将微波与光学光纠缠

Rishabh Sahu*, [1], [†] Liu Qiu*,[1], [‡] William Hease,[1] Georg Arnold,[1]Yuri Minoguchi,[2] Peter Rabl,[2] 以及 Johannes M. Fink[1], [§][1] *Institute of Science and Technology Austria, Am Campus 1, 3400 Klosterneuburg, Austria*[2] *Vienna Center for Quantum Science and Technology, Atominstitut, TU Wien, 1040 Vienna, Austria*（日期：2023年1月10日）

纠缠是一种真正的量子力学性质，也是当前正在发展的量子技术中的关键资源。让超导微波电路与光学或原子系统共享这种脆弱的性质，将带来新的功能，但由于 $\sim 10^5$ 能量失配巨大，以及由此导致的相互损耗和噪声，这一目标一直难以实现。在这项工作中，我们在毫开尔文环境下制备并验证了微波场与光场之间的纠缠。通过使用光学脉冲驱动的超导电光器件，我们确定性地制备出一个行进波微波-光学态，其压缩度为 $0.72^{+0.31}_{-0.25}$ dB，并以 > 5 个标准差违反了Duan-Simon可分性判据。这一成果确立了超导电路与电信波长光之间长期追寻的非经典关联，并对模块化、扩展、传感以及跨平台验证背景下的混合量子网络具有广泛意义。

arXiv:2301.03315v1 [quant-ph] 9 Jan 2023

过去几十年来，我们见证了在各种物理系统中操控和测量真正的量子力学特性（如量子叠加和纠缠）的能力取得了惊人的进步。这些技术如今已成为发展量子技术的基础。迄今取得的一些重要成果包括：利用数十个超导量子比特实现量子霸权 [1], 、基于核自旋实现超相干量子存储器 [2], ，以及利用光学光子在数十公里范围内实现分布式量子纠缠 [3] 。展望未来，将这些技术结合起来 [4–6] ，将推动通用量子网络的实现。在这类网络中，能够存储和处理量子信息的远程量子节点，可通过光学信道分发纠缠，从而彼此无缝通信 [7]。这一方案的部分内容已被用于远程连接并纠缠各种量子平台，包括单原子、离子、原子系综、量子点、稀土离子和氮空位中心 [8]。然而，对于其他颇具潜力的平台，例如半导体自旋量子比特，或由超导电路构成的局域低温网络 [9, 10],，要实现这种远距离量子连接则困难得多，因为它们没有与室温下抗噪声光学光子进行自然接口的途径。

为克服这一局限，目前人们正投入大量精力，致力于开发微波与光学光子之间的相干量子转导器 [11–16]。量子态的直接无噪声转换通常依赖于分束器过程，即由强驱动场介导弱微波信号与光学信号之间的转换——这是一种确定性方案，对转换效率和附加经典噪声提出了极其严苛的要求，而这些要求目前仍难以达到。另一种方式是直接产生量子关联的微波—光学光子对，也可将其用作资源，在连续变量和离散变量领域实现量子隐形传态和纠缠分发 [17–19]。

本文使用超低噪声腔电光器件，通过确定性协议生成此类非经典关联 [20]。该器件由一个直径为 5 毫米、150 μm 厚的铌酸锂光学谐振器组成，置于温度为 7 mK 的超导铝微波腔内，详细介绍见参考文献 [21]。如图1A 所示，微波模式 $\hat{a}_e$ 与光学回音壁模式位于同一空间位置，并与其发生电光耦合，频率为 $\omega_o/(2\pi) \approx 193.46$ THz，耦合通过普克尔斯效应实现。我们将可调微波共振频率 $\omega_e/(\{v35'>)$ 与 8。799吉赫兹的自由光谱范围 (FSR) 匹配，以实现三重共振系统 [22, 23] ，其相互作用哈密顿量为：

$$\hat{H}_{\rm int} = \hbar g_0 \hat{a}_p \hat{a}_e^\dagger \hat{a}_o^\dagger + \text{h.c.}, \tag{1}$$

，其中 g_0 为真空电光耦合率，而 $\hat{a}_p$ ($\hat{a}_o$) 是光学泵浦（斯托克斯）模的湮灭算符 [24]。这里我们忽略了与被抑制的光学反斯托克斯模 $\hat{a}_t$的相互作用，如图 1b 所示（见补充信息）。

在这种边带抑制情形下，强共振光学泵浦音可实现高效的双模压缩，从而得到简单的有效哈密顿量，$\hat{H}_{\rm eff} = \hbar g_0 \sqrt{\bar{n}_p}(\hat{a}_e^\dagger \hat{a}_o^\dagger + \hat{a}_e \hat{a}_o)$，其中 $\bar{n}_p = \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p \rangle$ 是光学泵浦模的平均腔内光子数。在量子反作用主导区（此时量子噪声超过微波热噪声），低于参量不稳定阈值（$C < 1$）时，可生成传播中的微波场与光学场之间的确定性连续变量纠缠。这里，$C = 4\bar{n}_p g_0^2/(\kappa_e \kappa_o)$表示协同性，真空耦合率为 $g_0/2\pi \approx 37$ Hz；微波模和光学斯托克斯模的总损耗率分别为 $\kappa_e/2\pi \approx 11$ MHz 和 $\kappa_o/2\pi \approx 28$ MHz。尽管

[†] rsahu@ist.ac.at

[‡] liu.qiu@ist.ac.at[§] jfink@ist.ac.at* 本文作者对本研究的贡献相同。

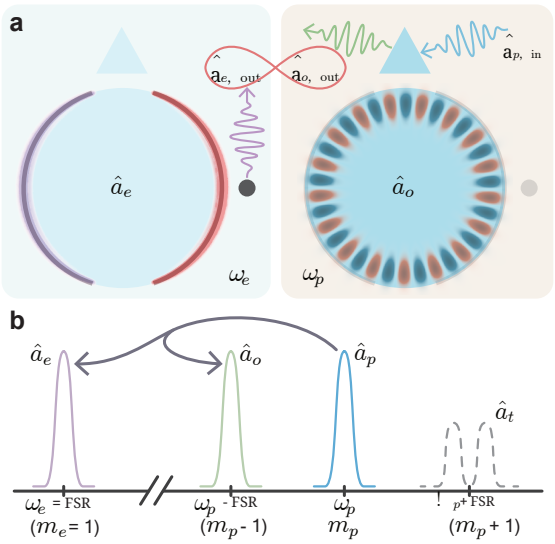


图 1. **物理和概念模式配置。a**，模拟的微波（左）和光学（右）模式分布，其方位数为 $m_e = 1$ 和 $m_o = 17$ （仅作示意，实验中为 $m_o \approx 20\,000$）。由于满足条件 $m_o = m_p - m_e$，因此实现了相位匹配，并在向外传播的微波场 $\hat{a}_{e,\ out}$ 与光学斯托克斯场 $\hat{a}_{o,\ out}$之间产生并验证了纠缠。**b**，相关模式的态密度示意图。在条件 $\omega_p - \omega_o = \omega_e$ 下，$\hat{a}_p$中的强泵浦音通过自发参量下转换，高效地产生 $\hat{a}_e$ 和 $\hat{a}_o$ 中的微波光子与光学光子对。通过将反斯托克斯模式 $\hat{a}_t$ 与辅助模式杂化，抑制频率上转换。

这种毫米级器件升温缓慢，因此即使需要高功率光学泵浦，也能实现所需的超低噪声运行 [21]。

接下来，我们通过无量纲正交分量对X_j和 P_j （微波和光学分别为 $j = e,\ o$）来表征微波和光学输出场，它们满足正则对易关系 $[X_j, P_j] = i$。随后构造一对爱因斯坦-波多尔斯基-罗森（EPR）型算符 $X_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_e + X_o)$ 和 $P_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_e - P_o)$。如果联合算符的方差低于真空水平，即 $\Delta^-_{\mathrm{EPR}} = \langle X_+^2 \rangle + \langle P_-^2 \rangle < 1$，

则微波和光学输出场处于纠缠态。这通常称为段-西蒙判据 [25, 26]，，我们将其应用于双模压缩输出模式的每个近共振频率分量（见补充材料）。

为实现高效的纠缠生成，我们使用一个持续 250 ns 的光学泵浦脉冲（≈ 244 $C \approx 0.18$ $\bar{n}_p \approx 1.6 \times 10^{10}$ 2 1 mW,,），重复频率为 Hz，参见图 2a 中的脉冲。纠缠后的输出光学信号经过法布里-珀罗腔滤波，以抑制强泵浦。纠缠后的微波输出由高电子迁移率晶体管放大器放大。两路输出均通过两个本地振荡器（本振）下变频至 40 兆赫的中频，并从外差探测中提取四个正交分量——

长期保持两个本振之间的相位稳定性，是通过第二个相位校准泵浦脉冲提取相对相位漂移实现的；该脉冲在每个纠缠脉冲之后 1μs 施加，同时还施加一个相干共振微波脉冲，如图 2(a) 所示。通过受激参量下转换，这会产生高信噪比的相干光信号，并使每次单独测量的相位都能得到校准。

图2b(c)展示了共振微波（光学）信号在一百万次平均下的时域平均功率，其频谱欠采样带宽为 40 兆赫（因此未显示完整的脉冲幅度）。两个插图展示了由脉冲1产生的自发参量下转换（SPDC）微波（光学）信号，参见图2a，其发射带宽为 ≈ 10 兆赫。实验后半段出现的较大信号是反射的微波脉冲和生成的光学音调（由脉冲2产生），后者用于本振相位校准。原始功率测量值除以测量带宽，并进行重新缩放，使非共振响应与实验装置的噪声光子数 $N_{j,\ \mathrm{add}} + 0.5$ 相符。测量中因损耗和放大器噪声导致的$N_{e,\ \mathrm{add}} = 13.1 \pm 0.4$ （全文误差）以及因光学损耗导致的$N_{o,\ \mathrm{add}} = 5.5 \pm 0.2$，分别通过对温控50 Ω负载进行噪声温度测量以及四端口校准仔细确定（见补充材料）。采用这一流程可确保所报告的光子数单位对应于器件输出端的信号。

我们继续在频域中进行分析，分别计算每项测量在三个不同时间区间内的傅里叶变换：之前（2 μ秒）、期间（200 ns）以及纠缠泵浦脉冲结束后立即（500 ns）。图2d 显示了这三个时间区间对应的平均微波噪声谱，以及相应的拟合曲线（虚线）和理论结果（实线）。在泵浦脉冲之前和之后，共振处的微波输出场均高于真空电平，拟合得到的微波内禀浴占据数分别为 $\bar{n}_{e,\ \mathrm{int}} = 0.03 \pm 0.01$ 和 0.09 ± 0.03。通过拟合额外的功率依赖测量结果，我们独立验证了观测到的噪声底对应的波导浴占据数仅为$\bar{n}_{e,\ \mathrm{wg}} = 0.001 \pm 0.002$ 而本实验中使用的平均泵浦功率极低，仅为 ≈ 0.12 μW（见补充材料）。因此，测得的噪声底对应于散粒噪声等效电平$N_{e,\ \mathrm{add}} + 0.5$ （灰色虚线）。类似地，图2e 显示了泵浦期间和之后获得的平均光学噪声谱，并以脉冲之前测得的散粒噪声电平为参照。正如预期，脉冲之后光学噪声电平没有明显升高。

泵浦脉冲期间，通过自发参量下转换过程产生了近似洛伦兹线形的微波和光学功率谱。我们使用一个包含测量带宽影响的五模理论模型，对脉冲期间的微波和光学功率谱密度进行联合拟合。

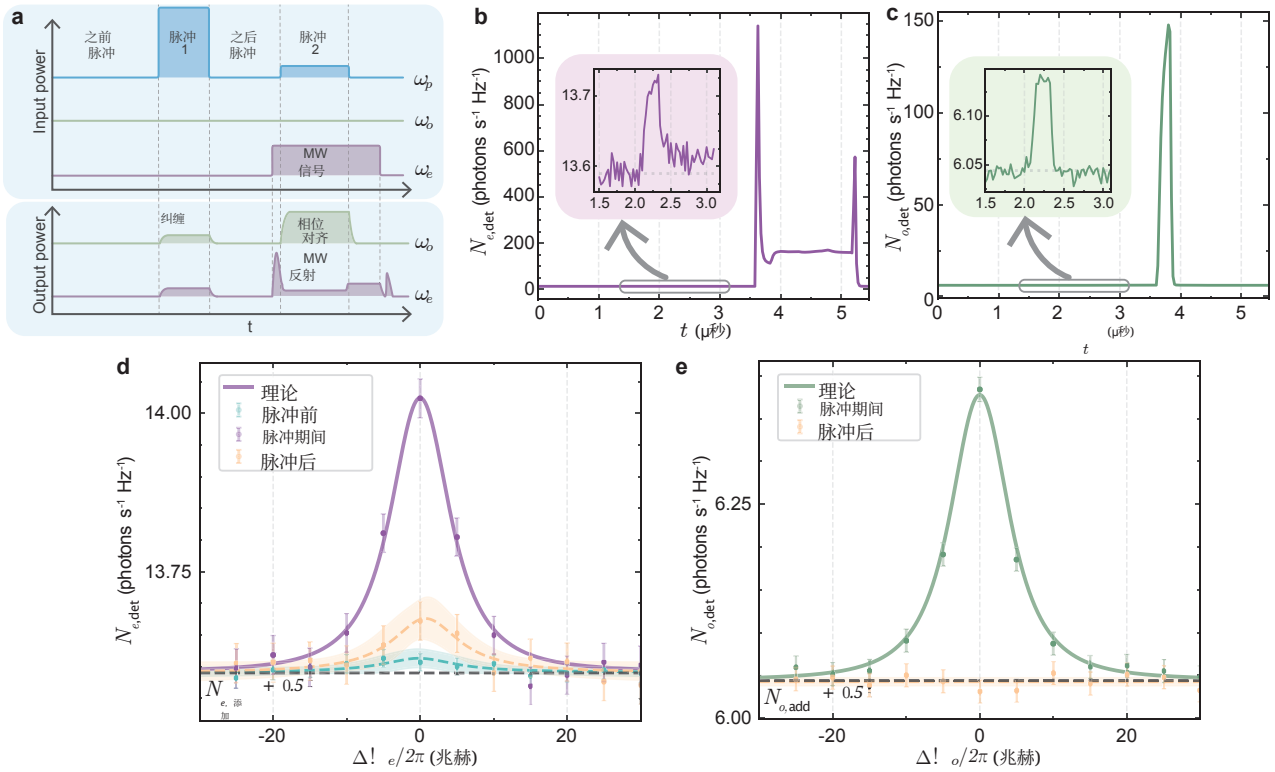


图2. **测量序列和噪声功率**。**a**，单次测量的脉冲序列示意图。在 ω_p 施加光学脉冲1，放大两个模式 $\hat{a}_e$ 和 $\hat{a}_o$ 中的真空（以及任何热噪声），从而产生SPDC信号。1 μs后，同时施加第二个光学泵浦和一个相干微波脉冲，前者的功率约低10倍，微波脉冲施加于 ω_{eo} 微波光子会刺激光学泵浦发生下转换，从而在 $\hat{a}_o$ 模式中产生相干脉冲，用于提取缓慢的本振相位漂移。**b** 和**c**，测得 $\hat{a}_e$ 和 $\hat{a}_o$ 模式的输出功率，以每秒光子数表示，带宽为1 Hz，并对一百万次实验取平均。插图显示了SPDC信号，虚线灰线表示经校准的探测噪声底 $N_{j,\ \mathrm{add}} + 0.5$。**d**，相应的微波输出功率谱密度随 $\Delta\omega_e = \omega - \omega_e$ 变化；测量频率在共振处，分别于纠缠脉冲前（紧邻脉冲）、脉冲期间和脉冲之后，如面板**a**所示。黄色和绿色虚线为洛伦兹函数拟合，由此得到纠缠脉冲前后的微波浴占据数。误差棒表示 2σ 统计标准误差，阴影区域表示拟合的95%置信区间。（**e**），相应的光学输出功率谱密度随 $\Delta\omega_o = \omega_o - \omega$ 变化，测量在纠缠脉冲期间和之后进行，且均以脉冲前测得的噪声底归一化。面板**d** 和**e** 中的脉冲期间噪声谱与理论联合拟合，由此得到 $C = 0.18 \pm 0.01$ 和 $\bar{n}_{e,\ \mathrm{int}} = 0.07 \pm 0.03$。

在该模型中，脉冲期间的微波浴占据数 $\bar{n}_{e,\ \mathrm{int}} = 0.07 \pm 0.03$ 以及协作度 $C = 0.18 \pm 0.01$ 是仅有的自由拟合参数。这里，收窄后的微波线宽 $\kappa_{e,\ \mathrm{eff}}/2\pi = 9.8 \pm 1.8$兆赫（取自洛伦兹拟合）与相干电光动力学反作用一致 [27]，其中 $\kappa_{e,\ \mathrm{eff}} = (1-C)\kappa_e$。我们由此得出结论：该腔电光器件深处于量子反作用主导区，这是高效生成微波-光学纠缠的先决条件。

对于每个频率分量，传播输出场的双部高斯态可由 4×4 协方差矩阵（CM） $V_{ij} = \langle \delta u_i \delta u_j + \delta u_j \delta u_i \rangle / 2$ 完整表征，其中 $\delta u_i = u_i - \langle u_i \rangle$ 和 $\{X_e, P_e, X_o, P_o\}$（见 SI）。

$\delta u_i = u_i - \langle u_i \rangle$ 中的对角元素对应各个输出场正交分量的无量纲方差——

。这些方差由测得的方差减去图中所示的测得探测噪声偏置得到。2，即 $V_{ii}(\Delta\omega) = V_{ii\ \mathrm{meas}}\ \Delta\omega_i - N_{i\ \mathrm{add}}$.

() . 。由图 2 在 $\Delta\omega = 0$ 处的数据得到的协方差矩阵以标准形式显示于图 3a。它对应于同轴线中传播的模式以及连接到器件输出端的耦合棱镜中的模式所处的量子态，也就是说，此时尚未发生装置损耗或放大。非零的非对角元素表明微波与光学正交分量之间存在强关联。

双模压缩正交分量通过准概率维格纳函数来表示会更加直观，

$$W(\mathbf{u}) = \frac{\exp[-\frac{1}{2}\mathbf{u}V^{-1}\mathbf{u}^T]}{\pi^2\sqrt{\det(\mathrm{V})}}, \qquad (2)$$

其中 $\mathbf{u} = (X_e,\ P_e,\ X_o,\ P_o)$。该维格纳函数的不同边缘分布如图 3b 所示，其中（X_e，X_o）和（P_e，P_o）边缘分布显示出对角线方向和非对角线方向上的双模压缩。两个交叉正交分量边缘分布所显示的压缩程度略有不同，这是由于测得的协方差矩阵中的统计不确定性所致。

图 3c 展示了微波与光学光子对之间的双模压缩程度。在 $\Delta\omega_j = \pm(\omega - \omega_j)$ 附近的共振处观测到了关联，这是由自发参量下转换过程中的能量守恒所致（见补充材料）。上方面板显示了微波正交分量方差的平均值（紫色圆点）$\bar{V}_{11} = (V_{11}+V_{22})/2$ 和光学正交分量方差的平均值（绿色圆点）$\bar{V}_{33} = (V_{33}+V_{44})/2$，同时还给出了五模理论的预测（实线）以及对洛伦兹函数的简单拟合（虚线），二者吻合极佳。测得的微波-光学关联（黄色圆点）$\bar{V}_{13} = (V_{13} - V_{24})/2$ 以及洛伦兹拟合（虚线）略低于理论预测（实线），我们认为这是相位稳定性仍存在缺陷所致（见补充材料）。

图3c底部的两个面板显示了压缩和反压缩联合正交分量方差 $\Delta^{\mp}{}_{\mathrm{EPR}} = \bar{V}_{11} + \bar{V}_{33} \mp 2\bar{V}_{13}$（分别以红色和蓝色表示）。我们观察到低于真空水平的双模压缩，即$\Delta^{-}{}_{\mathrm{EPR}} < 1$，其带宽接近有效微波线宽。共振时最大双模压缩为 $\Delta^{-}{}_{\mathrm{EPR}} = 0.85^{+0.05}_{-0.06}$（$2\sigma$，95%置信度），对应于 $\sim$1 $\bar{V}_{11} = 0.93$ $\bar{V}_{33} = 0.84$ $\bar{V}_{13} =$ 百万 0.46 个脉冲，且和。因而，这种确定性生成的微波-光学态违反了Duan-Simon可分离性判据，幅度为 $> 5\sigma$。请注意，该误差还考虑了用于缩放原始数据的附加噪声校准中的系统误差（见补充材料）。这些数值对应的态纯度为 $\rho = 1/(4\sqrt{\det[V]})$，并证明了输出光子之间存在微波-光学纠缠，其对数负性为 $E_N = 0.17$。补充材料还包含针对更长脉冲和不同光学泵浦功率的大量额外数据，这些数据进一步支持了本文呈现的结果和发现，尽管对于每种单独的泵浦配置，其统计显著性较低（见补充材料）。

结论与展望

总之，我们展示了传播中的微波光子与光学光子之间的确定性量子纠缠，从而在电路量子电动力学与量子光子学之间建立了非经典通信信道。我们的器件可轻松用于概率性预告辅助协议[7, 28, 29]，以减轻光学装置损耗，并将纠缠扩展至室温光纤。我们预计，通过改善热化、提高微波和光学品质因数，以及增强电光耦合以降低所需的泵浦功率及相关热负载，脉冲重复频率可提高数个数量级。耦合效率的提升将使更高水平的双模压缩成为可能，并有助于实现确定性纠缠分发方案 [30], 、基于隐形传态的态传输 [20, 31] 以及量子增强远程探测 [32]。此类器件完全兼容毫开尔文环境中的超导量子比特，将有助于把远程超导量子处理器集成到单个相干光学量子网络中。这不仅对模块化和扩展 [33, 34], 具有重要意义，也有助于高效地跨平台验证经典计算难以处理的量子处理器结果 [35]。

致谢

L.Q. 感谢与 Jie Li 和 David Vitali 进行的富有成效的讨论。本研究得到欧洲研究委员会依据资助协议编号 758053（ERC StG QUNNECT）以及欧盟地平线2020研究与创新计划依据资助协议编号 899354（FETopen SuperQuLAN）的支持。L.Q. 感谢 ISTFEL- LOW 计划提供的慷慨支持。W.H. 获得了 ISTplus博士后奖学金，该奖学金由欧盟地平线2020研究与创新计划通过 Marie Skłodowska-Curie 资助协议编号 754411 提供经费。G.A. 获得了奥地利科学院在奥地利科学技术研究所提供的 DOC奖学金。J.M.F. 感谢奥地利科学基金（F WF）通过 BeyondC（F7105）提供的支持，以及欧盟地平线2020研究与创新计划依据资助协议编号 862644（FETopen QUAR- TET）提供的支持。

作者贡献

RS、WH、LQ 和 GA 负责实验装置。RS 和 LQ 进行了测量。LQ 和 RS 进行了数据分析。LQ 在 RS、Y M 和 PR 的协助下建立了理论。RS 和 LQ 在所有作者的协助下撰写了手稿。JMF 负责监督该项目。

数据可用性声明

用于生成本手稿中各图的数据和代码将在 Zenodo 上公开。

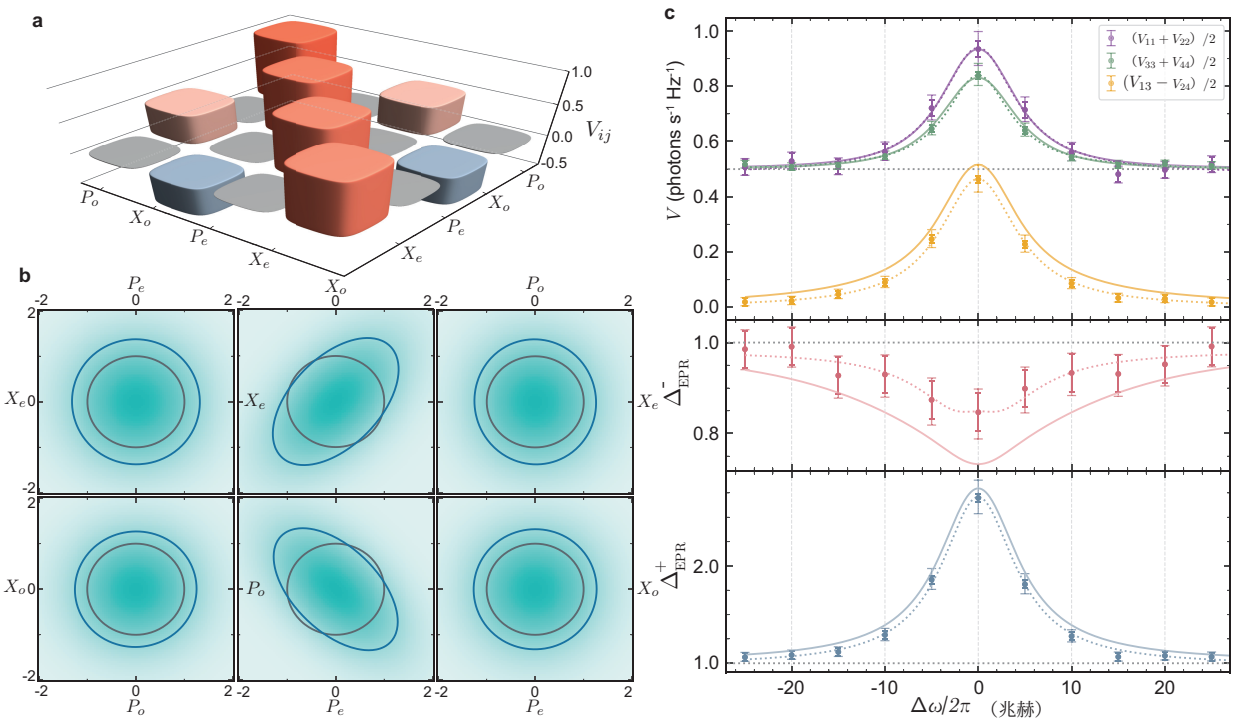


图 3. **双模压缩态的表征**。**a**，基于 925000 次测量绘制的标准形式下的测量协方差矩阵 V_{ij}，适用于 $\Delta\omega_j = 0$。**b**，不同输出正交分量对所对应的维格纳函数边缘分布与真空态的比较。蓝色（灰色）等高线表示测量态（真空态）从最大值开始的 $1/e$ 衰减。中间两幅图显示，在对角线和非对角线方向上均存在低于真空水平的双模压缩。**c**，上图为测量失谐的函数：平均微波输出噪声 $\bar{V}_{11} = (V_{11} + V_{22})/2$（紫色）、平均光学输出噪声 $\bar{V}_{33} = (V_{33} + V_{44})/2$（绿色）以及平均关联 $\bar{V}_{13} = (V_{11} - V_{24})/2$（黄色）。实线表示联合理论拟合，虚线为各自的洛伦兹拟合，仅作视觉参考。中图（下图）显示根据上图计算得出的红色双模压缩（蓝色反压缩），分别为 $\Delta^{\pm}{}_{\rm EPR} = \bar{V}_{11} + \bar{V}_{33} \pm 2\bar{V}_{13}$。深色误差棒表示 2σ 统计误差，外侧（较浅） 2σ 误差棒还包含测量装置附加噪声校准中的系统误差。

[1] F. Arute, K. Arya, R. Babbush, D. Bacon, J. C. Bardin, R. Barends, R. Biswas, S. Boixo, F. G. S. L. Brandao, D. A. Buell, B. Burkett, Y. Chen, Z. Chen, B. Chiaro, R. Collins, W. Courtney, A. Dunsworth, E. Farhi, B. Foxen, A. Fowler, C. Gidney, M. Giustina, R. Graff, K. Guerin, S. Habegger, M. P. Harrigan, M. J. Hartmann, A. Ho, M. Hoffmann, T. Huang, T. S. Humble, S. V. Isakov, E. Jeffrey, Z. Jiang, D. Kafri, K. Kechedzhi, J. Kelly, P. V. Klimov, S. Knysh, A. Korotkov, F. Kostritsa, D. Landhuis, M. Lind- mark, E. Lucero, D. Lyakh, S. Mandr`a, J. R. Mc- Clean, M. McEwen, A. Megrant, X. Mi, K. Michielsen, M. Mohseni, J. Mutus, O. Naaman, M. Neeley, C. Neill, M. Y. Niu, E. Ostby, A. Petukhov, J. C. Platt, C. Quin- tana, E. G. Rieffel, P. Roushan, N. C. Rubin, D. Sank, K. J. Satzinger, V. Smelyanskiy, K. J. Sung, M. D. Tre- vithick, A. Vainsencher, B. Villalonga, T. White, Z. J. Yao, P. Yeh, A. Zalcman, H. Neven, and J. M. Martinis, 《自然》**574**, 505 (2019)。

[2] M. Zhong, M. P. Hedges, R. L. Ahlefeldt, J. G. Bartholomew, S.E. Beavan, S. M. Wittig, J. J. Longdell, and M. J. Sellars, 《自然》**517**, 177 (2015)。[3] Y. Yu, F. Ma, X.-Y. Luo, B. Jing, P.-F. Sun, R.-Z. Fang, C.-W. Yang, H. Liu, M.-Y. Zheng, X.-P. Xie, W.- J. Zhang, L.-X. You, Z. Wang, T.-Y. Chen, Q. Zhang, X.-H. Bao, and J.-W. Pan, 《自然》**578**, 240 (2020)。[4] Z.-L. Xiang, S. Ashhab, J. Q. You, and F. Nori, Rev. Mod. Phys. **85**, 623 (2013)。[5] G. Kurizki, P. Bertet, Y. Kubo, K. Mølmer, D. Pet- rosyan, P. Rabl, and J. Schmiedmayer, 《美国国家科学院院刊》**112**, 3866 (2015)。[6] A. A. Clerk, K. W. Lehnert, P. Bertet, J. R. Petta, and Y. Nakamura, 《自然·物理》**16**, 257 (2020)。[7] L.-M. Duan, M. D. Lukin, J. I. Cirac, and P. Zoller, 《自 然》**414**, 413 (2001)。[8] S.-H. Wei, B. Jing, X.-Y. Zhang, J.-Y. Liao, C.-Z. Yuan, B.-Y. Fan, C. Lyu, D.-L. Zhou, Y. Wang, G.-W. Deng, H.-Z. Song, D. Oblak, G.-C. Guo, and Q. Zhou, 《激光与光子学评论》**16**, 2100219 (2022)。

[9] P. Magnard, S. Storz, P. Kurpiers, J. Sch¨ar, F. Marxer, J. L¨utolf, T. Walter, J.-C. Besse, M. Gabureac, K. Reuer, A. Akin, B. Royer, A. Blais, and A. Wallraff, Physical Review Letters 125, 260502 (2020)。[10] Y. Zhong, H.-S. Chang, A. Bienfait, ´E. Dumur, M.-H. Chou, C. R. Conner, J. Grebel, R. G. Povey, H. Yan, D. I. Schuster, and A. N. Cleland,《自然》590, 571 (2021)。[11] X. Han, W. Fu, C.-L. Zou, L. Jiang, and H. X. Tang, Optica 8, 1050 (2021)。[12] M. Mirhosseini, A. Sipahigil, M. Kalaee, and O. Painter,《自然》588, 599 (2020)。[13] R. Sahu, W. Hease, A. Rueda, G. Arnold, L. Qiu, and J. M. Fink, Nature Communications 13, 1276 (2022)。[14] B. M. Brubaker, J. M. Kindem, M. D. Urmey, S. Mittal, R. D. Delaney, P. S. Burns, M. R. Vissers, K. W. Lehnert, and C. A. Regal, Phys. Rev. X 12, 021062 (2022)。[15] A. Kumar, A. Suleymanzade, M. Stone, L. Taneja, A. Anferov, D. I. Schuster, and J. Simon, 量子极限毫米波到光学转换（2022），arXiv:2207.10121。[16] M. J. Weaver, P. Duivestein, A. C. Bernasconi, S. Scharmer, M. Lemang, T. C. van Thiel, F. Hijazi, B. Hensen, S. Gr¨oblacher, and R. Stockill, 面向可扩展量子计算的集成微波—光学接口（2022），arXiv:2210.15702。[17] S. Takeda, T. Mizuta, M. Fuwa, P. van Loock, and A. Fu- rusawa,《自然》500, 315 (2013)。[18] K. G. Fedorov, M. Renger, S. Pogorzalek, R. D. Candia, Q. Chen, Y. Nojiri, K. Inomata, Y. Nakamura, M. Parta- nen, A. Marx, R. Gross, and F. Deppe, Science Advances 7, eabk0891 (2021)。[19] S. L. N. Hermans, M. Pompili, H. K. C. Beukers, S. Baier, J. Borregaard, and R. Hanson,《自然》605, 663 (2022)。[20] A. Rueda, W. Hease, S. Barzanjeh, and J. M. Fink, npj Quantum Information 5, 1 (2019)。[21] W. Hease, A. Rueda, R. Sahu, M. Wulf, G. Arnold, H. G. Schwefel, and J. M. Fink, PRX Quantum 1, 020315 (2020)。[22] V. S. Ilchenko, A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, and L. Maleki, J. Opt. Soc. Am. B 20, 333 (2003)。

[23] L. Fan、C.-L. Zou、R. Cheng、X. Guo、X. Han、Z. Gong、S. Wang 和 H. X. Tang，Science Advances 4，eaar4994（2018）。[24] M. Tsang，物理评论 A 81，063837（2010）。[25] L.-M. Duan、G. Giedke、J. I. Cirac 和 P. Zoller，Physical Review Letters 84，2722（2000）。[26] R. Simon，Physical Review Letters 84，2726（2000）。[27] L. Qiu、R. Sahu、W. Hease、G. Arnold 和 J. M. Fink，《通过电光动态反作用对超导微波腔进行相干光学控制》（2022），arXiv:2210.12443。[28] C. Zhong、Z. Wang、C. Zou、M. Zhang、X. Han、W. Fu、M. Xu、S. Shankar、M. H. Devoret、H. X. Tang 和 L. Jiang，Physical Review Letters 124，010511（2020）。[29] S. Krastanov、H. Raniwala、J. Holzgrafe、K. Jacobs、M. Lonˇcar、M. J. Reagor 和 D. R. Englund，物理评论快报 127，040503（2021）。[30] J. Agust´ı、Y. Minoguchi、J. M. Fink 和 P. Rabl，Physical Review A 105，062454（2022）。[31] J. Wu、C. Cui、L. Fan 和 Q. Zhuang，Physical Review Applied 16，064044（2021）。[32] S. Barzanjeh、S. Guha、C. Weedbrook、D. Vitali、J. H. Shapiro 和 S. Pirandola，Physical Review Letters 114，080503（2015）。[33] S. Bravyi、O. Dial、J. M. Gambetta、D. Gil 和 Z. Nazario，应用物理学杂志 132，160902（2022）。[34] J. Ang、G. Carini、Y. Chen、I. Chuang、M. A. DeMarco、S. E. Economou、A. Eickbusch、A. Faraon、K.-M. Fu、S. M. Girvin、M. Hatridge、A. Houck、P. Hilaire、K. Kr-sulich、A. Li、C. Liu、Y. Liu、M. Martonosi、D. C. McKay、J. Misewich、M. Ritter、R. J. Schoelkopf、S. A. Stein、S. Sussman、H. X. Tang、W. Tang、T. Tomesh、N. M. Tubman、C. Wang、N. Wiebe、Y.-X. Yao、D. C. Yost 和 Y. Zhou，《多节点超导量子计算机架构》（2022），arXiv:2212.06167。[35] J. Kn¨orzer、D. Malz 和 J. I. Cirac，《量子网络中的跨平台验证》（2022），arXiv:2212.07789。

《将微波与光学光纠缠》的补充信息

Rishabh Sahu,[1,*] Liu Qiu,[1,*] William Hease,[1] Georg Arnold,[1] Yuri Minoguchi,[2] Peter Rabl,[2] and Johannes M. Fink[1]
[1] *Institute of Science and Technology Austria, am Campus 1, 3400 Klosterneuburg, Austria*
[2] *Vienna Center for Quantum Science and Technology, Atominstitut, TU Wien, 1040 Vienna, Austria*（日期：2023年1月10日）

arXiv:2301.03315v1 [quant-ph] 9 Jan 2023

目录

Page

I. 理论 3
基于输入-输出理论的协方差矩阵.3
1 量子朗之万方程.3 2 输入-输出理论.4 3 滤波输出场的协方差矩阵.6

B 外差探测、附加噪声与滤波.7 1 外差测量.7 2 实际测量：附加噪声与增益.8 3 基于实际外差测量的协方差矩阵.9 C 纠缠探测.10 1 杜安判据.10 2 对数负性与纯度.11

II. 实验装置 11

III. 装置表征与校准 11
A 微波附加噪声校准.11 B 光学附加噪声.14

IV. 数据处理 15
A 时域分析.15 B 脉冲后选择.16 C 频域分析.16 D 联合正交分量关联.17

V. 正交分量直方图原始数据 19

VI. 600 ns 长光学泵浦脉冲下的非经典关联 20

VII. 误差分析 20
A 统计误差.21 B 系统误差.22

参考文献 22

---

* 这两位作者贡献相同

正文中介绍	
$\hat{a}_e$	微波模式（湮灭算符）
m_e	微波模式方位角量子数 , $m_e = 1$
ω_e	微波腔频率
κ_e, $\kappa_{e,\mathrm{eff}}$, $\kappa_{e,\mathrm{in}}$, $\kappa_{e,0}$	微波总损耗、有效总损耗、波导耦合和本征损耗率
$\bar{n}_{e,\mathrm{int}}$, $\bar{n}_{e,\mathrm{wg}}$	微波本征浴和波导浴占据数
$N_{e,\mathrm{add}}$	微波探测中的附加噪声
$\hat{a}_o$, $\hat{a}_p$, $\hat{a}_t$, $\hat{a}_{\mathrm{tm}}$	光学斯托克斯、泵浦、反斯托克斯和横磁模（湮灭算符）
$\hat{a}_{e/o,\ \mathrm{out}}$	器件的微波和光学输出场
m_p	光学泵浦模的方位数, $m_p \sim 20000$
κ_o	光学总损耗率
$N_{o,\mathrm{add}}$	光学探测中的附加噪声
$\bar{n}_p$	光学泵浦模的平均光子数
g_0	电光真空耦合速率
g	光子增强电光耦合速率（$g = \sqrt{\bar{n}_p} g_0$}）
C	协作度（ $C = 4g^2/\kappa_e\kappa_o$ ）
X_e,P_e	微波输出场的正交分量
X_o,P_o	光学斯托克斯输出场的正交分量
V	双部高斯态的协方差矩阵, $V_{ij} = \langle \Delta u_i \Delta u_j + \Delta u_j \Delta u_i \rangle /2$, 其中 $\Delta u_i = u_i - \langle u_i \rangle$ 和 $u \in \{X_e, P_e, X_o, P_o\}$。
$N_{ii,\mathrm{add}}$	正交分量方差测量中的附加噪声, $N_{11,\mathrm{add}} = N_{22,\mathrm{add}} = N_{e,\mathrm{add}}$, $N_{33,\mathrm{add}} = N_{44,\mathrm{add}} = N_{o,\mathrm{add}}$
$V_{ii,\mathrm{meas}}$	校准后的 测量记录, $V_{ii} = V_{ii,\text{测量}} - N_{ii,\mathrm{add}}$
V_{11},V_{22}, $\bar{V}_{11}$	微波输出场的正交分量方差, $\bar{V}_{11} = \frac{V_{11}+V_{22}}{2}$
V_{33},V_{44}, $\bar{V}_{33}$	光学斯托克斯输出场的正交分量方差, $\bar{V}_{33} = \frac{V_{33}+V_{44}}{2}$
V_{13},V_{24}, $\bar{V}_{13}$	微波与光学正交分量之间的互相关, $\bar{V}_{13} = \frac{V_{13}-V_{24}}{2}$
$\Delta^{\mp}_{\mathrm{EPR}}$	微波与光学输出之间压缩和反压缩的联合正交分量方差场, $\Delta^{\mp}_{\mathrm{EPR}} = \bar{V}_{11} + \bar{V}_{33} \mp \bar{V}_{13}$
详见补充信息	
J	光学反斯托克斯模与 TM 模之间的耦合率
$\hat{a}^{\mathrm{in}}_{e/o,\ 0}$	微波和光学模式的输入场（噪声）算符
	微波和光学本征损耗的噪声算符
η_j	单个模式的外部腔耦合效率, $j \in (e, o, p, t)$
$\mathcal{G}(\omega)$	输出场的谱滤波器
$\hat{A}(\Omega)$	算符的傅里叶变换 $\hat{A}(\Omega) = \int \mathrm{d}t\, e^{i\Omega t} \hat{A}(t)$, $\hat{A}^\dagger(\Omega) = \int dt \hat{A}^\dagger(t) e^{i\Omega t} = [\hat{A}(-\Omega)]^\dagger$
$\hat{X}(\omega_n)$	X 输出频谱模的正交分量, $\hat{X}(\omega_n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \mathcal{G}(\omega_n - \omega) \hat{a}_{\mathrm{out}}(\omega) +$ 小时.c.
$\hat{P}(\omega_n)$	P 输出频谱模的正交分量, $\hat{P}(\omega_n) = \frac{1}{\sqrt{2}i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \mathcal{G}(\omega_n - \omega) \hat{a}_{\mathrm{out}}(\omega) +$ h。c。
$S_{\hat{A}\hat{B}}(\Omega)$	两个算符的双时关联, $S_{\hat{A}\hat{B}}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \hat{A}(t)\, \hat{B}(t') \right\rangle e^{i\Omega t} \mathrm{d}t$
Δ_{LO}	外差测量中本地振荡器与信号频率之差, $\Delta_{\mathrm{LO}} = \omega_{\mathrm{LO}} - \omega_{\mathrm{sig}}$
$I_{\mathrm{out}}(t)$ $I_{\mathrm{out}}(\omega)$	等效外差探测中的无量纲输出场
$S_{II}(\omega)$	等效外差探测中输出场的双边噪声谱
$G_{\mathrm{det}}(\omega)$	外差探测中的频率依赖探测增益
$\hat{I}_{X/P,\ \mathrm{det}}(\omega_n)$	外差探测中检测到的光电流正交分量，包括探测增益
$\hat{I}_{X/P,\ \mathrm{out}}(\omega_n)$	来自 I_{out} 的无量纲输出场正交分量（包括附加噪声）
$\mathcal{D}(\omega)$	检测到的正交分量的协方差矩阵来自外差测量记录
$V_{\mathrm{meas}}(\omega)$	测得的输出场正交分量总协方差矩阵（包括附加噪声）
$\hat{X}_+(\omega)$	联合正交分量 $\hat{X}_e(\omega)$ 和 $\hat{X}_o(-\omega)$, $\hat{X}_+(\omega) = (\hat{X}_e(\omega) + \hat{X}_o(-\omega))/\sqrt{2}$
$\hat{P}_-(\omega)$	.....的联合正交分量 $\hat{P}_e(\omega)$和 $\hat{P}_o(-\omega)$, $\hat{P}_-(\omega) = (\hat{P}_e(\omega) - \hat{P}_o(-\omega))/\sqrt{2}$
E_N	对数负性
ρ	态纯度

I. 理论

A. 输入-输出理论中的协方差矩阵

1. *Quantum Langevin Equations*

我们的腔电光（CEO）器件由一个毫米级铌酸锂光学谐振器构成，该谐振器置于一个温度为 mK 的三维超导微波腔中 [1]。铌酸锂中的普克尔斯效应使微波模式与光学回音壁模式之间能够直接耦合，并实现最大的场重叠。光学自由光谱范围（FSR）与微波腔频率相匹配，微波方位模式数为 $m_e = 1$。如正文图 1 所示，微波模式（$\hat{a}_e$）与三个相邻横电（TE）光学模式——即斯托克斯模（$\hat{a}_o$）、泵浦模（$\hat{a}_p$）和反斯托克斯模（$\hat{a}_t$）——之间通过腔增强电光相互作用 [2, 3]产生共振三波混频。此外，反斯托克斯模式还以 J [4] 的速率与一个频率相近、偏振方向正交的横磁（TM）光学模式（$\hat{a}_{\mathrm{tm}}$）耦合。因此，总相互作用哈密顿量为

$$\hat{H}_I/\hbar = g_0(\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_e \hat{a}_o + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_e^\dagger \hat{a}_t) + J\hat{a}_t \hat{a}_{\mathrm{tm}}^\dagger + h.c., \tag{1}$$

其中 g_0 为真空电光耦合率。

为高效生成纠缠，我们用一个短的相干输入脉冲 $\bar{a}_{p,\ \mathrm{in}}(t)$ 以频率 ω_p [1]强烈驱动泵浦模式，从而使泵浦模式的腔内平均场随时间变化 $\bar{a}_p(t)$，

$$\dot{\bar{a}}_p = \left(i\Delta_p - \frac{\kappa_p}{2}\right)\bar{a}_p + \sqrt{\eta_p \kappa_p}\bar{a}_{p,\mathrm{in}}, \tag{2}$$

其中，泵浦音与泵浦模式之间的失谐为 $\Delta_p = \omega_p - \omega_{o,\ p}$，$\kappa_p$ 和 η_p 分别为泵浦模式损耗率和外部耦合效率。在我们的实验中，我们主动将激光频率锁定到泵浦模式共振，且 $\Delta_p = 0$。

强泵浦场的存在产生了有效相互作用哈密顿量，

$$\hat{H}_{I,\mathrm{eff}}/\hbar = g(\hat{a}_e \hat{a}_o + \hat{a}_e \hat{a}_t^\dagger) + J\hat{a}_t \hat{a}_{\mathrm{tm}}^\dagger + h.c., \tag{3}$$

其中多光子耦合率为 $g = \bar{a}_p g_0$。这包括斯托克斯模与微波模之间的双模压缩（TMS）相互作用，以及反斯托克斯模式与微波模之间的分束器（BS）相互作用，从而产生散射的斯托克斯和反斯托克斯边带，它们分别位于泵浦音下方和上方 Ω_e 处。由于 TMS 相互作用 [5], ，通过自发参量下转换（SPDC）过程，可以实现微波与光学斯托克斯输出场之间的微波-光学纠缠；反斯托克斯模式与 TM 模之间的强耦合抑制了反斯托克斯散射，进一步促进了这一过程。我们可以获得腔内涨落场的完整动力学，其处于散射边带和微波共振的旋转参考系中，该动力学可由量子朗之万方程（QLE）描述，

$$\dot{\hat{a}}_e = -\frac{\kappa_e}{2}\hat{a}_e - ig\hat{a}_o^\dagger - ig^*\hat{a}_t + \sqrt{\eta_e \kappa_e}\delta\hat{a}_{e,\mathrm{in}} + \sqrt{(1-\eta_e)\,\kappa_e}\delta\hat{a}_{e,0}, \tag{4}$$

$$\dot{\hat{a}}_o = \left(i\delta_o - \frac{\kappa_o}{2}\right)\hat{a}_o - ig\hat{a}_e^\dagger + \sqrt{\eta_o \kappa_o}\delta\hat{a}_{o,\mathrm{in}} + \sqrt{(1-\eta_o)\,\kappa_o}\delta\hat{a}_{o,0}, \tag{5}$$

$$\dot{\hat{a}}_t = \left(i\delta_t - \frac{\kappa_t}{2}\right)\hat{a}_t - ig^*\hat{a}_e - iJ\hat{a}_{\mathrm{tm}} + \sqrt{\kappa_t}\delta\hat{a}_{t,\mathrm{vac}}, \tag{6}$$

$$\dot{\hat{a}}_{\mathrm{tm}} = \left(i\delta_{\mathrm{tm}} - \frac{\kappa_{\mathrm{tm}}}{2}\right)\hat{a}_{\mathrm{tm}} - iJ\hat{a}_t + \sqrt{\kappa_{\mathrm{tm}}}\delta\hat{a}_{\mathrm{tm,vac}}, \tag{7}$$

其中，κ_j 为各个模式的总损耗率，其中 $j \in (e, o, t, \mathrm{tm})$；$\eta_k$ 为输入场的外部耦合效率，其中 $k \in (e, o)$。我们注意到，光学光仅通过高效的棱镜耦合耦合至 TE 模式，并为简便起见，将有效模式重叠因子 Λ 纳入 η_o [1]。δ_j 对应模式 j 与散射边带之间的频率差，其中 $\delta_o = \omega_{o,p} - \omega_e - \omega_o$ 和 $\delta_{t/\mathrm{tm}} = \omega_{o,p} + \omega_e - \omega_{t/\mathrm{tm}}$主要由 FSR 和 ω_e 失配决定，同时还受到光学模式色散和残余光学模式耦合的影响。我们注意到，在共振泵浦且不存在光学模式色散和残余模式耦合的情况下，有 $\delta_o = -\delta_t$。在我们的实验中，我们将微波频率调至与光学 FSR 匹配，即 $\omega_e = \omega_{o,p} - \omega_o$。

Th所有相关模式的运动方程可以用更简洁的形式表示为 m

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t) = M(t)\boldsymbol{v}(t) + K\boldsymbol{f}_{\rm in}(t), \tag{8}$$

其中，我们定义了模式算符和噪声算符组成的向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= (\hat{a}_e, \hat{a}_e^\dagger, \hat{a}_o, \hat{a}_o^\dagger, \hat{a}_t, \hat{a}_t^\dagger, \hat{a}_{\rm tm}, \hat{a}_{\rm tm}^\dagger)^\top, \\ \boldsymbol{f}_{\rm in} &= (\delta\hat{a}_{e,0}, \delta\hat{a}_{e,0}^\dagger, \delta\hat{a}_{e,\rm in}, \delta\hat{a}_{e,\rm in}^\dagger, \delta\hat{a}_{o,0}, \delta\hat{a}_{o,0}^\dagger, \delta\hat{a}_{o,\rm in}, \delta\hat{a}_{o,\rm in}^\dagger, \delta\hat{a}_{t,\rm vac}, \delta\hat{a}_{t,\rm vac}^\dagger, \delta\hat{a}_{\rm tm,vac}, \delta\hat{a}_{\rm tm,vac}^\dagger)^\top,\end{aligned} \tag{9}$$

以及用于描述量子朗之万方程中确定性部分的矩阵，

$$M(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa_e}{2} & 0 & 0 & -ig(t) & -ig^*(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa_e}{2} & +ig^*(t) & 0 & 0 & ig(t) & 0 & 0 \\ 0 & -ig(t) & i\delta_o - \frac{\kappa_o}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ig^*(t) & 0 & 0 & -i\delta_o - \frac{\kappa_o}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ig(t) & 0 & 0 & 0 & i\delta_t - \frac{\kappa_t}{2} & 0 & -iJ & 0 \\ 0 & ig^*(t) & 0 & 0 & 0 & -i\delta_t - \frac{\kappa_t}{2} & 0 & iJ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -iJ & 0 & i\delta_{\rm tm} - \frac{\kappa_{\rm tm}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & iJ & 0 & -i\delta_{\rm tm} - \frac{\kappa_{\rm tm}}{2} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

and

$$K = \begin{pmatrix} \sqrt{(1-\eta_e)\kappa_e} & \sqrt{\eta_e\kappa_e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{(1-\eta_o)\kappa_o} & \sqrt{\eta_o\kappa_o} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\kappa_t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\kappa_{\rm tm}} \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2, \tag{11}$$

它用于追踪噪声作用于哪些模式。

2. *Input-Output-Theory*

在实验中，泵浦场于 $t = 0$ 开启，并持续开启至 $\tau_{\rm pulse}$。对于长度为 $\tau_{\rm pulse}$ =250 ns 的光学泵浦脉冲（600 ns, 见正文），我们舍弃脉冲数据开头的 $\tau_{\rm delay} = 50$ns（100 ns）。由于 $\kappa_p\tau_{\rm delay} \gtrsim 1$，我们可以假设在 $\tau_{\rm delay}$ 之后，系统已接近稳态，尤其是泵浦模式已处于稳态。因此，我们可以假设 $g\,(t > \tau_{\rm delay}) \simeq g$ 随时间保持不变。一个重要的性能指标是多光子协同性 $C = 4g^2/\kappa_o\kappa_e$，它衡量相干耦合相对于微波和光学耗散的大小。在完全抑制反斯托克斯散射的情况下，可以实现高效的纠缠生成，同时系统处于参量不稳定阈值以下，即 $C < 1$。

CEO器件的输出场为

$$\boldsymbol{f}_{\rm out}(t) = (\hat{a}_{e,\rm out}(t), \hat{a}_{e,\rm out}^\dagger(t), \hat{a}_{o,\rm out}(t), \hat{a}_{o,\rm out}^\dagger(t))^\top, \tag{12}$$

其中包括经由相干相互作用 $\boldsymbol{v}$ 发生纠缠的部分，以及未与器件发生相互作用的部分 $\boldsymbol{f}_{\rm in}$。随后，输出场 $\boldsymbol{f}_{\rm out}$ 将传播至测量器件，并且用输入-输出理论框架 [6],表示最为简洁

$$\boldsymbol{f}_{\rm out}(t) = L\boldsymbol{f}_{\rm in}(t) - N\boldsymbol{v}(t), \tag{13}$$

其中我们定义矩阵

$$N = (N_J, \mathbb{0}_4), \quad \text{with} \quad N_J = \mathrm{Diag}(\sqrt{\eta_e\kappa_e}, \sqrt{\eta_e\kappa_e}, \sqrt{\eta_o\kappa_o}, \sqrt{\eta_o\kappa_o}), \tag{14}$$

and

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2. \tag{15}$$

由于所有模式都已达到稳态，输出场中的关联可以通过转换到傅里叶

域来获得。这里我们采用以下傅里叶变换约定

$$\hat{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \, e^{i\omega t} \hat{A}(t), \tag{16}$$

及其厄米共轭

$$(\hat{A}(\omega))^\dagger = A^\dagger(-\omega). \tag{17}$$

请注意，在此约定中，例如 $[a_e(\omega)\ a_e^\dagger(\omega')] = \delta(\omega + \omega')$ 是正则对。

在我们的实验中，我们关注频率为 $\omega_e + \Delta\omega_e$ 和 $\omega_o - \Delta\omega_o$ 的微波场和光场的输出传播谱模之间的关联，[7, 8]。需要注意的是，由于自发参量下转换过程中的能量守恒，我们只关注共振附近、具有反关联频率的微波光子对和光学光子对，即 $\Delta\omega_e = \Delta\omega_o = \Delta\omega$。因此，我们关注旋转参考系中的以下输出场矢量，

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{out}}(\omega) = (\hat{a}_{e,\mathrm{out}}(\omega), \hat{a}_{e,\mathrm{out}}^\dagger(-\omega), \hat{a}_{o,\mathrm{out}}(-\omega), \hat{a}_{o,\mathrm{out}}^\dagger(\omega))^\top, \tag{18}$$

在傅里叶域中。由公式（8）可得

$$\boldsymbol{v}(\omega) = \underbrace{[i\omega O - M]^{-1} \cdot K}_{=\mathcal{S}(\omega)} \cdot \boldsymbol{f}_{\mathrm{in}}(\omega), \tag{19}$$

with

$$O = \mathrm{Diag}(1, -1, 1, 1) \otimes \sigma_z. \tag{20}$$

这里我们定义模式矢量

$$\boldsymbol{v}(\omega) = (\hat{a}_e(\omega), \hat{a}_e^\dagger(-\omega), \hat{a}_o(-\omega), \hat{a}_o^\dagger(\omega), \hat{a}_t(\omega), \hat{a}_t^\dagger(-\omega), \hat{a}_{\mathrm{tm}}(\omega), \hat{a}_{\mathrm{tm}}^\dagger(-\omega))^\top, \tag{21}$$

以及输入场矢量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}_{\mathrm{in}}(\omega) = (&\delta\hat{a}_{e,0}(\omega), \delta\hat{a}_{e,0}^\dagger(-\omega), \delta\hat{a}_{e,\mathrm{in}}(\omega), \delta\hat{a}_{e,\mathrm{in}}^\dagger(-\omega), \delta\hat{a}_{o,0}(-\omega), \delta\hat{a}_{o,0}^\dagger(\omega), \delta\hat{a}_{o,\mathrm{in}}(-\omega), \delta\hat{a}_{o,\mathrm{in}}^\dagger(\omega), \\ &\delta\hat{a}_{t,\mathrm{vac}}(\omega), \delta\hat{a}_{t,\mathrm{vac}}^\dagger(-\omega), \delta\hat{a}_{\mathrm{tm},\mathrm{vac}}(\omega), \delta\hat{a}_{\mathrm{tm},\mathrm{vac}}^\dagger(-\omega))^\top\end{aligned} \tag{22}$$

在傅里叶域中。

CEO器件的输出场（见公式（13））可直接求得，因为在傅里叶域中，公式（13）是代数方程，

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{out}}(\omega) = L\boldsymbol{f}_{\mathrm{in}}(\omega) + N\boldsymbol{v}(\omega) = (L + N \cdot [i\omega O - M]^{-1} \cdot K)\boldsymbol{f}_{\mathrm{in}}(\omega). \tag{23}$$

输入噪声算符关联为：

$$\langle \boldsymbol{f}_{\mathrm{in}}(\omega) \boldsymbol{f}_{\mathrm{in}}^\dagger(\omega') \rangle = D\delta(\omega + \omega'), \tag{24}$$

with

$$D = \mathrm{Diag}(\underbrace{\bar{n}_{e,\mathrm{int}} + 1, \bar{n}_{e,\mathrm{int}}}_{\text{bath:}e}, \underbrace{\bar{n}_{e,\mathrm{wg}} + 1, \bar{n}_{e,\mathrm{wg}}}_{\text{waveguide:}e}, \underbrace{1,0}_{\text{bath:}o}, \underbrace{1,0}_{\text{detector:}o}, \underbrace{1,0}_{\text{bath:}t}, \underbrace{1,0}_{\text{bath:tm}}). \tag{25}$$

我们注意到，在我们的实验中，微波波导保持在基态，$\bar{n}_{e,\ \mathrm{wg}} = 0$。不同输出场的谱关联可通过以下方式直接解析得到

$$\langle \boldsymbol{f}_{\mathrm{out}}(\omega) \boldsymbol{f}_{\mathrm{out}}^\dagger(\omega') \rangle = \underbrace{\mathcal{S}(\omega) D \mathcal{S}^\dagger(-\omega)}_{\tilde{C}_{\boldsymbol{f}\boldsymbol{f}^\dagger}(\omega)} \delta(\omega + \omega'). \tag{26}$$

Here 我们隐式地定义了 4×4 输出模式关联矩阵，其中只有一个条目，其读数为 g

$$\langle\hat{a}_{\rm out}(\omega)\hat{b}_{\rm out}(\omega')\rangle=\tilde{C}_{ab}(\omega)\delta(\omega+\omega'),\tag{27}$$

其中，算符 $\hat{a}_{\rm out}(\omega)$、$\hat{b}_{\rm out}(\omega)$ 选自式（ $\boldsymbol{f}_{\rm out}(\omega)$ 中的组件。16）。

3. *Covariance Matrix of Filtered Output Fields*

现在，我们考虑一种通过加窗傅里叶变换定义输出场模的情形。接下来我们将说明，这些确实就是实验观测信号。首先定义无量纲厄米输出场正交分量对 [8],

$$\hat{X}_\alpha(\omega_n)=\frac{1}{\sqrt{2T}}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{d}\tau\, e^{i\omega_n\tau}\hat{a}_{\alpha,\rm out}(\tau)+\text{h.c.},\tag{28}$$

$$\hat{P}_\alpha(\omega_n)=\frac{1}{\sqrt{2T}i}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{d}\tau\, e^{i\omega_n\tau}\hat{a}_{\alpha,\rm out}(\tau)+\text{h.c.},\tag{29}$$

其满足正则对易关系 $[\hat{X}_\alpha(\omega_n)、\hat{P}_\beta(\omega_m)]=i\delta_{nm}\delta_{\alpha\beta}$ 其中 $\alpha=e,\ o$。由于傅里叶变换的窗口有限，频率 $\omega_n=\frac{2\pi}{T}n$ 变为离散值。现在可以用式（ ω_n ）中的有量纲输出场 $\boldsymbol{f}_{\rm out}(\omega)$ 来重新表示离散频率处的正交分量模；这些输出场定义在连续傅里叶域中。因此，正交分量算符可以通过与滤波函数 $\mathcal{G}(\omega)$ 卷积得到。

$$\hat{X}_\alpha(\omega_n)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\mathcal{G}(\omega_n-\omega)\hat{a}_{\alpha,\rm out}(\omega)+\text{h.c.}\tag{30}$$

$$\hat{P}_\alpha(\omega_n)=\frac{1}{\sqrt{2}i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\mathcal{G}(\omega_n-\omega)\hat{a}_{\alpha,\rm out}(\omega)+\text{h.c.}\tag{31}$$

这里的滤波器为

$$\mathcal{G}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\, e^{i\omega\tau}\frac{\mathbb{1}_{[0,T]}(\tau)}{\sqrt{T}}=\sqrt{\frac{2}{\pi T}}\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega},\tag{32}$$

它由单位函数 $\mathbb{1}_{[-T/2,T/2]}(t)=1(0)$ 关于 $|t|\le T/2$ $(|t|>T/2)$ 的傅里叶变换得到。双部高斯态由其 4×4 协方差矩阵 (CM) 表征,

$$V_{AB}(\omega_n)=\frac{1}{2}\langle\{\delta\hat{A}(\omega_n),\delta\hat{B}(\omega_n)\}\rangle.\tag{33}$$

He $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 定义了一个 $\delta A=A-\langle A\rangle$ 零均值算符 $\langle\delta A\rangle=0$ 以及正交分量，来自

$$\hat{A}(\omega_n),\hat{B}(\omega_n)\in\{\hat{X}_e(\omega_n),\hat{P}_e(\omega_n),\hat{X}_o(-\omega_n),\hat{P}_o(-\omega_n)\}\tag{34}$$

并且我们还引入了反对易子 $\{\hat{A},\ \hat{B}\}=\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}$。请注意，双模压缩相互作用会使微波 ω_n 侧带与光学侧带 $-\omega_n$上的反向频率对产生关联。由于在我们的设置中，所有一阶矩 $\langle\hat{A}\rangle=0$，式（33）中协方差矩阵的计算归结为求谱关联，可将其改写为

$$\begin{aligned}\langle\hat{A}(\omega_n)\hat{B}(\omega_n)\rangle&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\,\mathcal{G}(\omega_n-\omega)\mathcal{G}(\omega_n-\omega')\langle\hat{A}(\omega)\hat{B}(\omega')\rangle\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\,\mathcal{G}(\omega_n-\omega)\mathcal{G}(-\omega_n-\omega')C_{AB}(\omega)\delta(\omega+\omega')\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\mathcal{F}(\omega_n-\omega)C_{AB}(\omega),\end{aligned}\tag{35}$$

其中我们利用了性质 $\mathcal{G}(-\omega) = \mathcal{G}(\omega)$，并定义了有效滤波器 $\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{G}(\omega)^2$。与式（26）类似，我们定义了正交分量关联

$$C_{AB}(\omega) = (C(\omega))_{AB} = \frac{1}{2}\left(U\tilde{C}_{\boldsymbol{ff}^\dagger}(\omega)U^\dagger + (U\tilde{C}_{\boldsymbol{ff}^\dagger}(\omega)U^\dagger)^\top\right)_{AB}. \tag{36}$$

这里的酉矩阵 $U = u \oplus u$，其中

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \tag{37}$$

对应于将模式算符旋转为正交分量算符（$\hat{X}_\alpha$，$\hat{P}_\alpha$）$^\top = u \cdot$（$\hat{a}_{\alpha,\,\text{out}}$，$\hat{a}^\dagger_{\alpha,\,\text{输出}}$）$^\top$。离散频率 ω_n 下正交分量模的协方差矩阵可精确表示为

$$V_{AB}(\omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \mathcal{F}(\omega_n - \omega) C_{AB}(\omega), \tag{38}$$

其中，正交分量关联与适当的滤波器进行卷积。

B. 外差探测、附加噪声与滤波

1. *Heterodyne Measurement*

这里我们讨论如何从等效线性测量（例如，带有额外附加噪声 [9] 的平衡外差探测）中提取正交分量。在外差探测中，输出场 $\hat{a}_{\text{out}}e^{-i\omega_j t}$ $(j \in e,\ o)$ 与强相干本地振荡器场 $\hat{a}_{\text{LO}}(t) = \alpha_{\text{LO}}e^{-i\omega_{\text{LO}}t}$ 在 50:50分束器处混合，两个输出端口的输出场随后被送入平衡光电探测器，从而产生与下式成正比的光子电流

$$\hat{I}_{\text{out}}(t) = e^{-i\Delta_{\text{LO}}t}\hat{a}_{\text{out}} + \hat{a}^\dagger_{\text{out}}e^{i\Delta_{\text{LO}}t}, \tag{39}$$

在强本地振荡器 ($\alpha_{\text{LO}} \gg 1$) 和 $\Delta_{\text{LO}} = \omega_{\text{LO}} - \omega_j$ 的极限下。我们考虑有限的测量时间区间 T，并在该区间上计算 $I_{\text{out}}(t)$ 的加窗傅里叶变换，

$$\begin{aligned}\hat{I}_{\text{out}}(\omega_n) &= \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T \mathrm{d}\tau\, e^{i\omega_n\tau}\hat{I}_{\text{out}}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T \mathrm{d}\tau\, e^{i\omega_n\tau}(e^{-i\Delta_{\text{LO}}\tau}\hat{a}_{\text{out}}(\tau) + e^{i\Delta_{\text{LO}}\tau}\hat{a}^\dagger_{\text{out}}(\tau)) \\ &= a_{\text{out}}(\omega_n - \Delta_{\text{LO}}) + a^\dagger_{\text{out}}(\omega_n + \Delta_{\text{LO}}),\end{aligned} \tag{40}$$

这里稍微滥用一下记号，将无量纲输出场定义为 $a_{\text{out}}(\omega_n)$。我们之所以明确采用加窗傅里叶变换，是因为尽管测量期间系统处于稳态（见第 I B节），傅里叶变换后的数据仍具有较宽的带宽（$\delta\omega_n = \frac{2\pi}{T} \sim 5$兆赫，对应 200 ns 的时间窗口），这是由于数据采集时间相对较短 $T = \tau_{\text{pulse}} - \tau_{\text{delay}} = 200\,\text{ns}$（尤其是对于 250 ns 的光学泵浦脉冲）。在测量时间趋于无限长的极限下 $T \to \infty$，带宽将趋于零，以下讨论以及式（38）中的结果也将与连续傅里叶域中的标准输入-输出处理一致。在我们的实验中，我们通过将外差电流谱分解为实部和虚部，提取微波和光学输出场的正交分量，得到

$$\hat{I}_{\text{out}}(\omega_n) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underbrace{\hat{X}(\omega_n - \Delta_{\text{LO}}) + \hat{X}(-\omega_n - \Delta_{\text{LO}})}_{\hat{I}_{X,\text{out}}(\omega_n)} + i\underbrace{[\hat{P}(\omega_n - \Delta_{\text{LO}}) - \hat{P}(-\omega_n - \Delta_{\text{LO}})]}_{\hat{I}_{P,\text{out}}(\omega_n)}), \tag{41}$$

其中我们定义正交输出场 $\hat{a}_{\text{out}}(\omega_n) = (\hat{X}(\omega_n) + i\hat{P}(\omega_n))/\sqrt{2}$，与公式 (28-29) 中的做法相同。

到目前为止，我们一直用随时间变化的厄米算符 $\hat{I}_{\text{out}}(t)$ 来描述异频测量产生的光子电流。在实际实验中，外差电流是一个实标量 $I(t)$ 量，它会随时间变化，也会在不同的实验运行之间波动。对该电流进行（快速）傅里叶变换，并将其分解为实部和虚部，可得 $I(\omega_n) = I_X(\omega_n) + iI_P(\omega_n)$。连续测量和量子轨迹理论 [10, 11]告诉我们如何将测得的标量电流与输入-输出理论中的电流

算符联系起来 [6]

$$\overline{I_A(\omega_n)I_B(\omega_m)} = \frac{1}{2}\langle\{\hat{I}_{A,\mathrm{out}}(\omega_n), \hat{I}_{B,\mathrm{out}}(\omega_m)\}\rangle, \tag{42}$$

其中，我们定义 $\cdots$ 为多次实验运行的统计平均。

2. *Realistic Measurements: Added Noise and Gain*

对于真空，两种正交分量的噪声谱密度可由下式得到

$$S_{AA}(\omega_n) = \langle\hat{A}(\omega_n)\hat{A}(\omega_n)\rangle_{\mathrm{vac}} = \frac{1}{2}, \tag{43}$$

对于厄米算符 $\hat{A} = \hat{X}, \hat{P}$。请注意，由于傅里叶域的离散性，这里没有狄拉克δ函数，这与式（27）不同。外差电流的噪声谱定义为 $S_{II}(\omega) \equiv I(\omega_n)I(\omega_n) = \langle I_{\mathrm{out}}(\omega_n)I_{\mathrm{out}}(\omega_n)\rangle$，其中

$$S_{II}(\omega_n) = \frac{1}{2}\left(S_{XX}\left(\omega_n - \Delta_{\mathrm{LO}}\right) + S_{PP}\left(\omega_n - \Delta_{\mathrm{LO}}\right) + S_{XX}\left(\omega_n + \Delta_{\mathrm{LO}}\right) + S_{PP}\left(\omega_n + \Delta_{\mathrm{LO}}\right)\right). \tag{44}$$

聚焦于位于 Δ_{LO} 附近的谱部分，

$$S_{II}(\omega_n + \Delta_{\mathrm{LO}}) = \frac{1}{2}\left(S_{XX}\left(\omega_n\right) + S_{PP}\left(\omega_n\right) + 1\right), \tag{45}$$

假设 $\Delta_{\mathrm{LO}} \gg \kappa_e, \kappa_o$。这表明，即使不存在实验缺陷，外差测量也会同时测量正交分量并引入散粒噪声。到目前为止，我们一直关注测量的理想理论，并未考虑其他未知噪声源，也未涉及与实际测量量之间的联系。在实践中，分解后的测量正交分量包含额外的不相关过量噪声，例如放大过程中引入的噪声或传播损耗 [12]。我们通过现象学方法对此进行建模：加入另一个来自独立热库的不相关噪声过程，再乘以一个增益因子，将测量光子数转换为实际监测电压。为说明这一点，我们再次聚焦于单个输出端口，并考虑附加噪声电流 $I_{X/P,\ \mathrm{add}}(\omega_n)$ 和频率相关的校准增益$G_{\mathrm{det}}(\omega_n)$，其中

$$\hat{I}_{X,\mathrm{det}}(\omega_n) = \sqrt{G_{\mathrm{det}}(\omega_n)}(\hat{I}_{X,\mathrm{add}}(\omega_n) + \hat{I}_{X,\mathrm{out}}(\omega_n)), \tag{46}$$

$$\hat{I}_{P,\mathrm{det}}(\omega_n) = \sqrt{G_{\mathrm{det}}(\omega_n)}(\hat{I}_{P,\mathrm{add}}(\omega_n) + \hat{I}_{P,\mathrm{out}}(\omega_n)). \tag{47}$$

因此，我们得到探测外差噪声谱密度，

$$\begin{aligned} S_{II,\mathrm{det}}(\omega_n + \Delta_{\mathrm{LO}}) =& G_{\mathrm{det}}(\omega_n + \Delta_{\mathrm{LO}})[S_{XX}\left(\omega_n\right) + S_{PP}\left(\omega_n\right) \\ &+ \underbrace{1 + S_{I_X I_X,\mathrm{add}}(\omega_n + \Delta_{\mathrm{LO}}) + S_{I_P I_P,\mathrm{add}}(\omega_n + \Delta_{\mathrm{LO}})}_{=2N_{\mathrm{add}}}], \end{aligned} \tag{48}$$

其中，我们将附加噪声的谱定义为$S_{I_O I_O,\text{附加}}(\omega_n) = \langle\hat{I}_{O,\mathrm{add}}(\omega_n)\hat{I}_{O,\mathrm{add}}(\omega_n)\rangle$。附加噪声 N_{add}包括外差测量产生的过量真空噪声，以及额外的不相关噪声。请注意，此处的因子$_{1\ 2}$ 已并入探测增益。增益 $G_{\mathrm{det}}(\omega_n)$可在微波侧和光学侧分别通过冷态测量（关闭光学泵浦）并利用已知背景简单获得。我们指出，式（48）为我们的CEO器件中的微波和光学校准奠定了基础。

在我们的实验中，我们将本地振荡器置于模式共振两侧的相反位置，即，

$$\Delta_{\mathrm{LO},e} = -\Omega_{\mathrm{IF}}, \qquad \Delta_{\mathrm{LO},o} = \Omega_{\mathrm{IF}}, \tag{49}$$

其中 $\Omega_{\mathrm{IF}} > 0$ 是下变频的中频。外差输出场可以类似地获得

参见公式（40），

$$\begin{aligned}\hat{I}_{\mathrm{out,e}}(\omega_n+\Omega_{\mathrm{IF}})&=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\hat{X}_e(-\omega_n)+\hat{X}_e(\omega_n+2\Omega_{\mathrm{IF}})+i(-\hat{P}_e(-\omega_n)+\hat{P}_e(\omega_n+2\Omega_{\mathrm{IF}}))],\\ \hat{I}_{\mathrm{out,o}}(\omega_n+\Omega_{\mathrm{IF}})&=\frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{X}_o(-\omega_n-2\Omega_{\mathrm{IF}})+\hat{X}_o(\omega_n)+i(-\hat{P}_o(-\omega_n-2\Omega_{\mathrm{IF}})+\hat{P}_o(\omega_n))],\end{aligned}\tag{50}$$

噪声谱由下式给出，

$$\begin{aligned}S_{II,e}(\omega_n+\Omega_{\mathrm{IF}})&=\frac{1}{2}(S_{X_eX_e}(-\omega_n)+S_{P_eP_e}(-\omega_n))+N_{e,\mathrm{add}},\\ S_{II,o}(\omega_n+\Omega_{\mathrm{IF}})&=\frac{1}{2}(S_{X_oX_o}(\omega_n)+S_{P_oP_o}(\omega_n))+N_{o,\mathrm{add}}.\end{aligned}\tag{51}$$

我们注意到，式（50）用于从外差测量中提取场正交分量（包括附加噪声），由此可在正交分量直方图中观察到关联 [参见正文图 4]。尽管预期场正交分量的符号相反，微波和光学输出光子仍出现在噪声谱的同一频率处，即 $\omega_n+\Omega_{\mathrm{IF}}$ [参见正文图 2 d、e]。

3. *Covariance Matrix from Realistic Heterodyne Measurements*

下面简要说明如何根据外差测量重构协方差矩阵。探测到的外差电流谱的交叉关联 可由下式得到，

$$\mathcal{D}_{AB}(\omega_n)=\overline{\delta I_{A,\mathrm{det}}(\omega_n+\Omega_{\mathrm{IF}})\delta I_{B,\mathrm{det}}(\omega_n+\Omega_{\mathrm{IF}})},\tag{52}$$

其中我们定义中心化电流 $\delta I_{O,\ \mathrm{det}}=I_{O,\ \mathrm{det}}-\overline{I_{O,\ \mathrm{det}}}$，其中

$$I_{O,\mathrm{det}}(\omega_n)\in\{I_{X_e,\mathrm{det}}(\omega_n),I_{P_e,\mathrm{det}}(\omega_n),I_{X_o,\mathrm{det}}(\omega_n),I_{P_o,\mathrm{det}}(\omega_n)\}.\tag{53}$$

与式（42）类似，我们可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{AB}(\omega_n)&=\frac{1}{2}\langle\{\delta\hat{I}_{A,\mathrm{det}}(\omega_n+\Omega_{\mathrm{IF}}),\delta\hat{I}_{B,\mathrm{det}}(\omega_n+\Omega_{\mathrm{IF}})\}\rangle\\ &=\sqrt{G_{A,\mathrm{det}}(\omega_n+\Omega_{\mathrm{IF}}))G_{B,\mathrm{det}}(\omega_n+\Omega_{\mathrm{IF}}))}\Big[\underbrace{\frac{1}{2}\langle\{\delta\hat{A}(\omega_n),\delta\hat{B}(\omega_n)\}\rangle}_{=V_{AB}(\omega_n)}+N_{AB,\mathrm{add}}\Big],\end{aligned}\tag{54}$$

其中我们定义对角附加噪声矩阵 $N_{AB,\ \mathrm{add}}=(N_{\mathrm{add}})_{AB}=N_{A,\ \mathrm{add}}\delta_{AB}$ 其中校准后的附加噪声为 N_{add}，探测增益为 $G_{A,\ \mathrm{det}}$。该方程说明了如何根据外差测量重构正交分量算符的协方差矩阵 [参见式 (38)]，以及如何将其与理想化标准输入输出理论的结果进行比较，见式 (33)。为简便起见，正文中将包含附加噪声的总测量协方差矩阵 定义为，

$$V_{AB,\mathrm{meas}}(\omega_n)=\mathcal{D}_{AB}(\omega_n)/\sqrt{G_{A,\mathrm{det}}(\omega_n+\Omega_{\mathrm{IF}}))G_{B,\mathrm{det}}(\omega_n+\Omega_{\mathrm{IF}}))},\tag{55}$$

与 $V_{AB,\ \mathrm{meas}}(\omega_n)=V_{AB}(\omega_n)+N_{AB,\ \mathrm{add}}$。

我们指出，原则上，两个本振的位置可以任意选取。正如式 54 所示，我们选择的本振配置，即 $\Delta_{\mathrm{LO,\ e}}=-\Delta_{\mathrm{LO,\ o}}=-\Omega_{\mathrm{IF}}$，为量化宽带量子关联提供了简单的解决方案。考虑到探测带宽有限、频率相关增益或微波腔频移，这些因素可能会因频率匹配不完善而导致外差测量中提取正交分量时量子关联损耗。

C. 纠缠探测

1. *Duan Criterion*

现在，我们将讨论如何证明，从微波腔和光学腔出射的光子确实是不可分离的，亦即处于纠缠态。我们的出发点是协方差矩阵，该矩阵定义于式 (33) 中，并按照式 (54) 所述进行测量。实验测得的协方差矩阵形式如下

$$V = \begin{pmatrix} V_e & V_{eo} \\ V_{eo} & V_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & 0 & \tilde{V}_{13} & \tilde{V}_{14} \\ 0 & V_{11} & \tilde{V}_{14} & -\tilde{V}_{13} \\ \tilde{V}_{13} & \tilde{V}_{14} & V_{33} & 0 \\ \tilde{V}_{14} & -\tilde{V}_{13} & 0 & V_{33} \end{pmatrix}. \tag{56}$$

由于不存在单模压缩，因此我们有 $V_{22} = V_{11}$ 和 $V_{44} = V_{33}$。为简便起见，我们省略了分量的频率自变量 ω_n。以下所述内容需要对每个频率分量重复进行。协方差矩阵中编码双模压缩的非对角部分可写为

$$V_{eo} \simeq V_{13}(\sin(\theta)\sigma_x + \cos(\theta)\sigma_z), \tag{57}$$

其中我们定义 $V_{13} = (\tilde{V}_{14}^2 + \tilde{V}_{13}^2)^{1/2}$，混合角 $\tan(\theta) = \tilde{V}_{14}/\tilde{V}_{13}$。在我们的实验设置中，$\tilde{V}_{14}$ 可能不为零，例如，这是由较小的有限失谐 δ_o 导致的。为探测不可分性，我们采用 Duan、Gidke、Cirac 和 Zoller 提出的判据 [13]。该判据指出，若能找到局域操作 $U_{\rm loc} = U_e \otimes U_o$，使得 $\hat{X}_+ = (\hat{X}_e + \hat{X}_o)/\sqrt{2}$ 的联合振幅方差违反不等式，

$$\Delta X_+^2 = \langle U_{\rm loc}^\dagger \hat{X}_+^2 U_{\rm loc} \rangle < 1/2, \tag{58}$$

那么该态是不可分离的，因此必须得出结论：它是纠缠态。

在这种情况下，只需选择局域操作 $U_{\rm loc} = U_e U_o$，使其仅对光学模式进行被动相位旋转，其中 $U_e = \mathbb{1}$ 和 $U_o = e^{-i\varphi \hat{a}_o^\dagger \hat{a}_o}$，相位旋转角为 φ。在协方差矩阵空间中，这对应于变换（辛变换）$S_\varphi = \mathbb{1}_2 \oplus R_\varphi$，其中旋转矩阵定义如下：

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{59}$$

局域旋转 相位 $V(\varphi) = S_\varphi V S_\varphi^\top$ 的旋转将作用于协方差矩阵的非对角部分 as,

$$V_{ea}(\varphi) = V_{13}(\cos(\theta - \varphi)\sigma_z + \sin(\theta - \varphi)\sigma_x). \tag{60}$$

经过这些局域旋转后，联合振幅方差变为

$$\Delta X_+^2(\varphi) = \langle (\hat{X}_e + \hat{X}_o \cos(\varphi) + \hat{P}_o \sin(\varphi))^2 \rangle / 2 = V_{11} + V_{33} + 2V_{13}\cos(\theta - \varphi). \tag{61}$$

我们也可以类似地定义联合正交分量 $\hat{P}_- = (\hat{P}_e - \hat{P}_o)/\sqrt{2}$，其中 $\Delta \bar{P}_-^2(\varphi) = \Delta X_+^2(\varphi)$。联合正交分量 $\Delta X_+^2(\varphi)$ 和 $\Delta P_-^2(\varphi)$ 的方差在角度 $\varphi_- = \theta - \pi$ 处达到最小值

$$\Delta_{\rm EPR}^- = \Delta X_+^2(\varphi_-) + \Delta P_-^2(\varphi_-) = 2(V_{11} + V_{33} - 2V_{13}), \tag{62}$$

这对应于微波和光学输出场的双模压缩，以及微波与光学之间的纠缠。此外，联合正交分量方差在角度 $\varphi_+ = \theta$ 处达到最大值，我们得到

$$\Delta_{\rm EPR}^+ = \Delta X_+^2(\varphi_+) + \Delta P_-^2(\varphi_+) = 2(V_{11} + V_{33} + 2V_{13}), \tag{63}$$

这对应于反压缩。

2. *Logarithmic Negativity and Purity*

混合纠缠态可以用对数负性进行量化，

$$E_N = \max\left[0, -\log\left(2\zeta_-\right)\right], \tag{64}$$

其中， ζ^- 是部分时间反演协方差矩阵中较小的辛特征值，可通过解析方法求得

$$\zeta_-^2 = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4\det(V)}}{2} \tag{65}$$

其中，我们定义塞拉利不变量 $S = \det(V_e) + \det V_o + 2\det(V_{eo})$。此外，双部高斯态的纯度为

$$\rho = \frac{1}{4\sqrt{\det(V)}}, \tag{66}$$

其中， $\rho = 1$ 对应纯态，即真空态。

II. 实验装置

实验装置如补充材料图1所示并有详细说明。激光器被分成三路，其中一路是频率为 ω_p的光学脉冲泵浦，一路是用于四端口校准的频率为 ω_p –FSR 的连续信号（参见补充材料III），另一路是用于光学外差探测的频率为 ω_p – FSR $+\Omega_{\mathrm{IF}}$ 的连续本地振荡器（LO）。光学信号和泵浦脉冲被送入电光器件（被测器件）的光学谐振器，反射光（泵浦脉冲由滤波腔滤除）与光学本地振荡器在一个 50:50 分束器上合束，随后进行平衡光电探测。

微波输入信号在稀释制冷机的不同温度级（4 K：20 dB、800 mK：10 dB、10 mK：20 dB）被衰减，然后送至被测器件微波腔的耦合端口。反射的微波信号经放大后，可以与频率为 FSR $-\Omega_{\mathrm{IF}}$ 的微波本地振荡器混频，再进行数字化；也可以直接用矢量网络分析仪或频谱分析仪测量。

需要指出的是，光本振位于光学模式右侧，而微波本振位于微波模式左侧，两者相差 $\Omega_{\mathrm{IF}}/2\pi = 40$兆赫。 更多详情请参见补充图 1的图注。

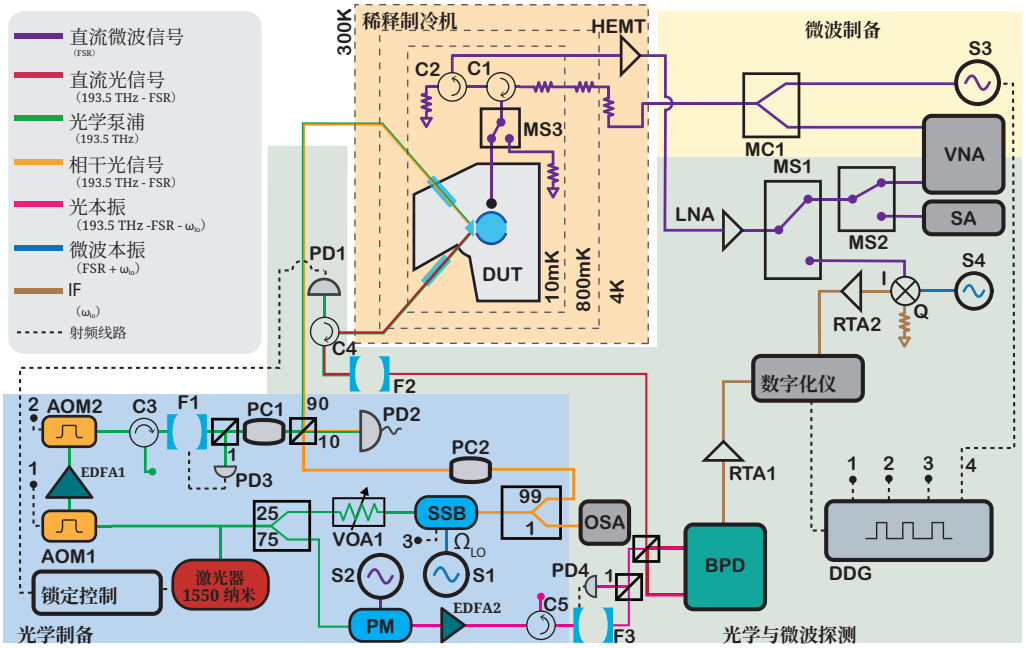
III. 装置表征与校准

在正文中，我们展示了图2所示的两组不同光学模式的实验结果。这两组模式的主要区别在于反斯托克斯散射速率相较于斯托克斯散射速率的抑制程度，该程度由散射比 $\mathcal{S}$决定，而散射比取决于反斯托克斯模式 [5, 14]的模式杂化程度。第一组光学模式（图 2a）用于展示我们的大部分主要结果（正文图 2、3 和 5a），其共振时的 $\mathcal{S} = -10.3$ 为 dB，有效 FSR 为 $= 8.799$GHz。正文图 5b 所示的最后一次功率扫描采用第二组光学模式测得，其 $\mathcal{S} = -3.1$ 较低，为 dB，且有效 FSR 不同，为 $= 8.791$GHz（图 2b）。尽管使用的是同一个光学谐振器，第二组光学模式的 FSR 略有不同，这是因为光学泵浦模式发生了部分杂化，改变了光学泵浦模式与信号模式之间的工作 FSR，见图 2。

下文中，我们在这两个工作自由光谱范围内分别仔细校准由微波探测链引入的附加噪声（因为微波模式停留在工作自由光谱范围内）。由于微波探测中各组件之间存在阻抗失配和反射，附加噪声可能会因测量频率的不同而略有差异。

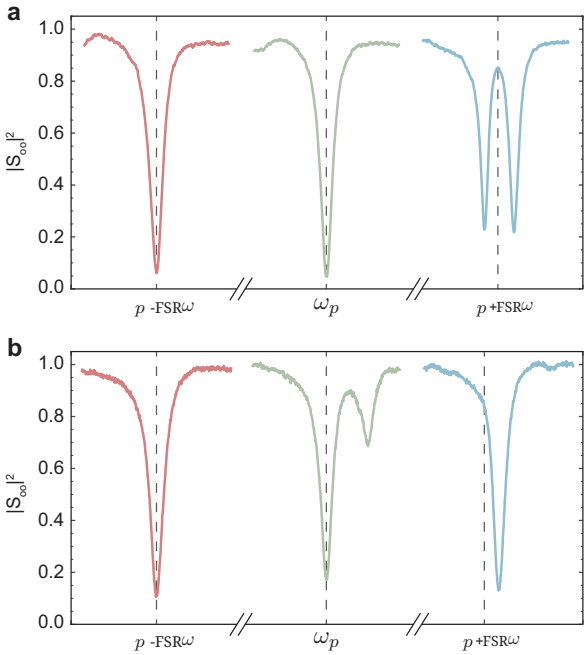
A. 微波附加噪声校准

接下来，我们将仔细校准微波探测链在两个频率下略有不同的附加噪声。微波探测链中各组件之间的阻抗失配和反射可能会有所变化



补充图1。**双模压缩测量的实验装置**。 频率为 ω_p 的可调谐激光器首先被等分为两路，即光学泵浦，以及光学信号与光本振（LO）。光学泵浦路径中的光经声光调制器（AOM1）脉冲化，产生纳秒脉冲，并整形后由掺铒光纤放大器（EDFA）放大。EDFA的输出首先经AOM2进行时间滤波，以去除放大自发辐射（ASE）噪声；随后经滤波器 F1（线宽为 $\sim$50 兆赫，FSR为15 GHz）进行频率滤波，以去除光信号频率处的噪声（反射功率由环行器C3滤除）。通过光电二极管PD3测量滤波器透射光的1%功率，以此将滤波器F1锁定在透射功率上。最终输出光的偏振由偏振控制器PC1控制，随后与光学信号经90:10分束器混合，并送入稀释制冷机（DR）。分束器10%的输出由快速探测器PD2监测，以测量光学泵浦脉冲功率。激光器的另一半再次分为两路：25%用于光学信号，75%用于光本振。信号光首先经过可变光衰减器VOA1进行功率控制，然后进入单边带调制器SSB，在 $\omega_p -$ FSR处产生光信号频率，并抑制 ω_p 和 $\omega_p +$ FSR处的频率分量。取出1%的光信号，通过光谱分析仪OSA监测SSB抑制比；其余99%的光经PC2控制偏振后送入DR。光本振由相位调制器PM产生，并失谐 $\omega_{\mathrm{IF}}/2\pi = 40$ 兆赫。由于PM会产生多个边带，因此使用滤波器F3（线宽为 $\sim$50 兆赫，FSR为15 GHz）抑制不需要的边带，并由环行器C5滤除反射。F3经过温度稳定，并采用与F1类似的方法锁定在透射功率上。光本振还经EDFA2放大，然后进行光学平衡外差。在DR中，光经梯度折射率（GRIN）透镜聚焦到棱镜表面，并通过倏逝场耦合耦合到光学回音壁模式谐振器（WGMR）。调节偏振控制器PC1和PC2，使光有效耦合到光学WGMR的TE模式。输出光以类似方式传至收集用GRIN透镜。DR外部的光学泵浦经滤波器F2（与F3类似）滤波。F2的反射光由C4转向PD1进行测量，PD1产生锁定信号，使激光器锁定到光学WGMR。滤波后的信号最终与光本振混合，并由高速平衡光电二极管BPD（400 MHz）测量。BPD的电信号经RTA1放大后进行数字化。在微波侧，信号由微波源S3发出；S3连接至DDG，以精确控制脉冲生成时间（或由VNA进行微波模式谱学测量），信号经微波合路器（MC1）送入制冷机输入线。输入线在4 K至10 mK之间分布设置衰减器，总衰减量为50 dB，以抑制室温微波噪声。环行器C1和C2隔离输入信号中的反射频率分量，并将其引导至放大输出线。输出线先在4 K处由高电子迁移率晶体管放大器放大，再于室温下由低噪声放大器（LNA）放大。输出线连接到开关MS1和MS2，以便选择通过手动下变频（使用失谐40 MHz的微波本振S4）进行ESA、VNA或数字化仪测量。最后，微波开关MS3可将被测器件（DUT）切换为温度 $T_{50\,\Omega}$ 可控负载；该负载用作宽带噪声源，以校准微波输出线的总增益和附加噪声。

附加噪声随频率略有变化。这种附加噪声以及一系列放大器所带来的相应增益



补充图 2。**反射中的光学模式谱**。光学模式 $\hat{a}_o$、$\hat{a}_p$ 和 $\hat{a}_t$ 的归一化反射强度 $|S_{oo}|^2$ 谱分别以红色、绿色和蓝色表示。**a** （**b**）展示了第一组（第二组）模式的光学模式谱，其反斯托克斯与斯托克斯散射比为 $\mathcal{S} = -10.3\,\mathrm{dB}$（$-3.1\,\mathrm{dB}$）。虚线标示泵浦模式 $\hat{a}_p$ 与光学模式 $\hat{a}_o$ 之间的有效自由光谱范围。虚线所示的该有效自由光谱范围会抑制参与其中的反斯托克斯光学模式 $\hat{a}_t$，如蓝色模式上方的虚线所示。

微波探测链中的电缆损耗通过组合使用热连接的 50 Ω 负载、温度计和电阻加热器进行校准。来自 50 Ω 负载和微波腔反射的信号所经过的微波探测链相同，仅电缆长度略有差异，因此我们对此进行了调整。

为校准探测链，我们使用电阻加热器加热 50Ω负载，并记录放大噪声谱 $P_{50\Omega}(\omega)$ 随 50 Ω 负载温度 $T_{50\Omega}$ 的变化。带宽为 B,$P_{50\Omega}$ 时探测到的输出噪声随 $T_{50\Omega}$ 的变化可表示为:

$$P_{50\Omega} = \hbar\omega_e G B \left[\frac{1}{2}\coth\left(\frac{\hbar\omega_e}{2k_B T_{50\Omega}}\right) + N_{e,\mathrm{add}}\right], \tag{67}$$

其中，ω_e 为微波中心频率，$N_{e,\ \mathrm{add}}\ (G)$ 为微波探测链的附加噪声（增益），k_B 为玻尔兹曼常数。

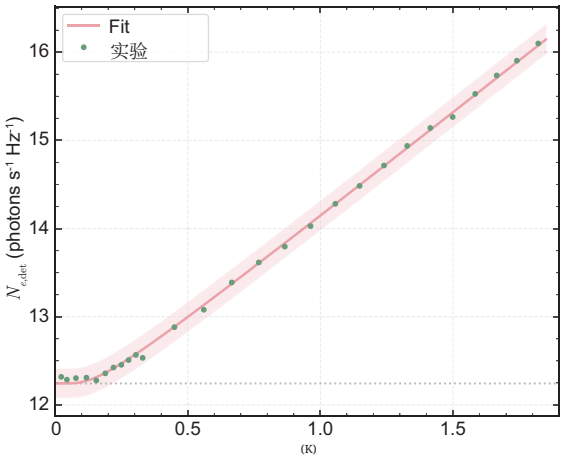
我们在感兴趣区域附近选取 11 MHz 的带宽来计算 $N_{e、\ \mathrm{add}}$ 和 G。对于 $\omega_e = 8.799\,\mathrm{GHz}$，我们在补充信息图 3 中展示了探测到的噪声 $N_{e、\ \mathrm{det}} = P_{50\Omega}/(\hbar\omega_e GB)$ 随 $T_{50\Omega}$ 的变化，并根据公式 67 进行拟合，拟合参数为 G 和 $N_{e、\ \mathrm{add}}$。我们注意到，在 $T_{50\Omega} = 0\,\mathrm{K}$ 时，$N_{e、\ \mathrm{det}} = N_{e、\ \mathrm{add}} + 0.5$。表 1（第三行）展示了两个感兴趣频率（即 $\omega_e/2\pi = 8.799\,\mathrm{GHz}$ 和 $\omega_e/2\pi = 8.791\,\mathrm{GHz}$）下得到的附加噪声和增益。

接下来，我们考虑 50Ω负载与微波腔之间的电缆损耗差异。通过分别测量微波腔以及其前端微波开关的微波反射，可独立确定这些损耗。计入电缆损耗后，反射式微波探测的有效附加噪声增大，而增益降低，如表 1 （第四行）所示。

最后，我们考虑温度传感器精度为 2。5% 所带来的额外误差。虽然这不会改变最终的 $N_{e,\ \mathrm{add}}$ 和 G，但会增大不确定性，如表 1 （第五行）所示。本节计算出的误差计入正文中报告的系统误差。

补充表1。微波探测链中的附加噪声和增益（显示1σ 个误差）。

	8.799吉赫兹		8.791吉赫兹	
探测链	$N_{e,\mathrm{add}}$	增益（dB）	$N_{e,\mathrm{add}}$	增益（dB）
50Ω负载 （含拟合误差）	11.74 ± 0.08	66.67 ± 0.02	11.76 ± 0.09	66.72 ± 0.03
微波腔 （包括电缆损耗）	13.09 ± 0.09	66.20 ± 0.02	13.16 ± 0.10	66.23 ± 0.03
微波腔 （包括温度传感器不确定性）	13.09 ± 0.33	66.20 ± 0.12	13.16 ± 0.34	66.23 ± 0.12



补充图3。**微波探测链中附加噪声的表征**。测得的 50 Ω校准负载输出噪声随其温度变化的情况 T_f。测得的噪声以光子数为单位表示为 $N_{det}^{50\Omega} = P_{50\Omega}/(\hbar\omega_e GB)$。底部的虚线表示拟合得到的真空噪声水平与附加噪声之和。红线及其阴影区域分别表示拟合曲线及其 95%置信区间。

B. 光学附加噪声

光学附加噪声通过对我们的器件进行四端口校准来计算 [14]。在此校准中，我们通过器件的 4 个端口——光学输入/输出和微波输入/输出——测量其相干响应。将光学（或微波）信号与强泵浦一同输入被测器件，会触发受激参量下转换（StPDC）过程，从而产生放大的微波（光学）相干信号。我们测量器件的4 S参数——微波反射（S_{11}）、光学反射（S_{22}）、微波到光学的传输（S_{21}）以及光学到微波的传输（S_{12}）。随后计算被测器件在微波与光学之间的平均转换效率，结果为：

$$\eta = \sqrt{\frac{S_{12}S_{21}}{S_{11}S_{22}}}. \tag{68}$$

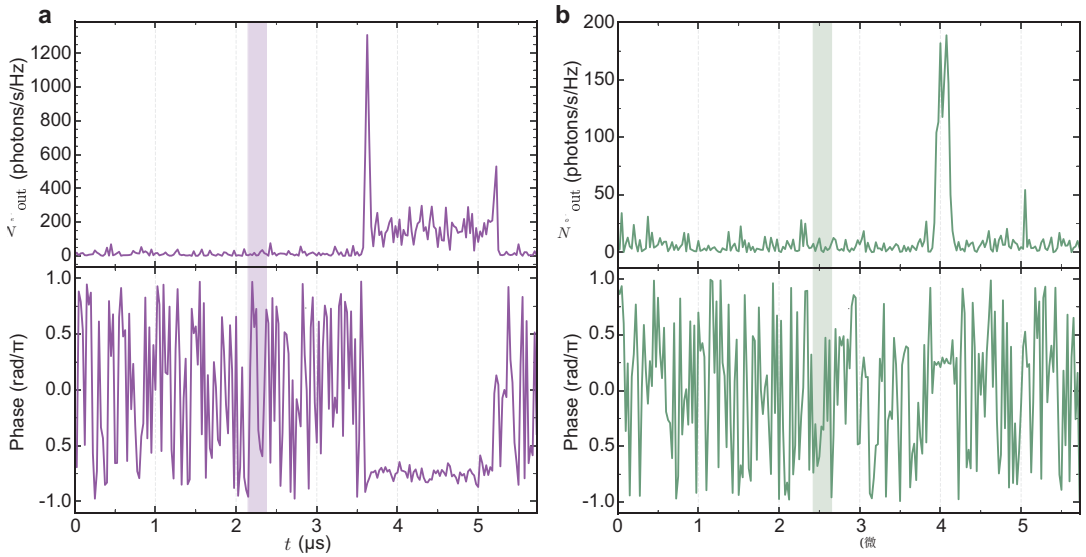
我们使用第IIIA 节中微波探测链的转换效率和 $N_{e,\mathrm{add}}$ 来计算光学附加噪声。$N_{e,\mathrm{add}}$ 首先用于计算有效微波检测增益（这与第III A节中的增益不同，因为用于四端口校准的微波检测线路采用模拟下变频和数字化，而热校准使用频谱分析仪，见图1）。微波增益与（非谐振）微波反射测量结果结合起来，用于计算微波输入损耗。由此可得被测器件处的微波信号功率，从而利用转换效率计算被测器件的光输出功率。结合探测链末端测得的输出功率，可以计算光学检测路径中的损耗，进而得出相对于被测器件光学端口的有效附加噪声。计算得到的光学附加噪声为 $N_{o,\mathrm{add}} = 5.54 \pm 0.21(7.42 \pm 0.22)$，对应 $\omega_e = 8.799$吉赫兹（8.791 吉赫兹）。

IV. 数据处理

本节将详细介绍数据处理的所有步骤，包括时域分析（第IV A节）、因装置漂移而进行的脉冲后选择（第IV B节）、频域分析（第IVC节）以及正交分量关联（第IVD节）。

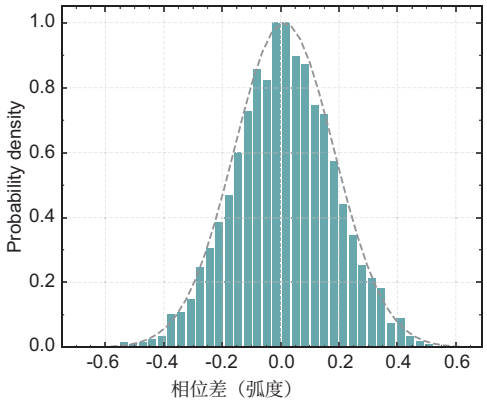
A. 时域分析

微波信号和光学信号均通过外差探测进行检测：将信号与强本地振荡器混频，该本地振荡器相对于各自的模式共振失谐 ∼40 兆赫。使用数字化仪以 1 吉采样/秒的速率将外差信号数字化。首先，我们在数字域将数字化数据以 $\omega_{\mathrm{IF}} = 40$ 兆赫进行下变频。由此得到微波或光学输出信号记录的两个正交分量 $I_{X_{e/o},\,\mathrm{det}}(t)$ 和 $I_{P_{e/o},\,\mathrm{det}}(t)$，分辨率带宽为 40 兆赫（时间分辨率为 25 纳秒）。补充图展示了单个脉冲序列的校准输出功率（$I^2_{X_{e/o}} + I^2_{P_{e/o}}$）（参见方程）以及相位（$\arctan[I_{P_{e/o}}/I_{X_{e/o}}]$）。其中包括强泵浦脉冲产生的随机 SPDC 信号，以及较弱泵浦脉冲产生的相干 StPDC 信号，并同时加入相干微波信号用于校准。首个强脉冲产生的 SPDC 信号以阴影区域标示，表示单个脉冲的情况；多个脉冲的平均输出功率则显示在正文图2中。我们采用相干微波反射和受激参量下转换光学信号来获取脉冲期间的相位。在第二个光学泵浦脉冲期间，我们记录两个信号输出中的测量相位，以便在后续后处理中进行相位漂移校正。



补充图4。**单次测量脉冲序列的下转换输出信号。a（b）**分别显示以40 兆赫下转换的测量微波（光学）输出信号。每种情况下的阴影部分均表示自发参量下转换信号（第一个光学泵浦脉冲）所在区域。对于单个脉冲，自发参量下转换信号的信噪比过低，无法观察到。然而，在第二个光学泵浦脉冲期间，两个信号输出中都出现了相干响应，其相位可在每次单次测量中以高信噪比测得。

为了确定根据第二个泵浦脉冲期间测得的相位对第一个泵浦脉冲进行相位校正的准确性，我们在两个泵浦脉冲期间均发送连续微波信号，并记录第一个和第二个光学泵浦脉冲期间转换后的光学脉冲的相位。补充材料图5 显示了 2500 次试验中第一个与第二个光学泵浦脉冲之间的相位差，以及正态分布拟合。该分布的拟合方差为 0.17 rad。对于一组类似的模型数据，施加 0.17 rad 的随机相位变化会导致关联损耗约 1.5–2.0% [参见第IV D], 节；而在实验中，我们观察到关联损耗约为 6–8%。相位校正的不完善无法完全解释量子关联的降低，这可能是由其他实验不稳定性造成的，尤其是光学泵浦激光器锁定。



补充图5。**相位校正方案的准确性**。直方图显示了第一和第二个光学泵浦脉冲之间测得的相位差。由于我们根据第二个光学泵浦脉冲测得的光学相位来校正第一个泵浦脉冲的相位，因此该差值反映了这种方法的局限性。灰色虚线为方差为 0.17 rad 的正态分布拟合。

B. 脉冲后选择

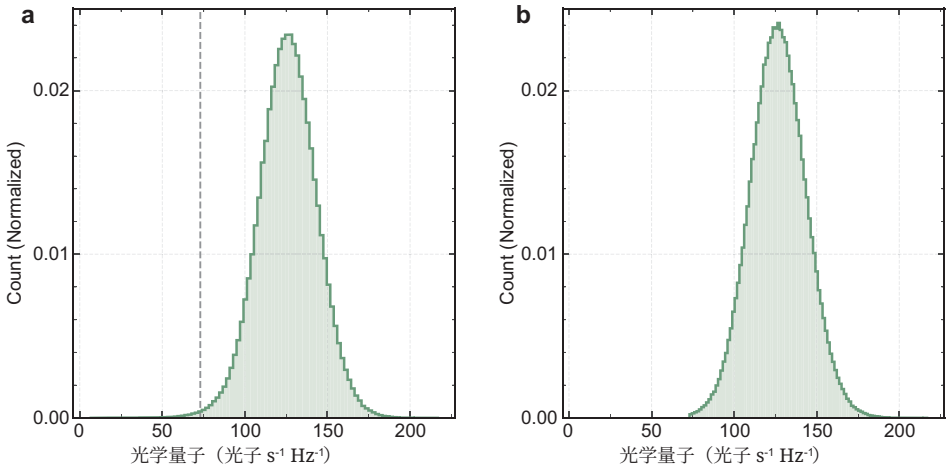
在我们的实验中，我们使用了三个温度稳定光学滤波器，它们可能会随时间缓慢漂移。其中两个用于光学外差探测。在信号路径中，一个滤波器（图1中的 F2）用于滤除光学信号，同时抑制强光学泵浦。在本振路径中，一个滤波器（图1中的 F3）用于获得纯净的光学本振音调，该音调由电光相位调制器（可产生多个边带）生成，随后由掺铒光纤放大器放大（会产生过量的放大自发辐射）。

可通过第二个光学泵浦脉冲期间受激参量下转换产生的相干光信号的振幅识别缓慢的滤波器漂移；该振幅会下降，原因可能是 F2 后的透射率降低，也可能是 F3 后的本地振荡器功率减小。如图 6a 所示，第二个光学泵浦脉冲期间转换光功率的直方图清楚地显示了这一点。该直方图不对称，低值端有一条长尾。为滤除外差探测发生漂移的情况，我们选定一个阈值（本例中以图 6 中的虚线标出），并剔除低于该阈值的所有脉冲，以及此类情况前后各 20 个相邻脉冲（总计 10 s）。这些数值根据滤波器漂移和滤波器温度锁定的时间尺度选定。经过此类滤波后，通常会剔除约 10 % 的数据，第二个光学泵浦脉冲期间转换光功率的直方图也会变得对称，如图 6b 所示。

C. 频域分析

如正文中所述，借助时域分析，我们选取三个不同的时间片段，在频域中分析数据——相对于第一个光学泵浦脉冲定义的脉冲前、脉冲期间和脉冲后。频域数据处理的主要挑战在于如何正确归一化测得的输出频谱 [，参见公式 48]。由于微波探测链中不同组件之间存在轻微的阻抗失配，微波反射基线并不平坦；类似地，平衡探测器增益随频率变化，导致光学外差散粒噪声底也不平坦。此外，我们观察到，每次启动新的测量并重新初始化数字化仪时，数字化仪测量值都会出现几毫伏的轻微偏移。再加上微波探测链中的放大器增益以及光学外差增益（由光本振功率漂移引起）可能随时间推移而漂移，因此需要对真空噪声水平进行原位校准。

对于微波，我们首先需要校正阻抗失配造成的微波反射基线失真，然后校正数字化仪导致的信号电平偏移。为校正失真的基线，我们单独测量微波腔处于基态时（在混合室中热化至 7 mK）的微波输出频谱。该测量结果见补充图 4a（灰色），同时还显示了测得的脉冲前（青色）、脉冲期间（紫色）和脉冲后微波噪声频谱（橙色）。将测得的频谱除以冷腔频谱后，可得到平坦的洛伦兹噪声频谱基线，但由于数字化仪漂移存在偏移。为校正这一偏移，我们利用脉冲前微波噪声频谱中的非共振（波导）噪声进行原位真空噪声校准。补充图中展示了微波波导噪声随平均光泵浦功率（在整个占空比内取平均值）变化的独立测量结果



补充图 6. **转换光功率的直方图**。 第二个光学泵浦脉冲期间测得的相干光功率取决于光学外差增益和接收到的光信号功率。这两个值都可能因实验装置的稳定性而发生漂移。**a** 展示了所有采集脉冲中测得光功率的归一化直方图。由于外差装置发生漂移的时段，直方图低值端出现了长尾。滤除未达到选定阈值的点（**a**中的灰色虚线所示）后，我们剔除了装置发生漂移、光学外差探测效率受到影响的情况。剔除这些点后的直方图见**b**。

8。误差棒（2σ 偏差）源自微波探测链路增益和测量仪器漂移。幂律拟合显示，微波波导噪声随平均光泵浦功率近乎线性增长，只有当光学泵浦功率达到 $>3\,\mu$W 时，噪声才显著偏离 0。由于我们使用的平均光泵浦功率为 $\ll 1\mu$W，因此可以放心地假设微波波导噪声为零。因此，我们将脉冲前微波噪声频谱中的非共振波导噪声用作原位真空噪声校准。

对于光学情况，光学探测处于散粒噪声极限；利用图1中的滤波器 F1，可将光信号频率处的额外本振噪声抑制 40 dB 以上。我们将脉冲前光学噪声谱作为真空噪声水平，并直接利用脉冲前原位校准对光学脉冲期间频谱进行归一化。补充图 4b 展示了光学脉冲关闭期间（青色）、脉冲期间（绿色）和脉冲后（黄色）的噪声谱（未归一化）。光学泵浦脉冲期间的信号清晰可见，且光学脉冲前后的噪声水平相同。

微波和光学的归一化噪声谱如正文图 2d 和 2e 所示，据此可以得到归一化增益 [cf. Eq. 48]。

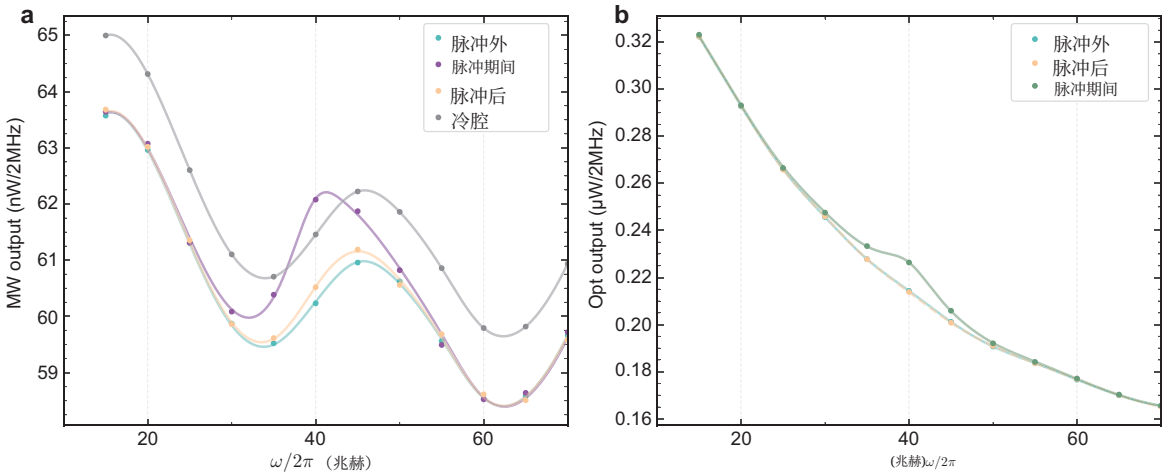
D. 联合正交分量关联

包含额外附加噪声的探测输出正交分量，即 $\hat{}I_{X_e,\,\mathrm{out}}(\Delta\omega)$、$\hat{}I_{P_e,\,\mathrm{out}}(\Delta\omega)$、$\hat{}I_{X_o,\,\mathrm{out}}(\Delta\omega)$、$\hat{}I_{P_o,\,\mathrm{out}}(\Delta\omega)$，可通过将光电流离散傅里叶变换的实部和虚部归一化到探测增益 [cf. Eq. 50] 得到。

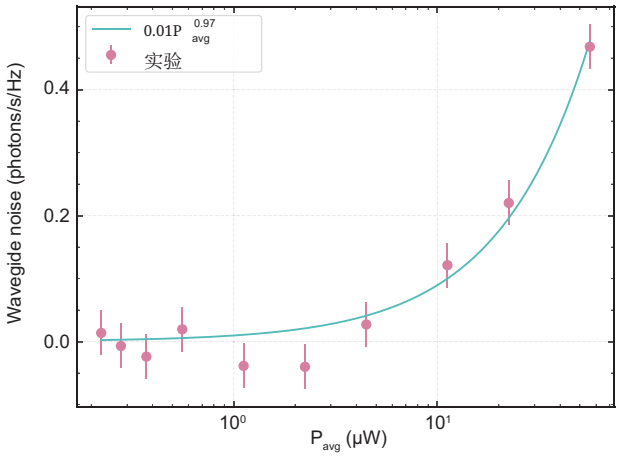
与第 . I C 1, 类似，我们可以通过对光学分量施加相位旋转来定义联合探测正交分量 s,

$$\begin{aligned}\hat{I}_{X,+}(\Delta\omega,\phi) &= \frac{\hat{I}_{X_e,\mathrm{out}}(\Delta\omega) + \left[\hat{I}_{X_o,\mathrm{out}}(\Delta\omega)\cos\phi - \hat{I}_{P_o,\mathrm{out}}(\Delta\omega)\sin\phi\right]}{\sqrt{2}},\\ \hat{I}_{P,-}(\Delta\omega,\phi) &= \frac{\hat{I}_{P_e,\mathrm{out}}(\Delta\omega) - \left[\hat{I}_{X_o,\mathrm{out}}(\Delta\omega)\sin\phi + \hat{I}_{P_o,\mathrm{out}}(\Delta\omega)\cos\phi\right]}{\sqrt{2}}.\end{aligned} \tag{69}$$

为验证输出微波和光场的无量纲正交分量变量之间的非经典关联，即 $\hat{}\ X_e(\Delta\omega)$ & $\hat{}\ X_o(-\Delta\omega)$ 和 $\hat{}\ P_e(\Delta\omega)$ & $\hat{}\ P_o(-\Delta\omega)$，我们可以计算相位相关的联合正交分量



补充图 7. **输出信号的频谱**。由于微波探测链中不同组件之间存在阻抗失配，微波反射基线并不平坦。因此，测得的放大真空噪声（来自冷微波腔）的输出功率并不平坦（在**a**中以灰色显示）。此外，我们实验装置中的数字化仪每次启动时的噪声水平都不同。因此，相较于其他所有测量，冷腔基线多了一个偏移量。**a** 还显示了首次光学脉冲之前（期间、之后）时间区域内测得的输出频谱，分别以青色（紫色、橙色）表示。同样，**b** 显示了首次光学脉冲之前（期间、之后）的光学输出频谱，分别以青色（绿色、橙色）表示。

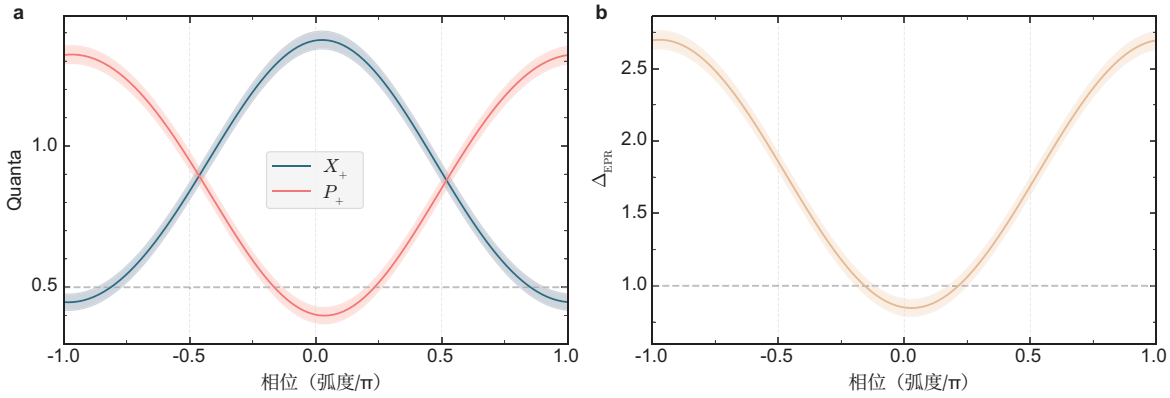


补充图 8。**微波波导噪声与平均光泵浦功率的关系**。误差棒表示 2σ 误差。实线为幂律拟合。我们发现，该幂律实际上非常接近线性函数。

方差 [参见式 61],

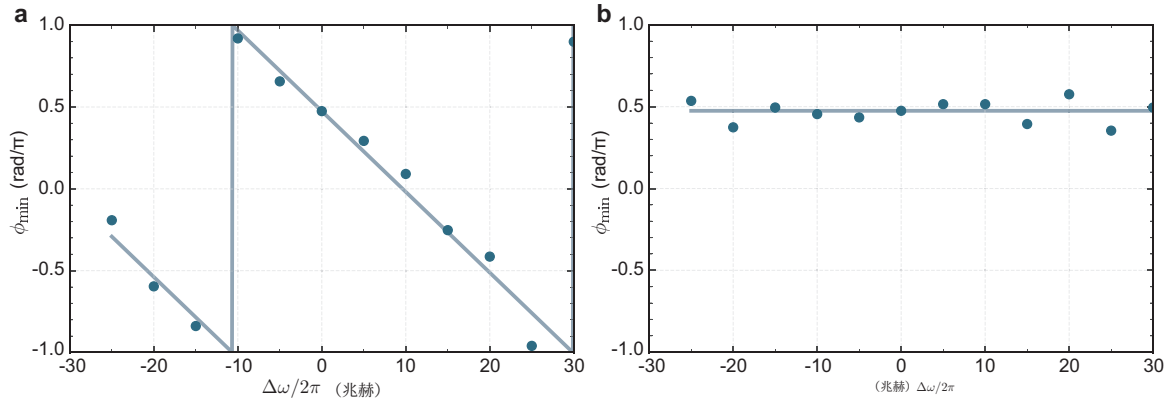
$$\left\langle \hat{X}_+^2(\Delta\omega,\phi)\right\rangle = \left\langle \hat{I}_{X,+}^2(\Delta\omega,\phi)\right\rangle - \frac{N_{e,\mathrm{add}}+N_{o,\mathrm{add}}}{2},$$
$$\left\langle \hat{P}_-^2(\Delta\omega,\phi)\right\rangle = \left\langle \hat{I}_{P,-}^2(\Delta\omega,\phi)\right\rangle - \frac{N_{e,\mathrm{add}}+N_{o,\mathrm{add}}}{2}. \tag{70}$$

对于 $\Delta\omega = 0$，我们在图 9 (a) 中绘制了联合正交分量方差随本地振荡器相位变化的曲线。阴影区域表示计算得到的联合正交分量方差的 2σ 统计误差。需要指出的是，高斯分布数据的方差统计 1σ 误差为 $\sqrt{2\sigma^2}/\sqrt{N-1}$，其中 N 为数据集长度。得到的共振 $\Delta_{\mathrm{EPR}}(0,\phi)$ 显示于图 9(b)。本地振荡器相位范围内 $\Delta_{\mathrm{EPR}}(\phi)$ 的最小值和最大值分别定义为 $\min[\Delta_{\mathrm{EPR}}] = \Delta^-_{\mathrm{EPR}}$ 和 $\max[\Delta_{\mathrm{EPR}}] = \Delta^+_{\mathrm{EPR}}$。 $\Delta^-_{\mathrm{EPR}} < 1$ 表示存在非经典联合关联，且压缩低于真空水平。



补充图9。**联合正交分量关联和 Δ_{EPR}。a**。共振处的联合正交分量 $X_+(\Delta\omega = 0)$ 和 $P_+(\Delta\omega = 0)$ 根据本地振荡器相位 ϕ 作图。**b**。 Δ_{EPR} 根据 ϕ 作图。两个图中的阴影区域均表示 2σ 统计误差。

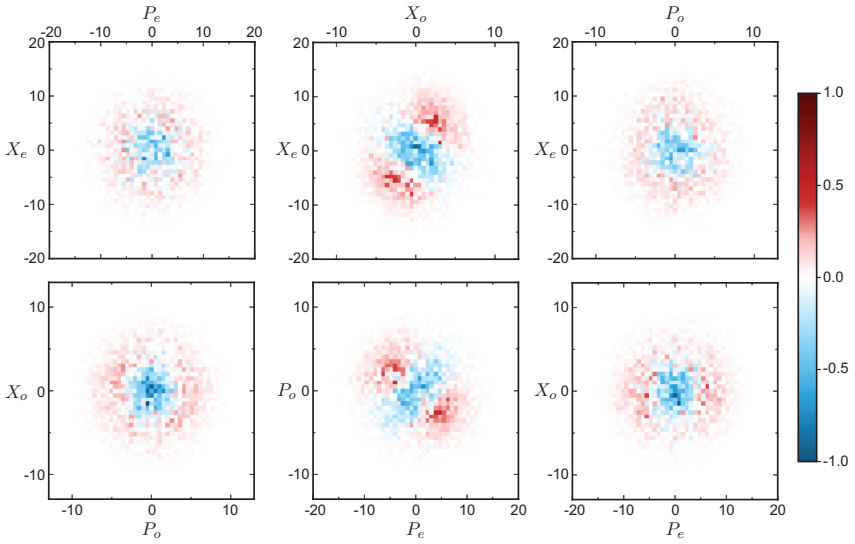
使 $\Delta_{\mathrm{EPR}}(\Delta\omega, \phi)$ 最小的宽带相位，即 $\phi_{\mathrm{min}}(\Delta\omega)$，揭示了微波与光学信号输出之间的到达时间差（群时延）（补充图 10a）。确定微波和光学信号在脉冲期间的到达时间之间的时间延迟后，ϕ_{min} 便不再随相对于模式共振的频率失谐而变化。因此，我们利用宽带量子关联，对所分析的所有数据集进行到达时间差校正，确保 ϕ_{min} 相对于失谐 $\Delta\omega$ 的斜率最小。



补充图 10。**微波与光学信号之间的时间延迟的影响**。图中显示了使 $\Delta_{\mathrm{EPR}}(\Delta\omega,\ \phi)$ 最小的本地振荡器相位 ϕ_{min} 随失谐频率 $\Delta\omega$ 的变化。**a**（**b**）显示微波与光学信号到达时间差为 25 纳秒（≈ 0 纳秒）时的情况。实线为实验数据的线性拟合。

V. 正交分量直方图原始数据

图 11 展示了根据正文图 2 和图 3 所示数据，分别在光学泵浦脉冲期间和脉冲之前获得的双变量正交分量直方图的归一化差值。这些未经处理的直方图直接展示了各通道中的相位不敏感放大，以及 $(X_e,\ X_o)$ 和 $(P_e,\ P_o)$ 中的关联。但请注意，与正文中的分析不同，计算这一差值并不会得到有效的相空间表示，因为真空噪声 0.5 以及 0.026 ± 0.011 光子的输出噪声（这是脉冲前瞬间残余微波浴占据数所致）也被减去了，因此会出现负值。



补充图 11。 **正交分量直方图原始数据**。双变量正交分量直方图的归一化差值 s
在光学泵浦脉冲期间及之前获得的数据，依据正文图 2 和图 3 所示数据。

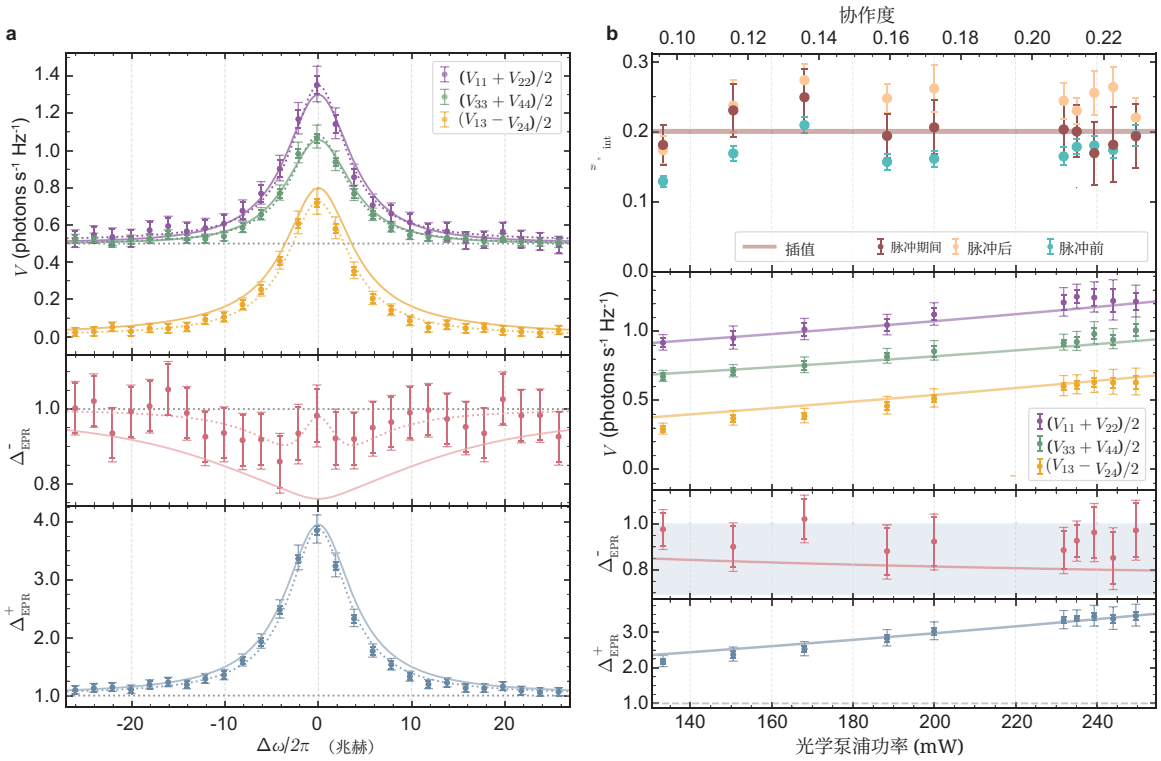
VI. 600 ns 长光泵浦脉冲下的非经典关联

在使用 250 ns 长的光学泵浦脉冲进行实验之前，我们使用了 600 ns 长的光学泵浦脉冲。一个使用 600 ns 脉冲的测量示例见图 12a，与正文图 3c 类似。与 250 ns 长的脉冲相比，主要区别在于，中间面板中的 Δ^-_{EPR} 呈现双凹形状，因为关联 $\bar{V}_{13}$ 的带宽比发射噪声谱（$\bar{V}_{11}$ 和 $\bar{V}_{33}$）更宽，而后者因动态反作用而变窄 [5]。由于测量中关联并未明显超过发射噪声，不同宽度的两个洛伦兹函数（虚线）之间的干涉导致了 Δ^-_{EPR}的这一特定形状。理论结果证实了这一点，尽管所示的理论曲线（红色实线）因预期关联强于实验观测值，并未呈现这一特定线形。这些结果表明，由 600 ns 光学泵浦脉冲产生的 $\bar{n}_{e,\,\mathrm{int}}$ 足够大，以至于无法在低于真空水平的整个带宽范围内清晰观测到压缩（$\Delta^-_{\mathrm{EPR}} < 1$）。因此，我们改用统计量更高的 250 ns 光学泵浦脉冲，如正文所示。

我们还使用不同光学泵浦功率下、时长为 600 ns 的脉冲重复了这项测量。图 12b 展示了测得的泵浦功率依赖性；每个数据点均基于 170000–412500 次独立测量，重复频率为 2 Hz。微波模式热浴占据数 $\bar{n}_{e,\,\mathrm{int}}$ 随器件处的峰值光泵浦功率变化很小，因此用常数函数近似（上方面板中的栗色实线）。共振时的协方差矩阵平均元素随协作度成比例变化，并与基于 $\bar{n}_{e,\,\mathrm{int}}$ 的理论（实线）高度吻合。由于过量噪声和关联都随协作度同步变化，共振时的压缩 Δ^-_{EPR} 纠缠并未随协作度发生显著变化。反压缩 Δ^+_{EPR} 则如预期随协作度增大。除一个测得的平均值外，其余均低于真空水平；其中三种功率设置显示出 $> 2\sigma$ 纠缠显著性。请注意，这次功率扫描是在另一组光学模式上进行的，其反斯托克斯边带抑制程度也不同（见第 III节）。

VII. 误差分析

输出场正交分量 $V(\omega)$ 的协方差矩阵可根据频域分析 [提取的微波和光学正交分量直接计算得出，参见公式 54] 。我们只需将光学正交分量旋转至使联合正交分量方差最小的相位，即可得到标准形的协方差矩阵。需要指出的是，协方差矩阵计算误差有两个来源：脉冲数量有限所导致的统计误差，以及真空噪声水平校准中的系统误差。详细的误差分析见下文各小节。需要指出的是，正文中报告的所有数值的不确定性均对应于 *2* 倍标准差。



补充图 12。**600 纳秒长泵浦脉冲下，非经典关联随光学泵浦功率的变化。a**，上图：基于 412500 次测量（重复频率为 2 赫兹），微波输出噪声 $\bar{V}_{11}$ （紫色）、光学输出噪声 $\bar{V}_{33}$ （绿色）和关联 $\bar{V}_{13}$ （黄色）随失谐的变化。实线表示联合理论，拟合参数为 $C = 0.22$，脉冲期间微波热浴占据数为 $\bar{n}_{e,\,\mathrm{int}} = 0.19 \pm 0.03$。虚线为各自的洛伦兹拟合，仅供视觉参考。中图（下图）中以红色（蓝色）显示的 Δ^- EPR （Δ^+ EPR）根据上图数据和拟合结果计算得出，具体如正文所述。深色误差棒表示 2σ 统计误差，外侧（较浅色）误差棒还包括系统误差。**b**，协方差矩阵元素随功率的变化。上图显示微波模式热浴占据数 $\bar{n}_{e,\,\mathrm{int}}$ 在脉冲前、脉冲后和脉冲期间阶段（图2A 中标出）随器件处峰值光泵浦功率及相应协作度的变化。脉冲期间的 $\bar{n}_{e,\,\mathrm{int}}$ 由联合理论拟合得出，并以常数函数近似（实线）。中图显示基于上图中 $\bar{n}_{e,\,\mathrm{int}}$ 得到的共振时协方差矩阵平均元素。最下方两图显示根据中图计算得出的 *on-resonance* 压缩 Δ^- EPR 和反压缩 Δ^+ EPR，并与理论结果（实线）一同呈现。深色误差棒表示 2σ 统计误差，外侧（较浅色）误差棒还包括系统误差。所有测得的平均值均低于真空水平，且三个功率设置下的结果均在纠缠方面具有 $> 2\sigma$ 显著性。

A. 统计误差

二元方差的计算误差 来自统计不确定性，这是由随机样本的观测次数有限造成的。该误差是协方差矩阵对角元素总误差的主要组成部分。对于从高斯变量中抽取的样本分布，其方差的计算误差服从卡方分布，表示为：

$$\mathrm{Var}(\sigma^2) = \frac{2\sigma^2}{N-1}, \tag{71}$$

其中， σ^2 是样本分布的方差， N 是其大小。

此外，二元变量的协方差误差服从威沙特分布 [15]。对于一般的二元协方差矩阵 Σ 给定如下，

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \rho\sigma_{11}\sigma_{22} \\ \rho\sigma_{11}\sigma_{22} & \sigma_{22}^2 \end{pmatrix}, \tag{72}$$

协方差矩阵的方差为，

$$\mathrm{Var}(\Sigma) = \frac{1}{N-1}\begin{pmatrix} 2\sigma_{11}^4 & (1+\rho^2)\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2 \\ (1+\rho^2)\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2 & 2\sigma_{22}^4 \end{pmatrix}. \tag{73}$$

B. 系统误差

尽管测量中的系统误差并不十分显著，但仍是一个值得注意的误差来源。这里，协方差矩阵计算中的误差源于真空噪声水平估计的误差。更具体地说，是微波和光学探测链所引入的附加噪声的测定误差，详见第III节。将这些系统误差传播至协方差矩阵分析并非易事，因为计算存在误差的量的方差误差颇具挑战。因此，我们采用最坏情况方法计算总误差，其中包括统计误差和系统误差。对于微波和光学附加噪声水平的系统误差不确定性范围的下限和上限，我们分别重复完整分析，并纳入统计误差。重复分析会扩大计算量的误差棒。我们取所有重复分析中全部误差棒的极值，作为总误差棒。正文中同时展示统计误差和总误差。

参考文献

[1] W. Hease, A. Rueda, R. Sahu, M. Wulf, G. Arnold, H. G. Schwefel, and J. M. Fink, PRX Quantum **1**, 020315 (2020). [2] M. Tsang, 物理评论 A **81**, 063837 (2010). [3] M. Tsang, 物理评论 A **84**, 043845 (2011). [4] A. Rueda, F.Sedlmeir, M. C. Collodo, U. Vogl, B. Stiller, G. Schunk, D. V. Strekalov, C. Marquardt, J. M. Fink, O. Painter, G. Leuchs, and H. G. L. Schwefel, Optica **3**, 597 (2016). [5] L. Qiu, R. Sahu, W. Hease, G. Arnold, and J. M. Fink, arXiv:2210.12443 (2022). [6] C. W. Gardiner and M. J. Collett, Physical Review A **31**, 3761 (1985). [7] S. L. Braunstein and P. van Loock, Rev. Mod. Phys. **77**, 513 (2005). [8] S. Zippilli, G. D. Giuseppe, and D. Vitali, New Journal of Physics **17**, 043025 (2015). [9] M. P. da Silva, D. Bozyigit, A. Wallraff, and A. Blais, Physical Review A **82**, 043804 (2010). [10] D. Walls and G. Milburn, 量子光学（ Springer Verlag，柏林，1994）。[11] H. M. Wiseman and G. J. Milburn, 量子测量与控制（剑桥大学出版社，2009）。[12] C. M. Caves, Physical Review D **26**, 1817 (1982). [13] L.-M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, and P. Zoller, Physical Review Letters **84**, 2722 (2000). [14] R. Sahu, W. ~~Hease, A. Rueda, G. Arnold, L. Qiu~~, and J. M. Fink, Nature Communications **13**, 1276 (2022). [15] J. Wishart, Biometrika **20A**, 32 (1928).