}{2}+1)}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\mathbb{E}\lambda_m(K|L),$$

其中，$L\subset\mathbb{R}^d$ 是维数为 m的均匀分布的随机子空间，$K|L$ 表示将 K 正交投影到 L 上所得的投影，而 $\lambda_m(K|L)$表示其 m维勒贝格测度。此外，我们还可以不考虑

典型截面胞，而对 $1 \le k \le \ell$ 考虑截面泊松-沃罗诺伊镶嵌$\mathcal{W}_{d,\rho} \cap \mathbb{R}^\ell$的典型 k维面片 $Z^{(k)}_{d\,\ell\ ,,\rho}$ ；正式定义见第 2 节或 [27, 第 450] 页。例如，$k = \ell$ 时得到典型胞，$k = \ell - 1$ 时得到截面镶嵌的典型面片，而 $k = 1$ 时得到典型边。根据 [27, 第 466-467] 页关于一般平稳各向同性随机镶嵌的结果（结合其中最后两个公式），我们得出

$$\mathbb{E}V_j(Z^{(k)}_{d,\ell,\rho}) = \frac{\ell!}{j!(\ell - j!)} \frac{\Gamma(\frac{j}{2}+1)\Gamma(\frac{\ell-j}{2}+1)}{\Gamma(\frac{\ell}{2}+1)} \frac{\gamma_{k-j}(\mathcal{W}_{d,\rho} \cap \mathbb{R}^{\ell-j})}{\gamma_k(\mathcal{W}_{d,\rho} \cap \mathbb{R}^\ell)}, \tag{5.2}$$

其中 $d \ge 2$，且 $1 \le \ell \le d-1$、$0 \le k \le \ell$ 和 $0 \le j \le k$。根据推论 5.3，可以将此表达式完全写成显式形式：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}V_j(Z^{(k)}_{d,\ell,\rho}) = \Big(\frac{\rho}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\Big)^{-\frac{j}{d}} \frac{(\ell+1)!}{j!(\ell-j+1)!} \frac{\Gamma(\frac{j}{2}+1)}{\pi^{j/2}} \frac{\mathbb{J}_{\ell-j+1,\ell-k+1}(\frac{d-\ell+j-1}{2})}{\mathbb{J}_{\ell+1,\ell-k+1}(\frac{d-\ell-1}{2})} \\ \times \frac{\Gamma(\frac{(\ell-j+1)(d-1)}{2}+1)\Gamma(\ell-j+1-\frac{\ell-j}{d})}{\Gamma(\frac{(\ell+1)(d-1)}{2}+1)\Gamma(\ell+1-\frac{\ell}{d})} \frac{\Gamma(\frac{(\ell+1)(d-1)+1}{2})\Gamma(\frac{d+1}{2})^j}{\Gamma(\frac{(\ell-j+1)(d-1)+1}{2})\Gamma(\frac{d}{2}+1)^j}.\end{aligned} \tag{5.3}$$

对于维数为 $\ell = 2$的交集，Miles [20, 在第 319] 页的方程 (4.4)、(4.5) 推导出了典型胞的期望面积和周长公式，这些公式是上述公式的特例。利用命题 5.5，很容易推导出式 (5.2) 的大 d 极限。具体而言，若 $\lim_{d\to\infty}(\rho_d)^{1/d} = \kappa > 0$，则

$$\lim_{d\to\infty} \mathbb{E}V_j(Z^{(k)}_{d,\ell,\rho_d}) = \frac{\sqrt{\ell+1}}{\sqrt{\ell-j+1}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{j}{2}+1)}{j!(\kappa^2\pi e)^{j/2}} \cdot \frac{\mathbb{J}_{\ell-j+1,\ell-k+1}(\infty)}{\mathbb{J}_{\ell+1,\ell-k+1}(\infty)}.$$

对于维数为 $\ell = 2$ 和 3（以及 $k = \ell$）的交集，我们得到了 Miles [20, 第 319, 320] 页的结果。

最后，我们讨论截面沃罗罗伊镶嵌 $\mathcal{W}_{d,\rho} \cap \mathbb{R}^\ell$ 的典型胞的 j维面的期望数量，记作 $\mathbb{E}f_j(Z_{d,\ell,\rho})$，其中 $\rho > 0$、$d \ge 2$、$1 \le \ell \le d-1$ 和$0 \le j \le \ell-1$。利用以下事实：以概率 1，截面镶嵌的每个 j维面恰好包含在其一个胞的边界中（由镶嵌的正规性可知），可得

$$\mathbb{E}f_j(Z_{d,\ell,\rho}) = (\ell - j + 1)\frac{\gamma_j(\mathcal{W}_{d,\rho} \cap \mathbb{R}^\ell)}{\gamma_\ell(\mathcal{W}_{d,\rho} \cap \mathbb{R}^\ell)}.$$

现在我们可以应用推论 5.3，得出

$$\mathbb{E}f_j(Z_{d,\ell,\rho}) = (\ell - j + 1)\frac{\mathbb{J}_{\ell+1,\ell-j+1}(\frac{d-\ell-1}{2})}{\mathbb{J}_{\ell+1,1}(\frac{d-\ell-1}{2})},$$

与 ρ 无关。显然，对于任意 $d \ge 2$，$\mathbb{E}f_0(Z_{d,1,\rho}) = 2$ 。此外，由于截面沃罗诺伊镶嵌是平稳且正规的，对于任意 $d \ge 2$ 和 $0 \le j \le 1$，$\mathbb{E}f_j(Z_{d,2,\rho}) = 6$ 。空间维数为 $d = 4$,5,6 时的一些非平凡取值汇总于表 5.2。

类似地，对于 $d \ge 2$、$1 \le \ell \le d-1$、$1 \le k \le \ell$ 和 $0 \le j \le k-1$，我们可以计算截面泊松-沃罗诺伊镶嵌 $\mathcal{W}_{d,\rho} \cap \mathbb{R}^\ell$ 的典型 k 维面 $Z^{(k)}_{d\,\ell\ ,,\rho}$ 中 j 维面的期望数量：

$$\mathbb{E}f_j(Z^{(k)}_{d,\ell,\rho}) = (k - j + 1)\frac{\mathbb{J}_{\ell+1,\ell-j+1}(\frac{d-\ell-1}{2})}{\mathbb{J}_{\ell+1,\ell-k+1}(\frac{d-\ell-1}{2})}.$$

在 d 趋于无穷大的极限下，这变为

$$\lim_{d\to\infty} \mathbb{E}f_j(Z^{(k)}_{d,\ell,\rho}) = (k - j + 1)\frac{\mathbb{J}_{\ell+1,\ell-j+1}(\infty)}{\mathbb{J}_{\ell+1,\ell-k+1}(\infty)}.$$

同样，对于 $\ell = 2$，3，我们得到了 Miles 的结果 [20, 第 320] 页。

	$d=4,\ \ell=3$	$d=5,\ \ell=3$	$d=5,\ \ell=4$	$d=6,\ \ell=3$	$d=6,\ \ell=4$	$d=6,\ \ell=5$
$j=0$	$\frac{10\,240}{401}$	$\frac{67\,200\pi^2}{26\,741}$	$\frac{4\,233\,600\pi^2}{1\,692\,197-141\,120\pi^2}$	$\frac{524\,288}{21\,509}$	$\frac{52\,003}{400}$	$\frac{34\,394\,098\,106\,368}{37\,477\,698\,299}$
$j=1$	$\frac{15\,360}{401}$	$\frac{100\,800\pi^2}{26\,741}$	$\frac{8\,467\,200\pi^2}{1\,692\,197-141\,120\pi^2}$	$\frac{786\,432}{21\,509}$	$\frac{52\,003}{200}$	$\frac{85\,985\,245\,265\,920}{37\,477\,698\,299}$
$j=2$	$\frac{5\,922}{401}$	$2+\frac{33\,600\pi^2}{26\,741}$	$\frac{10\,153\,182+4\,233\,600\pi^2}{1\,692\,197-141\,120\pi^2}$	$\frac{305\,162}{21\,509}$	$\frac{162\,009}{1\,000}$	$\frac{74\,276\,903\,321\,600}{37\,477\,698\,299}$
$j=3$	$-$	$-$	$\frac{10\,153\,182}{1\,692\,197-141\,120\pi^2}$	$-$	$\frac{64\,003}{2\,000}$	$\frac{25\,430\,109\,716\,480}{37\,477\,698\,299}$
$j=4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\frac{53\,194\,508\,510}{707\,126\,383}$

表 5.2： $\mathbb{E}f_j(Z_{d,\ \ell,\ \rho})$ 在 d、 ℓ 和 j 取较小值时的情况。

6 高维下向高斯-沃罗诺伊镶嵌的收敛

在第 5.1 节和第 5.2 节中，我们显式计算了截面泊松-沃罗诺伊镶嵌 $\mathcal{W}_{d,\ \rho_d}\cap\mathbb{R}^\ell$ 的若干特征，以及当 $d\to\infty$ 和 $(\rho_d)^{1/d}\to\kappa>0$，而 $\ell\in\mathbb{N}$ 保持固定时，这些特征在相应极限下的取值。结果表明，这些极限与镶嵌 $\mathcal{G}_{\ell,\ \lambda}$ 在 $\lambda=\kappa^2\pi e$下的相应特征一致。例如，对于高斯-沃罗诺伊镶嵌 $\mathcal{G}_{\ell,\ \lambda}$ 的典型胞 $Z(\mathcal{G}_{\ell,\ \lambda})$，根据 [8, 节（其中考虑了 $\lambda=1/2$ 这一特殊情形），已知

$$\mathbb{E}\,\mathrm{vol}(Z(\mathcal{G}_{\ell,\lambda}))=\frac{\sqrt{\ell+1}}{\mathbb{J}_{\ell+1,1}(\infty)\lambda^{\frac{\ell}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{\ell}{2})}{2(\ell-1)!}.$$

如果取 $\lambda=\kappa^2\pi e$，该公式与推论 5.7 中得到的公式一致。在接下来的两个定理中，我们将通过证明相应镶嵌及典型胞的弱收敛，解释这一点以及其他类似的一致性。

定理 6.1。 取任意正数列 $(\rho_d)_{d\in\mathbb{N}}$，使得 $\lim_{d\to\infty}(\rho_d)^{1/d}=\kappa>0$，并令 $\ell\in\mathbb{N}$ 固定。则当 $d\to\infty$ 时，截面泊松-沃罗诺伊镶嵌 $\mathcal{W}_{d,\ \rho_d}\cap\mathbb{R}^\ell$ 按如下意义收敛于 $\mathcal{G}_{\ell,\ \kappa^2\pi e}$：可以在同一概率空间上定义所有这些随机镶嵌，使得对于每个半径为 $R>0$、以原点为中心的 ℓ-维球 $B_R\subset\mathbb{R}^\ell$，$\mathcal{W}_{d,\ \rho_d}\cap\mathbb{R}^\ell$ 与 $\mathcal{G}_{\ell,\ \kappa^2\pi e}$ 在 B_R 上的限制相一致的概率，当 $d\to\infty$时收敛于 1。

注记 6.2。 （随机）镶嵌 $\mathcal{T}$的骨架是（随机）闭集 $\mathrm{skel}(\mathcal{T})=\bigcup_{c\in\mathcal{T}}$边界 c，其中 $\mathrm{bd}\,c$ 表示胞腔 c的拓扑边界。定理 6.1 中出现的收敛模式意味着，随机闭集 $\mathrm{skel}(\mathcal{W}_{d,\rho_d}\cap\mathbb{R}^\ell)$ 弱收敛到随机闭集 $\mathrm{skel}(\mathcal{G}_{\ell,\ \kappa^2\pi e})$，当 $d\to\infty$时；关于这一概念，请参见 [27, 第 2] 章。

定理 6.1 的证明。 该定理的证明基本沿用 [8], 中定理 4.2 的证明思路，因此这里省略一些细节。根据推论 4.2，截面镶嵌 $\mathcal{W}_{d,\rho_d}\cap\mathbb{R}^\ell$ 与 $\mathcal{V}_{\ell,\beta_d,\gamma_d}$ 具有相同的分布，其中

$$\beta_d=\frac{1}{2}(d-\ell)-1\qquad\text{and}\qquad\gamma_d=\pi^{\frac{d+1}{2}}\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)^{-1}\rho_d.$$

我们将证明，当 $d\to\infty$ 时，泊松点过程 $\eta_{\ell,\ \beta_d,\ \gamma_d}$ 经过适当的垂直平移后，收敛到 $\zeta_{\ell,\ \kappa^2\pi e,\ 1}$；其定义见第 3.3 节。垂直平移 $Q_d:\mathbb{R}^{\ell+1}\to\mathbb{R}^{\ell+1}$ 由$Q_d(v,\ \ h)=(v,\ \ h-a_d)$ 给出，其中

$$a_d=\frac{1}{\pi}\Big(\frac{\pi\Gamma(\frac{d-\ell}{2})}{\rho_d}\Big)^{\frac{2}{d-\ell-2}}.\tag{6.1}$$

请注意，对点过程施加这样的垂直平移不会改变所得的拉盖尔镶嵌，因为这相当于沿高度坐标平移所有抛物面。

接下来，我们证明，当 $d\to\infty$ 时，泊松点过程 $\xi_{\ell,d}:=Q_d(\eta_{\ell,\beta_d,\gamma_d})$ 的强度函数收敛于 $\xi_{\ell,\infty}:=\zeta_{\ell,\kappa^2\pi e,1}$ 的强度函数，并且在 $\mathbb{R}^{\ell+1}$ 的每个紧子集上一致收敛。事实上， $Q_d(\eta_{\ell,\beta_d,\gamma_d})$ 的强度函数为

$$\begin{aligned}f_d(v,h)&=\frac{\rho_d\pi^{\frac{d-\ell}{2}}}{\Gamma(\frac{d-\ell}{2})}(h+a_d)^{\frac{d-\ell-2}{2}}\mathbf{1}\big(h+a_d>0\big)\\&=\frac{\rho_d\pi^{\frac{d-\ell}{2}}}{\Gamma(\frac{d-\ell}{2})}a_d^{\frac{d-\ell-2}{2}}\Big(1+\frac{h}{a_d}\Big)^{\frac{d-\ell-2}{2}}\mathbf{1}\big(h+a_d>0\big)\\&=\Big(1+\frac{h}{a_d}\Big)^{a_d\cdot\frac{d-\ell-2}{2a_d}}\mathbf{1}\big(h+a_d>0\big).\end{aligned}$$

伽马函数的斯特林公式和 (6.1) 得出

$$\lim_{d\to\infty}\frac{d-\ell-2}{2a_d}=\frac{1}{\kappa^2\pi}\lim_{d\to\infty}\frac{d-\ell+2}{2\Gamma(\frac{d-\ell}{2})^{\frac{2}{d-\ell+2}}}=\kappa^2\pi e\lim_{d\to\infty}\frac{d-\ell+2}{(d-\ell)^{\frac{d-\ell}{d-\ell+2}}}=\kappa^2\pi e.$$

特别要注意， $a_d\to\infty$ 当 $d\to\infty$ 时。由此可知，只要 h 保持有界，$\lim_{d\to\infty}f_d(v,h)=e^{\kappa^2\pi eh}$ 就一致成立。根据标准结果，即命题 3.6 和 3.19], ，这也意味着相应泊松点过程的弱收敛。

在证明点过程 $\xi_{\ell,d}$ 在 $d\to\infty$ 时收敛到 $\xi_{\ell,\infty}$ 之后，我们将说明如何将这一结果推广到相应镶嵌 $\mathcal{L}_\Psi(\xi_{\ell,d})$ 在 $d\to\infty$ 时收敛到 $\mathcal{L}_\Psi(\xi_{\ell,\infty}$。注意， $\mathcal{L}_\Psi(\xi_{\ell,d})$ 的分布与 $\mathcal{W}_{d,\rho_d}\cap\mathbb{R}^\ell$ 相同，而 $\mathcal{L}_\Psi(\xi_{\ell,\infty})$ 的分布与 $\mathcal{G}_{\ell,\kappa^2\pi e}$ 相同（见推论 4.2 和第 3.2 节）。

我们固定一个半径为 $R>0$ 、以原点为中心的 ℓ 维球 $B_R\subset\mathbb{R}^\ell$ ，并且对于任意 $\varepsilon>0$ ，我们旨在找到一个区域 $K(R,\varepsilon)\subset\mathbb{R}^{\ell+1}$，它与 d 无关，使得以至少 $1-\varepsilon$ 的概率，镶嵌 $\mathcal{L}_\Psi(\xi_{\ell,d})$ 和 $\mathcal{L}_\Psi(\xi_{\ell,\infty})$ 在 B_R 上的限制完全由点过程 $\xi_{\ell,d}$ 和 $\xi_{\ell,\infty}$ 在 $K(R,\varepsilon)$ 上的限制决定，且对任意 d 均成立。为此，我们注意到， $\mathcal{L}_\Psi(\xi_{\ell,d})$ 可视为沿 h 轴对相应抛物面生长过程$\Psi(\xi_{\ell,d})$ 边界所作的垂直投影（见第 3.2 节）。由此可知，若镶嵌 $\mathcal{L}_\Psi(\xi_{\ell,d})$ 和$\mathcal{L}_\Psi(\xi_{\ell,\infty})$ 在 B_R 上的限制不一致，那么相应抛物面凸包过程 $\mathrm{bd}\,\Psi(\xi_{\ell,d})$ 和 $\mathrm{bd}\,\Psi(\xi_{\ell,\infty})$ 的边界在圆柱体 $B_R\times\mathbb{R}$ 上的限制也不一致。现在可以按如下方式构造区域 $K(R,\varepsilon)$。首先，我们考虑事件 $E(T,r)$：$\mathrm{bd}\,\Psi(\xi_{\ell,d})$ 在圆柱体 $B_R\times\mathbb{R}$ 上的限制完全由 $\mathrm{bd}\,\Psi(\xi_{\ell,d})$ 在圆柱体$B_{R+r}\times(-\infty,T]$ 上的限制决定，其中某些 $T,r>0$。这里的意思是，对于每个抛物面 $\Pi_{+,x}$，若其满足 $x\in\mathrm{ext}(\Psi(\xi_{\ell,d}))$，则集合 $\Pi_{+,x}\cap\mathrm{bd}\,\Psi(\xi_{\ell,d})$ 要么与 $B_R\times\mathbb{R}$ 不相交，要么包含于 $B_{R+r}\times(-\infty,T]$。我们有

$$1-\mathbb{P}(E(T,r))\le c_1(R+r)^\ell(e^{c_2(4T-r^2)}+e^{-c_3T^{c_4}}),\qquad r,d>c_5,\tag{6.2}$$

其中所有常数 $c_1,\dots,c_5$ 均为正，且与参数 d、r 和 T 无关。由于此估计的证明与 [8, 引理 4.4] （ T 的估计）和 [8, 引理 4.5] （ r 的估计）的证明完全采用相同的方法，我们决定省略技术细节。特别地，(6.2) 表明，对于任意 $\varepsilon>0$，都可以选择 $T_0:=T(\varepsilon)$ 和 $r_0:=r(\varepsilon)$，使得 $\mathbb{P}(E(T_0,r_0))\ge1-\varepsilon$。对于 $\Psi(\xi_{\ell,\infty})$，同样成立。此外，我们注意到，若抛物面 $\Pi_{+,x}$ 满足 $x\in\mathrm{ext}(\Psi(\xi_{\ell,d}))$，且有 $\Pi_{+,x}\cap\mathrm{bd}\,\Psi(\xi_{\ell,d})\subset B_{R+r_0}\times(-\infty,T_0]$，则

$$x\in\{(v,h)\in\mathbb{R}^{\ell+1}\colon h\le T_0,\|v\|\le R+r_0+\sqrt{T_0-h}\}=:K(R,\varepsilon).$$

为了完成证明，只需说明存在一个耦合，使 $\xi_{\ell,d}$ 和 $\xi_{\ell,\infty}$ 定义在同一共同概率空间上，且当 $d\to\infty$ 时，这两个过程在区域 $K(R,\varepsilon)$ 上的限制不一致的概率趋于 0。在一种适当的耦合下，该概率有上界，为它们的强度测度在 $K(R,\varepsilon)$ 上的限制之差的 L^1-范数的某个常数倍，参见 [23, 定理 3.2。2] 如上所示，当 $d\to\infty$ 时，密度 $f_d(v,h)$ 一致收敛于 $e^{\kappa^2\pi eh}$

在紧集上一致收敛，因而逐点收敛。此外，由不等式 $1+x \le e^x$，我们有 $f_d(v,h) \le e^{c_6 h}$，其中某个绝对常数为 $c_6 > 0$。该上界在 $K(r,\varepsilon)$ 上可积这一事实已在 [8, 公式（4.18）] 中证明。因此，$f_d(v,h)$ 关于 $K(R,\varepsilon)$ 上的 L^1-范数收敛，这保证了所需的泊松过程耦合确实存在。论证至此完成。 □

现在我们的目标是证明截面泊松-沃罗诺伊镶嵌的典型胞弱收敛到高斯-沃罗诺伊镶嵌的典型胞。固定某个 $\ell \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{C}$ 为 $\mathbb{R}^\ell$ 的紧子集所构成的空间，并赋予豪斯多夫度量。设 $\mathcal{C}' = \mathcal{C}\backslash\{\varnothing\}$。下文考虑的典型胞是相对于某个固定的中心函数 z 定义的：按照第 2 节中的意义，$\mathcal{C}' \to \mathbb{R}^\ell$，且还满足 $z(C) \in C$，对每个 $C \in \mathcal{C}'$ 均成立。

定理 6.3。 任取正数列 $(\rho_d)_{d\in\mathbb{N}}$，满足 $\lim_{d\to\infty}(\rho_d)^{1/d} = \kappa > 0$。那么，当 $d \to \infty$ 时，截面泊松-沃罗诺伊镶嵌的典型胞的分布 $\mathcal{W}_{d,\ \rho_d} \cap \mathbb{R}^\ell$ 在 $\mathcal{C}$ 上弱收敛到高斯-沃罗诺伊镶嵌的典型胞的分布 $\mathcal{G}_{\ell,\ \kappa^2\pi e}$。

该定理是定理 6.1 和以下一般结果的推论。

命题 6.4。 设 $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在 $\mathbb{R}^\ell$ 上的一列平稳随机镶嵌，并按以下意义收敛于定义在 $\mathbb{R}^\ell$ 上的平稳随机镶嵌 $\mathcal{T}_\infty$：所有随机镶嵌均定义在同一个共同概率空间上，并且对每个 $R > 0$，都有 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n(R)] = 1$，其中 $A_n(R)$ 是指 $\mathcal{T}_n$ 和 $\mathcal{T}_\infty$ 在 $[-R,R]^\ell$ 上的限制相同这一事件。更准确地说，$A_n(R) = A_n'(R) \cap A_n''(R)$，其中

$A_n'(R)$: = {对每个 $C \in \mathcal{T}_n$，使得 $C \cap [-R,R]^\ell \neq \varnothing$，存在 $C' \in \mathcal{T}_\infty$，使得 $C \cap [-R,R]^\ell = C' \cap [-R,R]^\ell$}，$A_n''(R)$: = {对每个 $C' \in \mathcal{T}_\infty$，使得 $C' \cap [-R,R]^\ell \neq \varnothing$，存在 $C \in \mathcal{T}_n$，使得 $C \cap [-R,R]^\ell = C' \cap [-R,R]^\ell$}.

此外，假设 $\mathcal{T}_n$ 的胞元强度收敛于 $\mathcal{T}_\infty$的胞元强度，即$\lim_{n\to\infty} \gamma_\ell(\mathcal{T}_n) = \gamma_\ell(\mathcal{T}_\infty)$，且这些强度均有限。那么，$\mathcal{T}_n$ 的典型胞的分布在 $\mathcal{C}$上弱收敛于 $\mathcal{T}_\infty$ 的典型胞的分布：

$$\mathbb{P}^z_{\mathcal{T}_n,\ell} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}^z_{\mathcal{T}_\infty,\ell}, \qquad \textit{weakly on } \mathcal{C}. \tag{6.3}$$

证明。 设 f： $\mathcal{C} \to \mathbb{R}$ 是有界连续函数，并回忆 $z(C)$是某个胞腔 C的中心。考虑随机变量

$$\xi_n := \sum_{C\in\mathcal{T}_n,\ z(C)\in[0,1]^\ell} f(C), \qquad n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}.$$

根据定义，$\mathcal{T}_n$ 的典型胞的分布满足

$$\int_{\mathcal{C}} f \,\mathrm{d}\mathbb{P}^z_{\mathcal{T}_n,\ell} = \frac{\mathbb{E}\xi_n}{\gamma_\ell(\mathcal{T}_n)}, \qquad n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}.$$

由于$\lim_{n\to\infty} \gamma_\ell(\mathcal{T}_n) = \gamma_\ell(\mathcal{T}_\infty)$，要证明(6.3)，只需验证

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n = \mathbb{E}\xi_\infty. \tag{6.4}$$

下面我们将定义一个“良好”事件 $C_n(R)$，在该事件上 ξ_n 和 ξ_∞ 相等。对于 $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$和 $R > 3$，考虑随机事件

$$B_n(R) := \{\nexists C \in \mathcal{T}_n : C \cap [0,1]^\ell \neq \varnothing, C \not\subset [-R/2, R/2]^\ell\}.$$

具有该定义所列性质的胞腔 C 在镶嵌 $\mathcal{T}_n$中称为“长单元”。若不存在长单元，则事件 $B_n(R)$ 发生。在事件 $A_n(R)$ 上，每个长单元 $C \in \mathcal{T}_n$ 都对应一个长单元 $C' \in \mathcal{T}_\infty$，二者在 $[-R,R]^\ell$上的限制相同。由此可得 $A_n(R) \cap (B_n(R))^c \subset (B_\infty(R))^c$。

由于 $\mathcal{T}_\infty$ 中的所有胞几乎必然有界，因此与 $[0,1]^\ell$相交的 $\mathcal{T}_\infty$ 中的胞腔的最大直径是一个几乎必然有限的随机变量 M。由此可得

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}[A_n(R)\cap(B_n(R))^c]\le\lim_{R\to\infty}\mathbb{P}[(B_\infty(R))^c]\le\lim_{R\to\infty}\mathbb{P}[M>(R/2)-1]=0.$$

还要回想，对于每个固定的 $R>0$，$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}[A_n(R)]=1$。现在考虑"好"事件 $C_n(R):=A_n(R)\cap B_n(R)$ 和"坏"事件 $D_n(R):=(C_n(R))^c$。由上述内容可得

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}[D_n(R)]=0. \tag{6.5}$$

注意，在事件 $C_n(R)$ 发生时，集合 $\{C\in\mathcal{T}_n\colon z(C)\in[0,1]^\ell\}$ 和 $\{C'\in\mathcal{T}_\infty\colon z(C')\in[0,1]^\ell\}$ 相等，这意味着 $\xi_n=\xi_\infty$。事实上，每个满足 $z(C)\in[0,1]^\ell$ 的胞腔 $C\in\mathcal{T}_n$ 都包含于 $[-R/2,R/2]^\ell$（因为 $z(C)\in C$，且不存在长单元），因此，C 也是 $\mathcal{T}_\infty$ 的一个胞腔（因为事件 $A_n(R)$ 发生）。反过来，对于每个满足 $z(C')\in[0,1]^\ell$ 的胞腔 $C'\in\mathcal{T}_\infty$，都存在一个胞腔 $C\in\mathcal{T}_n$，使得 C 和 C' 在 $[-R,R]^\ell$ 上的限制相同（因为事件 $A_n(R)$ 发生），且 C 不是长单元（因为事件 $B_n(R)$ 发生），由此可得 $C=C'$。因此

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}(C_n(R))\,\xi_n]=\mathbb{E}[\mathbf{1}(C_n(R))\,\xi_\infty],\qquad n\in\mathbb{N},\,R>3.$$

要完成（6.4）的证明，只需验证

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}[\mathbf{1}(D_n(R))\,\xi_n]=0,\qquad\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}[\mathbf{1}(D_n(R))\,\xi_\infty]=0.$$

鉴于（6.5），只需检查族 $\{\xi_n\colon n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}\}$ 一致可积。现在，

$$|\xi_n|\le\|f\|_\infty\eta_n\quad\text{with}\quad\eta_n:=\sum_{C\in\mathcal{T}_n,\,z(C)\in[0,1]^\ell}1,\qquad n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}.$$

正如上文所观察到的，在事件 $D_n(R)$ 之外，我们有 $\eta_n=\eta_\infty$。由（6.5）可知，$\eta_n\to\eta_\infty$ 几乎必然成立。另一方面，根据命题的假设，我们有 $\mathbb{E}\eta_n=\gamma_\ell(\mathcal{T}_n)\to\gamma_\ell(\mathcal{T}_\infty)=\mathbb{E}\eta_\infty$（且所有这些期望均有限）。这两个性质与 $\eta_n\ge0$ 一起意味着族 $\{\eta_n\colon n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}\}$ 一致可积。事实上，若非如此，我们就能找到 $\varepsilon>0$，使得经过取子列后，$\mathbb{E}[\eta_n\mathbf{1}(Q_n)]>\varepsilon$ 对某些事件 Q_n 成立，且 $\mathbb{P}[Q_n]<1/2^n$。令 $W_k:=\cup_{n=k}^\infty Q_n$。若 K 足够大，则 $\mathbb{E}[\eta_\infty\mathbf{1}(W_K)]<\varepsilon/2$，而对所有 $n\ge K$，$\mathbb{E}[\eta_n\mathbf{1}(W_K)]>\varepsilon$。对变量 $(\eta_n\mathbf{1}((W_K)^c))_{n\ge K}$ 应用 Fatou引理，会与假设 $\mathbb{E}\eta_n\to\mathbb{E}\eta_\infty$ 矛盾。最后，界 $|\xi_n|\le\|f\|_\infty\eta_n$ 意味着族 $\{\xi_n\colon n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}\}$ 也一致可积，证明完毕。

□

致谢

ZK 和 CT 获得了德国研究联合会（DFG）优先计划 SPP 2265 随机几何系统的资助。AG 和 ZK 获得了德国研究联合会（DFG）通过德国卓越战略 EXC 2044 – 390685587，明斯特数学：动力学—几何—结构提供的资助。

参考文献

[1] P. Calka、T. Schreiber 和 J. E. Yukich. 球内凸包的布朗极限、局部极限与方差渐近。《Ann. Probab.》，41(1):50–108，2013.[2] P. Calka 和 J. E. Yukich. 光滑凸体中随机多胞体的方差渐近。《概率论及相关领域》，158(1-2):435–463，2014.[3] P. Calka 和 J. E. Yukich. 高斯多面体的方差渐近与尺度极限。《概率论及相关领域》，163(1-2):259–301，2015.

[4] P. Calka 和 J. E. Yukich. 随机多胞体的方差渐近与尺度极限。《Adv. Math.》，304:1–55，2017.[5] P. Calka 和 J. E. Yukich. 扰动随机点集的凸包。《Ann. Appl. Probab.》，31(4):1598–1632，2021.[6] S. N. Chiu、R. van de Weygaert 和 D. Stoyan. 截面泊松-沃罗诺伊镶嵌并非沃罗诺伊镶嵌。《Adv. in Appl. Probab.》，28(2):356–376，1996.[7] A. Gusakova、Z. Kabluchko 和 C. Thäle. β-德洛内镶嵌：模型描述与典型胞的几何性质。《Adv. in Appl. Probab.》，54(4):1252–1290，2022.[8] A. Gusakova、Z. Kabluchko 和 C. Thäle. β-德洛内镶嵌 II：高斯极限镶嵌。《Electron. J. Probab.》，(27):1–33，2022.[9] A. Gusakova、Z. Kabluchko 和 C. Thäle. β-德洛内镶嵌 III：Kendall 问题与高维极限定理。《ALEA》，《Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.》，19:23–50，2022.[10] A. Gusakova、Z. Kabluchko 和 C. Thäle. β-德洛内镶嵌 IV：混合性质与中心极限定理。《Stoch. and Dynamics》，已接收。预印本见：https://arxiv.org/abs/2108.09472，2023.[11] Z. Kabluchko. 随机单形的角与随机多胞体的面数。《Adv. Math.》，380:论文编号 107612，68 页，2021.[12] Z. Kabluchko. 随机单形角度的递归方案及其在随机多胞体中的应用。《Discrete Comput. Geom.》，66:902–937，2021.[13] Z. Kabluchko、D. Temesvari 和 C. Thäle. 随机 β-多胞体的期望内在体积与面数。《Math. Nachr.》，292(1):79–105，2019.[14] Z. Kabluchko 和 C. Thäle. 球面上沃罗诺伊镶嵌的典型胞。《Discrete Comput. Geom.》，66:1330–1350，2021.[15] Z. Kabluchko、C. Thäle 和 D. Zaporozhets. β-多胞体与泊松多面体： f-向量与角。《Adv. Math.》，374:论文编号 107333，63 页，2020.[16] O. Kallenberg.《现代概率论基础》。概率论及其应用（纽约）。施普林格出版社，纽约，第二版，2002.[17] G. Last 和 M. Penrose.《泊松过程讲义》，数学统计学会教科书丛书第 7 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2018.[18] C. Lautensack.《随机拉盖尔镶嵌》。博士论文，2007.[19] C. Lautensack 和 S. Zuyev. 随机拉盖尔镶嵌。《Adv. in Appl. Probab.》，40(3):630–650，2008.[20] R.E. Miles. 截面 Voronoi 镶嵌。《阿根廷数学联盟杂志》，29:301–327.[21] W. Nagel. 体视学。载于《随机几何新视角》，第 451–475 页。牛津大学出版社，牛津，2010.[22] A. Okabe、B. Boots、K. Sugihara 和 S. N. Chiu.《空间镶嵌：沃罗诺伊图的概念与应用》。威利概率与统计丛书。约翰·威利父子公司，奇切斯特，第二版，2000。D. G. Kendall 作序。[23] R.-D. Reiss.《点过程教程》。施普林格统计学丛书。施普林格出版社，纽约，1993.[24] S. I. Resnick.《极值、正则变差与点过程》。施普林格运筹学与金融工程丛书。施普林格，纽约，2008。1987 年原版重印。[25] M. Schlottmann. 周期与准周期拉盖尔镶嵌。《国际现代物理学杂志 B》，7(6-07):1351–1363，1993 年 1 月。[26] R. Schneider 和 W. Weil.《随机几何》。Teubner 数学随机学讲义。（《Teubner 数学随机学文本》。）B. G. Teubner，斯图加特，2000.[27] R. Schneider 和 W. Weil.《随机几何与积分几何》。概率论及其应用（纽约）。施普林格出版社，柏林，2008.[28] T. Schreiber 和 J. E. Yukich. 广义增长过程的方差渐近与中心极限定理及其在凸包和极大点中的应用。《Ann. Probab.》，36:363–396，2008.[29] D. Stoyan、W. S. Kendall 和 J. Mecke.《随机几何及其应用》。威利概率与数理统计丛书：应用概率与统计。约翰·威利父子公司，奇切斯特，1987。D. G. Kendall 作序。