arXiv:2301.03316v2 [math.RT] 2 Apr 2024

受限有理 Cherednik 代数中心的显式表示

Niall Hird

摘要。本文针对参数 c 的特定取值，给出了受限有理 Cherednik 代数 $\overline{H}_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 的中心的显式表示。更确切地说，我们用生成元与关系描述了 $\overline{H}_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 的不可分解块的中心。使这一表示成立的参数 c 满足 Calogero-Moser 空间光滑。此外，我们展示了如何直接根据 n 的 ℓ-多重分拆集合，导出 $\overline{H}_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 的中心的显式表示。

1. 引言

受限有理 Cherednik 代数因其与有理 Cherednik 代数的联系而备受关注，进而也与可积系统、代数辛几何和代数组合学相关。有理 Cherednik 代数可针对任意复反射群 $(W, \mathfrak{h})$ 定义，并由两个数值 t 和 c作为参数。若 $t \neq 0$，其中心是平凡的；但在 $t = 0$ 的情形下，中心则很大。确切地说，有理 Cherednik 代数是其中心上的有限维模。因此，有理 Cherednik 代数的许多表示论性质都可以通过其中心来理解。受限有理 Cherednik 代数是对中心内一个子代数取商所得的代数，本身也具有丰富的结构。本文的主要结果（定理 9.2）针对缠绕积群 $S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 在参数 $\bar{c}$的特定取值下，给出了受限有理 Cherednik 代数中心的显式表示。

我们将受限有理 Cherednik 代数视为其不可分解块的直和，并求出每个块的中心。这些块具有一个重要性质：它们同构于两个分次环 $A(\lambda)^-$ 与 $A(\lambda)^+$的张量积，其中 $\lambda \in$ 不可约表示集 W。环 $A(\lambda)^+$ 是 λ 对应的婴儿 Verma 模的自同态环；在对称群情形下，它同构于 $A(\lambda)^-$，但具有相反分次。对于更一般的缠绕积情形，这些环仍然密切相关；具体细节见定理 3.3。因此，要理解受限有理 Cherednik 代数的中心，只需理解一族自同态环。为得到主要结果，我们首先求出对称群情形下受限有理 Cherednik 代数的中心 S_n。

定理 1.1。 *(9.1)* 存在一个同构，将 $\overline{H}_c(S_n)$ 的中心同构于 $c \neq 0$

$$Z(\overline{H}_c(S_n)) \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Irr} S_n} A_c(\lambda)^- \otimes A_c(\lambda)^+.$$

代数 $A_c(\lambda)^+$ 的表示由定理 *7.3* 给出，且 $A_c(\lambda)^-$ 与 $A_c(\lambda)^+$ 在相反分次下同构。

在第 4 节中，我们证明推论4.1：在对称情形下，$A(\lambda)^+$ 与某个特殊映射 π的概形论纤维上的函数环同构。借助 Wronski 映射，这使我们能够利用它与舒伯特胞腔之间的联系。舒伯特胞腔的性质已得到充分理解，而且关键的是，

Wronski 映射的纤维可以用生成元与关系显式写出。第 6 节将对此作更详细的说明。遗憾的是，这种联系只存在于对称群情形，而不适用于更一般的缠绕积群。对于对称群情形，这足以完整描述婴儿 Verma 模的自同态环，进而描述整个中心。通过将 S_n 的不可约表示按 $\lambda \vdash n$ 的分拆标记，我们得到定理 7.2 ，该定理用生成元与关系显式描述了 $A(\lambda)^+$ 。利用有关分拆的初等结果，我们可以证明 $A(\lambda)^+$ 可以直接从杨图 D_λ 中计算得到，而该图对应于 λ。

定理 1.2. *(7.3)* 设 $\lambda \vdash n$ 为一个分拆。代数 $A(\lambda)^+$ 是以下商

$$A(\lambda)^+ \cong \mathbb{C}[D_\lambda]/I$$

由理想 I 生成，该理想由以下 n 齐次元素 $r_1, \ldots, r_n$ 生成。这些 r_s 按如下方式排列： $\deg(r_s) = s$。出现在 r_i 中的单项式是若干单元格的乘积，这些单元格在 D_λ 中既不同行也不同列。换言之，若 $\square_{i,\,j}\square_{k,\,\ell}$ 是 r_s 中某个单项式的因子，则必须有 $i \neq k$ 且 $j \neq \ell$。生成元的系数 I 由命题 7.4 给出。

由于我们可以用生成元与关系显式描述环 $A(\lambda)^+$ ，因此也可以对 $\overline{H}_c(S_n)$ 的不可分解块作同样的描述，进而描述整个中心。

本文的主要结果是将第一个定理推广到广群情形。如前所述，环 $A_{\overline{c}}(\underline{\lambda})^-$ 与 $A_{\overline{c}}(\underline{\lambda})^+$密切相关。在缠绕积群的情形下， $A_{\overline{c}}(\underline{\lambda})^-$ 同构于 $A_{\overline{c}}(\underline{\lambda}^\star)^+$ ，但对应的是另一个单模 $\lambda^\star$。

定理 1.3. *(9.2)* 参数下，$\overline{H}_{\overline{c}}(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 的中心存在一个同构，其中参数为 $\overline{c}$,

$$Z(\overline{H}_{\overline{c}}(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})) \cong \bigoplus_{\underline{\lambda} \in \mathrm{Irr} S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} A_{\overline{c}}(\underline{\lambda})^- \otimes A_{\overline{c}}(\underline{\lambda})^+.$$

代数 $A_{\overline{c}}(\underline{\lambda})^+$ 由定理 *8.2* 给出，且 $A_{\overline{c}}(\underline{\lambda})^-$ 与 $A_{\overline{c}}(\underline{\lambda}^\star)^+$ 在相反分次下同构 .

与对称情形类似，要理解中心，我们只需描述婴儿 Verma 模的自同态环。为此，我们需要固定一种标记 $S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 的不可约表示的约定。 $S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 的不可约表示由 n 的 ℓ-多重分拆编号。此外， n 的 ℓ-多重分拆与具有平凡 ℓ-核的 $n\ell$ 的分拆构成双射。关于这些术语的精确定义，见第 2 节。

广 wreath 积情形更为困难，因为它无法通过 Wronski映射直接关联到舒伯特胞腔。我们改用 Bonnafé 和 Maksimau 的一个同构 [9, 定理 4.21] ，将特殊参数 $\overline{c}$ 下的 $S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 的 Calogero-Moser 空间与 $S_{n\ell}$ 的 Calogero-Moser 空间的不动点子空间的一个不可约分支相联系。第 5 节专门利用这一同构证明，广 wreath 积 $S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 的婴儿 Verma 模的自同态环是 $S_{n\ell}$ 下 $A(\lambda)^+$ 和 $A(\lambda)^-$ 的商。这是定理 5.10 的内容，该定理指出存在同构$A(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))^+ \cong A(\lambda)^+_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$ 和 $A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)^\natural)^- \cong A_c(\lambda)^-_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$。借助推论 7.2，可以完全用正情形改写负情形。因此，与对称情形类似，要理解中心，只需理解 $A(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))^+$。

定理 5.10 是一个强有力的结果，可以轻松推广定理 7.3 为下文的定理 8.2 。注意，$h(i,\ j)$ 表示杨图中单元格 $(i,\ j)$ 的钩长。

定理 1.4。 *(8.2)* 设 $\lambda \vdash n\ell$ 是一个具有平凡 ℓ-核的分拆，且 $\mathrm{quo}\ell(\lambda)$ 是其 ℓ-商。代数$A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}\ell(\lambda))^+$ 是商

$$A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))^+ \cong \mathbb{C}[D_\lambda^\ell]/I$$

其中， D_λ^ℓ 是从 D_λ （年轻图）中去掉单元格 (i,j) 后得到的子图，且 $h(i,j)$不能被 ℓ整除。理想 I 由 n 个齐次元素 $r_\ell, r_{2\ell}, \ldots, r_{n\ell}$生成。 $r_{s\ell}$ 按如下方式排序： $\deg(r_{s\ell}) = s\ell$。 $r_{s\ell}$ 中出现的单项式是 D_λ^ℓ中互不同行、不同列的单元格之积。换言之，如果$\square_{i,j}\square_{k,m}$ 是 $r_{s\ell}$中某个单项式的因子，那么必须有$i \neq k$ 和 $j \neq m$。 I 的生成元的系数由命题 *7.4* 给出。

与对称群的情形一样，如果我们能明确描述婴儿 Verma 模的自同态环，那么也能以同样的方式描述整个中心。在第 9 节中，证明定理 9.2 之后，我们通过计算 $\overline{H}_c(S_2 \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 和 $\overline{H}_c(S_3 \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的中心给出两个例子。本文所包含的主要结果最初发表于作者的博士论文 [19]。

2. 组合学与分拆

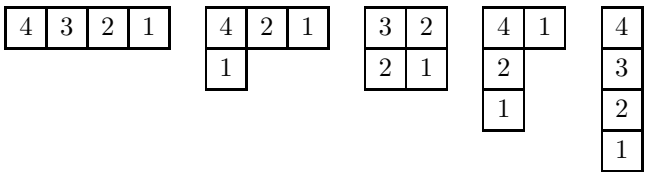
本节给出本文组合学部分所需的基本定义和结果。其中， ℓ-核与 ℓ-商的概念尤为重要。我们将先定义分拆，再定义 ℓ-多重分拆和珠图。

定义 2.1. 设 n 为正整数。 n 的一个 *partition* 是一个元组 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$，其中各项均为非负整数，且对所有 $1 \leq i \leq n-1$都有 $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ ，并且

$$|\lambda| := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n.$$

λ 的 *length* 是满足 $\lambda_t \neq 0$ 且 $\lambda_{t+1} = 0$的正整数 t 。

杨图是表示分拆的一种常见方式。分拆 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \vdash n$ 对应的杨图由左对齐的行组成，其中第 i^{th} 行有 λ_i 个单元格。列从左向右编号，行从上向下编号。因此，单元格 (2,3) 位于从上往下数第二行、从左往右数第三列。钩长是一个为杨图中的每个单元格赋予一个整数的函数。计算每个单元格的钩长时，将其右侧的单元格数与正下方的单元格数相加，再加一（即该单元格本身）。下方给出了分拆 (4,0,0,0)、(3, 1, 0, 0)、(2,2,0,0)、(2,1,1,0) 和 (1,1,1, 1) 的杨图，每个单元格内都标出了其钩长。



现在给出单元格钩长的公式。对于给定的分拆 λ ，我们用 λ^T 表示其转置。于是， λ_j^T 表示 λ 的第 j^{th} 列中的单元格数。单元格 (i,j) 的钩长 $h(i,j)$ 为

$$h(i,j) = \lambda_i - j + \lambda_j^T - i + 1. \tag{2.1}$$

引理 2.1。 令 $\lambda \vdash n$ 并考虑集合 $P = \{d_1, \ldots, d_n\}$，其中 $d_i = \lambda_i + n - i$。那么

$$|\{j \mid d_i - j \notin P \text{ for } 1 \leq j \leq d_i\}| = \lambda_i.$$

证明。 注意， $d_i > d_j$ 若 $i < j$。因此存在 $n-i$ 个元素 $d_k \in P$，使得 $d_k < d_i$。元素 $d_i - j \notin P$ 的个数因此为

$$d_i - (n-i) = \lambda_i + n - i - n + i = \lambda_i.$$

□

若令 P 和 d_i 与引理 2.1 中的相同，则可证明如下结论。

引理 2.2。 行 i 的钩长集合等于集合 $\{j \,|\, d_i - j \notin P\}$。

证明。 我们来证明，行 i 的钩长集合包含于集合 $\{j \,|\, d_i - j \notin P\}$中。由引理 2.1即可得到结论。固定 $i \in \{1、2、.....、n\}$。若存在 d_m 使得 $d_i - h(i,\ j) = d_m$ 对于某个 j，则

$$h(i,j) = d_i - d_m.$$

因此

$$\lambda_i - j + \lambda_j^T - i + 1 = \lambda_i + n - i - (\lambda_m + n - m),$$

这可化简为

$$\lambda_j^T - j + 1 = m - \lambda_m. \tag{2.2}$$

现在需要考虑两种情况： $\lambda_j^T \geq m$和 $\lambda_j^T < m$。

首先令 $\lambda_j^T \geq m$。那么 $\lambda_j^T = m + k$ 对于某个非负整数 k，于是方程（2.2）变为$j = k + \lambda_m + 1$。因此 $j > \lambda_m$。由于 $\lambda_j^T > m$ 我们有 $\lambda_m \geq \lambda_{\lambda_j^T}$，所以 $j > \lambda_{\lambda_j^T}$。但这与 λ_j^T的定义矛盾。

第二种情况是 $\lambda_j^T < m$。那么 $\lambda_j^T = m - k \geq i$ 对于某个正整数 k。方程（2.2）$\lambda_m + 1 = j + k$ 现在，由于 k 是正整数，我们有 $j \leq \lambda_m$。但由于 $m > \lambda_j^T$我们有$j > \lambda_m$，因此产生矛盾。所以不存在 d_m 使得 $d_i - h\,(i,\ j) = d_m$，因此$h\,(i,\ j) \in \{j \,|\, d_i - j \notin P\}$□

引理 2.3。 给定一个分拆 $\lambda \vdash n$，我们有 $d_i - h\,(i,j) = d_k - h\,(k,j)$。

证明。 利用公式（2.1），以下计算给出结果

$$d_i - h(i,j) = \lambda_i + n - i - \lambda_i + j - \lambda_j^T + i - 1 = n + j - \lambda_j^T - 1$$

and

$$d_k - h(k,j) = \lambda_k + n - k - \lambda_k + j - \lambda_j^T + k - 1 = n + j - \lambda_j^T - 1.$$

□

定义 2.2。 n 的一个 ℓ-多重分拆是一个 ℓ-元组（λ^1，.....，λ^ℓ），其中每个 λ^i 都是一个分拆，并且 $\sum_{i=1}^{\ell} |\lambda^i| = n$。

分拆的 $first\ column\ hook\ lengths$ 是分拆对应杨图中最左列单元格的钩长集合。例如，分拆 (3,2,1,1) 的杨图为

6	3	1
4	1	
2		
1		

第一列钩长为 {6,4, 2, 1}。第一列钩长很重要，因为总能根据第一列钩长还原原分拆。为此，请回顾上文给出的钩长公式，

$$h(i,j) = \lambda_i - j + \lambda_j^T - i + 1.$$

固定 $j = 1$ 即可得到第一列钩长。因此

$$h(i,1) = \lambda_i - 1 + \lambda_j^T - i + 1 = \lambda_i + \lambda_j^T - i,$$

因此 $\lambda_i = h(i,\ 1) - \lambda_j^T + i$。

定义 2.3. 令 $\lambda = (\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m,\ 0 \ldots,\ 0) \vdash n$ 并令 $p \geq m$，则定义

$$\beta_i^p = \lambda_i + p - i \text{ for } 1 \leq i \leq p.$$

集合 $\{\beta_i^p | 1 \leq i \leq p\}$ 称为 λ 的 β-数集合。

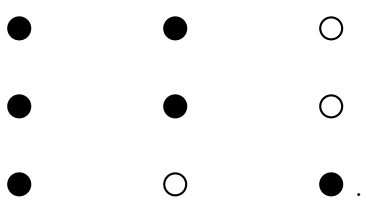
第一列钩长构成一个 β-数集合；我们将看到，这些钩长使我们能够通过珠图定义 ℓ-核和 ℓ-商。

定义 2.4. 我们将集合 $\mathbb{Z}_{\leq -1} \times \{0,\ \ldots,\ \ell - 1\}$ 的元素称为 $points$。$bead\ diagram$ 是一个函数 f: $\mathbb{Z}_{\leq -1} \times \{0,\ \ldots,\ \ell - 1\} \to \{0,\ 1\}$，它仅在有限多个点处取值为 1。若 $f(i,\ j) = 1$，则称该点被一个 $bead$ 占据。若 $f(i,\ j) = 0$，则点 $(i,\ j)$ 为 $empty$。

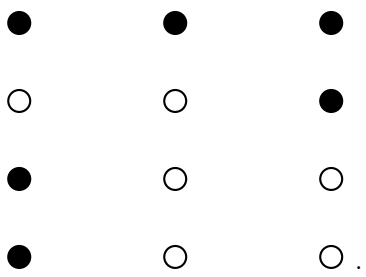
给定任意一个分拆 $\lambda \vdash n$ 和整数 $\ell \leq n$，我们可以按以下方式构造珠图。沿用定义2.3 中的记号，令 p 为 ℓ 的最小倍数，使得 $p \geq m$。然后记 K 为相应 β数的集合，并按照以下规则放置珠子 $f(i,j) = 1$ 当且仅当 $-(i+1) \cdot \ell + j \in K$。将此珠图记为 $\mathfrak{B}_\ell(\lambda)$。

构造与分拆相关的珠图还有一种更简单的方法，并且与上面给出的条件一致。考虑由 ℓ 列空珠组成的图。然后从左到右计数，并从顶行开始（这颗珠子对应于 0）；实珠对应于 K 中的元素。举例即可说明这一点。

例 2.1。令 $\ell = 3$，那么我们将为分拆 (3,2,1,1) 写出珠图。由于 $p = 6$ 是大于 4 的最小 3 的倍数，我们的 β 数集合为 {8,6,4,3,1,0}。因此，珠图有三列，实珠按照从左到右、从上到下的顺序，根据 β 数放置。因此 $\mathfrak{B}_3$(3,2,1,1) 为



按照逆向过程，每个珠图都唯一对应一个分拆，但要注意，我们从第一个空珠子开始计数。由此得到的数值集合就是该分拆的第一列钩长集合。例如，考虑珠图

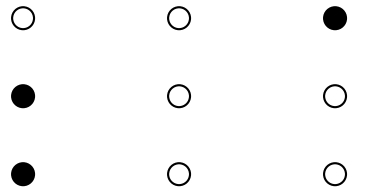


第一列钩长为 {2,3,6}，对应的分拆为 $(4,2,2)$。

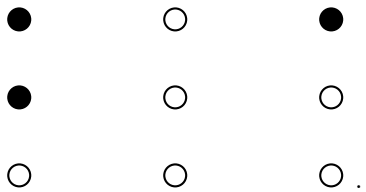
定义 2.5. 设 $\lambda \vdash n$，并固定一个正整数 $\ell \leq n$。考虑 λ 的珠图 $\mathfrak{B}_\ell(\lambda)$，其有 ℓ列。尽可能向上滑动珠子后，我们得到一个新的珠图。与这个新珠图对应的分拆称为 λ的 ℓ-核。

定义 2.6. 考虑珠图 $\mathfrak{B}_\ell(\lambda)$。这些列可以看作是$\ell = 1$的珠图。用 λ^1表示第一列定义的分拆，用 λ^2 表示第二列定义的分拆，以此类推。我们将 λ的ℓ-$quotient$定义为 ℓ-多重分拆（λ^1、.....、 λ^ℓ）。

例 **例 2.2.** 我们来求（4，2，2）的 3-核和 3-商。首先写出 $\mathfrak{B}_3$(4，2，2)，即



为了求出 3-核，我们将所有珠子尽可能向上移动，得到新的珠图



从第一个空珠子开始计数，得到第一列钩长 {1，2}，对应于分拆 (1，1)。要找出 3-商，我们将 $\mathfrak{B}_3$(4， 2，2) 的各列分别视为独立的珠图。此时， λ^2 和 λ^3 的第一列钩长集合为空。第一列珠子有第一列钩长 {1，2}。因此，(4， 2， 2) 的 3-商为 ((1， 1) $\emptyset$， $\emptyset$)。

我们再引入最后一个记号。用 P(n) 表示 n 的所有分拆组成的集合，用 P(n,ℓ) 表示 n 的所有 ℓ-重分拆组成的集合。此外，用 $\mathrm{P}^\ell_\lambda(n)$ 表示所有具有 ℓ-核 λ 的 n 的分拆组成的集合。一个分拆由其 ℓ-核和 ℓ-商唯一确定。以下的 [21, 定理 2.7.30] 使我们能够将 n 的 ℓ-重分拆与具有平凡 ℓ-核的 $n\ell$ 的分拆等同起来。

定理 2.1. n的多重分拆与 $n\ell$ 的具有平凡 ℓ-核的分拆集合之间存在双射

$$\mathcal{P}^\ell_\emptyset(n\ell) \to \mathcal{P}(n,\ell),$$

由 $\lambda \to quo$（λ）给出。

3. 中心的分块

本节将研究受限有理 Cherednik 代数中心的不可分解块的基本性质。具体而言，我们回顾这些块同构于婴儿 Verma 模的自同态环的张量积这一事实。这一事实对后续结果至关重要，因为我们将描述的正是这些环。此外，我们将证明，当中心是正则代数时，这些块由复反射群 W 的不可约表示标记。首先，我们回顾有理 Cherednik 代数的定义。

设 $W \subset GL(\mathfrak{h})$ 是一个复反射群，并设 $V = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$。存在一个自然配对 $(-,-) : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^* \to \mathbb{C}$，定义为 $(y, x) := x(y)$。于是，V 上的标准辛形式 ω 定义为

$$\omega(y_1 \oplus x_1, y_2 \oplus x_2) = (y_1, x_2) - (y_2, x_1).$$

设 S 是 W 中复反射的集合。对于 $s \in S$，我们用 ω_s 表示这样一个辛 2-形式：它在 $\mathrm{Im}(1-s)$ 上等于 ω，在 $\mathrm{Ker}(1-s)$ 上等于 0。

给定一个复反射群 $(W, \mathfrak{h})$、$t \in \mathbb{C}$ 和一个类函数 $c : S \to \mathbb{C}$。我们定义 $rational\ Cherednik\ algebra$

$$H_{t,c}(W) := T(V) \rtimes W / \langle x \otimes y - y \otimes x - \kappa(x,y) \,|\, \forall x,\, y \in V \rangle$$

其中

$$\kappa(x,y) = t \cdot \omega(x,y) \cdot 1 + \sum_{s \in S} c(s) \cdot \omega_s(x,y) \cdot s.$$

固定一些记号。对于任意代数 A，我们用 $Z(A)$ 表示其中心。为简便起见，我们还定义$Z_c(W) := Z(H_c(W))$ 和 $X_c(W) :=$ 谱 $Z_c(W)$。命题 [18, 命题 3。6] 表明，存在代数的包含关系

$$i : \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W \hookrightarrow Z_c(W).$$

谱上的对偶映射记为

$$\gamma : X_c(W) \to \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W\right) = \mathfrak{h}/W \times \mathfrak{h}^*/W.$$

$restricted\ rational\ Cherednik\ algebra$ 是商代数

$$\overline{H}_c(W) := H_{0,c}(W) / R_+ H_{0,c}(W).$$

这里，$R_+ = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W_+ \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W + \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W_+$是中心子代数 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W$ 中由不含常数项的元素生成的理想。

本文的主要研究对象是缠绕积群$S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$的受限有理 Cherednik 代数，因此我们借此机会给出其定义。

定义 3.1. 缠绕积 $S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 是半直积 $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$。这意味着群乘法定义为

$$(s, a_1, \ldots, a_n) \cdot (t, b_1, \ldots, b_n) = (st, a_{t(1)} b_1, \ldots, a_{t(n)} b_n)$$

其中，对于所有 $1 \le i \le n$ 和 $1 \le j \le n$，s，$t \in S_n$ 以及 a_i，b_j 都是 ℓ^{th} 单位根。

记　将受限有理 Cherednik 代数表示为其不可分解块的直和　ks

$$\overline{H}_c(W) = \bigoplus_{j\in I} B_j. \tag{3.1}$$

块 $\overline{H}_c(W)$ 与 $\gamma^{-1}(0)$ [12, 推论 2.7]中的点构成双射。因此，我们可以用 I 替换指标集 $\gamma^{-1}(0)$，并将 (3.1) 写成

$$\overline{H}_c(W) = \bigoplus_{p\in\gamma^{-1}(0)} B_p. \tag{3.2}$$

为了更好地理解这些块，我们需要两个关键事实：首先，块具有矩阵代数的形式；其次， W 的不可约表示与这些块之间存在双射。这两点都要求 $X_c(W)$ 光滑。幸运的是，根据 [16,推论 1.14] ，这一条件很容易得到保证，该推论表述如下。

引理 3.1. 对于一个选取得足够一般的类函数 c （它在 $S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 中反射共轭类的集合上避开有限多个超平面），簇 $X_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 是光滑的。

在本文余下部分中，假设选取 c 使得 $X_c(W)$ 是光滑的。此外，我们称 c 为一般的，若代数 $Z(H_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}))$ 是正则的。

我们来描述（3.1）中的块。根据 B_p Proposition 2， $p \in \gamma^{-1}$代数 [13, 在点2],

$$B_p = \mathrm{Mat}_{|W|}(\mathcal{O}_p). \tag{3.3}$$

这里 $\mathcal{O}_p = (Z_c(W)/R_+Z_c(W))_p$ 是 γ 在 0 处、于点 p局部化后的概形论纤维。下一个命题表明，这些块可以用 W的不可约表示来标记。

为了证明中心的块由 W 的不可约表示标记，我们使用婴儿 Verma 模及其对偶。回顾一下，它们是受限有理 Cherednik 代数的标准模。对于任意不可约表示 $\lambda \in \mathrm{Irr}\, W$，它们定义为

$$\Delta_c(\lambda) = \overline{H}_c(W) \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^{coW} \rtimes W} \lambda. \tag{3.4}$$

这里 $\mathfrak{h} \subset \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^{coW}$ 在 λ上作用为 0。

命题 3.1. $\overline{H}_c(W)$ 的块与 W的不可约表示之间存在双射 .

证明。写出

$$\overline{H}_c(W) = \bigoplus_{i\in\gamma^{-1}(0)} B_i,$$

不可分解子代数的和。由于 $\Delta(\lambda)$ 是一个 $\overline{H}_c(W)$-模，

$$\Delta(\lambda) = \overline{H}_c(W)\cdot\Delta(\lambda) = \bigoplus_{i\in\gamma^{-1}(0)} B_i \cdot \Delta(\lambda).$$

Sin由于 $\Delta(\lambda)$ 是不可分解的，我们必须有 $B_i \cdot \Delta(\lambda) = 0$ 对所有 $i \neq j$ 都成立，其中某个（唯一的） j.

$L(\lambda)$ 是 $\Delta(\lambda)$ 的唯一单商模 [18, 命题 4]。由于 $\mathcal{O}_p$ 是局部环，它有唯一的单模。方程（3.3）进而表明，B_p 也有唯一的单模。若 $\Delta(\lambda) = B_p \cdot \Delta(\lambda)$ 且 $\Delta(\mu) = B_p \cdot \Delta(\mu)$，则 B_p 的单模既等于 $L(\lambda)$，也等于 $L(\mu)$。由于标准模$\Delta(\lambda)$ 有唯一的单商模 $L(\lambda)$，这就迫使 $\lambda = \mu$。

从 W 的不可约表示到上述定义的块的映射 $\lambda \to p$（其中 $B_p \cdot \Delta(\lambda) \neq 0$ 是满射。为此，注意到每个单 $\overline{H}_c(W)$-模都是某个婴儿 Verma 模的商 [18,命题 4。
3]

□

现在我们来证明，$\overline{H}_c(W)$ 的中心等于各块的中心之和。利用命题 3.1 中的双射，设 B_λ 对应于块 B_p。考虑以下映射：包含映射 i：$Z_c(W) \to H_c(W)$、商映射 q：$H_c(W) \to \overline{H}_c(W)$，其定义为 $q(z) = z + R_+H_c(W)$，以及投影 ϕ_p：$\overline{H}_c(W) \to B_p$。记 $A(\lambda)$ 为 $Z_c(W)$ 在这些映射的复合下的像

$$Z_c(W) \hookrightarrow H_c(W) \twoheadrightarrow \overline{H}_c(W) \twoheadrightarrow B_\lambda. \tag{3.5}$$

我们将证明 $A(\lambda) = \mathsf{O}_p$。

引理 3.2. 中心 $Z_c(W)$ 在包含映射与商映射的复合下的像，等于 $\overline{H}_c(W)$ 的中心。也就是说，

$$q \circ i(Z_c(W)) = Z(\overline{H}_c(W)).$$

证明。 推论 [13, 推论 2.7] 表明，当理想 $R_+Z_c(W)$ 包含于一个对应阿祖马亚点的极大理想中时，引理的结论成立。根据 [16, 定理 1.7]， $H_c(W)$ 的阿祖马亚点恰好是 $X_c(W)$ 光滑轨上的点，但我们已假设 $X_c(W)$ 是光滑的。 □

定理 3.1。 映射 $Z_c(W)$ 经映射的复合 (3.5) 作用后的像等于 $\mathcal{O}_p$。特别地$\mathcal{O}_p = A(\lambda)$。

证明。 由引理 3.2 可知， $Z_c(W)$ 的像是 $Z(\overline{H}_c(W))$。由 [2, 引理 4。5] 可知， $q \circ i$ 的核是 $R_+Z_c(W)$，因此， $Z_c(W)/R_+Z_c(W) = Z(\overline{H}_c(W))$。写出块分解

$$Z_c(W)/R_+Z_c(W) = Z(\overline{H}_c(W)) = \bigoplus_{i \in \gamma^{-1}(0)} A_i \subset \bigoplus_{i \in \gamma^{-1}(0)} B_i.$$

因此 $A_i = Z(B_i)$。 $Z_c(W)/R_+Z_c(W)$ 在映射 ϕ_p 下的像于是为 A_p。

为了在点 p 处局部化，我们进行如下操作。存在唯一的极大理想 $\mathfrak{m}_p \subset A_p$，它对应于点 p，因此在 $Z_c(W)/R_+Z_c(W)$ 中有一个极大理想 $A_1 \oplus A_2 \cdots \oplus \mathfrak{m}_p \oplus \cdots \oplus A_r$。我们使所有不属于该理想的元素都可逆。由于我们已有 $Z_c(W)/R_+Z_c(W)$ 的块分解，因此存在一组正交幂等元，我们将其标记为 $e_1, \ldots, e_n$，使得 $A_i = Ae_i$。因此，极大理想 $A_1 \oplus A_2 \cdots \oplus \mathfrak{m}_p \oplus \cdots \oplus A_r$ 包含每个 $e_j \neq e_p$。通过在 p 处局部化，我们使 e_p 可逆，因此对于任意其他的 e_i，都有 $e_i = e_i e_p e_p^{-1} = 0$。因此，

$$(Z_c(W)/R_+Z_c(W))_p = A_p = \phi_p \circ q \circ i(Z).$$

□

推论 3.1。 块 B_λ 的中心为 $A(\lambda)$。

证明。 方程（3.3）表明 $\mathcal{O}_p$ 是 B_λ的中心。因此，定理3.1 表明 $A(\lambda)$是该块的中心。 □

上述推论的一个结果是，如果我们能够描述 $A(\lambda)$ 对每个 $\lambda \in$ 不可约表示集 W，那么我们就描述了 $\overline{H}_c(W)$ 的整个中心。为计算 $A(\lambda)$，我们需要 [6, 定理 8。14] 该定理如下所述，并指出代数 $A(\lambda)$ 同构于两个自同态环的张量积。我们将在后续章节中明确描述这些自同态环。在 [6] 下文给出以下定义

$$A_c(\lambda)^+ := \mathrm{End}_{\overline{H}_c(W)}\Delta(\lambda) \text{ and } A_c(\lambda)^- := \mathrm{End}_{\overline{H}_c(W)}\Delta^-(\lambda),$$

其中 $\Delta^-(\lambda) = \overline{H}_c(W) \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{coW} \rtimes W} \lambda$。

[6] 中 $A_c^-(\lambda)$ 的定义有误。该代数应如所写，是对偶小 Verma 模 $\Delta_c^-(\mu)$ 的自同态环，只是一般而言我们有 $\mu \neq \lambda$。*loc. cit.* 中的论证仍然成立，前提是 $\Delta_c^-(\mu)$ 是一个对偶小 Verma 模，其合成因子均与 $L(\lambda)$ 同构。

我们固定分次 $\deg \mathfrak{h} = -1, \deg \mathfrak{h}^* = 1$ 和 $\deg W = 0$，使得 $\Delta(\lambda)$ 的权均为非负，且 $\Delta(\lambda)_0 \cong \lambda$；而 $\Delta^-(\mu)$ 的权均为非正，且 $\Delta^-(\mu)_0 \cong \mu$。

分次单模 $L_c(\lambda)$ 的特征是其最低权空间（即最低次数的分次分量）为 $L_c(\lambda)_0 \cong \lambda$。然而，$\Delta_c^-(\mu)$ 的单商模 $L_c^-(\mu)$ 的特征是其最高权空间为 μ。因此，我们需要计算 $L(\lambda)$ 的最高权空间。除次数平移外，$\Delta_c(\lambda)$ 的底中包含 $L(\lambda)$ 的一个分次副本。因此，若 N 是满足 $\Delta_c(\lambda)_N \neq 0$ 的最大整数，则 $L(\lambda)$ 的最高权空间必等于 $\Delta_c(\lambda)_N$。作为一个分次 W-模，$\Delta_c(\lambda) = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{coW} \otimes \lambda$，故 $\Delta_c(\lambda)_N \cong \mathbb{C}[\mathfrak{h}]_N^{coW} \otimes \lambda$。

空间 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_N^{coW}$ 是一维的，由适当幂次的根的乘积张成，参见 [10, 定理 4.18]，其中还说明了如何计算与 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_N^{coW}$ 相关联的 W 的线性特征。注意，N 是 W [10, 命题 4.16] 中反射的数目。设 $\delta \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{coW}$ 张成最高次数空间。那么 δ 是一个 W-半不变量，我们可以用它扭曲 W-模。

引理 3.3. 假设 $H_c(W)$ 的中心是正则的。存在一个分次同构 $f\colon L_c^-(\lambda \otimes \delta)[N] \to$ 上同 $\Delta_c(\lambda)$。特别地，$L_c^-(\lambda \otimes \delta)$ 与 $\cong L_c(\lambda)$ 作为非分次模同构。

证明。首先，我们构造 $f\colon \Delta_c^-(\lambda \otimes \delta)[N] \to \Delta_c(\lambda)$。由于空间 $\delta \otimes \lambda$ 位于 $\Delta_c(\lambda)$ 的最高次数 N，因此有 $\mathfrak{h}^* \cdot \delta \otimes \lambda = 0$，其中 $\mathfrak{h}^* \subset \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{coW}$。因此，根据定义，$W$-同构 $\lambda \otimes \delta \to \delta \otimes \lambda$ 可扩张为一个非零态射 $f\colon \Delta_c^-(\lambda \otimes \delta)[N] \to \Delta_c(\lambda)$。

由于 $\delta \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{coW}$ 是将 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{coW}$ 视为 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{coW}$-模时的底，因此将 $\Delta_c(\lambda)$视为 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{coW} \rtimes W$-模时，$\delta \otimes \lambda$ 是其底。令 L 为由 $\delta \otimes \lambda$生成的 $\Delta_c(\lambda)$ 的 H_c-子模。那么 L 是单的，因而属于 $\Delta_c(\lambda)$ 的底（事实上是 $\Delta_c(\lambda)$ 的底）。为证明这一点，设 $U \subset L$ 是一个单子模。那么 U 是 L 的 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{coW} \rtimes W$-子模，因此必定包含 $\delta \otimes \lambda$，因为将 $\Delta_c(\lambda)$ 视为 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{coW} \rtimes W$-模时，$\delta \otimes \lambda$ 是其所有子模的底。因此 $U = L$。

由于 $f\colon \Delta_c^-(\lambda \otimes \delta)$ 到 $\to \Delta_c(\lambda)$ 的像属于底，f 必须经由 $\Delta_c^-(\lambda \otimes \delta)$ 的顶分解，而该顶为 $L_c^-(\lambda \otimes \delta)$。□

对于广 wreath 积 $S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$，由 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_N^{coW}$ 给出的线性特征 ν 可使用 Stembridge 关于 $S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 的假次数公式计算。我们看到

$$\nu = (\emptyset, \ldots, \emptyset, (1^n))$$

而假多项式为 t^N，其中 $N=(\ell-1)n+\ell\frac{n(n-1)}{2}=\ell n_{(n+1)\,2}$ $-n$。这确实是 $S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 中反射的数量。

设 $W(\lambda)$ 为由 λ 标记的不可约 S_n-模，且 χ_i 为具有 $\chi_i(\gamma)=\zeta^i$ 的不可约 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-模。可以计算得，若 $\underline{\lambda}=(\lambda^1,\ldots\ldots,\lambda^\ell)$ 且 $V(\underline{\lambda})$ 为相应的表示，则

$$\begin{aligned}V(\underline{\lambda})\otimes V(\nu)&\cong \mathsf{Ind}_{S_{\underline{\lambda}}\ltimes(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n}^{S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}\left((W(\lambda^1)\otimes\chi_1^{\otimes n_1})\otimes\cdots\otimes(W(\lambda^\ell)\otimes\chi_\ell^{\otimes n_\ell})\otimes(V(\nu)|_{S_{\underline{\lambda}}\ltimes(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n})\right)\\&\cong \mathsf{Ind}_{S_{\underline{\lambda}}\ltimes(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n}^{S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}\left((W((\lambda^1)^T)\otimes\chi_\ell^{\otimes n_1})\otimes\cdots\otimes(W((\lambda^\ell)^T)\otimes\chi_{\ell-1}^{\otimes n_\ell})\right)\\&=V((\lambda^2)^T,\ldots,(\lambda^\ell)^T,(\lambda^1)^T)\end{aligned}$$

其中 $n_i=|\lambda^i|$，因为

$$V(\nu)|_{S_{\underline{\lambda}}\ltimes(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n}=(W((1^{n_1}))\otimes\chi_\ell^{\otimes n_1})\otimes\cdots\otimes(W((1^{n_\ell}))\otimes\chi_\ell^{\otimes n_\ell}).$$

总之，若我们定义

$$\underline{\lambda}^\star=((\lambda^2)^T,\ldots,(\lambda^\ell)^T,(\lambda^1)^T),$$

then

$$A_c^-(\underline{\lambda})=\mathrm{End}_{H_c}(\Delta_c^-(\underline{\lambda}^\star)).$$

定义逆运算可能会很方便，因此令 $\underline{\lambda}^\sharp:=((\lambda^\ell)^T,(\lambda^1)^T,\ldots\ldots,(\lambda^{\ell-1})^T)$，则 $(\underline{\lambda}^\star)^\sharp=\underline{\lambda}$ 且 $(\underline{\lambda}^\sharp)^\star=\underline{\lambda}$。因此，

$$A_c^-(\underline{\lambda}^\sharp)=\mathrm{End}_{H_c}(\Delta_c^-(\underline{\lambda})).$$

明确了这些细节后，我们现在给出 [6, 定理 8。14]。

定理 3.2。乘法诱导出一个同构

$$A_c(\lambda)^-\otimes_{\mathbb{C}}A_c(\lambda)^+\cong A_c(\lambda)$$

事实证明，对于广 wreath 积的情形，我们只需描述其中一个环，因为随后便可推导出另一个环的描述。

本节的最后一个定理证明，代数 $A_{c'}(\mu)^-$ 与 $A_c(\lambda)^+$ 同构，但对应不同的一般 c' 和单模 λ,μ。为了描述 c'，为 $H_c(S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 设定一些记号至关重要。固定一个生成元 $\gamma\in\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$，令 $\gamma_i\in S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 表示 i^{th} 分量中的元素 γ。于是 $\gamma_i s_{i,\,j}=s_{i,\,j}\gamma_j$，其中 $s_{i,\,j}\in S_n$ 是 i 和 j 的对换。空间 $\mathfrak{h}$ 的基为 $\{x_1,\ldots\ldots,x_n\}$，其作用为 $\gamma_i x_i=\omega x_i$ 和 $\gamma_i x_j=x_j$，其中 $j\neq i$，且 ω 是一个本原 ℓ^{th} 单位根。置换的作用如下：$sx_i=x_{s(i)}$。

$H_c(S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 的定义关系为

$$\begin{aligned}&[x_i,x_j]=0,\quad [y_i,y_j]=0,\\&[y_i,x_i]=c(s_{i,j}\gamma_i^k\gamma_j^{-k})\sum_{i\neq j}\sum_{k=0}^{\ell}s_{i,j}\gamma_i^k\gamma_j^{-k}+\sum_{k=1}^{\ell-1}c(\gamma_i^k)\gamma_i^k\\&[y_i,x_j]=-c(s_{i,j}\gamma_i^k\gamma_j^{-k})\sum_{k=1}^{\ell}\omega^k s_{i,j}\gamma_i^k\gamma_j^{-k}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

那么参数 c' 定义为

$$c'(s_{i,j}\gamma_i^k\gamma_j^{-k}):=c(s_{i,j}\gamma_i^k\gamma_j^{-k})\text{ and }c'(\gamma_i^k):=c(\gamma_i^{-k}).$$

$S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 的不可约模由 n的 ℓ-多重分拆标记。若 $\underline{\lambda} = (\lambda^1, \ldots\ldots, \lambda^\ell)$，则定义$\underline{\lambda}^* := (\lambda^1, \lambda^\ell, \ldots\ldots, \lambda^2)$。

给定同构 $\psi\colon H_{c'}(W) \to H_c(W)$ 以及一个 $H_c(W)$-模 M，我们可以构造一个 $H_{c'}(W)$-模M^ψ，它作为集合等于 M，但其作用定义为

$$h \cdot m = \psi(h)m,$$

对于 $h \in H_{c'}(W)$ 和 $m \in M$。

定理 3.3. 存在一个反分次同构

$$A_{c'}(\underline{\mu})^- \cong A_c(\underline{\lambda})^+,$$

其中，若 $\underline{\lambda} = (\lambda^1, \ldots, \lambda^\ell)$ 则 $\underline{\mu} = ((\lambda^2)^T, (\lambda^1)^T, (\lambda^{(\ell)})^T, \ldots, (\lambda^3)^T)$。此外， c' 是一般的，当且仅当 c是一般的。

证明。 映射 $\phi\colon H_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \to H_{c'}(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 定义为

$$\phi(x_i) = y_i, \quad \phi(y_i) = -x_i, \quad \phi(s) = s \text{ and } \phi(\gamma_i) = \gamma_i^{-1}$$

对所有 i 以及对所有 $s \in S_n$ 都是代数的反分次同构。回忆婴儿 Verma 模（3.4）

$$\Delta_c(\underline{\lambda}) := \overline{H}_c \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{coW} \rtimes W} \underline{\lambda}$$

and

$$\Delta_c^-(\underline{\lambda}) := \overline{H}_c \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^{coW} \rtimes W} \underline{\lambda}.$$

滥用记号，令 ϕ 表示其在群代数 $\mathbb{C}S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$上的限制，则作为 $\mathbb{C}S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-模 $\underline{\lambda}^\phi = \underline{\lambda}^*$；这由不可约 $\mathbb{C}S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-模的构造可知，见[24, 第 5 节。3]由于 $\phi(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W) = \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]_+^W$，这就意味着

$$\Delta_c(\underline{\lambda})^\phi = \Delta_{c'}^-(\underline{\lambda}^*).$$

现在 $M \to M^\phi$ 是一个函子 H_c-模$\to H_{c'}$-模，并且是一个等价。这意味着 ma p

$$\mathrm{End}_{H_c}(\Delta_c(\underline{\lambda})) \to \mathrm{End}_{H_{c'}}(\Delta_c(\underline{\lambda})^\phi) = \mathrm{End}_{H_{c'}}(\Delta_{c'}^-(\underline{\lambda}^*))$$

是一个同构。这意味着

$$A_{c'}(\underline{\mu})^- = \mathrm{End}_{H_{c'}} \Delta_{c'}^-(\underline{\lambda}^*) \cong \mathrm{End}_{H_c} \Delta_c(\underline{\lambda}) = A_c(\underline{\lambda})^+,$$

因此 $\underline{\mu} = (\underline{\mu}^\star)^\sharp = (\underline{\lambda}^*)^\sharp$。由于 ϕ 是一个同构， $Z(H_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}))$ 是正则的，当且仅当 $Z(H_{c'}(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}))$ 是正则的。因此， c 是一般的，当且仅当 c' 是一般的。于是，如果我们知道对于一般的 c以及所有 $\underline{\lambda}$ 都有 $A(\underline{\lambda})^+$ ，那么对于一般的 c' 以及所有 $\underline{\mu}$，我们就知道 $A(\underline{\mu})^-$ 。□

注3.1。 在对称群的情形下， $\ell = 1$、 $c' = c$和 $\mu = \lambda^T$。因此 $A_c(\lambda)^+ \cong A_c(\lambda^T)^-$。

在本文后面的部分，我们解释了 c Bonnafé 和 Maksimau 的同构所需的条件之后，将会看到，定理 3.3 不能直接应用于广群情形。相反，我们必须运用第 5 节的理论，同时求出 $A(\lambda)^+$ 和 $A(\lambda)^-$ 。随后在第 7 节中，我们将完成论证，证明确实可以推出一个类似于定理 3.3 的结果，适用于广群情形，并得到正确的 c。这样一来，要找出整个中心的问题便简化为只需明确描述 $A(\lambda)^+$，也就是婴儿 Verma 模的自同态环。

4. 对称群

本节旨在证明，自同态环 $A(\lambda)^+$ 同构于某个特定谱映射的原像上的函数环，该映射记作 π。我们先给出下面的定理，其中陈述了两个关键事实（对任意复反射群 W均成立）。第一，婴儿 Verma 模是 Verma 模的商。回忆一下，Verma 模定义为 $\underline{\Delta}_c(\lambda) := H_c(W)\otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]\rtimes W}\lambda$，其中 $\mathfrak{h}\subset\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ 在 λ上作用为 0；其对偶对象的定义类似，为 $\underline{\Delta}_c(\lambda)^- := H_c(W)\otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}]\rtimes W}\lambda$。第二，对于任意不可约表示 $\lambda\in$ 不可约表示集W，当 $X_c(W)$ 光滑时，存在一个从受限有理 Cherednik 代数的中心到 Verma 模自同态环的满射。

定理 4.1. 对于所有 $\lambda\in$不可约表示集 W,

(1) $\Delta(\lambda) = \underline{\Delta}(\lambda)/R_+\underline{\Delta}(\lambda)$ 且 $\Delta^-(\lambda) = \underline{\Delta}^-(\lambda)/R_+\underline{\Delta}^-(\lambda)$。*(2)* 由 $Z_c(W)$ 的元素在 $\underline{\Delta}(\lambda)$ 和 $\underline{\Delta}^-(\lambda)$ 上的乘法所定义的映射，作为 $H_c(W)$-模，给出满射 $Z_c(W)\twoheadrightarrow$自同态环$_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda))$，$Z_c(W)\twoheadrightarrow$自同态环$_{H_c(W)}(\underline{\Delta}^-(\lambda))$。

证明。 陈述 (1) 由 PBW 定理 [16, 定理 1。3]。关于 (2) 的证明，见 [3, 定理2]。 □

我们来考察第二个事实的含义。在两种情况下，以下映射复合中的第一个是包含映射，第二个是定理 4.1 (2)

$$\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \hookrightarrow Z_c(W) \twoheadrightarrow \mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda))$$
$$\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W \hookrightarrow Z_c(W) \twoheadrightarrow \mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}^-(\lambda)).$$

这些诱导出谱之间的映射

$$\pi : \mathrm{Spec}\,\mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda)) \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W = \mathfrak{h}/W. \tag{4.1}$$
$$\pi^- : \mathrm{Spec}\,\mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}^-(\lambda)) \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W = \mathfrak{h}^*/W. \tag{4.2}$$

由映射（4.1）可知

$$\mathbb{C}[\pi^{-1}(0)] \cong \mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda))/\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W_+\mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda)). \tag{4.3}$$

类似地，由（4.2）可得

$$\mathbb{C}[(\pi^-)^{-1}(0)] \cong \mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}^-(\lambda))/\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W_+\mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}^-(\lambda)). \tag{4.4}$$

本节的目标是证明（4.3）右侧实际上与 A（λ）$^+$同构。这并不显然，因为环 A（λ）$^+$ 是婴儿 Verma 模的自同态环，而（4.1）右侧是 Verma 模自同态环的一个商。我们不证明 A（λ）$^-$的等价命题；对我们而言，证明以下同构就足够了

$$\mathrm{End}_{\overline{H}_c(W)}(\Delta(\lambda)) \cong \mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda))/\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W_+\mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda))$$
$$\mathrm{End}_{\overline{H}_c(W)}(\Delta^-(\lambda)) \cong \mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}^-(\lambda))/\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W_+\mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}^-(\lambda)).$$

Let

$$e := \frac{1}{|W|}\sum_{w\in W} w$$

表示 $\mathbb{C}W\subset H_c(W)$ 中的平凡幂等元。回想一下，存在一个同构 $Z_c(W)\cong eH_c(W)e$由映射 $z\to z\cdot e$ [16, 定理 3。1], 给出，称为 Satake 同构。

引理 4.1. 设 A 是一个有限生成代数，且 e 是 A的一个幂等元。对于任意 A-模 M，我们有如下同构

$$eA \otimes_A M \cong eM.$$

证明。 定义一个同态 ϕ: $eA \otimes_A M \to eM$，如下所示： $\phi(ea \otimes m) = eam$。我们将证明这是一个同构。显然，它是满射且为态射，因此只需证明它是单射。我们证明 ϕ 的核为 0。若 $\phi(ea\otimes m) = 0$，则 $eam = 0$，但注意到 $ea\otimes m = e^2a\otimes m = e\otimes eam = e\otimes 0 = 0$。□

以下是一个标准事实 [5, 推论 1.6.3]。

定理 4.2. 函子

$$e : H_c(W)-\mathrm{mod} \to eH_c(W)e-\mathrm{mod}$$

是范畴的等价 当且仅当 $e \cdot M = 0$ 意味着对所有 $M \in H_c(W)$–模， $M = 0$。

引理 4.2. $Z_c(W)$-模 $e\underline{\Delta}(\lambda)$ 和 $e\underline{\Delta}^-(\lambda)$ 是循环的。

证明。在 [3, 定理 4.1] 中证明了 $e\underline{\Delta}(\lambda)$ 是一个循环自同态环$H_c(W)$($\underline{\Delta}(\lambda)$)-模。我们还从定理 4.1 得知， $Z_c(W)$ 满射到自同态环$H_c(W)$($\underline{\Delta}(\lambda)$)，因此 $e\underline{\Delta}(\lambda)$ 是一个循环 $Z_c(W)$-模。根据 [6, 引理 8.13] $e\underline{\Delta}^-$ 的证明，λ 也是循环的。□

现在我们可以证明，婴儿 Verma 模的自同态环是相应 Verma 模的自同态环的一个商。特别是，它们恰好是我们所希望得到的商。

定理 4.3。 存在同构

$$\mathrm{End}_{\overline{H}_c(W)}(\Delta(\lambda)) \cong \mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda))/\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W_+\mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda))$$

and

$$\mathrm{End}_{\overline{H}_c(W)}(\Delta^-(\lambda)) \cong \mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}^-(\lambda))/\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W_+\mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}^-(\lambda))$$

证明。 对偶小 Verma 模的论证完全相同，因此我们证明第一个同构。为简洁起见，记作 $H = H_c(W)$。定理 4.2 表明，球面 Cherednik 代数 eHe 与 H Morita 等价，因此 eHe–模 $\cong$ H–模。给定一个自同态 $f \in$ 自同态环$_H(\underline{\Delta}(\lambda))$，我们有一个自同态

$$\overline{f} \in \mathrm{End}_H(\underline{\Delta}(\lambda)/\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W_+\underline{\Delta}(\lambda))$$

其中 $\overline{f}(m + \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W_+) = f(m) + \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W_+\underline{\Delta}(\lambda)$。通过这种方式，我们得到一个映射

$$\phi : \mathrm{End}_H(\underline{\Delta}(\lambda)) \to \mathrm{End}_H(\underline{\Delta}(\lambda)/\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W_+\underline{\Delta}(\lambda)).$$

我们希望证明 Ker$\phi = R_+$自同态环$_H$($\underline{\Delta}(\lambda)$)。由于 eHe 与 H Morita 等价，我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}_H(\underline{\Delta}(\lambda)) & \xrightarrow{\quad\phi\quad} & \mathrm{End}_H(\underline{\Delta}(\lambda)/\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W_+\underline{\Delta}(\lambda)) \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \mathrm{End}_{eHe}(e\underline{\Delta}(\lambda)) & \longrightarrow & \mathrm{End}_{eHe}(e\underline{\Delta}(\lambda)/e\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W_+e\underline{\Delta}(\lambda)) \end{array}$$

由引理 4.2，$e\underline{\Delta}(\lambda)$ 是一个循环 eHe-模。因此 $e\underline{\Delta}(\lambda) \cong eHe/I$，其中 I 是该生成元的湮灭子。因此，

$$\mathrm{End}_{eHe}(e\underline{\Delta}(\lambda)) \cong \mathrm{End}_{eHe}(eHe/I) \cong eHe/I.$$

同理，

$$\mathrm{End}_{eHe}(e\underline{\Delta}(\lambda)/e\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W e\underline{\Delta}(\lambda)) \cong \mathrm{End}_{eHe}((eHe/I)/(e\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W eHe/I)),$$

and

$$\mathrm{End}_{eHe}((eHe/I)/(e\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W eHe/I)) \cong eHe/(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W eHe + I).$$

因此我们得到一个新的交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{End}_H(\underline{\Delta}(\lambda)) & \longrightarrow & \mathrm{End}_H(\underline{\Delta}(\lambda)/\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W\underline{\Delta}(\lambda)) \\
\cong\downarrow & & \downarrow\cong \\
\mathrm{End}_{eHe}(e\underline{\Delta}(\lambda)) & \longrightarrow & \mathrm{End}_{eHe}(e\underline{\Delta}(\lambda)/e\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W e\underline{\Delta}(\lambda)) \\
\cong\downarrow & & \downarrow\cong \\
eHe/I & \longrightarrow & eHe/(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W eHe + I)
\end{array}.$$

从图中很容易看出，底部映射的核为 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W eHe + I$。接着，通过简单的图追踪论证，我们得到 $\mathrm{Ker}\ \phi = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W \mathrm{End}_H(\underline{\Delta}(\lambda))$。因此

$$\mathrm{End}_H(\underline{\Delta}(\lambda)/\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W\underline{\Delta}(\lambda)) \cong \mathrm{End}_H(\underline{\Delta}(\lambda))/\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W \mathrm{End}_H\underline{\Delta}(\lambda)),$$

根据定理 4.1，自同态环$\overline{H}(\Delta(\lambda)) \cong$自同态环$_H(\underline{\Delta}(\lambda)/\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W\underline{\Delta}(\lambda))$。因此

$$\mathrm{End}_{\overline{H}}(\Delta(\lambda)) \cong \mathrm{End}_H(\underline{\Delta}(\lambda))/\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W \mathrm{End}_H\underline{\Delta}(\lambda)).$$

□

应用定理 4.3 可证明以下重要推论。

推论 4.1。存在一个代数同构 $\mathbb{C}[\pi^{-1}(0)] \cong A(\lambda)^+$。

证明。由映射（4.1）可知

$$\mathbb{C}[\pi^{-1}(0)] = \mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda))/\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W \mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda)).$$

因此，由定理 4.3，$\mathbb{C}[\pi^{-1}(0)] \cong$自同态环$_{\overline{H}_c(W)}(\Delta(\lambda)) = A(\lambda)^+$。 □

推论 4.1 将理解 $\overline{H}_c(W$的块这一问题，归结为理解映射 π的概形论纤维。

5. 缠绕积群

描述 $S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 的受限有理 Cherednik 代数的中心，比 S_n 情形需要更加精细的处理。我们不能简单地使用推论4.1；正如我们将在第 6 节看到的， π与朗斯基行列式之间的联系仅在对称群的情形下成立。因此，我们需要分别为对称群和缠绕积群构造两个映射 $\pi_{n\ell}$ 和 $\pi_{n,\ \ell}$ （以及它们各自的反向映射 $\pi^-_{n\ell}$ 和 $\pi^-_{n\ \ell,\ }$）。接着，我们将证明推论 4.1的一个推广。这一切的关键是下面的同构 [9, 定理 4.21] 它通过各自的 Calogero-Moser 空间，建立 $Z_c(S_n)$ 与 $Z_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 之间的联系。

定理 5.1。 设 $\sigma \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}^\times$ 是一个单位根，并假设 $X_c(W)$ 光滑。那么， $X_c(W)^\sigma$，即 $X_c(W)$ 中由 σ 的作用固定的子概形，是光滑的。对于每个不可约分支 $X_0 \subset X_c(W)^\sigma$，都存在一个反射子商 $W' \subset W$ 和一个共轭函数 $\overline{c}$，使得存在一个 $\mathbb{C}^\times$-等变的簇的同构

$$X_0 \cong X_{\overline{c}}(W'). \tag{5.1}$$

上述定理中的函数 $\overline{c}$ 使我们的结果仅对参数的某种特殊选择成立。这一点非常重要，我们之后会详细说明这些参数的定义，并在定理 5.7中明确描述缠绕积的情形。

以下结果适用于一般的 c，其中 Calogero-Moser 空间 $X_c(W)$ 是光滑的，因此在定理 5.7之前，我们将不区分 c 和 $\overline{c}$。

在此阶段，固定 $S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 的不可约表示的记号十分重要。 $S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ [24, Page.221] 的不可约表示与的 - 多重分拆之间存在双射。于是，根据定理 2.1，对于一个具有平凡 ℓ- 核的分拆 $\lambda \vdash n\ell$ ，将 $S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 的一个不可约表示记作 $\mathrm{quo}_\ell(\lambda)$ 是合理的。我们选择用 ℓ- 商来标记不可约表示的原因，将在本节后文变得更加清楚，尤其是结合引理 5.6 来看。注意，当 $\ell = 1$ 时，我们回到对称情形，并且 $\mathrm{quo}_\ell(\lambda) = \lambda$。从这里开始，为简洁起见，我们将 $\mathrm{End}_{H_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})}\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$ 写作 $\mathrm{End}\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$（相应地，将 $\mathrm{End}\underline{\Delta}^-(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$ 这样表示）。

与（4.1）中一样，我们可以构造两个映射

$$\pi_{n,\ell} : \operatorname{Spec} \mathrm{End}\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) \to \mathbb{C}^n/(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}),$$

and

$$\pi_{n\ell} : (\operatorname{Spec} \mathrm{End}(\underline{\Delta}(\lambda)))^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \to (\mathbb{C}^{n\ell}/S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}.$$

类似地，对于 A（λ^-），由 [3, 推论 4.4] 可知，定理 4.1 的类似结果成立，因此我们得到

$$\pi^-_{n,\ell} : \operatorname{Spec} \mathrm{End}\underline{\Delta}^-(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) \to (\mathbb{C}^n)^*/(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}),$$

and

$$\pi^-_{n\ell} : (\operatorname{Spec} \mathrm{End}(\underline{\Delta}^-(\lambda)))^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \to ((\mathbb{C}^{n\ell})^*/S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$$

策略是将谱 自同态环$\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$（分别将谱 自同态环$\underline{\Delta}^-(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$)嵌入 $X_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$中，然后利用（5.1），将其实现为 $X_c(S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$的一个子簇。我们通过证明谱 自同态环$\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$和谱 自同态环$\underline{\Delta}^-(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$等于称为吸引集的子簇来实现这一点。

定义 5.1。 设 X 是一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的仿射概形，带有一个 $\mathbb{C}^\times$-作用，并假设 $X^{\mathbb{C}^\times}$ 有限。 $\mathbb{C}^\times$-作用的一个 *attracting set* 定义为$\Omega_p := \{x \in X \mid \lim_{t\to\infty} t\cdot x = x_p\}$，其中 x_p 是不动点。类似地，定义 $\mathbb{C}^\times$-作用的 *opposite attracting set* $\Omega^-_p := \{x \in X \mid \lim_{t\to 0} t\cdot x = x_p\}$。

为了证明自同态环的谱可以与 $X_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 中的吸引集相识别，我们证明在 $A(\lambda)^+$ 情形下成立两个等式。第一个是

$$\operatorname{Spec}\operatorname{End}\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = \operatorname{Supp}_{Z_c(S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})}(\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)), \tag{5.2}$$

这相对直接。第二个是

$$\operatorname{Supp}_{Z_c(S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})}(\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = \Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}, \tag{5.3}$$

这需要更多的工作。我们还将证明，在 $A(\lambda)^-$ 情形下也成立相同的等式，只需对反向吸引集和反向 Verma 模作相应调整。从现在起，我们将 $Z_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 简记为 Z_c。

引理 5.1。 支撑有如下等式

$$\operatorname{Supp}_{Z_c}\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = \operatorname{Supp}_{Z_c} e\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$$

and

$$\operatorname{Supp}_{Z_c}\underline{\Delta}^-(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = \operatorname{Supp}_{Z_c} e\underline{\Delta}^-(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$$

证明。Since $e\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) \subset \underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$，我们有 $\operatorname{ann}_{Z_c}\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) \subset \operatorname{ann}_{Z_c} e\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$。因此

$$\operatorname{Supp}_{Z_c} e\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) \subset \operatorname{Supp}_{Z_c}\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)).$$

还需证明反向包含关系。考虑 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_{Z_c}\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$。那么 $\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) \otimes_{Z_c} (Z_c)_\mathfrak{p} \neq 0$。因此，要证明反向包含关系，我们只需证明$e\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) \otimes_{Z_c} (Z_c)_\mathfrak{p} \neq 0$。根据定理4.2，该函子

$$e\cdot - : H_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}))\text{−mod} \to eH_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}))e\text{−mod}$$

是一个等价，并因此将 $H_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}))$–mod 中的非零对象映射到$eH_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}))e$–mod 中的非零对象。因此，当且仅当 $\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) \otimes_{Z_c} (Z_c)_\mathfrak{p} \neq 0$ 时，$e\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) \otimes_{Z_c} (Z_c)_\mathfrak{p} \neq 0$。对于 $\underline{\Delta}^-(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$，论证完全相同。□

现在我们可以证明，等式（5.2）及其对应的反向 Verma 模版本成立。

定理 5.2。 存在如下簇的等式

$$\operatorname{Spec}\operatorname{End}\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = \operatorname{Supp}_{Z_c}\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$$

and

$$\operatorname{Spec}\operatorname{End}\underline{\Delta}^-(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = \operatorname{Supp}_{Z_c}\underline{\Delta}^-(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)).$$

证明。在 $\underline{\Delta}^-(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$ 的情形下，论证完全相同，利用 $e\underline{\Delta}^-(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$ 是循环 Z_c-模这一事实，这可由 [6, 引理 8.13], 的论证得出，因此我们将证明第一个等式。注意，根据引理 4.2， $e\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$ 是循环 Z_c-模。因此，对于某个理想 I，有 $Z_c/I \cong e\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$ 作为左 Z_c-模。由于 $H_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 与 $eH_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ Morita 等价，e 且 $eH_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})e \cong Z_c$，我们有

$$\operatorname{End}_{H_c(S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})}(\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))) \cong \operatorname{End}_{eH_c(S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})e} e\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) \cong \operatorname{End}_{Z_c} Z_c/I \cong Z_c/I.$$

因此

$$\operatorname{Spec}\operatorname{End}_{H_c(S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})}(\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)))\cong\operatorname{Spec}Z_c/I,$$

并且由于 Z_c 是交换的，我们看到谱$Z_c/I\cong\mathrm{Supp}^{Z_c}(e\underline{\Delta}(\mathrm{quo}\ell(\lambda)))$。于是引理 5.1 推出 $\mathrm{Supp}^{Z_c}(e\underline{\Delta}(\mathrm{quo}\ell(\lambda)))\cong\mathrm{Supp}^{Z_c}(\underline{\Delta}(\mathrm{quo}\ell(\lambda)))$。因此

$$\operatorname{Spec}\operatorname{End}_{H_c(S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})}(\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)))=\mathrm{Supp}_{Z_c}(\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))).$$

□

证明等式（5.3）需要若干技术性结果。我们先给出以下结果，它是 [22, 定理 13.4]。

定理 5.3。 设 R 是一个诺特局部环，其极大理想为 $\mathfrak{m}$。设 S 是 R关于 $\mathfrak{m}$-进滤过的伴随分次环。则 R 是正则的，当且仅当 S 是多项式环。

设 X 是一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的仿射代数簇，并且允许一个 $\mathbb{C}^\times$-作用。这会在 $\mathbb{C}[X]$上诱导一个分次。还要注意，通过将阶为 ℓ 的循环群与 ℓ^{th} 单位根相识别，可以得到 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}\subset\mathbb{C}^\times$ 。回忆一下，不动点轨迹定义为

$$X^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}=\{x\in X\mid g\cdot x=x\ \forall g\in\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}\}$$

它也可以等价地定义为

$$\operatorname{Spec}\left(\frac{\mathbb{C}[X]}{\langle f-g\cdot f\mid g\in\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}\text{ and }f\in\mathbb{C}[X]\rangle}\right).$$

这里采用如下记号：若 S 是环 R 的子集，则 $\mathbf{h}S\mathbf{i}$ 表示由 S 生成的理想。由于 $\mathbb{C}^\times$-作用定义了 $\mathbb{C}[X]$ 的分次，我们可以考虑由非零次数元素生成的理想 $\mathbf{h}\mathbb{C}[X]_{\neq0}\mathbf{i}$，并定义

$$\mathbb{C}[X](0):=\frac{\mathbb{C}[X]}{\langle\mathbb{C}[X]_{\neq0}\rangle}.$$

引理 5.2. 假设 X 光滑。那么 $X^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}=$ 谱 $\mathbb{C}[X](0)$ 光滑。特别地， $\mathbb{C}[X](0)$ 约化。

证明。 我们首先证明集合相等

$$X^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}=\operatorname{Spec}\mathbb{C}[X](0).$$

令 $f\in\mathbb{C}[X]$ 为次数 d、 $g\in\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 和 $p\in X^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$ 的齐次元素，则有

$$f(p)=f(g^{-1}\cdot p)=(g\cdot f)(p)=g^df(p)$$

因此 $f(p)=0$，若 $d\neq0$ 模 ℓ。所以 $\mathbf{h}\mathbb{C}[X]_{\neq0}\mathbf{i}$ 包含于定义 p 的极大理想中，并且$X^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}\subset$ 谱 $\mathbb{C}[X]$(0)。

反之， $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{C}[X](0)$ 上平凡地作用，因此 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[X](0)$ 中的每个点都被 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 固定。由此可得 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[X](0)\subset X^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$。

还需证明 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[X](0)$ 是约化的。我们必须证明 $\mathbb{C}[X](0)$ 在每个点处的局部化都是正则的。根据定理 5.3 ，只需证明 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[X](0)$ 在不动点$p\in X^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$ 处的切锥是一个多项式环。由于 X 在 p 处正则， p 的 X 处的切锥等于 $V:=T_p(X)$

作为一个 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-模。根据 [17, 定理 5.2]， $X^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$ 在点 p 处的切锥等于 $V^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$。于是显然

$$V^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[V](0)$$

是仿射空间，且 $\mathbb{C}[V](0)$ 是多项式环。 □

在证明（5.3）之前，我们需要更深入地理解吸引集在 $X_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 结构中的作用。为此，我们需要两个强有力的定理：定理 5.4 和定理 5.5 分别是 [8, 定理 2。3] 和 [8, 定理 2。5] 。这两个定理运用了定性作用的概念。为方便读者，我们在此给出定义。

定义 5.2。设 G 是一个代数环面，则 $G \cong \mathbb{C}^\times \times \cdots \times \mathbb{C}^\times = (\mathbb{C}^\times)^n$，其中 n 是某个正整数。任意 G-模都可以写成一维 G-模的直和。若 V 是一个 G-模，则可以找到 V 的一组基 $\{v_i\}$，使得

$$(g_1 \dots g_n) \cdot v_i = g_1^{s_{i1}} \dots g_n^{s_{in}} v_i \text{ for } (g_1 \dots g_n) \in G.$$

模 V 是正的（分别地，负的），当

(1) 对所有 i, j， $s_{ij} \geq 0$ （分别为 $s_{ij} \leq 0$）。

(2) 对每个 $i \in I$，都存在 j 使得 $s_{ij} \neq 0$。

若满足 (1)，则该模是非负的（分别为非正的）。若存在同构 $G \cong \mathbb{C}^\times \times \cdots \times \mathbb{C}^\times$ 使得该模是正的（分别为非负的），则该模是完全定性的（分别为定性的）。

定义 5.3. 设 $\eta\colon G \times X \to X$ 是 X 上的环面作用，且 $a \in X^G$ 是一个非奇异闭点。若 G-模 $T_a(X)$ 是完全定性的（分别为定性的），则 η 在 a 上的作用是完全定性的（分别为定性的）。

在上述情形中， $T_a(X)$ 表示 a 处的切空间。

定理 5.4. 设 X 不可约且约化。设 G 是一个代数环面。若 G 在 X 上的作用在 $a \in X^G$ 处是定性的，则 X^G 不可约

定理 5.5. 设 G 为代数环面。若 G 在 X 上的作用在 a处是完全定性的，且 X 不可约，则存在 a 的一个开 G-不变邻域 U，它与$(U \cap X^G) \times V$作 G-同构，其中V是一个有限维（完全定性的） G-模，而 G 在$(U \cap X^G) \times V$上的作用由 G 在 $U \cap X^G$ 上的平凡作用以及在 V上的线性作用（由给定的 G-模结构决定）诱导。

更具体地说，在定理 5.5 的证明中，向量空间 V被定义为 T_a在 $T_a(X)$ 中的 $G(X^G)$-模补空间。对于我们的情形， X^G 是有限集，因此 $T_a(X^G)$ 为零，且 $V = T_a(X)$。

下面的引理说明，不可约分支恰好就是吸引集，并且吸引集等于它们在不动点处的切空间。沿用前两个定理的记号，设 $G = \mathbb{C}^\times$。

引理 5.3. 假设 X 光滑，且 $X^{\mathbb{C}^\times}$ 有限且非空，并且对所有 $x \in X$，极限$\lim_{t\to\infty} t \cdot x$ 均存在。若 $\mathbb{C}^\times$ 的作用在每个不动点处都是定性的，则

(1)

$$X = \bigsqcup_{p \in X^{\mathbb{C}^\times}} \Omega_p,$$

其中 Ω_p 是 p的吸引集。集合Ω_p 是空间的不可约分支 X。*(2)* $\Omega_p \cong T_p(\Omega_p)$ 作为簇。

证明。 1.) 由于对每个 $t \to \infty$ $t \cdot x$，极限都存在，且极限唯一，因此 $x \in X$可知 X是集合 Ω 的不交并$_p$。为说明集合 Ω_p 是不可约分支，注意到对于任意不可约分支 L，必有 $L^{\mathbb{C}^\times}$ 只包含一个点。这是因为定理5.4指出，若 L 不可约，则 $L^{\mathbb{C}^\times}$也不可约；但若它由多个不动点组成，显然并非如此。此外，它至少包含一个点；因为若 L 是一个不可约分支，则它等于自身的闭包，而任何非空 $\mathbb{C}^\times$-稳定子集的闭包 X 都包含某个不动点。

若 $L^{\mathbb{C}^\times} = \{p\}$，则由 L 是闭集可知，对所有 $x \in L$，$\lim_{t\to\infty} t \cdot x = p$。因此 $L \subset \Omega_p$。反之，若 $x \in \Omega_p$，则 $\mathbb{C}^\times \cdot x$ 是包含 $\overline{x}$的不可约子簇。由于 X 光滑， L 是 X的一个连通分支。因此 $p \in \mathbb{C}^\times \cdot x \cap L \neq \emptyset$ 蕴含 $\mathbb{C}^\times \cdot x \subset L$，从而 $\overline{\Omega_p \subset L}$。

2.) 由于 p 是 Ω_p 的唯一不动点，我们将定理 5.5 应用于 Ω_p，得出存在一个包含 p 的开邻域 $U \subset \Omega_p$，使得 $U \cong (U \cap X^{\mathbb{C}^\times}) \times V$。根据假设，我们有 $\Omega_p^{\mathbb{C}^\times} = p$；上述讨论表明 $V = T_p(\Omega_p)$，因此 $U \cong \{p\} \times T_p(\Omega_p) \cong T_p(\Omega_p)$。现在我们证明 $\Omega_p \subset U$。令 $x \in \Omega_p$。则 $\lim_{t\to\infty} t \cdot x = p$。由于 U 是 p 的开邻域，我们必有$t \cdot x \in U$，其中某个 t。回想一下， U 是 $\mathbb{C}^\times$-不变的，因此如果 $t \cdot x \in U$，那么必有 $x \in U$。因此$U = \Omega_p$，且 $\Omega_p \cong T_p(\Omega_p)$。□

上述引理对于 Ω_p^-也有类似结果，假设对于所有 $x \in X$，$\lim_{t\to 0} t \cdot x$都存在。证明过程完全相同。

引理 5.4. 假设 X 光滑，且 $X^{\mathbb{C}^\times}$ 有限且非空，并且对所有 $x \in X$，$\lim_{t\to 0} t \cdot x$ 均存在。若 $\mathbb{C}^\times$ 的作用在每个不动点处都是定向的，则

(1)

$$X = \bigsqcup_{p \in X^{\mathbb{C}^\times}} \Omega_p^-,$$

其中，Ω_p^- 是 p的反向吸引集。集合 Ω_p^- 是空间X的不可约分支。

(2) $\Omega_p^- \cong T_p(\Omega_p^-)$ 作为簇。

命题 5.1. 假设 Y是一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑仿射概形，且 $Y^{\mathbb{C}^\times}$ 有限。令 $\mathbb{C}[Y] = A$ 和

$$Y^+ = \left\{ y \in Y \,\middle|\, \lim_{t\to\infty} t \cdot y \ exists \right\}.$$

那么：

(1) 令$\langle A_{<0} \rangle$ 表示由负次数齐次多项式生成的理想，则 Y^+ 是 Y 的闭子集，由（约化）理想$\langle A_{<0} \rangle$的消失集定义。*(2)* $Y^+ = \bigsqcup_{p \in Y^{\mathbb{C}^\times}} \Omega_p$，其中$\Omega_p \cong (T_p Y)_{>0}$ 作为 $\mathbb{C}^\times$-簇。*(3)* 若 $I_{A_0}(p) = \{a \in A_0 \mid a(p) = 0\}$，则$\Omega_p$是 Y 的闭子集，由约化理想$\langle A_{<0}, I_{A_0}(p) \rangle$定义。

证明。 (1) 与引理 5.2 的证明类似，我们有 $\langle A_{<0}\rangle$ 在 Y^+上消失。事实上，若 $f \in A_{<0}$ 是次数为 $r<0$的齐次多项式， $y \in Y^+$ 且 $t \in \mathbb{C}^\times$ 则

$$f(t\cdot y) = t^{-r} f(y)$$

and

$$\lim_{t\to\infty} f(t\cdot y) = \lim_{t\to\infty} t^{-r} f(y).$$

若 $f(y) \neq 0$，则 $f(t\cdot y)$ 的极限不存在。这是一个矛盾。因此，$\mathfrak{h}A_{<0}\mathfrak{i}$ 在 Y^+ 上消失。显然，Spec $(A/\mathfrak{h}A_{<0}\mathfrak{i}) \subset Y$，故 Spec $(A/\mathfrak{h}A_{<0}\mathfrak{i})^{\mathbb{C}^\times} \subset Y^{\mathbb{C}^\times}$ 是有限的。环 $A/\mathfrak{h}A_{<0}\mathfrak{i}$ 是非负分次的，因此 Spec $(A/\mathfrak{h}A_{<0}\mathfrak{i})^+ =$Spec $(A/\mathfrak{h}A_{<0}\mathfrak{i})$。由引理 5.3 可知，Spec $(A/\mathfrak{h}A_{<0}\mathfrak{i})$ 是吸引集的不交并，特别是它的所有极限都存在，因此它就是定义 Y^+ 的消失理想。

现在我们必须检查理想 $\mathfrak{h}A_{<0}\mathfrak{i}$ 是否约化。由于它是齐次的， $A/\mathfrak{h}A_{<0}\mathfrak{i}$ 的根基也是齐次的。因此，若它非零，则存在一个不约化的不动点。因此，只需证明对每个 $p \in$(Spec $A/\mathfrak{h}A_{<0}\mathfrak{i})^{\mathbb{C}^\times}$，局部环 $(A/\mathfrak{h}A_{<0}\mathfrak{i})_p$ 是约化的。

令 $\mathfrak{m}$ 表示对应于 p 的极大理想，因此 $\mathfrak{m}$ 在 $\mathbb{C}^\times$ 下保持不变。我们证明 $A_\mathfrak{m}/A_{<0}A_\mathfrak{m}$ 是一个正则局部环。令 $(T_p^*Y)_{<0} \subset \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 为由所有负权向量张成的子空间，并选取 $(T_p^*Y)_{<0}$ 的一个齐次向量空间提升 $N \subset \mathfrak{m}$。我们再固定一个包含 N 的 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 的齐次向量空间提升 $V \subset \mathfrak{m}$。 V 的一组基是 $A_\mathfrak{m}$ 的正则参数系。若 $\mathfrak{n}$ 是 $SymV$ 的增广理想，则映射 $SymV \to A$ 诱导分次同构 $\phi_q\colon SymV/\mathfrak{n}^q \to A/\mathfrak{m}^q$，以及对于所有 $q \geq 1$， $A/\mathfrak{m}^q = A_\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}A_\mathfrak{m})^q$，因为 A 在 $\mathfrak{m}$ 处正则。由于 $\mathbb{C}^\times$ 在 A 上半单地作用，商 $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}^q$ 诱导满射 $A_i \twoheadrightarrow (A/\mathfrak{m}^q)_i$，对所有 i 都成立。因此 $(A/\mathfrak{m}^q)_{<0} = (A_{<0}+\mathfrak{m}^q)/\mathfrak{m}^q$。故 ϕ_q 限制为

$$\frac{SymV_{<0}+\mathfrak{n}^q}{\mathfrak{n}^q} = (SymV/\mathfrak{n}^q)_{<0} \cong (A/\mathfrak{m}^q)_{<0} = \frac{A_{<0}+\mathfrak{m}^q}{\mathfrak{m}^q}.$$

由于 N是由负权向量空间的提升所定义的 V的子空间，我们有 $NSymV \subset (SymV)_{<0}SymV$。由于 $\mathbb{C}^\times$ 在 V 上的作用是线性的， $NSymV = (SymV_{<0})SymV$，因为 $SymV$ 中的任意负分次向量都可以分解为单项式之和，而这些单项式特别都是负分次权向量。现在我们证明 $(A_{<0}A+\mathfrak{m}^q)/\mathfrak{m}^q = (NA+\mathfrak{m}^q)/\mathfrak{m}^q$。显然 $NA+\mathfrak{m}^q/\mathfrak{m}^q \subset A_{<0}A+\mathfrak{m}^q/\mathfrak{m}^q$，因此我们证明反向包含。首先注意

$$\frac{A_{<0}+\mathfrak{m}^q}{\mathfrak{m}^q} = \phi_q\left(\frac{SymV_{<0}+\mathfrak{n}^q}{\mathfrak{n}^q}\right) \subset \phi_q\left(\frac{NSymV+\mathfrak{n}^q}{\mathfrak{n}^q}\right) = \frac{NA+\mathfrak{m}^q}{\mathfrak{m}^q}.$$

现在注意 $\frac{NA+\mathfrak{m}^q}{\mathfrak{m}^q}$ 是一个理想，因此 $\frac{A_{<0}A+\mathfrak{m}^q}{\mathfrak{m}^q} \subset \frac{NA+\mathfrak{m}^q}{\mathfrak{m}^q}$。由于 $\frac{A_{<0}A+\mathfrak{m}^q}{\mathfrak{m}^q} = \frac{A_{<0}A_\mathfrak{m}+\mathfrak{m}^q}{\mathfrak{m}^q}$， [20, 引理 2。1]推出 $A_{<0}A_\mathfrak{m}$ 由正则序列 N生成。由于 $A_\mathfrak{m}$ 是正则的，这意味着 $A_\mathfrak{m}/A_{<0}A_\mathfrak{m}$是一个正则局部环。

(2) 这只是引理 5.3 的一个直接应用，因为 Y^+ 是光滑的，且 $\mathbb{C}^\times$ 的作用在每个不动点处都是定定的。

(3) 设 $a \in A_0$ 和 $y \in \Omega_p$，则由引理 5.2 可知这是约化的。

$$a(y) = t^0 a(y) = (t\cdot a)(y) = a(t^{-1}y)$$

因此 $a(y)$ 是一个常数。因此， $I_{A_0}(p)$ 在 Ω_p 上消失，而 $\mathfrak{h}I_{A_0}(p)\mathfrak{i}$ 的零点集作为集合等于 Ω_p。□

考察反向吸引集 Ω_p^- 可得到命题5.1的对偶结果。论证与前文完全相同，只需将集合 Ω_p 替换为 Ω_p^- 并交换正分次和负分次。

命题 5.2. 假设 Y 是 $\mathbb{C}$ 上的光滑仿射概形，且 $Y^{\mathbb{C}^\times}$ 有限。令 $\mathbb{C}[Y] = A$ 和

$$Y^- = \left\{ y \in Y \,\middle|\, \lim_{t\to 0} t \cdot y \ exists \right\}.$$

则：

(1) 令$\langle A_{>0}\rangle$ 表示由正次数齐次多项式生成的理想，则 Y^- 是 Y的闭子集，由（约化）理想$\langle A_{>0}\rangle$的消失集定义。*(2)* $Y^- = \bigsqcup_{p\in Y^{\mathbb{C}^\times}} \Omega_p^-$，其中$\Omega_p^- \cong (T_pY)_{<0}$ 是 $\mathbb{C}^\times$-簇。*(3)* 若 $I_{A_0}(p) = \{a \in A_0 \,|\, a(p) = 0\}$，则$\Omega_p^-$是 Y的闭子集，由约化理想$\langle A_{>0}, I_{A_0}(p)\rangle$定义。

如[3, 页中所述， 703] 不动点集 $X_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{\mathbb{C}^\times}$ 恰好是 $\gamma^{-1}(0)$。因此，根据命题 3.1，我们可以通过映射 $\mathrm{quo}_\ell(\lambda) \mapsto x_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}$将 $\mathrm{Irr}\, S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} X_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{\mathbb{C}^\times}$ 识别为。现在可以证明等式 (5.3)。

引理 5.5. 假设 $X_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 光滑。那么簇之间有如下等式

$$\mathrm{Supp}_{Z_c} \underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = \Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)} \quad and \quad \mathrm{Supp}_{Z_c} \underline{\Delta}^-(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = \Omega^-_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}.$$

证明. 在整个证明中，用 X 表示 $X_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$。注意，Verma 模是正分次的，且零次部分等于 $1 \otimes \mathrm{quo}_\ell(\lambda)$。设 $z \in Z_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 是一个负分次元素。那么

$$z \cdot x \otimes \mathrm{quo}_\ell(\lambda) = zx \otimes \mathrm{quo}_\ell(\lambda) = x(z \otimes \mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = 0,$$

因为 $z \otimes \mathrm{quo}_\ell(\lambda)$ 的次数为负，而 $\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$ 是正分次的。因此，$\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$ 的湮灭子包含 $Z_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 的所有负分次元素。若以 I_- 表示由负分次元素生成的理想，则 $I_- \subset \mathrm{ann}_{Z_c} \underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$。于是 $\mathrm{Supp}_{Z_c} \underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) \subset V(I_-)$。由命题 5.1 的 (1) 和 (2) 可知，$\mathrm{Supp}_{Z_c} \underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$ 包含于 X^+ 的某个连通分支中。由于 $x_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)} \in \mathrm{Supp}_{Z_c}(\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)))$，我们有 $\mathrm{Supp}_{Z_c} \underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) \subset \Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}$。我们通过证明 $\dim \mathrm{Supp}_{Z_c} \underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = \dim \Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}$ 来说明这一包含实际上是等式。由于 $\Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}$ 是不可约簇，而 $\mathrm{Supp}_{Z_c} \underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$ 是 $\Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}$ 的闭子集，这便足以得证。

根据定理 5.2，我们有等式 $\mathrm{Supp}_{Z_c} \underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = \mathrm{Spec}\, \mathrm{End}\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$，因此二者的维数相等，即 $\dim \mathrm{Supp}_{Z_c} \underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = \dim \mathrm{Spec}\, \mathrm{End}\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$。但 $\dim \mathrm{Spec}\, \mathrm{End}\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$ 等于 $\mathrm{End}\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$ 的克鲁尔维数。由于 $\mathrm{End}\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$ 是一个有限自由模 over $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$，根据 [7, 推论 1.45]，其克鲁尔维数等于 $\dim \mathfrak{h}$ 。由引理 5.3 可知，$\Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)} \cong T_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}(\Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)})$，因此我们需要证明 $\dim T_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}(\Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}) \leq \dim \mathfrak{h}$。

由于 $x_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}$ 是一个不动点，我们有以下 $\mathbb{C}^\times$-子模的包含关系：$T_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}(x_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}) \subset T_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}(\Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}) \subset T_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}(X)$。我们可以将 $T_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}(X) = T_- \oplus T_0 \oplus T_+$ 分解为负分次部分、零次部分和正分次部分。由 [17, 定理 5.2] 可知，$T_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}(x_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}) = T_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}(X^{\mathbb{C}^\times}) = T_0$。现在，引理 5.2 表明 $X^{\mathbb{C}^\times}$ 是光滑的，因此 $T_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}(x_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}) = \{0\}$，所以 $T_0 = \{0\}$。不动点 $x_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}$ 位于光滑轨中，而 [11, 定理 7.8] 推出 $T_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}(X)$ 是一个辛向量空间。$T_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}(X)$ 上的辛形式是 $\mathbb{C}^\times$- 不变的，因此其

非退化性迫使 $\dim\ T_- = \dim T_+$。由于 X 是光滑的，我们有 $\dim\ X = \dim T_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}(X)$。由于$Z_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = \mathbb{C}[X]$ 是 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^{S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$ 上的有限自由模，我们有

$$\dim Z_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = \dim \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^{S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} = 2\dim \mathfrak{h}.$$

这意味着 $\dim\ X = 2\dim\ \mathfrak{h}$。因此 $\dim T_+ = \dim\ \mathfrak{h}$。由于 $T_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}(\Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)})$ 是正分次的，我们有 $T_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}(\Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}) \subset T_+$，因此 $\dim T_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}(\Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}) \leq \dim \mathfrak{h}$。

第二个等式可由相同的论证得到，只需将正处处换成负，并考虑对偶 Verma 模 $\underline{\Delta}^-(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$。□

因此，任意给定 Verma 模的自同态环的谱等于相应的吸引集。因此，Spec End$\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$ 和 Spec End$\underline{\Delta}^-(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$ 可实现为$X_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$的子簇。

定理 5.6。对于任意 $\mathrm{quo}_\ell(\lambda) \in$ 不可约表示集 $S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$，我们有簇的同构

$$\mathrm{Spec}\,\mathrm{End}\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = \Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}, \quad \mathrm{Spec}\,\mathrm{End}\underline{\Delta}^-(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = \Omega^-_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}.$$

证明。定理 5.2 指出，对于任意 $\mathrm{quo}_\ell(\lambda) \in \mathrm{Irr}\ S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$，都有 Spec End$\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = \mathrm{Supp}_{Z_c}\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))$；而根据引理 5.5，$\mathrm{Supp}_{Z_c}\underline{\Delta}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = \Omega_{\mathrm{quo}_\ell}(\lambda)$。由此得证。类似地，第二个同构由定理 5.2 和引理 5.5 得出。□

回想一下，在本节开头我们曾指出，有必要使用定理5.1 中的同构来推广第 4 节的结果。

下面用对称群和缠绕积群来给出一个更精确的表述。首先，引入一些必要的记号。令 $\mathrm{C}_\ell[n]$ 表示满足以下条件的 ℓ-核集合 γ

$$|\gamma| \leq n \text{ and } |\gamma| = n \bmod \ell.$$

给定一个 ℓ-多重分拆 $\lambda = (\lambda^1, \ldots\ldots, \lambda^\ell)$，定义其反向 ℓ-多重分拆 $\lambda^\flat = (\lambda^\ell, \ldots\ldots, \lambda^1)$.

我们还必须讨论一下我们的参数化方式与 [9] 中给出的参数化方式之间的一些细微差别。回想一下，在 S_n 的情形下，反射上的共轭不变类函数只是标量，也就是说 $c \in \mathbb{C}$。$S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 的反射共轭类稍微复杂一些。令 $s_{i,j}$ 为对换 $(i,j) \in S_n$，并令 γ_i 表示 $S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 的 i^{th} 分量中的 $\gamma \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$。$S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 中有 ℓ 个反射共轭类，其中有 $\ell - 1$ 个形如 $\{\gamma_i \,|\, 0 \leq i \leq n\}$，其中 $\gamma \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \backslash \{0\}$。一种简便的表示该共轭类代表元的方法是考察它们作为矩阵的作用，那么 $t, t^2, \ldots, t^{\ell-1}$ 就是代表元的完整列表，其中

$$t = diag(\zeta, 1, \ldots, 1)$$

且 ζ 是一个本原 ℓ^{th} 单位根。集合

$$\{s_{i,j} \cdot \gamma_i^k \cdot \gamma_j^{-k} \,|\, 1 \leq i, j \leq n, \text{ and } 1 \leq k \leq \ell\}$$

是剩下的共轭类，我们用 σ 表示该类的一个代表元。Bonnafé 和 Mak- simau 使用的参数化方式与我们不同，因此现在对此作出说明。以下令 c^H 为我们的参数化，c^B 为 [9]，中的参数化，那么

$$c^H(\sigma) = c^B(\sigma), \quad c^H(t^i) = \frac{\zeta^i - 1}{-2} c^B(t^i).$$

In [9] 他们引入了一族新的参数 $k_0,\ldots,k_{\ell-1}$，依赖于 c 定义为 b y

$$k_j = \frac{1}{\ell}\sum_{i=1}^{\ell-1}\zeta^{-i(j-1)}c(\gamma_i).$$

因此可得

$$c^B(t^i) = \sum_{j\in\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}\zeta^{i(j-1)}k_j \text{ and } c^H(t^i) = \frac{\zeta^i-1}{-2}\sum_{j\in\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}\zeta^{i(j-1)}k_j.$$

此外，还有一个映射 $\beta_{\ell,v}$: $P_v^\ell(n)\to P(n,\ell)$，它是将 ℓ-商映射限制在具有 ℓ-核 v 的分拆集合上所得的映射。对于广 wreath 积，该映射变为 $\beta_{1,\emptyset}$: $P_\emptyset^1(n\ell)\to P(n\ell)$，即 1-商，它将具有平凡 1-核的 $n\ell$ 的分拆映射到 $n\ell$ 的分拆集合。设 $\lambda\in P^\ell(n)$ 和 $core_k(\lambda)=(\gamma^0,\ldots,\gamma^{\ell-1})$，则 $\beta^\flat_{k,\gamma}$ 定义为满足以下条件的 $k\ell$-分拆

$$(\mu^0,\ldots,\mu^{k\ell-1})$$

使得

$$\beta_{k,\gamma^i}(\lambda^i) = (\mu^{i+(k-1)\ell},\ldots,\mu^{i+\ell},\mu^i)$$

对于 $i\in\{0,1,\ldots,\ell-1\}$。

下面的定理是将 [9, 定理 4.21]，应用于 $W = S_{n\ell}$ 的特殊情形所得。回忆一下，$X_c(S_{n\ell})$ 具有一个 $\mathbb{C}^\times$-作用。因此，通过将 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 与 ℓ^{th} 个单位根相对应，可以认为群 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 作用在 $X_c(S_{n\ell})$ 上。

定理 5.7. 假设 $X_c(S_{n\ell})$ 是光滑的。那么 $X_c(S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$ 是光滑的，并且：

(1) 存在一个双射 $\gamma\to\mathcal{I}(\gamma)$，将 $\mathcal{C}_\ell[n\ell]$ 映到 $X_c(S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$ 的不可约分支，使得 $x_\lambda\in\mathcal{I}(\gamma)$ 当且仅当 $core_\ell(\lambda)=\gamma$ 对于 $\lambda\in\mathcal{P}(n\ell)$成立。*(2)* 设 $\gamma\in\mathcal{C}_\ell[n\ell]$ 和 $r=(n\ell-|\gamma|)/\ell$。存在一个簇的同构

$$i_\gamma : X_{\overline{c}}(S_r\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})\to\mathcal{I}(\gamma),$$

其中 $\overline{c}$ 是与族 $(a',k'_0,\ldots k'_{\ell-1})$ 相关联的参数，使得

$$\begin{cases} a' = ka, \\ k'_j = a\left(j-1-\frac{\ell-1}{2}+\ell(d_{1-j}-d_{-j})\right) \text{ for } 1\le j\le\ell \text{ and } k'_0 = k'_\ell, \end{cases}$$

它满足：对于所有 $\mu\in P(n,kl)$，$x_{(\beta^\flat_{k,\gamma})^{-1}(\mu)} = i_\gamma(x^\ell_\mu)$。这里，$d=(d_i)^{i\in\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$ 定义为

$$d = res_\ell(v)+r\delta_\ell,$$

其中 $v=(\beta_\emptyset)^{-1}(\gamma)$ 是一个 ℓ-核，而 $res_\ell(v)\in\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$，其中 $res_\ell(v)_i$ 是 v中具有 ℓ-剩余类 i的方格数。

我们将上述定理应用于 $\gamma=\emptyset$ 的情形。存在一个簇的同构

$$i_\emptyset : X_{\overline{c}}(S_r\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})\to\mathcal{I}(\emptyset)\subset X_c(S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}},$$

其中 $c=a$ 和 $\overline{c}$ 是与族 $(a',\ k'_0,\ \ldots k'_{\ell-1})$ 相关联的参数，使得 t

$$\begin{cases} a' = \ell a, \\ k'_j = a\left(j-1-\frac{\ell-1}{2}\right) \text{ for } 1\le j\le\ell \text{ and } k'_0 = k'_\ell, \end{cases}$$

对所有 $\mu\in P(n,\ell)$，满足 $x_{(\mathrm{quo}_\ell)^{-1}(\mu)} = i_\emptyset(x^\ell_\mu)$。

显然，具有平凡 ℓ-核的 λ 所对应的不动点 x_λ 全都位于不可约分支 $\mathrm{I}(\emptyset)$ 中。同构

$$X_{\overline{c}}(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \cong \mathcal{I}(\emptyset).$$

由定理给出5.7 还描述了不动点在同构下被映射到何处。由于在我们的情形中，商映射 $\mathrm{quo}_\ell : \mathrm{P}^\ell_\emptyset(n\ell) \to \mathrm{P}(n, \ell)$ 根据定理 2.1是一个双射，因此我们有 $i_\emptyset(x_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}) = x_\lambda$。这一事实很重要，因此我们将其记录为一个引理。

引理 5.6. 存在一个 $\mathbb{C}^\times$-等变同构 $i_\emptyset : X_{\overline{c}}(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \to \mathcal{I}(\emptyset)$，使得在不动点标记下，我们有 $i_\emptyset(x_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}) = x_\lambda$，其中 $\lambda \in \mathcal{P}(n\ell)$。

下文中，$\Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}$（分别为 $\Omega^-_{\mathrm{quo}\ell(\lambda)}$）表示 $X_{\overline{c}}(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 内的吸引集（分别为反向吸引集），而 Ω_λ、Ω^-_λ 则视为位于 $X_c(S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$ 内。

命题 5.3。 映射 $i_\emptyset$ 限制为 $\mathbb{C}^\times$-等变的吸引集同构

$$i_\emptyset : \Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)} \cong \Omega_\lambda^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} = \Omega_\lambda \cap X_c(S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}},$$

$$i_\emptyset : \Omega^-_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)} \cong (\Omega^-_\lambda)^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} = \Omega^-_\lambda \cap X_c(S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}.$$

证明。 由于映射 $i_\emptyset$ 是 $\mathbb{C}^\times$-等变的，它将吸引集映到吸引集，因此

$$i_\emptyset(\Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}) \subset \Omega_\lambda^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \quad and \quad i_\emptyset^{-1}(\Omega_\lambda^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}) \subset \Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}$$

因此 $i_\emptyset : \Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)} \to \Omega_\lambda^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$ 是一个双射态射。由于光滑簇之间的双射态射是同构，结论得证。第二个同构可用类似论证得到。□

综上，我们得到簇之间的等式

$$\operatorname{Spec}\operatorname{End}_{\underline{\Delta}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = \Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)} \quad and \quad \operatorname{Spec}\operatorname{End}_{\underline{\Delta}^-}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = \Omega^-_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}$$

以及同构

$$\Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)} \cong \Omega_\lambda^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \quad and \quad \Omega^-_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)} \cong (\Omega^-_\lambda)^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}.$$

这为我们提供了一种将对称群和广 wreath 积群对应的 Verma 模的自同态环联系起来的方法。遗憾的是，这还不足以得出婴儿 Verma 模自同态环的显式表示。为此，我们必须明确理解一个特定的同构。在[16, 定理 11。16] Etingof 和 Ginzburg 构造了一个同构，将 $Z_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 与一个适当的 Calogero-Moser 空间联系起来。现在我们将着重描述这个映射，并证明它具有我们所期望的性质。

设 $e_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}))$ 为映射到平凡表示的映射，其在元素上的定义为

$$e_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}(g) = \left(\frac{1}{|\ell|}\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \gamma\right) \cdot g,$$

并将 $\mathfrak{sl}_n$ 中由所有形如 $P - Id$ 的 $n \times n$ 矩阵构成的共轭类记为 $\mathbf{O}$，其中 P 是秩为 1 且满足 $tr(P) = n$ 的半单矩阵。给定任意将 γ 映射到 c'_γ 的类函数 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$，则元素 $c' = \sum_\gamma c'_\gamma \gamma$ 在正则表示中是零迹中心元。于是，对任意一对 $c = (k, c')$，可定义如下集合

$$M_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z},n,c} = \{\nabla_1, \nabla_2 \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \,|\, [\nabla_1, \nabla_2] = k\ell \cdot o \otimes e_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} + Id_{\mathbb{C}^n} \otimes c' \text{ for some } o \in \mathbf{O}\}.$$

Calogero-Moser 空间可定义为以下商簇

$$\mathcal{M}_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z},n,c} = M_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z},n,c}/PGL_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z},n,c}.$$

我们需要明确理解 Bonnafé 和 Maksimau 给出的同构 $i_\emptyset$。在他们的论文中，这个映射由与 $X_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 和 $X_c(S_{n\ell})$ 相关的 Calogero-Moser 空间之间的包含映射给出。

根据 [16, 定理 1。7] 存在一个将谱 $Z_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 与不可约表示集 $\mathrm{Irr}H_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$对应的识别，其对应关系为

$$p \to H_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})e \otimes_Z p, \quad \forall p \in \mathrm{MaxSpec}\, Z_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \tag{5.4}$$

其中，p 被视为一个同态 $Z_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$。考虑一个不可约 $H_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$-模$E$。令 Γ_{n-1} 表示稳定 $\mathfrak{h}$ 中第一个基向量 x_1 的 $\Gamma = S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 子群。令 $E^{\Gamma_{n-1}}$ 表示 E 中被 Γ_{n-1} 固定的子空间。显然，x_1 和 y_1 与 Γ_{n-1} 的作用可交换。因此，我们可以通过 x_1 和 y_1 分别在 E 上的作用定义算子 X、$Y \in \in$ 自同态环 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E^{\Gamma_{n-1}})$。根据16] 定理 11.，同构$\phi : \mathrm{Irr}H_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \to \mathrm{M}_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z},n,c}$ [16, 由 $\phi(E) = (X, Y)$ 给出。

考虑开集 U in $\mathrm{Irr}H_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$，其中元素 $x_i - \omega^k x_j$ 的作用均可逆； U是一个开集。令 $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^{2n}$，其中对所有 $i \neq j$， $\lambda_i^\ell \neq \lambda_j^\ell$ 均成立。用 $\mathrm{O}_{(\lambda,\mu)}$ 表示群 $S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$作用下 (λ, μ) 的轨道。这是一个自由轨道，因此 $|\mathrm{O}_{(\lambda,\mu)}| = n!\ell^n$。在同构意义下，每个属于 U 的表示 E 都具有形式 $E_{(\lambda,\mu)} = \mathbb{C}[\mathrm{O}_{\lambda,\ \mu}]$。$E_{(\lambda,\mu)}$ 的一组基由特征方程给出

$$\chi_s(a,b) = \begin{cases} 1 \text{ if } s \cdot (a,b) = (\lambda,\mu) \\ 0 \text{ else} \end{cases}$$

对于 $s \in S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$。于是，子空间 $E^{\Gamma_{n-1}}$ 的维数为 ℓn，其一组基为 $\chi_{s_{1,\ i}\gamma_1^r}$，其中 $1 \leq i \leq a$ 和 $0 \leq r \leq \ell - 1$。$H_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 在 $E_{(\lambda,\mu)}$ 上的作用由下式给出

$$x_i \cdot F(a,b) = a_i F(a,b),\ y_i \cdot F(a,b) = b_i \cdot F(a,b) + c_0 \sum_{j \neq i} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{s_{i,j}\gamma_i^k \gamma_j^{-k} F(a,b)}{\omega^{-k}a_j - a_i} + \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{c_k \gamma_i^k F(a,b)}{a_i\omega^k - a_i}$$

and

$$(w \cdot F)(a,b) = F(w^{-1} \cdot a, w^{-1} \cdot b),$$

当 $w \in S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 和 ω 为一个本原 ℓ^{th} 单位根时。我们必须验证这些方程满足 $t = 0$处有理 Cherednik 代数的定义关系，这些关系见（3.6）。验证只需直接计算，为完整起见，我们将其列出

$$[y_i, x_t] \cdot F(a,b) = y_i \cdot x_t \cdot F(a,b) - x_t \cdot y_i \cdot F(a,b)$$

$$= x_t \left(b_i \cdot F(a,b) + c_0 \sum_{j \neq i} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{s_{i,j}\gamma_i^k \gamma_j^{-k} F(a,b)}{\omega^{-k}a_j - a_i} + \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{c_k \gamma_i^k F(a,b)}{a_i\omega^k - a_i} \right) - y_i \cdot a_t F(a,b)$$

$$= \left(a_t b_i \cdot F(a,b) + c_0 \sum_{j \neq i} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{s_{i,j}\gamma_i^k \gamma_j^{-k} a_t F(a,b)}{\omega^{-k}a_j - a_i} + \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{c_k \gamma_i^k a_t F(a,b)}{a_i\omega^k - a_i} \right)$$

$$- \left(a_t b_i \cdot F(a,b) + a_t c_0 \sum_{j \neq i} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{s_{i,j}\gamma_i^k \gamma_j^{-k} F(a,b)}{\omega^{-k}a_j - a_i} + a_t \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{c_k \gamma_i^k F(a,b)}{a_i\omega^k - a_i} \right)$$

$$= c_0 \sum_{j\neq i} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{s_{i,j}\gamma_i^k \gamma_j^{-k} a_t F(a,b)}{\omega^{-k}a_j - a_i} - a_t c_0 \sum_{j\neq i} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{s_{i,j}\gamma_i^k \gamma_j^{-k} F(a,b)}{\omega^{-k}a_j - a_i}$$

$$= c_0 \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{s_{i,t}\gamma_i^k \gamma_t^{-k} a_t F(a,b)}{\omega^{-k}a_t - a_i} - a_t c_0 \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{s_{i,t}\gamma_i^k \gamma_t^{-k} F(a,b)}{\omega^{-k}a_t - a_i}$$

$$= (\omega^k a_i - a_t) c_0 \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{s_{i,t}\gamma_i^k \gamma_t^{-k} F(a,b)}{\omega^{-k}a_t - a_i} = -c_0 \sum_{k=0}^{\ell-1} \omega^k s_{i,t}\gamma_i^k \gamma_t^{-k} F(a,b)$$

现在我们来验证关系

$$[y_i, x_i] = c_0 \sum_{i\neq j} \sum_{k=0}^{\ell-1} s_{ij} s_i^k s_j^{-k} + \sum_{k=1}^{\ell-1} c_k s_j^{-k}.$$

So

$$[y_i, x_i] \cdot F(a,b) = y_i \cdot x_i \cdot F(a,b) - x_i \cdot y_i \cdot F(a,b)$$

$$= x_i \cdot \left(b_i \cdot F(a,b) + c_0 \sum_{j\neq i} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{s_{i,j}\gamma_i^k \gamma_j^{-k} F(a,b)}{\omega^{-k}a_j - a_i} + \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{c_k \gamma_i^k F(a,b)}{a_i \omega^k - a_i} \right) - y_i \cdot a_i F(a,b)$$

$$= a_i b_i F(a,b) + c_0 \sum_{j\neq i} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{s_{i,j}\gamma_i^k \gamma_j^{-k} \omega^{-k} a_j F(a,b)}{\omega^{-k}a_j - a_i} + \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{c_k \gamma_i^k \omega^k a_i F(a,b)}{a_i \omega^k - a_i})$$

$$-a_i \left(b_i \cdot F(a,b) + c_0 \sum_{j\neq i} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{s_{i,j}\gamma_i^k \gamma_j^{-k} F(a,b)}{\omega^{-k}a_j - a_i} + \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{c_k \gamma_i^k F(a,b)}{a_i \omega^k - a_i} \right)$$

$$= c_0 \sum_{j\neq i} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(\omega^{-k}a_j - a_i) s_{i,j}\gamma_i^k \gamma_j^{-k} F(a,b)}{\omega^{-k}a_j - a_i} + \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{(\omega^k a_i - a_i) c_k \gamma_i^k F(a,b)}{a_i \omega^k - a_i}$$

$$= c_0 \sum_{j\neq i} \sum_{k=0}^{\ell-1} s_{i,j}\gamma_i^k \gamma_j^{-k} F(a,b) + \sum_{k=1}^{\ell-1} c_k \gamma_i^k F(a,b)$$

如所要求。

类似地，我们可以考虑集合 $V\mathrm{Irr}H_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 中的开集，其中元素 $y_i - \omega^k y_j$ 的作用是可逆的。每个表示 E 属于 V，其形式与之前相同， $E_{(\lambda,\mu)} = \mathbb{C}[\mathrm{O}\lambda,\ \mu]$。这些表示$E_{(\lambda,\mu)}$ 具有相同的基，但 $H_c($ $S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 的作用不同，具体如下

$$x_i \cdot F(a,b) = a_i F(a,b) - c_0 \sum_{j\neq i} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{s_{i,j}\gamma_i^k \gamma_j^{-k} F(a,b)}{\omega^{-k}b_j - b_i} - \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{c_k \gamma_i^k F(a,b)}{b_i \omega^k - b_i},\ y_i \cdot F(a,b) = b_i$$

and

$$(w \cdot F)(a,b) = F(w^{-1} \cdot a, w^{-1} \cdot b),$$

对于 $w \in S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 和 ω，一个本原的 ℓ^{th} 单位根。我们必须重新检查 Cherednik 代数关系

$$[y_t, x_i] \cdot F(a,b) = y_t \cdot x_i \cdot F(a,b) - x_i \cdot y_t \cdot F(a,b)$$

$$= x_i \cdot b_t F(a,b) - y_t \cdot \left(a_i F(a,b) - c_0 \sum_{j\neq i} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{s_{i,j}\gamma_i^k \gamma_j^{-k} F(a,b)}{\omega^{-k}b_j - b_i} - \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{c_k \gamma_i^k F(a,b)}{b_i \omega^k - b_i} \right)$$

$$= \left(a_i b_t F(a,b) - b_t c_0 \sum_{j\neq i} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{s_{i,j}\gamma_i^k \gamma_j^{-k} F(a,b)}{\omega^{-k}b_j - b_i} - b_t \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{c_k \gamma_i^k F(a,b)}{b_i \omega^k - b_i} \right)$$

$$
-\left(a_ib_tF(a,b)-c_0\sum_{j\neq i}\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{s_{i,j}\gamma_i^k\gamma_j^{-k}b_tF(a,b)}{\omega^{-k}b_j-b_i}-\sum_{k=1}^{\ell-1}\frac{c_k\gamma_i^kb_tF(a,b)}{b_i\omega^k-b_i}\right)
$$

$$
=c_0\sum_{j\neq i}\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{s_{i,j}\gamma_i^k\gamma_j^{-k}b_tF(a,b)}{\omega^{-k}b_j-b_i}-b_tc_0\sum_{j\neq i}\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{s_{i,j}\gamma_i^k\gamma_j^{-k}F(a,b)}{\omega^{-k}b_j-b_i}
$$

$$
=c_0\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{s_{i,t}\gamma_i^k\gamma_t^{-k}b_tF(a,b)}{\omega^{-k}b_t-b_i}-b_tc_0\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{s_{i,t}\gamma_i^k\gamma_t^{-k}F(a,b)}{\omega^{-k}b_t-b_i}
$$

$$
=(\omega^kb_i-b_t)c_0\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{s_{i,t}\gamma_i^k\gamma_t^{-k}b_tF(a,b)}{\omega^{-k}b_t-b_i}=-c_0\sum_{k=0}^{\ell-1}\omega^ks_{i,t}\gamma_i^k\gamma_t^{-k}F(a,b).
$$

现在让我们检查第二个关系

$$
[y_i,x_i]\cdot F(a,b)=y_i\cdot x_i\cdot F(a,b)-x_i\cdot y_i\cdot F(a,b)
$$

$$
x_i\cdot b_iF(a,b)-y_i\cdot\left(a_iF(a,b)-c_0\sum_{j\neq i}\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{s_{i,j}\gamma_i^k\gamma_j^{-k}F(a,b)}{\omega^{-k}b_j-b_i}-\sum_{k=1}^{\ell-1}\frac{c_k\gamma_i^kF(a,b)}{b_i\omega^k-b_i}\right)
$$

$$
=\left(a_ib_iF(a,b)-b_ic_0\sum_{j\neq i}\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{s_{i,j}\gamma_i^k\gamma_j^{-k}F(a,b)}{\omega^{-k}b_j-b_i}-b_i\sum_{k=1}^{\ell-1}\frac{c_k\gamma_i^kF(a,b)}{b_i\omega^k-b_i}\right)
$$

$$
-\left(a_ib_iF(a,b)-c_0\sum_{j\neq i}\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{s_{i,j}\gamma_i^k\gamma_j^{-k}b_iF(a,b)}{\omega^{-k}b_j-b_i}-\sum_{k=1}^{\ell-1}\frac{c_k\gamma_i^kb_iF(a,b)}{b_i\omega^k-b_i}\right)
$$

$$
(\omega^{-k}b_j-b_i)c_0\sum_{j\neq i}\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{s_{i,j}\gamma_i^k\gamma_j^{-k}F(a,b)}{\omega^{-k}b_j-b_i}+(b_i\omega^k-b_i)\sum_{k=1}^{\ell-1}\frac{c_k\gamma_i^kF(a,b)}{b_i\omega^k-b_i}
$$

$$
=c_0\sum_{j\neq i}\sum_{k=0}^{\ell-1}s_{i,j}\gamma_i^k\gamma_j^{-k}F(a,b)+\sum_{k=1}^{\ell-1}c_k\gamma_i^kF(a,b).
$$

定理 5.8。令 ϕ：谱 $Z_c(S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})\to\mathcal{M}_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z},n,c}$ 为上文定义的映射。则有以下等式

$$
\phi^*(tr(X)^k)=\begin{cases}\ell(x_1^k+...+x_n^k)\text{ if }\ell|k\\0\text{ else}\end{cases}
$$

$$
\phi^*(tr(Y)^k)=\begin{cases}\ell(y_1^k+...+y_n^k)\text{ if }\ell|k\\0\text{ else}\end{cases}
$$

证明。首先注意到 $Z_c(S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 是约化的，因为 [11, 命题 7.2] 指出，$eH_c(S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})e\cong Z_c(S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 是一个整环。因此，对于 $f,g\in Z_c(S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$，$f=g$ 当且仅当对所有 $p\in\text{maxSpec}\,Z_c(S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$，$f(p)=g(p)$。此外，Spec $Z_c(S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 是不可约的，因此 $f=g$ 当且仅当对所有 $p\in U\subset\text{Spec}\ Z_c(S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$，$f(p)=g(p)$，其中 U 是上文定义的开集。我们还使用了上文公式 (5.4) 中 Spec $Z_c(S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 与 $\text{Irr}H_c(S_n\wr\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 的对应关系。固定一个不可约模 $E_{(\lambda,\mu)}\in U$。我们首先计算 $\phi^*(tr(X))^k(E_{(\lambda,\mu)})$。如 [16]的第 11 节所述，$E^{\Gamma_{n-1}}(\lambda,\mu)$ 作为一个 $\mathbb{C}(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$-模，同构于 n 个 $\mathbb{C}(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 的副本。因此，$E^{\Gamma_{n-1}}(\lambda,\mu)$ 可以看作向量

空间 $V_0 \oplus \cdots \oplus V_{\ell-1}$，其中 V_i 是 n 个 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 的不可约表示的副本，且生成元 s 的作用为 ω^i。若将 x_1 在 V_i 上的作用记为 X_i，则注意到 $X_i : V_i \to V_{i+1}$，因为

$$s \cdot X_i(v) = s \cdot x_1 v = \omega x_1 s \cdot v = \omega^{i+1} x_1 v = \omega^{i+1} X_i(v) \text{ if } v \in V_i.$$

回顾一下，$\phi(E) = (X, Y)$，其中 $X = x_1$ 作用于 $E^{\Gamma_{n-1}}$。那么我们看到，作为一个矩阵，

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & X_{\ell-1} \\ X_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & X_{\ell-2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

因此 $\phi^*(tr(X)^k)(E_{(\lambda,\mu)}) = tr(X^k)$；若 $\ell \nmid k$，则 $tr(X^k) = 0$，因为 X^k 的主对角线上每个元素都等于 0。然而，若 $\ell | k$，则记 $k = m\ell$，并且 $tr(X^k) = \ell tr((X_0 \dots X_{\ell-1})^m)$。对于每个 X_i，我们有$X_i = \text{diag}(\lambda_1, \dots\dots, \lambda_n)$，因此

$$tr((X_0 \dots X_{\ell-1})^m) = \lambda_1^{m\ell} + \cdots + \lambda_n^{m\ell} = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k.$$

代回后可得

$$tr(X^k) = \ell(\lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k).$$

现在我们必须验证，对于所有 $u \in E$，$\ell(x_1^k + \cdots + x_n^k)(u) = \ell(\lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k)(u)$。对于每个 $F \in E_{(\lambda,\mu)}$，$(x_1^k + \cdots + x_n^k \cdot F)(a, b) = (\lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k)F(a, b)$，因此 $x_1^k + \cdots + x_n^k$ 通过标量乘法作用于 $E_{(\lambda,\mu)}$，其标量为 $\lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$。

为证明关于 Y 的证明中的陈述，我们只需注意到，只要使用开集 $V \subset$ 谱 $Z_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$代替 U，同样的论证便成立。于是 Y 在 $E^{\Gamma_{n-1}}$ 上的作用由矩阵给出

$$\begin{bmatrix} 0 & Y_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & Y_{\ell-1} \\ Y_0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.6}$$

通过相同的迹计算，我们得到

$$tr(Y^k) = \ell(\mu_1^k + \cdots + \mu_n^k)$$

若 $\ell | k$ 且 $tr(Y)^k = 0$，否则。 □

我们还注意到。

引理 5.7。 存在一个同构

$$\alpha : \mathbb{C}^n/(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}^{n\ell}/S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$$

由下式给出

$$\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, \omega a_1, \omega^2 a_1, \dots, \omega^{\ell-1} a_n)$$

回顾引理 $i_\emptyset$ 中引入的映射 5.6。我们必须将其分解为三个映射的复合。考虑箭头簇上的包含映射

$$\overline{i}_\emptyset : \mathcal{M}_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z},n,\overline{c}} \to \mathcal{M}_{\mathbb{Z}/\mathbb{Z},n\ell,c}$$

该映射将 $(X_0, \dots X_{\ell-1})$ 送至方程 (X 5.5) 的矩阵，并将 $(Y_0,..., Y_{\ell-1})$ 送至 (5.6)。那么，引理 $i_\emptyset$ 中的映射 5.6 由 $\phi_{S_{n\ell}}^{-1} \circ \bar{i}_\emptyset \circ \phi_{S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$给出。引入所有适当的映射后，我们可以进行如下图追踪。

定理 5.9. 存在一个同构 $X_{\overline{c}}(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \to W$到 $X_c(S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$的某个连通分支，使得以下图交换

$$\begin{array}{ccc} X_{\overline{c}}(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\phi_{S_{n\ell}}^{-1} \circ \bar{i}_\emptyset \circ \phi_{S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}} & X_c(S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{n,\ell}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{n\ell}} \\ \mathbb{C}^n/(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\alpha]{} & (\mathbb{C}^{n\ell}/S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc} X_{\overline{c}}(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\phi^{s_{n\ell}^{-1}} \circ \bar{i}_\emptyset \circ \phi_{S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}} & X_c(S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{n,\ell}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{n\ell}} \\ (\mathbb{C}^n)^*/(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\alpha]{} & ((\mathbb{C}^{n\ell})^*/S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \end{array}.$$

证明。 第一步是通过引入 Calogero-Moser 空间来展开该图

$$\begin{array}{ccccccc} X_{\overline{c}}(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\phi_{S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}} & \mathcal{M}_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}, n, \overline{c}} & \xrightarrow{\bar{i}_\emptyset} & \mathcal{M}_{\mathbb{Z}/\mathbb{Z}, n\ell, c} & \xrightarrow{\phi_{S_{n\ell}}^{-1}} & X_c(S_{n\ell}) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{n,\ell}} & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{n\ell}} \\ \mathbb{C}^n/(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) & & \xrightarrow[\alpha]{} & & & & (\mathbb{C}^{n\ell}/S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \end{array}.$$

理解上图中各映射的对偶更为容易；又由于一个图可交换当且仅当其对偶图可交换，因此我们将改为证明这一点。故我们必须证明下列图的可交换性30

图

$$\begin{array}{ccccccc} Z_{\overline{c}}(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) & \xleftarrow{\phi^*_{S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}} & \mathbb{C}[\mathcal{M}_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z},n,\overline{c}}] & \xleftarrow{\overline{i}^*_{\emptyset}} & \mathbb{C}[\mathcal{M}_{\mathbb{Z}/\mathbb{Z},n\ell,c}] & \xleftarrow{(\phi^*)^{-1}_{S_{n\ell}}} & Z_c(S_{n\ell}) \\ \uparrow{\scriptstyle i_{n,\ell}} & & & & & & \uparrow{\scriptstyle i_{n\ell}} \\ \mathbb{C}[\mathbb{C}^n/(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})] & & \xleftarrow[\alpha^*]{} & & & & \mathbb{C}[(\mathbb{C}^{n\ell}/S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}] \end{array}.$$

首先注意， $\mathbb{C}[(\mathbb{C}^{n\ell}/S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}]$ 是由 ℓ^{th} 单位根的作用固定的对称多项式。因此，它由如下形式的元素生成

$$x_1^{k\ell} + \cdots + x_{n\ell}^{k\ell} \text{ where } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

现在， $\alpha^*(f)(p) = f(\alpha(p))$，其中 $p \in \mathbb{C}^n/(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$。考虑任意生成元 $x_1^{k\ell} + \cdots + x_{n\ell}^{k\ell}$，则

$$\alpha^*(x_1^{k\ell} + \cdots + x_{n\ell}^{k\ell})(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (x_1^{k\ell} + \cdots + x_{n\ell}^{k\ell})(a_1, \omega a_1, \ldots, \omega^{\ell-1} a_n)$$

$$= a_1^{k\ell} + (\omega a_1)^{k\ell} + (\omega^2 a_1)^{k\ell} + \cdots + (\omega^{\ell-1} a_n)^{k\ell}$$

$$= (1 + \omega^{k\ell} + (\omega^2)^{k\ell} \cdots + (\omega^{\ell-1})^{k\ell})(a_1^{k\ell} + a_2^{k\ell} + \cdots + x_n^{k\ell}) = \ell(a_1^{k\ell} + \cdots + a_n^{k\ell}).$$

因此

$$\alpha^*(x_1^{k\ell} + \cdots + x_{n\ell}^{k\ell}) = \ell(x_1^{k\ell} + \cdots + x_n^{k\ell}).$$

回忆一下，映射 π 是包含映射的对偶，因此

$$i_{n,\ell}(\ell(x_1^{k\ell} + \cdots + x_n^{k\ell})) = \ell(x_1^{k\ell} + \cdots + x_n^{k\ell}).$$

现在我们 mu 再沿另一方向追踪该图。第一个映射 $i_{n\ell}$ 也是包含映射，因此

$$i_{n\ell}(x_1^{k\ell} + \cdots + x_{n\ell}^{k\ell}) = x_1^{k\ell} + \cdots + x_{n\ell}^{k\ell}.$$

由定理 5.8，我们有 $\phi^*_{S_{n\ell}}(tr(X)^k) = x_1^k + \cdots + x_{n\ell}^k$，因此 $(\phi^*_{S_{n\ell}})^{-1}(x_1^{k\ell} + \cdots + x_{n\ell}^{k\ell}) = tr(X)^{k\ell}$。于是根据定义，我们有

$$(\overline{i}^*_{\emptyset})^{-1}(tr(X)^{k\ell}) = tr(\overline{i}_{\emptyset}(X)^{k\ell}).$$

因此，只需证明 $\phi^*_{S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}(tr(\overline{i}_{\emptyset}(X)^{k\ell}) = \ell(x_1^{k\ell} + \cdots + x_n^{k\ell})$。这正是定理 5.8 的结论。第二个图由同样的论证以及定理 5.8 的第二个等式可知可交换。 □

回顾推论4.1 ，有 $A(\lambda)^+ \cong \mathbb{C}[\pi^{-1}(0)]$ ，并且我们将不动点轨迹上的函数记为

$$A(\lambda)^+_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} := \mathbb{C}[\pi^{-1}_{n\ell}(0)]/\langle f - s \cdot f \mid s \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}, f \in \mathbb{C}[\pi^{-1}_{n\ell}(0)]\rangle.$$

定理 5.10. 存在代数同构

$$A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))^+ \cong A_c(\lambda)^+_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \quad and \quad A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)^\sharp)^- \cong A_c(\lambda^T)^-_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}.$$

证明. 根据定义， $A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))^+ :=$ 自同态环$\Delta_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = \mathbb{C}[\mathrm{Spec}\mathrm{End}\Delta_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))]$。根据命题 5.3存在一个同构

$$i_\emptyset : \Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)} \cong \Omega_\lambda \cap X_c(S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}.$$

因此，定理5.9 表明存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)} & \xrightarrow{\phi^{s_{n\ell}^{-1}} \circ \overline{i}_\emptyset \circ \phi_{S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}} & \Omega_\lambda^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{n,\ell}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{n\ell}} \\ \mathbb{C}^n/(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\alpha]{} & (\mathbb{C}^{n\ell}/S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \end{array}.$$

根据定理5.6， 谱 自同态环$\underline{\Delta}_{\overline{c}}$(商$_\ell(\lambda)) = \Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)}$ 以及谱 自同态环$\underline{\Delta}_c(\lambda) = \Omega_\lambda$. 因此图变为 es

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\,\mathrm{End}\underline{\Delta}_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = \Omega_{\mathrm{quo}_\ell(\lambda)} & \xrightarrow{i_\emptyset} & \Omega_\lambda^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} = (\mathrm{Spec}\,\mathrm{End}\underline{\Delta}_c(\lambda))^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{n,\ell}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{n\ell}} \\ \mathbb{C}^n/(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\alpha]{} & (\mathbb{C}^{n\ell}/S_{n\ell})^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \end{array}.$$

由于 α 和 $i_\emptyset$ 都是同构，因此我们有 $\pi_{n\ell}^{-1}(0) \cong (\pi_{n\ell}^{-1}(0))^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$。因此存在代数同构 $\mathbb{C}[\pi_{n,\ell}^{-1}(0)] \cong \mathbb{C}[\pi_{n\ell}^{-1}(0)^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}]$。最后，推论 4.1 表明

$$\begin{aligned} A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))^+ \cong & \mathbb{C}[\pi_{n,\ell}^{-1}(0)] \\ \cong & \mathbb{C}[\pi_{n\ell}^{-1}(0)^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}] \\ \cong & \mathbb{C}[\pi_{n\ell}^{-1}(0)]/\langle f - s\cdot f \mid s \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}, f \in \mathbb{C}[\pi_{n\ell}^{-1}(0)]\rangle \end{aligned}$$

因此 $A_{\overline{c}}$(商$_\ell(\lambda))^+ = A_c(\lambda)^+_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$.

相反情形的论证一直成立，直到得出结论 $\mathbb{C}[(\pi^-)_{n\ell}^{-1}(0)] \cong \mathbb{C}[(\pi^-)_{n\ell}^{-1}(0)^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}]$。我们利用定理4.3 得到

$$\mathrm{End}\underline{\Delta}^-(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) \cong \mathbb{C}[(\pi^-)_{n,\ell}^{-1}(0)] \cong \mathbb{C}[(\pi^-)_{n\ell}^{-1}(0)^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}] \cong (\mathrm{End}\underline{\Delta}^-((\lambda)))_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}.$$

注意到 (自同态环$\underline{\Delta}^-((\lambda)))_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} = A_c(\lambda^T)^-_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$， 因此

$$A_c(\lambda^T)^-_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} = (\mathrm{End}\underline{\Delta}^-((\lambda)))_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \cong \mathrm{End}\underline{\Delta}^-(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)) = A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)^\sharp)^-.$$

□

采用与定理3.3 的证明类似的方法，我们将在第 7 节证明，可以从 $A(\lambda^T)^-$ 的第二个等式中去掉转置。

定理 5.10 使我们能够借助对称群来理解缠绕积群的婴儿 Verma 模的自同态环。正如我们将在下一节看到的，这将使我们能够轻松地将的显式表示推广到 $Z_c(S_n)$ 和 $Z_{\overline{c}}(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$。

6. 朗斯基行列式、舒伯特胞腔与 $A(\lambda)$的显式表示 $^+$

这里我们将引入朗斯基行列式，并解释它为何能使我们显式表示$A(\lambda)^+$，进而显式表示 $Z_c(S_n)$。多项式集合 $\{f_1、\ldots\ldots、 f_n\}$ 的朗斯基行列式为

$$\mathrm{Wr}(f_1, f_2, \ldots, f_n) := \det \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n \\ f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_3^{(1)} & \cdots & f_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & f_3^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

还有一种密切相关的映射，称为 Wronski映射；这正是我们最感兴趣的映射。正如我们接下来将要说明的，它与舒伯特胞腔有关。重要的是，舒伯特胞腔是可以用生成元与关系显式描述的对象。在他们的论文中 [25] Mukhin、Tarasov 和 Varachenko 描述了如何显式写出由分拆 $\lambda \vdash n$标记的舒伯特胞腔上的函数环。下面我们来介绍他们的构造。给定 $\lambda \vdash n$，定义正整数 $d_i = \lambda_i + n - i$，并将这些数构成的集合记为 $P = \{d_1, \ldots, d_n\}$。令 $\mathbb{C}_d[u]$ 为 u 中次数小于 d的多项式空间。按照引理 2.1 的记号，舒伯特胞腔 $\Omega_\lambda^{qe} \subset \mathrm{Gr}(N, \mathbb{C}_d[u])$ 是由所有 N维子空间构成的格拉斯曼流形的子簇 $\mathbb{C}_d[u]$，由具有如下基的子空间 X 组成

$$f_i = u^{d_i} + \sum_{j=1,\, d_i - j \notin P}^{d_i} f_{i,j} u^{d_i - j}. \tag{6.1}$$

代数 $\mathbb{C}[\Omega_\lambda^{qe}]$ 是以 f_{ij} 为生成元的自由多项式代数，即

$$\mathbb{C}[\Omega_\lambda^{qe}] = \mathbb{C}[f_{ij},\, i = 1, \ldots, n,\ \ j = 1, \ldots d_i,\, d_i - j \notin P].$$

注意，若令 $\deg(f_{ij}) = j$，则这是一个分次代数。X 的一个基的朗斯基行列式是一个次数为 n 的多项式。我们记

$$\mathrm{Wr}(f_1, \ldots, f_n) = u^n + r_1 u^{n-1} + \cdots + r_n.$$

$\mathrm{Wr}_\lambda : \Omega_\lambda^{qe} \to \mathbb{C}^n$ 的 Wronski映射在元素上的定义为

$$\mathrm{Wr}_\lambda(X) = (a_1, \ldots, a_n) \text{ if } \mathrm{Wr}(X) = u^n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_i u^{n-i}.$$

因此，Wronski映射的概形论纤维为

$$\mathbb{C}[\mathrm{Wr}_\lambda^{-1}(a)] \cong \mathbb{C}[\Omega_\lambda^{qe}]/I_{\lambda,a}, \tag{6.2}$$

其中 $I_{\lambda,a}$ 是由 $r_s - (-1)^s a_s$ 生成的理想。

由同构 (6.2) 可知，Wronski映射的概形论纤维可以显式写出，因为我们知道如何写出 Schubert 单元格上函数环的形式。我们只需将 Wronski映射的概念与 π 第 4 节和第 5 节中的映射联系起来。下文的定理将阐明这一点，但需要特别注意的是，这仅适用于对称群的情形。

定理 6.1。若 $W = S_n$，则存在一个簇的同构

$$\pi^{-1}(0) \cong \mathrm{Wr}_\lambda^{-1}(0).$$

其中 π 是由包含映射 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{S_n} \hookrightarrow$ 自同态环$\underline{\Delta}(\lambda)$ 诱导的谱映射 π : 谱 自同态环$\underline{\Delta}(\lambda) \to \mathfrak{h}/S_n$ 。

证明。 参见 [4, 命题 6。4]。 □

根据第 4 节的结果，我们很容易推导出以下结论。

定理 6.2. 存在一个代数同构

$$A(\lambda)^+ \cong \mathbb{C}[\mathrm{Wr}_\lambda^{-1}(0)].$$

证明。 定理 6.1 指出 $\pi^{-1}(0) \cong$ 朗$_\lambda^{-1}$ (0)，因此 $\mathbb{C}[\pi^{-1}(0)] = \mathbb{C}[$朗$_\lambda^{-1}$ $(0)]$。由推论4.1 可得 $A(\lambda)^+ \cong \mathbb{C}[\pi^{-1}(0)]$，因此 $A(\lambda)^+ \cong \mathbb{C}[$朗$_\lambda^{-1}$ $(0)]$. □

考虑 $a = 0$ 在（6.2）中的情形。定理 6.2 表明 $A(\lambda)^+$ 是 $\mathbb{C}[\Omega_\lambda^{qe}]$ 对多项式 $\mathrm{Wr}(f_1,\ldots,f_n)$ 的系数所生成的理想取商所得。现在我们来说明如何在对称情形下，用生成元与关系显式地描述代数$A(\lambda)^+$。首先计算朗斯基行列式

$$\mathrm{Wr}(f_1,f_2,\ldots,f_n) = \det\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n \\ f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_3^{(1)} & \cdots & f_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & f_3^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix} = u^n + r_1u^{n-1} + \cdots + r_n$$

多项式的

$$f_i = u^{d_i} + \sum_{j=1,\ d_i-j\notin P}^{d_i} f_{ij}u^{d_i-j}.$$

代数 $A(\lambda)^+$ 由取以 f_{ij} 为生成元的多项式代数，并将其对 Wronskian 的系数 r_s 取商得到。

例 6.1。 对于分拆 $\lambda = (3,2)$，我们有 $d_1 = 7$、 $d_2 = 5$、 $d_3 = 2$、 $d_4 = 1$ 和 $d_5 = 0$。因此$f_1(u) = u^7 + f_{11}u^6 + f_{13}u^4 + f_{14}u^3$、 $f_2(u) = u^5 + f_{21}u^4 + f_{22}u^3$、 $f_3(u) = u^2$、 $f_4(u) = u$ 以及 $f_5(u) = 1$。让我们计算朗斯基行列式，即

$$\det\begin{bmatrix} u^7+f_{11}u^6+f_{13}u^4+f_{14}u^3 & u^5+f_{21}u^4+f_{22}u^3 & u^2 & u & 1 \\ 7u^6+6f_{11}u^5+4f_{13}u^3+3f_{14}u^2 & 5u^4+4f_{21}u^3+3f_{22}u^2 & 2u & 1 & 0 \\ 42u^5+30f_{11}u^4+12f_{13}u^2+6f_{14}u & 20u^3+12f_{21}u^2+6f_{22}u & 2 & 0 & 0 \\ 210u^4+120f_{11}u^3+24f_{13}u+6f_{14} & 60u^2+24f_{21}u+6f_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 840u^3+360f_{11}u^2+24f_{13} & 120u+24f_{21} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此

$$\mathrm{Wr}(f_1(u),f_2(u),f_3(u),f_4(u),f_5(u)) = 25200u^5 + (14400f_{11} + 30240f_{21})u^4$$

$$+(11520f_{11}f_{21} + 10080f_{22})u^3 + (-2880f_{13} + 4320f_{11}f_{22})u^2 - 1440f_{14}u + (-288f_{14}f_{21} + 288f_{13}f_{22})。$$

那么 $A(3,2)^+$ 是 对由系数生成的理想取商，也可以等价地写成 s

$$A(3,2)^+ = \mathbb{C}[f_{11},f_{13},f_{14},f_{21},f_{22}]/(10f_{11} - 21f_{21}, 8f_{11}f_{21} + 7f_{22}, 2f_{13} - 3f_{11}f_{22}, f_{14}, f_{14}f_{21} - f_{13}f_{22}).$$

因此

$$A(3,2)^+ \cong \mathbb{C}[f_{11}]/(f_{11}^5).$$

要能够直接从分拆 $\lambda \vdash n$ 构造代数 $A(\lambda)^+$，就需要更深入地了解 Wronski映射以及 $A(\lambda)^+$ 的维数。我们现在将重点讨论后者，前者则留待下一节讨论。

以下结果受到公式的启发

$$s_\lambda(1, q, \ldots, q^n) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(1-q^i)}{\prod_{(i,j)\in D_\lambda}(1-q^{h(i,j)})}.$$

可在 [26, 页找到。 364]。项 s_λ 表示与分拆$\lambda \vdash n$相关联的舒尔函数， D_λ 表示 λ 的杨图，而 $h(i,j)$ 是方框 (i,j) 的钩长。类似的公式可以计算 $A(\lambda)^+$的分次维数。

现在我们陈述 关于朗斯基行列式和某些齐次多项式的两个一般引理。

引理 6.1。 若 $f_1, \ldots, f_n$ 是一族齐次多项式，且 $\mathrm{Wr}(f_1, \ldots, f_n) \neq 0$，则朗斯基行列式是齐次的，并且 $\deg(\mathrm{Wr}(f_1, \ldots, f_n)) = \sum_i(\deg(f_i)) - \frac{(n-1)(n)}{2}$。

证明。 我们对 n 使用归纳法， $n = 1$ 的情形显然成立。假设该引理对所有小于 n 的正整数均成立。于是

$$\det\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n \\ f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_3^{(1)} & \cdots & f_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & f_3^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} f_i \begin{bmatrix} f_1^{(1)} & \hat{f}_i^{(1)} & \cdots & f_n^{(1)} \\ f_1^{(2)} & \hat{f}_i^{(2)} & \cdots & f_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & \hat{f}_i^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

其中，ˆ符号表示省略的一列。根据归纳假设，和式中的每个分量都是次数为

$$\deg(f_i) + \sum_{j,j\neq i}^{n}\deg(f_j^{(1)}) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} = \deg(f_i) + \sum_{j,j\neq i}^{n}\deg(f_j) - (n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

于是可简化为

$$\sum_{i=1}^{n}\deg(f_i) - (n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} = \sum_{i=1}^{n}\deg(f_i) - \frac{(n-1)n}{2}.$$

□

在下面的引理中，需要特别注意：考虑 6.1 中定义的生成元 f_{ij} 时，其次数为 j。例如，多项式

$$u^3 + f_{12}u$$

是齐次的，因为 u^3 和 $f_{12}u$ 的次数均为 3。

引理6.2。 设 $\lambda \vdash n$ 是 n的一个分拆，且 $\{f_1, \ldots, f_n\}$ 是按（*6.1*）定义的多项式族。朗斯基行列式 $\mathrm{Wr}(f_1, \ldots, f_n)$ 是次数为 n 的齐次多项式。

证明。 根据引理 6.1 ，如果朗斯基行列式非零，那么它是一个齐次多项式，其次数为$\sum_i(\deg(f_i)) - \frac{(n-1)(n)}{2}$。我们有 $\deg(f_i) = d_i = \lambda_i + n - i$。因此

$$\sum_{i}^{n}(\deg(f_i)) - \frac{(n-1)(n)}{2} = \sum_{i}^{n}(\lambda_i + n - i) - \frac{(n-1)(n)}{2} = \sum_{i}^{n}\lambda_i + \sum_{i}^{n}n + \sum_{i}^{n}-i - \frac{(n-1)(n)}{2},$$

and

$$\sum_i^n \lambda_i + \sum_i^n n + \sum_i^n -i - \frac{(n-1)(n)}{2} = n + n^2 - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)(n)}{2} = n.$$

□

对我们来说， $A(\lambda)^+$ 是一个完全交。要证明这一点，我们需要用到以下非平凡事实，该事实见于 [25, 引理 3。11]。

引理 6.3. 代数 $A(\lambda)^+$ 是有限维的。

引理 6.4. 对于任意 $\lambda \vdash n$，代数 $A(\lambda)^+$ 是完全交。

证明. 代数 $A(\lambda)^+$ 有 n 个生成元和 n 个关系。因此，当且仅当它的克鲁尔维数为零时，它是完全交。由于 $A(\lambda)^+$ 作为向量空间是有限维的，所以它是阿廷的，因此每个素理想都是极大理想 [1, 命题 8.1]。故其克鲁尔维数为零。□

假设 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]/(g_1, \ldots, g_n)$ 是分次的，且 $\deg(x_i) = a_i > 0$，因此每个 g_j 都是齐次的，其次数为 b_j。 A 的希尔伯特–庞加莱多项式定义为

$$P(A, q) := \sum_{i \geq 0} (\dim A_i) q^i.$$

引理 6.5. 若 A 是分次完全交，则

$$P(A, q) = \frac{\prod_{i=1}^t (1 - q^{b_i})}{\prod_{j=1}^n (1 - q^{a_j})}.$$

证明. 由于 A 是完全交，我们可以写成

$$A = \frac{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]}{(g_1, \ldots, g_t)}$$

其中 $(g_1, \ldots, g_t)$ 是一个正则序列。令 $S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$。Koszul 分解 [15, 第 17] 章可用于将 A 分解为一个分次 S-模。令 $V = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{g_1, \ldots, g_t\}$，这是一个分次向量空间。于是

$$0 \to \wedge^t V \otimes_{\mathbb{C}} S \to \wedge^{t-1} V \otimes_{\mathbb{C}} S \to \cdots \to \wedge^0 V \otimes S \to A \to 0$$

这是一个分次 S-模的正合序列，因为 $(g_1, \ldots, g_t)$ 是正则的 [14, 推论 1.6.14 (b)]。Koszul 分解中的映射为 d_k： $\wedge^k V \otimes_{\mathbb{C}} S \to \wedge^{k-1} V \otimes_{\mathbb{C}} S$，并定义在元素上

$$d_k(v_1 \wedge \cdots \wedge v_t \otimes f) = \sum_{i=1}^t (-1)^{i+1} v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v_i} \wedge \cdots \wedge v_t \otimes v_i f,$$

此处 $\hat{}v_i$ 表示省略了项 v_i。由此（根据“欧拉–庞加莱原理”）可得

$$\begin{aligned} P(A, q) &= \sum_{j=0}^t (-1)^{j+1} P(\wedge^j V \otimes_{\mathbb{C}} S, q) \\ &= \left(\sum_{j=0}^t (-1)^{j+1} P(\wedge^j V, q) \right) P(S, q). \end{aligned}$$

我们有

$$P(S, q) = \left(\prod_{j=1}^n (1 - q^{a_j}) \right)^{-1} \quad \text{and} \quad \sum_{j=0}^t (-1)^{j+1} P(\wedge^j V, q) = \prod_{i=1}^t (1 - q^{b_i}).$$

□

现在可以给出计算 $A(\lambda)^+$ 的分次维数的公式。回顾一下， D_λ 表示分拆 λ 的杨图，而 $h(i,\ j)$ 是单元格 $(i,\ j)$ 的钩长。

定理 6.3. 对于任意 $A(\lambda)^+$，我们有

$$\sum_{i\geq 0}(\dim A(\lambda)_i^+)q^i = \frac{\prod_{i=1}^n(1-q^i)}{\prod_{(i,j)\in D_\lambda}(1-q^{h(i,j)})}.$$

证明。 由于 $A(\lambda)^+$ 由引理 6.4可知是完全交，引理 6.5 意味着 th at

$$\sum_{i\geq 0}(\dim A(\lambda)_i^+)q^i = P(A(\lambda)^+,q) = \frac{\prod_{i=1}^t(1-q^{b_i})}{\prod_{j=1}^n(1-q^{a_j})}.$$

引理 2.2指出， $\prod_{j=1}^n(1-q^{a_j}) = \prod_{(i,\ j)\in D_\lambda}(1-q^{h(i,j)})$。根据 $A(\lambda)^+$ 的定义，

$$\prod_{i=1}^t(1-q^{b_i}) = \prod_{i=1}^n(1-q^i).$$

因此，

$$\sum_{i\geq 0}(\dim A(\lambda)_i^+)q^i = \frac{\prod_{i=1}^n(1-q^i)}{\prod_{(i,j)\in D_\lambda}(1-q^{h(i,j)})}.$$

□

下面的例子突显了这个公式使用起来多么简单。

例 6.2. 分拆 $\lambda = (3,1,0,0)$ 的杨图为

4	2	1
1		

因此

$$\sum_{i\geq 0}(\dim A(\lambda)_i^+)q^i = \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)}{(1-q^4)(1-q^2)(1-q)(1-q)} = \frac{1-q^3}{1-q} = 1+q+q^2.$$

因此， $A(\lambda)^+$ 由次数 0、1 和 2 中的一个一维空间组成。

t 的公式　　分次维数使我们能够计算整个代数 $A(\lambda)^+$ 的维数　　.

定理 6.4。 $A(\lambda)^+$ 的维数由钩长公式给出

$$\dim A(\lambda)^+ = \frac{n!}{\prod_{(i,j)\in D_\lambda} h(i,j)}.$$

证明。 我们有公式

$$\sum_{i\geq 0}(\dim A_i)q^i = \frac{\prod_{i=1}^n(1-q^i)}{\prod_{(i,j)\in D_\lambda}(1-q^{h(i,j)})}.$$

当 $q=1$ 时，我们可以使用洛必达法则来计算该公式。显然，左侧给出了 A 的维数。对右侧反复应用洛必达法则可得

$$\frac{n!}{\prod_{(i,j)\in D_\lambda} h(i,j)}.$$

□

7. 直接根据分拆计算 $A(\lambda)^+$

如第 6 节所示，我们有一种使用朗斯基行列式计算代数 $A(\lambda)^+$ 的算法。在这里，我们将改进这一结果，并证明计算朗斯基行列式并非必要。事实上，代数 $A(\lambda)^+$ 可以直接由分拆 λ 得出。要直接从分拆 $\lambda \vdash n$ 给出 $A(\lambda)^+$ 的显式表示，关键在于理解各项系数如何出现在朗斯基行列式中。我们将把理解系数的问题分成两种不同的情形。我们称形如 $f_{i,j}$ 的项为线性项，而称形如 $f_{i_1,j_1} f_{i_2,j_2} \cdots f_{i_m,j_m}$（其中 $m > 1$）的项为非线性项。我们先从理解较为简单的线性项入手。

我们首先要回答的问题是：对于 n 的给定分拆，朗斯基行列式的系数中会出现多少次线性项？很容易看出，每个线性项只能出现在一个系数中。回想一下，代数 $A(\lambda)^+$ 可以写成

$$\frac{\mathbb{C}[f_{ij},\, i = 1, \ldots, n,\;\; j = 1, \ldots, d_i,\, d_i - j \notin P]}{(r_1, \ldots, r_n)}$$

其中 r_s 是齐次元素，且 $\deg(r_s) = s$。这里稍微宽泛地使用术语：如果 $f_{i,j}$ 中的一个单项式 m 出现在 r_s 中，即指 r_s 中 m 的系数非零。

引理 7.1. 如果线性项 $f_{i,j}$ 作为单项式出现在元素 r_s 之一中，那么 $j = s$。

证明。 根据引理 6.2 ，朗斯基行列式是一个次数为 n 的齐次多项式。此外， $A(\lambda)^+$ 是一个完全交，因此对于所有 $0 \le i \le n$， u^i 的系数都非零。换言之，对于所有 i， $r_i \neq 0$ 。因此， u^i 的线性系数次数为 $n - i$。由于线性项 $f_{i,j}$ 的次数为 j，我们得出结论：它只能出现在 r_j 中。□

下面给出引理 7.1 的一个部分逆命题。

引理 7.2。 考虑一个有限维交换环

$$A = \frac{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]}{(r_1, \ldots, r_n)},$$

其中的关系 r_i 是齐次的，且不含任何常数项。对于每个 $1 \le j \le n$，都存在 $k \ge 1$ 和 i，使得 r_i 含有单项式 x_j^k。

证明。 用反证法。假设 x_1^k 没有出现在任何 r_i 中，其中 $k \ge 1$。由于该代数是有限维且正分次的，我们必有 $x_1^m = 0$，其中某个 m，因此

$$x_1^m = \sum_l c_l r_l$$

对于 $c_l \in \mathbb{C}$。由于 r_j 中每个系数非零的单项式都能被某个满足 $i \neq 1$的 x_i 整除，因此存在一个定义良好的求值态射 ev_c：$A \to \mathbb{C}$，它将 x_1 映射为某个常数 $c \neq 0$，并将 x_i 映射为 0（对于 $i > 1$）。于是

$$c^m = ev_c(x_1^m) = ev_c\left(\sum_l c_l r_l\right) = \sum_l c_l ev_c(r_l) = 0,$$

这就产生了矛盾。 □

引理 7.3. 令 $f_1, \ldots, f_n$ 为式(6.1)中的两两不同的多项式集合。朗斯基行列式$\mathrm{Wr}(f_1, \ldots, f_n)$ 中所有形如 $f_i^{k_1}, _j \cdots f_u^{k_z}, _v$的项，对于所有 $1 \le s \le z$，均有 $k_s \le 1$。

证明。 通过写出朗斯基行列式

$$\mathrm{Wr}(f_1,\dots,f_n)=\det\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n \\ f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_3^{(1)} & \cdots & f_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & f_3^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

表述变得更加清晰。行列式中的每一项都是若干项的乘积，且这些项不共享行或列。固定一个 $f_{i,\ j}$，那么我们看到它只出现在第 i^{th} 列中。由于朗斯基行列式中各项的乘积不能共享同一列，因此我们看到，如果出现 $f^k_{i',\ j}$，那么 $k=1$。□

引理 7.3 指出，在朗斯基行列式的情形下，系数中不能包含幂次高于 1 的项，例如不能有 f_{11}^2 出现在关系中。显然，朗斯基行列式的系数不含常数项，因为它们是正次数的齐次项。这些观察给出了下面的引理。

引理 7.4. 给定　　一个分拆 $\lambda\vdash n$，每个 $f_{i,\ j}$ 都作为朗斯基行列式中某个系数的线性项出现　　.

证明。 由引理 7.3 和引理 7.2可得。 □

现在我们已经证明每个线性项都必定出现，因此可以加强引理 7.1。沿用前面的记号，可得如下结论。

命题 7.1. 每个线性项 $f_{i,\ j}$ 都会以非零系数出现在 r_j 中。

证明. 由引理 7.1 和引理 7.4可得。 □

命题7.1 完全解决了确定线性项位置的问题。接下来要证明一个关于非线性项的类似结论。我们将发现，除少数特定项外，几乎所有非线性项都会出现在系数中。首先需要以下结果。

引理 7.5. 设 $\{f_1,\dots,f_n\}$ 为按(6.1)中定义的多项式构成的集合。假设存在多项式 f_i和 f_j，使得 f_i 含有形如 $f_{i,\ s}u^k$ 的项，且 f_j 含有项$f_{j,\ t}u^k$。则朗斯基行列式$\mathrm{Wr}(f_1,\dots f_n)$ 不含有可被 $f_{i,\ s}f_{j,\ t}$整除的单项式。

证明。 行列式是矩阵中来自不同列和不同行的元素的若干乘积之和。项 $f_{i,\ s}$ 和 $f_{j,\ t}$ 分别只出现在列 i 和 j 中。因此，行列式中所有形如 $f_{i,\ s}f_{j,\ t}$的项，都来自形如 $F(f_i^{(a)}f_j^{(b)}-f_i^{(b)}f_j^{(a)})$ 的表达式。这里的 F 是由来自不同行和列、且不属于列 i 和 j的元素构成的某个倍数。简单计算可得 $f_{i,\ s}(u^k)^{(a)}f_{j,\ t}(u^k)^{(b)}-f_{i,\ s}(u^k)^{(b)}f_{j,\ t}(u^k)^{(a)}=0$。□

朗斯基行列式有一个有用的递归公式，可见于 [23, 命题 1]。

命题 7.2。 朗斯基行列式的递归公式为

$$\mathrm{Wr}(f_1,\dots,f_n)=f_1^n\mathrm{Wr}\left(\left(\frac{f_2}{f_1}\right)',\dots,\left(\frac{f_n}{f_1}\right)'\right)$$

其中 $\deg(f_i)<\deg(f_j)$ 对于 $i<j$。

我们将利用这个公式证明两个引理，它们对于说明大多数非线性项均非零至关重要。

引理 7.6. 设$\{f_1, \ldots, f_n\}$是单变量中的一组单项式，使得对于 $i < j$，$\deg(f_i) > \deg(f_j)$，并且对所有 i，$f_i \neq 0$。朗斯基行列式$\mathrm{Wr}(f_1, \ldots, f_n)$ 非零。

证明。 对 n进行归纳。若 $n = 1$，结论显然成立。假设该结论对所有$m < n$均成立，然后使用命题7.2给出的递归公式

$$\mathrm{Wr}(f_1, \ldots, f_n) = f_1^n \mathrm{Wr}\left(\left(\frac{f_2}{f_1}\right)', \ldots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'\right).$$

显然，$\mathrm{Wr}((\frac{f_2}{f_1})', \ldots, (\frac{f_n}{f_1})')$ 满足引理的假设。因此，$\mathrm{Wr}((\frac{f_2}{f_1})', \ldots, (\frac{f_n}{f_1})')$ 非零。由于 $f_1^n \neq 0$,

$$\mathrm{Wr}(f_1, \ldots, f_n) = f_1^n \mathrm{Wr}\left(\left(\frac{f_2}{f_1}\right)', \ldots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'\right) \neq 0.$$

□

引理 7.7. 设$\{f_1, \ldots, f_n\}$是单变量中的一组单项式，使得对所有 $i \neq j$，$\deg f_i \neq \deg f_j$，并且对所有 i，$f_i \neq 0$。朗斯基行列式$\mathrm{Wr}(f_1, \ldots, f_n)$ 非零。

证明。 由上面的引理 7.6 可知，若对于 $i < j$，$\deg(f_i) > \deg(f_j)$，则朗斯基行列式非零。由于这些单项式的次数两两不同，因此存在一个矩阵 A，它可以置换矩阵的各列，使第一行中的单项式按次数递增排列。于是 $\det \mathrm{Wr}(f_1, \ldots, f_n) = \det(A) \det(\mathrm{Wr}(f_{\prime 1}, \ldots, f_n'))$，其中 $f_{\prime i} > f_{\prime j}$，对于 $i < j$。由于 A是可逆矩阵，其行列式非零，因此 $\det \mathrm{Wr}(f_1, \ldots, f_n) \neq 0$。□

这是我们要精确说明朗斯基行列式的系数中非线性项出现的位置和形式所需的最后一个结果。首先，我们必须确立一个约定。回顾引理 2.2，其中指出集合

$$\{j \mid d_i - j \notin P \text{ for } 1 \leq j \leq d_i\}$$

等于长度为 λ_i 的 i^{th} 行中的钩长集合。另外，回想一下

$$f_i = u^{d_i} + \sum_{j=1,\ d_i - j \notin P}^{d_i} f_{i,j} u^{d_i - j}.$$

引理 2.2 表明，对于固定的 i，多项式 $f_{i,j}$ 与 λ 的 i^{th} 行中的单元格之间存在一个双射。此双射将单元格 (i, j) 映射为 $f_{i,h(i,j)}$。为了展示这个双射，我们来看一个例子。

例 7.1. 取分拆 (3,2)。杨图为

4	3	1
2	1	

第一行的单元格从左到右依次映射为 $f_{1,4}$, $f_{1,3}$ 和 $f_{1,1}$。第二行的单元格同样映射为生成元$f_{2,2}$ 和 $f_{2,1}$。

如果两个生成元$f_{i,\ j}$ 和 $f_{s,\ t}$ 在该映射下的杨图中同行或同列，我们就称它们同行或同列。

定理 7.1。 固定一个分拆 $\lambda \vdash n$，并令 $f_1, \dots, f_n$ 如 (6.1) 所示。$Wr(f_1, \dots, f_n)$ 的非线性系数全都非零，但被 $f_{i,j} f_{s,t}$ 整除的单项式除外，其中 $i = j$ 或 $h(i,j) = h(s,t)$。换言之，它们没有包含在分拆图中同行或同列的因子。

证明。 首先要注意，若两个生成元 $f_{i,j}$ 和 $f_{s,t}$ 在分拆中位于同一行，那么 $i = s$，它们必定出现在朗斯基行列式的同一列中。因此，它们不可能出现在行列式中。现在假设 $f_{i,j}$ 和 $f_{s,t}$ 出现在 D_λ 的同一列中。引理 2.3 指出

$$d_a - h(a,b) = d_c - h(c,b)$$

对所有 a、b 和 c 均成立。特别地，若 $f_{i,j}$ 和 $f_{s,t}$ 在杨图中位于同一列，则 $d_i - j = d_s - t$。根据（6.1）中 f_i 的定义，我们看到，在 f_i 中，单项式 $f_{i,j}$ 是 $u^{d_i - j}$ 的系数。同样，$f_{s,t}$ 是 f_s 中 $u^{d_s - t}$ 的系数。于是，引理 7.5 表明，朗斯基行列式中不存在可被 $f_{i,j} f_{s,t}$ 整除的单项式。我们只需证明其他非线性项非零。

我们先对两个单项式的乘积证明这一点；一般情形可用类似论证，并使用命题7.3中的系数。假设 $f_{i,j}$ 和 $f_{s,t}$ 在杨图中既不同行也不同列。在行列式中，$f_{i,j} f_{s,t}$ 将是 u^{n-j-t} 项的系数。由此可知，在判断该系数是否非零时，我们只需考虑朗斯基行列式中为标量或 u 的幂的项。也就是说，我们排除所有 $f_{y,z}$，其中 $f_{y,z} \neq f_{i,j}$ 或 $f_{s,t}$。因此，我们只需验证 $\mathrm{Wr}(u^{d_1}, \dots, f_{i,j} u^{d_i - j}, \dots, f_{s,t} u^{d_s - t}, \dots, u^{d_n})$ 非零。这简化了

$$\mathrm{Wr}(u^{d_1}, \dots, f_{i,j} u^{d_i - j}, \dots, f_{s,t} u^{d_s - t}, \dots, u^{d_n}) = f_{i,j} f_{s,t} \mathrm{Wr}(u^{d_1}, \dots, u^{d_i - j}, \dots, u^{d_s - t}, \dots, u^{d_n}).$$

由于 $f_{i,j}$ 和 $f_{s\text{不在}t}$ 的同一列中，D_λ 引理 2.3 表明 $d_i - j \neq d_s - t$。因此，所有单项式的次数两两不同且均非零。在这种情况下，引理 7.7 表明行列式非零。 □

通过给出计算朗斯基行列式中线性项和非线性项的标量系数的公式，可以改进这些结果。下面介绍一些必要的记号。回顾一下，命题7.2 中的递归公式针对条目的特定排列给出，即按次数递增排列。这通常并非如此，因此我们必须先对朗斯基行列式的列进行置换。设 A 为按所需顺序进行置换的矩阵。注意，$\det(A) = \sigma(A)$，其中 σ 是符号函数。

命题 7.3。 给定项 $f_{i_1 j_1} \dots f_{i_m j_m}$ 的标量系数为

$$\sigma(A) \left(\prod_{\substack{i<j, i \neq i_k, \\ j \neq j_k}} d_i - d_j \right) \left(\prod_{d_{i_k} - j_k > d_j \text{ and } 1 \leq k \leq m} (d_{i_k} - j_k - d_l) \right) \left(\prod_{d_i - i_k > d_j - j_l} (d_i - i_k - d_j - j_l) \right).$$

证明。 证明采用归纳法，按照朗斯基行列式的大小进行，$m = 1$ 的情形显然。假设该结论对所有不超过 $n-1$ 的 m 均成立。考虑 $m = n$ 的情形。我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Wr}(u^{d_1}, \dots, f_{i_1 j_1} u^{d_{i_1} - j_1}, \dots, u_n^d) &= \det(A) \mathrm{Wr}(u_n^d, \dots, f_{i_1 j_1} u^{d_{i_1} - j_1}, \dots, u^{d_1}) \\
&= u^{d_n} \mathrm{Wr}((u^{d_{n-1}}/u^{d_n})', \dots, f_{i_1 j_1} (u^{d_{i_1} - j_1}/u^{d_n})', \dots, (u_1^d/u^{d_n})') \\
&= u^{d_n} \mathrm{Wr}((d_{n-1} - d_n) u^{d_{n-1} - d_n - 1}, \dots, f_{i_1 j_1} (d_{i_1} - j_1 - d_n) u^{d_{i_1 - j_1 - d_n - 1}}, \dots, (d_1 - d_n) u^{d_1 - d_n - 1}) \\
&= \prod_{1 \leq i < n} (d_i - d_n) \prod_{d_{i_k} - j_k > d_n} (d_{i_k} - j_k - d_n) f_{i_1 j_1} \dots f_{i_m j_m} \mathrm{Wr}(u^{d_{n-1} - d_n - 1}, \dots, u^{d_{i_1 - j_1 - d_n - 1}}, \dots, u^{d_1 - d_n - 1}).
\end{aligned}$$

因此

$$\sigma(A)\left(\prod_{\substack{i<j,i\neq i_k,\\ j\neq j_k}} d_i-d_j\right)\left(\prod_{d_{i_k}-j_k>d_j \text{ and } 1\leq k\leq m}(d_{i_k}-j_k-d_l)\right)\left(\prod_{d_i-i_k>d_j-j_l}(d_i-i_k-d_j-j_l)\right).$$

□

通过定义一个新项 e，我们可以大大简化这个表达式。

命题 7.4. 考虑按 $i_a<i_{a+1}$ 排序的非线性项 $f_{i_1j_1}\dots f_{i_mj_m}$。定义 e

$$e_{i_k}=\begin{cases} d_{i_k}-j_k & if\ 1\leq k\leq m\\ d_{i_k} & else.\end{cases}$$

那么，朗斯基行列式中 $f_{i_1j_1}\dots f_{i_mj_m}$ 项的标量系数为

$$\prod_{1\leq i<j\leq n} e_i-e_j.$$

证明。 由命题7.3 可知

$$\sigma(A)\prod_{\substack{i<j,i\neq i_k,\\ j\neq j_k}} d_i-d_j\prod_{d_{i_k}-j_k>d_j \text{ and } 1\leq k\leq m}(d_{i_k}-j_k-d_l)\prod_{d_i-i_k>d_j-j_l}(d_i-i_k-d_j-j_l) \tag{7.1}$$

是 $f_{i_1j_1}\dots f_{i_mj_m}$ 的系数。根据 e_i 的定义，该项

$$\prod_{1\leq i<j\leq n} e_i-e_j. \tag{7.2}$$

等于（7.1）或其相反数。现在注意，（7.1）为负或为正，当且仅当 $\sigma(A)$ 为负或为正。如果 $\sigma(A)$ 为负，则项 e_i-e_j 中满足 $e_i-e_j<0$ 的项有奇数个。在这种情况下，（7.2）也为负。用类似的论证可知，（7.1）为正，当且仅当（7.2）为正。□

现在，我们可以汇总迄今为止的结果，明确描述 $A(\lambda)^+$，而无需提及朗斯基行列式。下面的定理说明，$A(\lambda)^+$ 的结构仅取决于分拆 $\lambda\vdash n$ 及其各种钩长。因此，对于一般的 c 和任意 n，我们现在可以直接根据 n的分拆计算 $\overline{H}_c(S_n)$ 的中心。

定理 7.2。设 $\lambda\vdash n$ 是一个长度为 t 的分拆。代数 $A(\lambda)^+$ 是商

$$A(\lambda)^+\cong\mathbb{C}[f_{i_1,h(i_1,j_1)},\dots,f_{i_t,h(i_t,j_t)}]/I$$

由理想 I 生成，该理想由齐次元素 n $r_1,\dots,r_n$ 生成。r_i 按如下方式排序：$deg(r_i)=i$。r_i 中的单项式都是如下形式的乘积：$f_{i_b,h(i_b,j_k)}\cdots f_{i_b,h(i_b,j_l)}$，其中 $u\neq v$，且对于任意两个因子 $f_{u,h(u,w)}$ 和 $f_{v,h(v,x)}$，都有 $w\neq x$。r_i 内单项式的系数由命题 7.4 给出。

证明。 由命题 7.1、定理 7.1 和命题7.4得出。 □

我们可以借助生成元$f_{i,\ h(i,j)}$ 与分拆的杨图之间的双射来改写定理 7.2 。将生成元 $f_{i,\ h(i,j)}$ 对应到 D_λ 中的单元格 $(i,\ j)$。

定理 7.3. 设 $\lambda \vdash n$ 是一个分拆。代数 $A(\lambda)^+$ 是商

$$A(\lambda)^+ \cong \mathbb{C}[D_\lambda]/I$$

由理想 I 生成，该理想由 n 齐次元素 $r_1, \ldots, r_n$ 生成。将 r_s 按如下方式排序： $\deg(r_s) = s$。出现在 r_i 中的单项式是由 D_λ 中既不同行也不同列的单元格相乘得到的。换言之，若 $\square_{i,\ j}\square_{k,\ \ell}$ 是 r_s 中某个单项式的因子，则必须满足 $i \neq k$ 且 $j \neq \ell$。生成元 I 的系数由命题 7.4给出。

证明。 由定理 7.2结合所述双射即可得出。 □

定理 7.3 表明，我们可以采用完全组合的方法，通过直接从杨图导出 $\overline{H}_c(S_n)$ 的表示，来求出 $A(\lambda)^+$ 的中心。这比之前所述的使用朗斯基行列式的方法简单得多。为说明这一点，我们将用定理 $A(3,2)^+$计算，并将其与例 7.3进行比较；参见例 6.1。

例 7.2. 令 $\lambda = (3,\ 2)$。首先写出包含各单元格钩长的杨图

4	3	1
2	1	

因此，生成元为 $f_{1,\ 4}$, $f_{1,\ 3}$, $f_{1,\ 1}$, $f_{2,\ 2}$ 和 $f_{2,\ 1}$。于是，

$$A(\lambda)^+ \cong \mathbb{C}[f_{1,4}, f_{1,3}, f_{1,1}, f_{2,2}, f_{2,1}]/(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5).$$

关系 r_i 包含所有线性项。关系 r_i 还包含每个非线性项，除了那些因子共享同一行或同一列的项。由杨图可知，非零非线性项为 $f_{1,\ 1}f_{2,\ 1}$, $f_{1,\ 1}f_{2,\ 2}$, $f_{1,\ 3}f_{2,\ 2}$ 和 $f_{1,\ 4}f_{2,\ 1}$。此外，我们知道这些项按照次数出现在关系中。因此，只需计算系数，这可利用命题 7.4完成。回忆 $d_1 = 7$, $d_2 = 5$, $d_3 = 2$, $d_4 = 1$ 和 $d_5 = 0$，因此 $e_1 = 6$, $e_2 = 4$, $e_3 = 2$, $e_4 = 1$,$e_5 = 0$。我们来计算 $f_{1,\ 1}f_{2,\ 1}$的系数。这是乘积

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} e_i - e_j = (6-4)(6-2)(6-1)(6-0)(4-2)(4-1)(4-0)(2-1)(2-0)(1-0).$$

其值为 11520。其余系数的计算方式类似。关系为

$$14400 f_{11} + 30240 f_{21}$$

$$11520 f_{11} f_{21} + 10080 f_{22}$$

$$-2880 f_{13} + 4320 f_{11} f_{22}$$

$$-1440 f_{14}$$

$$-288 f_{14} f_{21} + 288 f_{13} f_{22}.$$

因此， $A(3,\ 2)^+ \cong \mathbb{C}[f_{11}]/(f_{11}^5)$。

定理 7.3 使我们能够轻松计算 $A(\lambda)^+$ 较小的 $\lambda \vdash n$。

回顾一下，在第 3 节中，我们描述了如何给定一个同构 $\psi\colon H_{\overline{c}}(W) \to H_c(W)$ 和一个 $H_c(W)$-模 M，构造一个 $H_{\overline{c}}(W)$-模 M^ψ。具体而言，定义一个同构 $\sigma\colon H_c(S_n) \to H_{-c}(S_n)$，如下所示：

$$\sigma(x) = x,\ \sigma(y) = y \text{ and } \sigma(w) = (-1)^{sgn(w)} w \text{ for all } x \in \mathfrak{h},\ y \in \mathfrak{h} \text{ and } w \in S_n.$$

定理 7.4. 设 $\lambda \vdash n$ 是一个分拆， λ^T 是其转置。存在一个 $H_c(S_n)$-模之间的同构$\underline{\Delta}_{-c}(\lambda)^\sigma \cong \underline{\Delta}_c(\lambda^T)$。

证明。 令 $S = \mathbb{C} \cdot s$ 为符号表示。存在一个不可约表示的同构$\lambda^T \cong \lambda \otimes S$，见 [21, 页。 36]。我们断言存在一个 $H_c(W)$-模的同构 ϕ： $\underline{\Delta}_c(\lambda \otimes S) \to \underline{\Delta}_{-c}(\lambda)^\sigma$由下式给出

$$\phi(h \otimes v \otimes s) = \sigma(h) \otimes v,$$

并线性延拓。我们必须验证 ϕ 是良定义的。由于模 $\underline{\Delta}(\lambda \otimes S)$ 由以下条件唯一确定

(1) $y \cdot 1 \otimes v \otimes s = 0$ 对所有 $y \in \mathfrak{h}$(2) $w \cdot 1 \otimes v \otimes s = 1 \otimes w \cdot (v \otimes s)$
$= 1 \otimes wv \otimes ws = 1 \otimes wv \otimes sgn(w)s$

我们验证 ϕ 保持这些条件。

$$\phi(y \cdot 1 \otimes v \otimes s) = \phi(y \otimes v) = \sigma(y) \otimes v = y \otimes v = 0$$

and

$$\phi(w \cdot 1 \otimes v \otimes s) = \phi(w \otimes v) = \sigma(w) \otimes v = sgn(w)w \otimes v = sgn(w) \otimes wv$$

and

$$sgn(w) \otimes wv = \phi(sgn(w) \otimes wv \otimes s) = \phi(1 \otimes wv \otimes sgn(w)s).$$

该映射是满射，因为 $\underline{\Delta}_{-c}(\lambda)^\sigma$ 由 $1 \otimes \lambda$生成。它是单射，因为 $\underline{\Delta}_c(\lambda \otimes S)$ 和$\underline{\Delta}_{-c}(\lambda)^\sigma$ 都是秩为 $\dim \lambda$ 的自由 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$-模。它是 $H_c(S_n)$-模的态射，因为

$$\begin{aligned} a \cdot \phi(h \otimes v \otimes s) &= a \cdot (\sigma(h) \otimes v) \\ &= \sigma(a)\sigma(h) \otimes v \\ &= \sigma(ah) \otimes v \\ &= \phi(ah \otimes v \otimes s) \\ &= \phi(a \cdot h \otimes v \otimes s). \end{aligned} \tag{7.3}$$

因此 ϕ 是一个同构。 □

现在定义另一个同构 $\eta : H_c(S_n) \to H_{-c}(S_n)$，如下所示

$$\eta(x) = -x,\ \eta(y) = -y \text{ and } \eta(s) = s \text{ for all } x \in \mathfrak{h},\ y \in \mathfrak{h} \text{ and } s \in S_n.$$

引理 7.8. 设 $\lambda \vdash n$ 是一个分拆。我们有一个 $H_c(S_n)$-模的同构 $\underline{\Delta}_c(\lambda)^\eta \cong \underline{\Delta}_{-c}(\lambda)$。

证明。 证明与定理7.4的证明类似。 □

推论 7.1. 存在一个同构 $\underline{\Delta}_c(\lambda)^{\eta\circ\sigma} \cong \underline{\Delta}_c(\lambda^T)$。

证明。 这由定理7.4 和引理 7.8。 □

引理 7.9. 同构 $\eta \circ \sigma$ 诱导出婴儿 *Verma* 模的同构

$$\eta \circ \sigma : \Delta(\lambda)^{\eta\circ\sigma} \cong \Delta(\lambda^T).$$

证明. 由定理 4.1 $\Delta(\lambda) = \underline{\Delta}(\lambda)/R_+\underline{\Delta}(\lambda)$，因此我们需要证明

$$\eta \circ \sigma(R_+\underline{\Delta}(\lambda)) = R_+\underline{\Delta}(\lambda^T).$$

由于 $\eta \circ \sigma$ 是 $H_c(W)$-模的同构，我们知道

$$\eta \circ \sigma(R_+\underline{\Delta}(\lambda)) = (\eta \circ \sigma)(R_+)(\eta \circ \sigma)(\underline{\Delta}(\lambda)).$$

由于 $\eta \circ \sigma(\underline{\Delta}(\lambda)) = \underline{\Delta}(\lambda^T)$，我们需要证明 $\eta \circ \sigma(R_+) = R_+$。注意，根据 R_+ 的定义，它不包含群元素，因此 σ 只是 R_+上的恒等映射。因此，我们证明 $\eta(R_+) = R_+$。由线性性，只需在 R_+中的齐次元素上验证即可。同样，这显然成立，因为将 η 作用于 R_+中的元素后，我们得到

$$\eta(p(x)_+ \otimes q(y) + r(x) \otimes s(y)_+) = (-1)^m p(x)_+ \otimes q(y) + (-1)^n r(x) \otimes s(y)_+$$

其中 $m = |\deg(p)||\deg(q)|$ 且 $n = |\deg(r)||\deg(s)|$。因此 $\eta(R_+) = R_+$，证明完毕。 □

引理 7.10. 设 H 是一个代数，Z 是其中心，$a: H \to H$ 是一个自同构。对于任意 H-模 M，a 诱导一个同构

$$a: Z/\mathrm{ann}_Z M \to Z/\mathrm{ann}_Z M^a.$$

证明. 我们证明 $a(\mathrm{ann}_Z M) = \mathrm{ann}_{Z(W)} M^a$。注意到 $z \in \mathrm{ann}_Z M$当且仅当$a^{-1}(z) \in \mathrm{ann}_Z M^a$，即可看出这一点

$$a^{-1}(z) \cdot m = a(a^{-1}(z))m = zm.$$

因此，如果 $zm = 0$，那么 $a^{-1}(z) \cdot m = 0$，反之亦然。 □

引理 7.11。 存在一个代数同构

$$\mathrm{End}_{H_c(W)}\underline{\Delta}(\lambda) \cong Z_c(W)/\mathrm{ann}_{Z_c(W)}\underline{\Delta}(\lambda).$$

证明。 根据定理 4.1，由 $Z_c(W)$ 中元素的乘法给出的映射 $m: Z_c(W) \to$自同态环$_{H_c(W)}\underline{\Delta}(\lambda)$ 是满射。 m 的核是 $\mathrm{ann}_{Z_c(W)}\underline{\Delta}(\lambda)$。 □

定理 7.5。 设 $\lambda \vdash n$ 是一个分拆，λ^T 是其转置。那么

$$\mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda)) \cong \mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda^T)).$$

证明。 根据推论 7.1，存在一个同构 $H_c(S_n)$-模 $\underline{\Delta}(\lambda^T) \cong \underline{\Delta}(\lambda)^{\eta\circ\sigma}$，因此我们可以将所需结果改写为

$$\mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda)) \cong \mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda)^{\eta\circ\sigma}).$$

考虑自同构的复合 $a = \sigma \circ \eta: H_c(W) \to H_c(W)$。由于 a 是$H_c(W)$ 的自同构，它也是中心 $Z_c(W)$ 的自同构。根据引理 7.11,

$$\mathrm{End}_{H_c(W)}\underline{\Delta}(\lambda) \cong Z_c(W)/\mathrm{ann}_{Z_c(W)}\underline{\Delta}(\lambda)$$

and

$$\mathrm{End}_{H_c(W)}\underline{\Delta}(\lambda)^a \cong Z_c(W)/\mathrm{ann}_{Z_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda)^a).$$

根据引理 7.10， a 限制为一个同构

$$a: Z_c(W)/\mathrm{ann}_{Z_c(W)}\underline{\Delta}(\lambda) \to Z_c(W)/\mathrm{ann}_{Z_c(W)}\underline{\Delta}(\lambda)^a.$$

因此

$$\mathrm{End}_{H_c(W)}\underline{\Delta}(\lambda) \cong Z_c(W)/\mathrm{ann}_{Z_c(W)}\underline{\Delta}(\lambda) \cong Z_c(W)/\mathrm{ann}_{Z_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda)^a) \cong \mathrm{End}_{H_c(W)}\underline{\Delta}(\lambda)^a.$$

□

这就是证明下述重要同构所需的全部内容。

定理 7.6. 设 $\lambda \vdash n$ 为一个分拆， λ^T 为其转置。那么

$$A(\lambda)^+ \cong A(\lambda^T)^+ \quad and \quad A(\lambda)^- \cong A(\lambda^T)^-.$$

证明. 回顾定义 $A(\lambda)^+ :=$ 自同态环$_{\overline{H}_c(W)}(\Delta(\lambda))$ 和 $A(\lambda^T)^+ :=$ 自同态环$_{\overline{H}_c(W)}(\Delta(\lambda^T))$. 根据定理 4.3，我们有

$$\mathrm{End}_{\overline{H}_c(W)}(\Delta(\lambda)) \cong \mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda))/\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W \mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda))$$

and

$$\mathrm{End}_{\overline{H}_c(W)}(\Delta(\lambda^T)) \cong \mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda^T))/\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W \mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda^T)).$$

那么定理 7.5蕴含

$$\mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda))/\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W \mathrm{End}_{H_c(W)}\underline{\Delta}(\lambda)) \cong \mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda^T))/\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W \mathrm{End}_{H_c(W)}(\underline{\Delta}(\lambda^T))$$

因此

$$A(\lambda)^+ = \mathrm{End}_{\overline{H}_c(W)}(\Delta(\lambda)) \cong \mathrm{End}_{\overline{H}_c(W)}(\Delta(\lambda^T)) = A(\lambda^T)^+.$$

第二个等式由定理3.3得出。 □

推论 7.2. 在对称情形下，存在一个反分次同构

$$A_c(\lambda)^- \cong A_c(\lambda)^+.$$

证明. 由应用于对称情形的定理 3.3 和定理 7.6得出。 □

推论 7.3. 存在一个同构

$$A_c(\lambda)^-_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \cong A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)^\sharp)^-.$$

证明. 由定理 7.6和定理 5.10得出。 □

推论 7.4. 存在一个反分次同构

$$A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))^+ \cong A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)^\sharp)^-.$$

由此得到另一个反分次同构

$$A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda)^\star)^+ \cong A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))^-.$$

证明。由推论7.2 可知，在对称群情形下存在一个反分次同构 $A_c(\lambda)^+ \cong A_c(\lambda)^-$ 。于是由定理 5.10 和推论 7.3可得结论。 □

8. $\overline{H}_c(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 块的中心

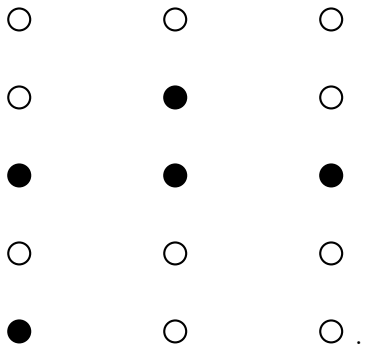
现在我们将上一节的结果推广，特别是将定理 7.3 推广到缠绕积群的情形。这样，我们就可以根据给定的一个 ℓ-多重分拆，直接写出缠绕积的受限有理 Cherednik 代数中心的各个块。关键在于定理 5.10，该定理指出存在一个同构

$$A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))^+ \cong A_c(\lambda)^+_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}.$$

引理 8.1 证明， $A_c(\lambda)^+_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$ 是通过杀掉所有次数不能被 $A_c(\lambda)^+$ 整除的项后得到的商 ℓ。随后，定理 7.3 根据杨图直接给出了 $A_c(\lambda)^+$ 的显式描述，因此这将为我们提供 $A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}\ell(\lambda))^+$的组合描述。首先，我们将说明如何从给定的 λ $\mathrm{quo}_\ell(\lambda)$ 得到。

回顾定理 2.1 ，它指出， $n\ell$ 的分拆集合中与平凡 ℓ-核对应的分拆，与 ℓ-多重分拆 n之间存在一个双射。这个双射将一个分拆映射到它的 ℓ-商。现在我们希望进行逆向操作。给定一个 ℓ-多重分拆 n ，我们希望恢复对应的、具有平凡$n\ell$ -核的 ℓ分拆。下面给出一个示例来说明具体做法。

例 8.1. 我们来求一个大小为 27、具有平凡 3-核且 3-商为 ((3，2), (1，1), (2)) 的分拆。首先需要构造珠图中的列。对于一组 β 数，我们使用这些分拆的第一列钩长。(3，2)、(1，1) 和 (2) 的第一列钩长集合分别为 {4，2}、{2，1} 和 {2}。由于第一列钩长为 {4，2}，因此我们的第一列应在第二和第四个位置放置珠子。对另外两列进行相同操作后，我们得到下面的珠图



注意，该图的 3-核已经是平凡的。接着，我们从上图读出第一列钩长 $\{4，6，7，8，12\}$。然后使用公式（2.1）可得

$$\lambda_i = h(i,1) + i - L,$$

其中 $L = 5$ 因为 $|\{4，6，7，8，12\}| = 5$。因此，容易计算出 $\lambda = (8，5，5，5，4)$。

现在我们来证明这一断言： $A_c(\lambda)^+_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$ 仅包含次数可被 ℓ 整除的多项式。回想一下，

$$A_c(\lambda)^+_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} := \mathbb{C}[\pi_{n\ell}^{-1}(0)]/\langle f - s\cdot f \mid s \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}, f \in \mathbb{C}[\pi_{n\ell}^{-1}(0)]\rangle.$$

引理 8.1。 理想 $\langle f - s\cdot f | s \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}, f \in \mathbb{C}[\pi_{n\ell}^{-1}(0)]\rangle$ 由$A_c(\lambda)^+$ 中所有次数不被 ℓ 整除的齐次元素生成。

证明。 设 $f \in A_c(\lambda)^+$ 是一个次数不被 ℓ 整除的齐次元素。那么

$$f - s \cdot f = (1-\alpha)f, \text{ where } 1 \neq \alpha \in \mathbb{C}.$$

因此 $(1-\alpha)^{-1}f - s \cdot (1-\alpha)^{-1}f = f$ 和 $f \in \mathrm{h}h - s \cdot h | s \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z},\ h \in \mathbb{C}[\pi_{n\ell}^{-1}(0)]$。如果 f 的次数为 ℓ，则 $f - s \cdot f = 0$。任何其他多项式都是齐次多项式之和，因此 $f - s \cdot f$ 是次数不能被 ℓ 整除的齐次元素之和。□

这个引理使我们能够给出广 wreath 积的定理7.2 的一个版本。

定理 8.1。 设 $\lambda \vdash n\ell$ 有平凡的 ℓ-核，并将其 ℓ-商记为 $\mathrm{quo}_\ell(\lambda)$ 。假设 λ 的长度为 t。代数 $A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))^+$ 是以下商

$$A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))^+ \cong \mathbb{C}[f_{i_1,h(i_1,j_1)}, \ldots, f_{i_s,h(i_s,j_s)}]/I$$

由所有满足以下条件的 $f_{i_k,h(i_k,j_k)}$ 生成的多项式环的商：对于满足 $1 \leq k \leq t$ 的 $h(i_k, j_k)$，其对所有 $1 \leq k \leq t$均可被 ℓ 整除。理想 I 由 n 齐次元素 $r_\ell, r_{2\ell} \ldots, r_{n\ell}$生成。 r_i 按 $\deg(r_i) = i$的顺序排列。 r_i 中的单项式都是以下形式的乘积：$f_{i_k,h(i_k,j_k)} \cdots f_{i_m,h(i_m,j_m)}$，其中 $u \neq v$，且对于任意两个因子 $f_{u,h(u,w)}$ 和 $f_{v,h(v,x)}$，都有$w \neq x$ 。 r_i 中的单项式系数由命题 7.4 给出。

证明。 根据定理5.10

$$A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))^+ \cong A_c(\lambda)^+_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}.$$

该定理随即由定理7.2 和引理 8.1得出。 □

回想一下，我们曾使用双射，将 $f_{i,h(i,j)}$ 对应到单元格 $(i,j) \in D_\lambda$，以给出定理 7.2的组合版本。这里我们采用相同的方法，并发现引理 8.1 要求省略图中的某些单元格。

定理 8.2。 设 $\lambda \vdash n\ell$ 是一个具有平凡 ℓ-核的分拆，且$\mathrm{quo}_\ell(\lambda)$ 是其 ℓ-商。代数$A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))^+$ 是商

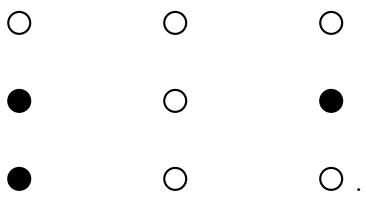
$$A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))^+ \cong \mathbb{C}[D_\lambda^\ell]/I$$

其中 D_λ^ℓ 是 D_λ （年轻图）的子图，去掉满足 $h(i,j)$ 不能被 ℓ整除的单元格 (i,j) 后得到。理想 I 由 n 齐次元素 $r_\ell, r_{2\ell}, \ldots, r_{n\ell}$生成。 $r_{s\ell}$ 按使 $\deg(r_{s\ell}) = s\ell$的顺序排列。 $r_{s\ell}$ 中出现的单项式是 D_λ^ℓ中互不同行且不同列的单元格之积。换言之，如果 $\square_{i,j}\square_{k,m}$ 是 $r_{s\ell}$中某个单项式的因子，我们必须有 $i \neq k$ 和 $j \neq m$。I 的生成元的系数由命题 7.4 给出。

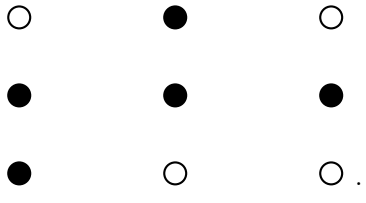
证明。 由定理 8.1 以及项 $f_{i,h(i,j)}$ 与单元格 $(i,j) \in D_\lambda$之间的双射可得。 □

让我们说明如何 使用定理 8.2 直接计算 $A_{\overline{c}}(\mathrm{quo}_\ell(\lambda))^+$，根据 ℓ-多重分拆 $\mathrm{quo}_\ell(\lambda)$.

例 8.2。 取 3-分拆 $((1,1)\ \emptyset,(1))$，并求出与之对应的、具有平凡 3-核的 9 的分拆。第一列钩长分别为 $\{2,1\}, \{0\}$ 和 $\{1\}$ 因此得到珠图48



不过这里有个问题，因为该分拆的 3-核并非平凡。回想一下，我们只从第一个空珠子开始计算位置，因此可以重写这些列，使其仍对应于钩长 {1,2}、{0} 和 {1}，同时具有平凡 3-核。我们只需在第一个空置位置之前添加珠子，直到满足条件，因此



现在，我们从这幅图中读出 9 的分拆的第一列钩长，记得要从第一个空置位置开始计数。因此，第一列钩长的集合为 {1，3，4，5，6}，这对应于分拆 (2，2，2，2，1)。现在我们把钩长写在各自单元格内，画出杨图

6	4
5	3
4	2
3	1
1	

在写下生成元与关系之前，我们先说明，根据引理 8.1 ，我们可以忽略所有次数不能被 3 整除的生成元。因此 $A((1，1)\ \emptyset，(1))^+$ 是以下代数的一个商

$$\mathbb{C}[f_{16}, f_{23}, f_{43}].$$

现在可以用与之前相同的方法求出这些关系，同时注意到可以舍去任何次数不能被 3 整除的关系。回想一下，我们通过注意到这些关系是齐次的，且线性项总会出现，来求出这些关系；非线性项则是那些在杨图中既不同行也不同列的项。在这种情况下，我们得到以下关系

$$c_{23}f_{23} + c_{43}f_{43},\ c_{16}f_{16} + c_{23,43}f_{23}f_{43},\ c_{16,23}f_{16}f_{23}$$

其中 c_i 可以使用命题中的公式计算7.3。简化后可得

$$A((1,1),\emptyset,(1))^+ \cong \mathbb{C}[f_{23}]/(f_{23}^3).$$

9. 中心的显式表示

最后，我们来到了本文的主要定理。这里给出两个定理，它们显式地表示了受限有理 Cherednik 代数的整个中心。第一个定理适用于对称群，第二个则将其推广到对称群与循环群的广 wreath 积。每个定理之后，我们都会给出一个例子，展示如何通过组合方法求出这些代数的生成元与关系。

定理 9.1。 $\overline{H}_c(S_n)$ 的中心存在一个同构，对于 $c \neq 0$

$$Z(\overline{H}_c(S_n)) \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Irr} S_n} A_c(\lambda)^- \otimes A_c(\lambda)^+.$$

代数的表示 $A_c(\lambda)^+$ 由定理 7.3 给出，且 $A_c(\lambda)^-$ 与 $A_c(\lambda)^+$ 在相反分次下同构。

证明。这可由此得出 命题3.1、推论 3.1、定理 3.2、定理 3.3 以及定理 7.3 . □

下面演示如何求 S_2 的受限有理 Cherednik 代数的中心。

例 9.1。 由于 $n = 2$ 有两个分拆（2，0）和（1，1），因此我们必须求出 $A(2,\ 0)^+$ 和$A(1,\ 1)^+$，这可利用定理 7.3 来完成。由此可知

$$A(2,0)^+ \cong \frac{\mathbb{C}[f_{1,2}, f_{1,1}]}{(f_{1,2}, f_{1,1})} \cong \mathbb{C}.$$

由定理 3.3 可知 $A(2,\ 0)^-$ 与 $A(2,\ 0)^+$ 同构，但分次相反。不过在此情形下，两者都完全位于次数 0，因此 $A(2,\ 0)^- \cong A(2,\ 0)^+ \cong \mathbb{C}$。类似地，我们可得$A(1,\ 1)^+ \cong A(1,\ 1)^- \cong \mathbb{C}$。因此由定理 9.1 可得

$$Z(\overline{H}_c(S_2)) \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

利用定理 8.2 我们可以推广定理 9.1 ，给出我们的最终结果。这将描述 $S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 的中心。

Theo推论 9.2. $\overline{H}_{\overline{c}}(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ 的中心存在一个同构，参数为 $\overline{c}$,

$$Z(\overline{H}_{\overline{c}}(S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})) \cong \bigoplus_{\underline{\lambda} \in \mathrm{Irr} S_n \wr \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} A_{\overline{c}}(\underline{\lambda})^- \otimes A_{\overline{c}}(\underline{\lambda})^+.$$

代数 $A_{\overline{c}}(\underline{\lambda})^+$ 由定理 8.2 给出，而 $A_{\overline{c}}(\underline{\lambda})^-$ 同构于 $A_{\overline{c}}(\underline{\lambda}^\star)^+$，且带有相反分次 .

证明。Thisfol 由命题3.1、推论 3.1、定理 3.2、推论 7.4 和定理 8. 2. □

现在我们以 $Z(\overline{H}_c(S_3 \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$ 的例子作结。

例 9.2. T 群 $S_3 \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的不可约表示可以用二分拆标记 s

((3) ∅)，((2，1) ∅)，((1，1，1) ∅)，((2)，(1))，((1，1)，(1))，((1)，(1，1))，((1)，(2))，(∅，(3))，(∅，(2，1))，(∅，(1，1，1))。

注意，6 的分拆中，除 (3，2，1) 外，其余分拆的二芯均为平凡的。因此，剩余的分拆为

$$(6), (5,1), (4,2), (4,1,1), (3,3), (3,1,1,1), (2,2,2), (2,2,1,1), (2,1,1,1,1), (1,1,1,1,1,1).$$

按照第 2 节中概述的方法，我们可知

$$\mathrm{quo}_2(6) = ((\emptyset,(3))),\ \mathrm{quo}_2(5,1) = ((3),\emptyset),\ \mathrm{quo}_2(4,2) = ((1),(2)),\ \mathrm{quo}_2(4,1,1) = (\emptyset,(2,1)),$$

$$\mathrm{quo}_2(3,3) = ((2),(1)),\ \mathrm{quo}_2(3,1,1,1) = ((2,1),\emptyset),\ \mathrm{quo}_2(2,2,2) = ((1),(1,1)),$$

$$\mathrm{quo}_2(2,2,1,1) = ((1,1),(1)),\ \mathrm{quo}_2(2,1,1,1,1) = (\emptyset,(1,1,1)),\ \mathrm{quo}_2(1,1,1,1,1,1) = ((1,1,1),\emptyset).$$

计算 $A(\lambda)^+$ 的过程与前面的例子相同。我们将详细计算 $A(\mathrm{quo}_2(4,\ 2))^+$，其余部分则仅给出结果。(4，2) 的钩长杨图如下：

5	4	2	1
2	1		

排除钩长不能被 2 整除的方格后，可以看到有三个生成元$f_{1,\ 2}$, $f_{1,\ 4}$,$f_{2,\ 2}$。关系如下:

$$c_1 f_{1,2} + c_2 f_{f_2,2} = 0, \quad c_3 f_{1,2} f_{2,2} + c_4 f_{1,4}, \quad c_5 f_{2,2} f_{1,4} = 0,$$

其中 $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5 \in \mathbb{C}$ 是可以利用命题7.4中的公式求出的系数。因此

$$A(\mathrm{quo}_2(4,2))^+ \cong \frac{\mathbb{C}[f_{1,2}, f_{1,4}, f_{2,2}]}{(f_{1,2} + f_{2,2}, f_{1,2} f_{2,2} + f_{1,4}, f_{1,4} f_{2,2})} \cong \frac{\mathbb{C}[f_{1,2}]}{(f_{1,2}^3)}.$$

,

按照相同的过程，我们得到

$$A(\mathrm{quo}_2(6))^+ \cong \mathbb{C},\ A(\mathrm{quo}_2(5,1))^+ \cong \mathbb{C},\ A(\mathrm{quo}_2(4,1,1))^+ \cong \frac{\mathbb{C}[f_{1,2}]}{(f_{1,2}^2)},\ A(\mathrm{quo}_2(3,3))^+ \cong \frac{\mathbb{C}[f_{1,2}]}{(f_{1,2}^3)},$$

$$A(\mathrm{quo}_2(3,1,1,1))^+ \cong \frac{\mathbb{C}[f_{1,2}]}{(f_{1,2}^2)},\ A(\mathrm{quo}_2(2,2,2))^+ \cong \frac{\mathbb{C}[f_{1,2}]}{(f_{1,2}^3)},\ A(\mathrm{quo}_2(2,2,1,1))^+ \cong \frac{\mathbb{C}[f_{1,2}]}{(f_{1,2}^3)},$$

$$A(\mathrm{quo}_2(2,1,1,1,1))^+ \cong \mathbb{C},\ A(\mathrm{quo}_2(1,1,1,1,1,1))^+ \cong \mathbb{C}.$$

请注意，上述各个环中的生成元 $f_{1,\ 2}$ 并非同一个元素；它只是该环的一个一般二次生成元。为了表示负次数元素，我们使用 g，而非 f。利用 $A_{\overline{c}}(\lambda)^-$ 与 $A_{\overline{c}}(\lambda^*)^+$ 在相反分次下同构这一事实，我们得到

$$A(\mathrm{quo}_2(6))^- \cong A(\mathrm{quo}_2(1,1,1,1,1,1))^+ \cong \mathbb{C},\ A(\mathrm{quo}_2(5,1))^- \cong A(\mathrm{quo}_2(2,1,1,1,1))^+ \cong \mathbb{C},$$

$$A(\mathrm{quo}_2(4,2))^- \cong A(\mathrm{quo}_2(2,2,1,1))^+ \cong \frac{\mathbb{C}[g_{1,2}]}{(g_{1,2}^3)},\ A(\mathrm{quo}_2(4,1,1))^- \cong A(\mathrm{quo}_2(3,1,1,1))^+ \cong \frac{\mathbb{C}[g_{1,2}]}{(g_{1,2}^2)},$$

$$A(\mathrm{quo}_2(3,3))^- \cong A(\mathrm{quo}_2(2,2,2))^+ \cong \frac{\mathbb{C}[g_{1,2}]}{(g_{1,2}^3)},\ A(\mathrm{quo}_2(3,1,1,1))^- \cong A(\mathrm{quo}_2(4,1,1))^+ \cong \frac{\mathbb{C}[g_{1,2}]}{(g_{1,2}^2)},$$

$$A(\mathrm{quo}_2(2,2,2))^- \cong A(\mathrm{quo}_2(3,3))^+ \cong \frac{\mathbb{C}[g_{1,2}]}{(g_{1,2}^3)},\ A(\mathrm{quo}_2(2,2,1,1))^- \cong A(\mathrm{quo}_2(4,2))^+ \cong \frac{\mathbb{C}[g_{1,2}]}{(g_{1,2}^3)},$$

$$A(\mathrm{quo}_2(2,1,1,1,1))^- \cong A(\mathrm{quo}_2(5,2))^+ \cong \mathbb{C},\ A(\mathrm{quo}_2(1,1,1,1,1,1))^- \cong A(\mathrm{quo}_2(6))^+ \cong \mathbb{C}.$$

剩下的工作是计算参数$\overline{c}$。利用定理5.7 我们可以看出

$$\overline{c}^B = (c, -c),$$

将参数化转换为我们的参数化后，我们得到

$$\overline{c}^H = \frac{-1-1}{-2}\overline{c}^B = \overline{c}^B.$$

因此,

$$Z(\overline{H}_{(1,-1)}(S_3 \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \cong \mathbb{C}^4 \oplus \left(\frac{\mathbb{C}[f_{1,2}]}{(f_{1,2}^3)} \otimes \frac{\mathbb{C}[g_{1,2}]}{(g_{1,2}^3)}\right)^{\oplus 4} \oplus \left(\frac{\mathbb{C}[f_{1,2}]}{(f_{1,2}^2)} \otimes \frac{\mathbb{C}[g_{1,2}]}{(g_{1,2}^2)}\right)^{\oplus 2}.$$

[1] M. Atiyah 和 I. Macdonald。《交换代数导论》。CRC Press，2018 年。[2] G. Bellamy。“有理 Cherednik 代数的尖点表示，参数取 $t = 0$”。载于：*Math. Z.* 269.3-4 (2008)，第 609–627 页。DOI: 10.1007/s00209-010-0754-x。URL: http://dx.doi.org/10.1007/s00209-0 10-0754-x。[3] G. Bellamy. “有理 Cherednik 代数的 Verma 模的自同态”。载于：*Transform. Groups* 19.3（2014年），第 699–720 页。ISSN：1083-4362。DOI：10.1007/s00031-014-9281-x。网址：http://dx.d oi.org/10.10

[4] G. Bellamy.《有理 Cherednik 代数与舒伯特胞腔》。载于：《代数与表示论》22.6（2019），第 1533–1567 页。[5] G. Bellamy.《辛反射代数》。载于：《非交换代数几何》。第 64 卷。数学科学研究所出版物。剑桥大学出版社，纽约，2016 年，第 167–238 页。[6] G. Bellamy 和 U. Thiel.《具有三角分解的有限维分次代数的最高权理论》。载于：《数学进展》330（2018），第 361–419 页。[7] D. J. Benson. 有限群的多项式不变量。第 190 卷。伦敦数学学会讲义系列。剑桥：剑桥大学出版社，1993 年，第 x+118 页。ISBN：0-521-45886-2。[8] A. Białynicki-Birula.《代数群作用的一些定理》。载于：《数学年刊》（第 *2* 辑）98（1973），第 480–497 页。ISSN：0003-486X。[9] Cédric Bonnafé 和 Ruslan Maksimau.《光滑 Calogero–Moser 空间中的不动点》。载于：《傅里叶研究所年刊》。第 71 卷。第 2 期。2021 年，第 643–678 页。[10] Michel Broué.复反射群及其辫群导论。施普林格，2010 年。[11] K. A. Brown 和 I. Gordon.《Poisson序、辛反射代数与表示论》。载于：《纯粹与应用数学杂志》559（2003），第 193–216 页。ISSN：0075-4102。[12] K. A. Brown 和 I. G. Gordon.《中心的分歧：正特征下的李代数与量子包络代数》。载于：《数学杂志》238.4（2001），第 733–779 页。ISSN：0025-5874。[13] Kenneth A Brown 和 Iain Gordon.《中心的分歧：正特征下的李代数与量子包络代数》。载于：《数学杂志》238.4（2001），第 733–779 页。[14] W. Bruns 和 J. Herzog. *Cohen–Macaulay*环。第 39 卷。剑桥高等数学研究。剑桥：剑桥大学出版社，1993 年，第 xii+403 页。ISBN：0-521-41068-1。[15] D. Eisenbud. 交换代数。第 150 卷。研究生数学丛书。以代数几何为视角。纽约：施普林格出版社，1995 年，第 xvi+785 页。ISBN：0-387-94268-8；0-387-94269-6。[16] P. Etingof 和 V. Ginzburg.《辛反射代数、Calogero-Moser 空间与变形Harish-Chandra同态》。载于：《数学发明》147.2（2002），第 243–348 页。ISSN：0020-9910。[17] J. Fogarty.《不动点概形》。载于：《美国数学杂志》95.1（1973），第 35–51 页。[18] I. G. Gordon.《有理 Cherednik 代数的婴儿 Verma 模》。载于：《伦敦数学学会公报》35.3（2003），第 321–336 页。ISSN：0024-6093。[19] N. Hird.《有理 Cherednik 代数的表示论》。博士论文。格拉斯哥大学，2022 年。[20] B. Iversen.《环面作用于代数簇的不动点公式》。载于：《数学发明》16.3（1972），第 229–236 页。[21] G. James 和 A. Kerber. 对称群的表示论。第 16 卷。数学及其应用百科全书。P. M. Cohn 作序，Gilbert 撰写导言

de B. Robinson. Addison-Wesley Publishing Co.，马萨诸塞州雷丁，1981年，第 xxviii+510。ISBN：0-201-13515-9。[22] G. Kemper. 交换代数课程。第 256 卷。施普林格科学与商业媒体，2010年。[23] M. Krusemeyer.《朗斯基行列式为何有效？》载于：《美国数学月刊》95.1（1988年），第 46–49 页。[24] M. Martino.《受限有理 Cherednik 代数的块，对于 $G(m,\ d,\ n)$》。载于：《代数杂志》397（2014年），第 209–224 页。ISSN：0021-8693。DOI：10.1016/j.jalgebra.2013.07.020。网址：http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebr

[25] E. Mukhin、V. Tarasov 和 A. Varchenko。《舒伯特演算与一般线性群的表示》。载于：《美国数学会杂志》22.4 (2009年)，第 909–940 页。国际标准连续出版物号：0894-0347。DOI：10.1090/S0894-0347-09-00640-7。网址：http://dx.doi.org/10.1090/S0894-0347-09-00640-7。[26] J. R. Stembridge。《关于反射群和缠绕积的表示的特征值》。载于：《太平洋数学杂志》140.2 (1989年)，第 353–396 页。国际标准连续出版物号：0030-8730。电子邮件地址：hirdniall@gmail.com