arXiv:2301.03327v2 [math.NA] 6 Jul 2023

用于贝叶斯反演和基于熵风险度量的最优控制的后验 QMC-FEM 误差估计

Marcello Longo*，Christoph Schwab*，Andreas Stein*†‡

2023年7月7日

摘要

我们提出一种新颖的后验误差估计技术，其目标关注量是高维积分之比，例如出现在受偏微分方程约束的贝叶斯反演，以及受偏微分方程约束且以熵风险度量为目标的最优控制中。我们特别考虑高维参数空间上的仿射参数化扩散系数椭圆型偏微分方程。我们将近期提出的后验准蒙特卡罗（QMC）误差分析与有限元后验误差估计相结合。所提出的方法可得到可计算的后验估计量，其可靠性可忽略高阶项后得到保证。该估计量的可靠性相对于偏微分方程离散化具有一致性，并且对于不确定偏微分方程输入的参数维数具有稳健性。

谨以此文献给 Ian H. Sloan，祝贺他 85周年

1 引言

过去几年中，高维参数化偏微分方程（简称 PDE）的高效数值逼近日益受到关注。本文探讨两类与数据同化和偏微分方程约束优化相关的高维数值积分问题，并以参数化线性椭圆型偏微分方程说明其中的抽象概念。第一类问题称为贝叶斯逆问题 （BIP）。我们关注在给定受加性、中心高斯观测噪声 [18, 20]影响的观测数据的条件下，参数化偏微分方程解 u 的某个（线性）泛函的后验期望。另请参见 [10]。第二类问题是偏微分方程约束优化。具体而言，我们研究参数化偏微分方程的最优控制问题（OCP），其目标采用熵风险度量 [7], ，且状态变量满足参数化偏微分方程约束 [9]。

在数值近似贝叶斯逆问题或最优控制问题的解时，必须量化数值离散化带来的误差，以满足

*苏黎世联邦理工学院应用数学研讨班
†通讯作者。电子邮件：andreas.stein@sam.math.ethz.ch
‡A.S. 部分经费由 ETH数据科学基金会计划（ETH-FDS）提供，谨此致谢。

预先规定的数值容差，同时避免浪费计算资源。由于通常无法精确求解偏微分方程，因此必须采用有限元方法等离散化方法。此外，正向偏微分方程模型中的参数不确定性会传递到解中，在计算和误差估计时都必须予以考虑。这说明了进行后验 误差分析的必要性。我们为贝叶斯逆问题和最优控制问题提出了一类新型准蒙特卡罗有限元算法，并实现后验误差控制。我们针对空间域误差和参数域误差，推导了比率估计量的数值后验误差估计。这使得我们能够针对任意预先规定的容差，高效计算关注量，并获得关于参数维数稳健的参数域误差界 s。具体而言，我们假设不确定的偏微分方程系数是仿射参数化的，其参数向量为 $\boldsymbol{y} \in U := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^s$ 其中 $s \in \mathbb{N}$, $s \gg 1$，例如下文的 (6)。我们可以采用合适的准蒙特卡罗（QMC）规则来近似 U上的积分。此处，我们选择了 [3,5]中首次提出的外推多项式格（EPL）规则。¯ 作此选择的理由是，其求积节点 P_m, $|P_m| = b^m$ 具有确定性（其中 b [15]为某个素数），并且当被积函数关于 $\boldsymbol{y} \in U$ 具有经量化的参数正则性时，具有良好的收敛性质，且该性质对维数 s [3]具有一致性。此外， $[5, 14]$ 表明，在一定假设下，当 $m \to \infty$时，外推多项式格求积可提供可计算的后验求积误差估计量，且估计误差与实际求积误差之比具有维数稳健性。

贝叶斯逆问题和参数化输入偏微分方程的最优控制问题都具有如下形式

$$\frac{Z'}{Z} \in \mathcal{Y}, \quad \text{where } Z = \int_U \Theta(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y}, \quad Z' = \int_U \Theta'(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y}, \tag{1}$$

其中， $\Theta\colon\ U \to \mathbb{R}$ 和 $\Theta'\colon\ U \to \mathcal{Y}$是适当的可积函数， $\mathcal{Y}$是可分希尔伯特空间，而 Z， Z' 是关于乘积测度 $\mathrm{d}\boldsymbol{y}$ 的博赫纳积分，其定义域为可能是高维的参数空间 U。特别地，对于贝叶斯逆问题情形，我们有 $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$；对于最优控制问题情形，我们有 $\mathcal{Y} \in L^2(D)$，其中 D 是所考虑偏微分方程的物理域。用多项式格 $P_m \subset U$ 上的平均值逼近高维积分，可得到一个初步逼近

$$\frac{Z'_m}{Z_m} \in \mathcal{Y}, \quad \text{where } Z_m = \frac{1}{b^m} \sum_{\boldsymbol{y} \in P_m} \Theta(\boldsymbol{y}), \quad Z'_m = \frac{1}{b^m} \sum_{\boldsymbol{y} \in P_m} \Theta'(\boldsymbol{y}). \tag{2}$$

接着，由于被积函数 Θ， Θ' 取决于一个 $\boldsymbol{y}$-参数化偏微分方程的解，我们对 $\boldsymbol{y} \in P_m$ 对应的参数化偏微分方程进行离散化，从而得到可计算的参数化被积函数 $\Theta_h(\boldsymbol{y})$ $\Theta'_h(\boldsymbol{y})$ 以及可计算的估计

$$\frac{Z'_{m,h}}{Z_{m,h}} \in \mathcal{Y}, \quad \text{where } Z_{m,h} = \frac{1}{b^m} \sum_{\boldsymbol{y} \in P_m} \Theta_h(\boldsymbol{y}), \quad Z'_{m,h} = \frac{1}{b^m} \sum_{\boldsymbol{y} \in P_m} \Theta'_h(\boldsymbol{y}). \tag{3}$$

这里，参数 $h > 0$ 表示协调拉格朗日有限元离散化的网格宽度。我们提出一种可计算的后验估计量，用于评估有限元离散误差与求积误差的组合

$$\mathrm{err} = \left\| \frac{Z'}{Z} - \frac{Z'_{m,h}}{Z_{m,h}} \right\|_{\mathcal{Y}}. \tag{4}$$

本节其余部分将介绍问题背景，并描述我们关注的两个问题，即贝叶斯逆问题以及具有熵风险度量的最优控制问题。第2节和第3节分别讨论准蒙特卡罗和有限元法的后验误差分析，这些结果将在第4节中结合。第5节给出数值实验，第6节进行总结并得出结论。

1.1 仿射参数化正向偏微分方程

为简洁起见，我们考虑一个带有齐次狄利克雷边界条件的线性椭圆型偏微分方程模型。该（正向）模型在EPL规则下的相应准蒙特卡罗有限元误差分析已在 [5,14],中得到，并且更一般地，参数化全纯算子的相关分析见 [4,5]。其中的结果是我们在第1.2节和第1.3节对准蒙特卡罗比率估计量进行后验误差分析的基础。

给定一个有界多边形 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 和参数序列 $\boldsymbol{y} \in U$、 $s \in \mathbb{N}$，考虑如下变分形式的参数化线性二阶椭圆型偏微分方程：求 $u(\cdot, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{X} = H_0^1(D)$，使得

$$\int_D a(x,\boldsymbol{y})\nabla_x u(x,\boldsymbol{y}) \cdot \nabla_x v(x)\,\mathrm{d}x = \int_D f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in \mathcal{X}. \tag{5}$$

我们假设 a 是仿射参数化的，即给定一族函数 $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0} \subseteq L^\infty(D)$，使得对于 $\operatorname{essinf} \psi_0 > \kappa > 0$ 和 $b_j := \frac{1}{\kappa}\|\psi_j\|_{L^\infty(D)}$，有

$$a(x,\boldsymbol{y}) = \psi_0(x) + \sum_{j=1}^{s} y_j\psi_j, \qquad \sum_{j\geq 1} b_j < 2. \tag{6}$$

那么，对于所有 $\boldsymbol{y} \in U$，有 $\operatorname{essinf} a(\cdot, \boldsymbol{y}) > \operatorname{essinf} \psi_0 - \kappa > 0$。根据拉克斯–米尔格拉姆引理，对于任意 $f \in \mathcal{X}^* = H^{-1}(D)$，参数化弱解 $u(\cdot, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{X}$ 都有良好定义，其中 * 表示拓扑对偶。为了证明第2节中的后验准蒙特卡罗误差分析，我们还需要可和性

$$\boldsymbol{b} = (b_j)_{j\geq 1} \in \ell^p(\mathbb{N}) \quad \text{ for some } p \in (0, 1/2). \tag{7}$$

施加条件 $p \in (0, 1/2)$ 是为了推导下文定理 1 的第二部分（使用 [5, 定理 4.1]），即界定两个连续准蒙特卡罗估计量之差。

对于有限元近似，我们考虑与第 8节中的形状正则单纯形剖分 $\{\mathcal{T}_h\}_{h\in H}$ 相关联的协调子空间[1] $\mathcal{X}_h \subseteq \mathcal{X} h \in H \subseteq (0, \infty)$，其维数为 $\dim(\mathcal{X}_h) < \infty$。假设由此得到的空间是嵌套且协调的，即对于任意 $h, h' \in H, h > h'$，均有 $\mathcal{X}_h \subseteq \mathcal{X}_{h'}$，并且 H 收敛至 0。通过求解，我们构造式 (5) 的 Galerkin 离散 $u_h(\boldsymbol{y}) \in \mathcal{X}_h$：

$$\int_D a(x,\boldsymbol{y})\nabla_x u_h(x,\boldsymbol{y}) \cdot \nabla_x v(x)\,\mathrm{d}x = \int_D f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in \mathcal{X}_h. \tag{8}$$

[1]实际上，对于准一致划分族，h 要么参数化局部网格尺寸 $\max_{T\in\mathcal{T}_h} |T|^{1/2}$，要么在自适应细化的情况下与细化层级相关 [16]。

为简化记号，我们将 $a(\boldsymbol{y})$ 记作 $= a(\cdot, \boldsymbol{y})$，将 $u(\boldsymbol{y})$ 记作 $= u(\cdot, \boldsymbol{y})$，并省略 div_x =div 中的变量 x 。我们指出，式 (6) 中给出的关于 a 的假设意味着对所有 $\boldsymbol{y} \in U$，均有 $a(\boldsymbol{y}) \in L^\infty(D)$，但不一定有 $a(\boldsymbol{y}) \in W^{1,\infty}(D)$。而后者是控制有限元近似（后验）误差所必需的，因此，对于贝叶斯逆问题和最优控制问题，我们将在下文第3节中施加条件 $a(\boldsymbol{y}) \in W^{1,\infty}(D)$。

1.2 贝叶斯逆问题（BIP）

令 $X = \{a \in L^\infty(D) : \operatorname{essinf} a > 0\}$，并固定 $f \in \mathcal{X}^*$。那么，我们可以为正问题（5）定义数据到解映射 $\mathcal{S}\colon X \to \mathcal{X}$。我们还定义观测泛函 $\mathcal{O} \in (\mathcal{X}^*)^K$，其中包含有限个观测值 $K \in \mathbb{N}$（例如用于表示传感器），以及一个目标泛函（也称为感兴趣量）$G \in \mathcal{X}^*$。我们将先验测度 π_0 定义为 U上的均匀分布。

假设观测值 $\mathcal{O}(\mathcal{S}(a))$ 还受到加性观测噪声 η的影响，并假设该噪声为中心高斯分布，即对于某个已知的非退化协方差矩阵 $\Gamma \in \mathbb{R}^{K\times K}$，有 $\eta \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$。换言之，假设给定含噪观测数据 $\delta \in \mathbb{R}^K$，其模型为

$$\delta = \mathcal{O}(\mathcal{S}(a)) + \eta \in L^2_\Gamma(\mathbb{R}^K). \tag{9}$$

我们考虑贝叶斯逆问题：给定观测数据 δ，求 $G(u)$ 的期望值，即 $\mathbb{E}^{\pi_0}[G(u)|\delta]$。根据贝叶斯定理 [20], , $\boldsymbol{y}|\delta$ 的后验分布 π^δ 相对于 π_0 绝对连续，其相对于先验 π_0 的拉东-尼科迪姆导数为

$$\frac{\mathrm{d}\pi^\delta}{\mathrm{d}\pi_0}(\boldsymbol{y}) = \frac{\Theta(\boldsymbol{y})}{Z}, \tag{10}$$

其中，$\Theta(\boldsymbol{y}) := \exp(-\frac{1}{2}|\delta - \mathcal{O}(\mathcal{S}(a(\boldsymbol{y})))|^2_\Gamma) = \exp(-\frac{1}{2}|\delta - \mathcal{O}(u(\boldsymbol{y}))|^2_\Gamma)$ 表示由观测噪声协方差加权的数据到观测失配所对应的似然函数，其中 $|x|^2_\Gamma := x^\top \Gamma^{-1} x$ 且 Z 定义于 (1) 中。由于对所有 $\boldsymbol{y} \in U$,$Z > 0$，均有 $\Theta(\boldsymbol{y}) > 0$，在当前设定下，贝叶斯反演相当于对后验均值进行数值计算

$$\mathbb{E}^{\pi^\delta}[G(u)] = \frac{1}{Z}\int_U G(u(\boldsymbol{y}))\Theta(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

令 $\Theta'(\boldsymbol{y}) := G(u(\boldsymbol{y}))\Theta(\boldsymbol{y})$ 且 $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$，即可得到 (1)。定义有限元解算子 $\mathcal{S}_h$: $X \to \mathcal{X}_h$，其映射为 $\mathcal{S}_h a(\boldsymbol{y}) = u_h(\boldsymbol{y})$，由 (8) 给出。于是，(3) 中使用的 Θ, Θ' 的有限元近似分别为 $\Theta_h = \exp(-\frac{1}{2}|\delta - \mathcal{O}(u_h(\boldsymbol{y}))|^2_\Gamma)$ 和$\bar{\Theta}'_h = G(u_h(\boldsymbol{y}))\Theta_h(\boldsymbol{y})$。

用于近似贝叶斯逆问题中 $\mathbb{E}^{\pi^\delta}[G(u)]$ 的 QMC 比率估计量已在多层设置中得到研究，例如文献 [2]。我们利用该文献中的部分结果，为（单层）估计量补充后验 QMC-FEM 误差控制。

1.3 熵风险度量下的最优控制问题（OCP）

令 $\mathcal{Y} = L^2(D)$，假设目标状态 $\hat{}u \in \mathcal{Y}$ 与参数无关，并且 $X \subseteq \mathcal{Y}$ 是一个非空、闭且凸的可容许控制集合。在本文余下部分中，

我们通过里斯表示定理将 $\mathcal{Y}$ 与其对偶空间等同，并用 $\langle\cdot\,表示\,\cdot\rangle$ 上的内积。固定仿射参数扩散系数 $a(\boldsymbol{y})$ 后，(5) 定义了一个线性解算子 $\mathcal{L}^{\boldsymbol{y}}\colon \mathcal{Y}\to\mathcal{Y}$，满足 $\mathcal{L}^{\boldsymbol{y}}f=\iota\circ u(\boldsymbol{y})$，对所有 $f\in\mathcal{Y}$ 均成立，其中 ι 表示连续嵌入 $\mathcal{X}\subset\mathcal{Y}$。特别地，我们将 $u(\boldsymbol{y})$ 视为右端项 f （见 (5)）的函数。对于函数 $\Phi\colon U\to\mathbb{R}$ 以及某个 $\theta\in(0,\infty)$，熵风险度量 [12] 定义为

$$\mathcal{R}(\Phi)=\frac{1}{\theta}\log\left(\int_U\exp(\theta\Phi(\boldsymbol{y}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right). \tag{11}$$

在倾向于风险厌恶行为时，熵风险尤为重要 [7]。对于给定的常数 $\alpha_1,\ \alpha_2>0$，我们考虑以下最小化问题

$$f^*:=\operatorname*{argmin}_{f\in X}J(f),\qquad J(f):=\mathcal{R}(\tfrac{\alpha_1}{2}\left\|\mathcal{L}^{\boldsymbol{y}}f-\hat{u}\right\|_{\mathcal{Y}}^2)+\tfrac{\alpha_2}{2}\left\|f\right\|_{\mathcal{Y}}^2. \tag{12}$$

由于 $\mathcal{R}$ 和 $\alpha_2>0$的凸性，泛函 J 是强凸的，因此 (12) 是一个适定最小化问题 [9,12]。权重 $\alpha_1,\ \alpha_2$ 用于平衡残差 $\left\|\mathcal{L}^{\boldsymbol{y}}f-\hat{u}\right\|_{\mathcal{Y}}$ 的熵风险与控制 f的大小，后者通过正则化项 $\frac{\alpha_2}{2}\left\|f\right\|_{\mathcal{Y}}^2$实现。

定义简记 $\Phi_f(\boldsymbol{y})=\frac{\alpha_1}{2}\left\|\mathcal{L}^{\boldsymbol{y}}f-\hat{u}\right\|_{\mathcal{Y}}^2$，以及由 $q_f(\boldsymbol{y})=\alpha_1\mathcal{L}^{\boldsymbol{y}}(\mathcal{L}^{\boldsymbol{y}}f-\hat{u})\in\mathcal{Y}$给出的伴随状态。在满足上述关于 X的条件时，(12) 等价于不等式 $\langle J'(f^*)\ f-f^*\rangle\geq 0$，对所有 $f\in X$均成立。类似于 [9, 引理 3.6]，J 在 $f\in X$ 处的弗雷歇导数 $J'(f)\in\mathcal{Y}$ 为

$$J'(f)=\frac{1}{\int_U\exp(\theta\Phi_f(\boldsymbol{y}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}}\int_U\exp(\theta\Phi_f(\boldsymbol{y}))q_f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}+\alpha_2 f. \tag{13}$$

接下来，我们在(12)中将关于 U 的积分替换为准蒙特卡罗规则，并将精确解算子 $\mathcal{L}^{\boldsymbol{y}}$ 替换为伽辽金解 $\mathcal{L}_h^{\boldsymbol{y}}\colon\ \mathcal{Y}\to\mathcal{X}_h$ 由 $\mathcal{L}_h^{\boldsymbol{y}}f=u_h(\boldsymbol{y})$ 定义。于是，我们得到离散形式

$$f_{m,h}^*:=\operatorname*{argmin}_{f\in X}J_{m,h}(f),\qquad J_{m,h}(f):=\mathcal{R}_m(\tfrac{\alpha_1}{2}\left\|\mathcal{L}_h^{\boldsymbol{y}}f-\hat{u}\right\|_{\mathcal{Y}}^2)+\tfrac{\alpha_2}{2}\left\|f\right\|_{\mathcal{Y}}^2, \tag{14}$$

其中 $\mathcal{R}_m(\Phi)=\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{1}{b^m}\sum_{\boldsymbol{y}\in P_m}\exp(\theta\Phi(\boldsymbol{y}))\right)$ 再次为凸函数，这是由于准蒙特卡罗求积权重为正。$J_{m,h}$ 的导数 $J'_{m,h}(f)\in\mathcal{Y}$ 与(13)类似，同样将积分替换为关于 P_m，$\Phi_{h,f}(\boldsymbol{y})=\frac{\alpha_1}{2}\left\|\mathcal{L}_h^{\boldsymbol{y}}f-\hat{u}\right\|_{\mathcal{Y}}^2$ 和 $q_{h,f}(\boldsymbol{y})=\alpha_1\mathcal{L}_h^{\boldsymbol{y}}(\mathcal{L}_h^{\boldsymbol{y}}f-\hat{u})\in\mathcal{Y}$ 的样本平均。下一个命题将逼近 $f_{m,h}^*\approx f^*$ 中的误差改写为(4)的形式。在不会引起混淆的情况下，我们将记 $q(\boldsymbol{y})=q_{f_{m,h}^*,h}(\boldsymbol{y})$ 以及 $q_h(\boldsymbol{y})=q_{h,f_{m,h}^*,h}(\boldsymbol{y})$.

命题 *1.* 对于 $\mathcal{Y}=L^2(D)$，假设 *(1)* 中的 Z,Z' 定义为 $\Theta(\boldsymbol{y})=\exp(\theta\Phi_{f_{m,h}^*,h}(\boldsymbol{y}))$ 和 $\Theta'(\boldsymbol{y})=q(\boldsymbol{y})\Theta(\boldsymbol{y})$。类似地，设 *(3)* 中的 $Z_{m,h},Z'_{m,h}$ 定义为 $\Theta_h(\boldsymbol{y})=\exp(\theta\Phi_{h,f_{m,h}^*,h}(\boldsymbol{y}))$ 和 $\Theta'_h(\boldsymbol{y})=q_h(\boldsymbol{y})\Theta_h(\boldsymbol{y})$。

那么，

$$\left\|f^*-f_{m,h}^*\right\|_{\mathcal{Y}}\leq\frac{1}{\alpha_2}\left\|J'(f_{m,h}^*)-J'_{m,h}(f_{m,h}^*)\right\|_{\mathcal{Y}}=\frac{1}{\alpha_2}\left\|\frac{Z'}{Z}-\frac{Z'_{m,h}}{Z_{m,h}}\right\|_{\mathcal{Y}}. \tag{15}$$

证明。不等式 $\langle J'(f^*)\ f-f^*\rangle\geq 0$和$\langle J'_{m,\,h}(f_{m,\,h}^*)\,f-f_{m,\,h}^*\rangle\geq 0$对所有 $f\in X$均成立，这意味着$\langle J'_{m,\,h}(f_{m,\,h}^*)-J'(f^*)\,f^*-f_{m,\,h}^*\rangle\geq 0$。此外，强

J的凸性给出了关系 $\langle J'(f^*)-J'(f^*_{m,\ h})-\alpha_2(f^*-f^*_{m,\ h})\, f^*-f^*_{m,\ h}\rangle \geq 0$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\alpha_2 \left\|f^* - f^*_{m,h}\right\|^2_{\mathcal{Y}} &\leq \langle J'_{m,h}(f^*_{m,h}) - J'(f^*) + \alpha_2(f^* - f^*_{m,h}), f^* - f^*_{m,h}\rangle \\ &\leq \langle J'_{m,h}(f^*_{m,h}) - J'(f^*_{m,h}), f^* - f^*_{m,h}\rangle \\ &\leq \left\|J'_{m,h}(f^*_{m,h}) - J'(f^*_{m,h})\right\|_{\mathcal{Y}} \left\|f^* - f^*_{m,h}\right\|_{\mathcal{Y}},\end{aligned}$$

这意味着不等式 (15) 成立。将$J'_{m,h}(f^*_{m,h}) = {}^{Z'_{m,}Z_m}{}^{h}_{,h} + \alpha_2 f^*_{m,h}$ 代入 (13) 即可得到等式。 —— □

注 1. 请注意，命题 1 中定义的 Θ, Θ' 以及由此得到的 Z, Z'，也隐含地通过离散极小化子 $f^*_{m,h}$依赖于 h。特别是，精确极小化子 f^* 并未出现在 (15) 的右侧。这一点对于接下来的后验误差估计方法至关重要。

2 后验准蒙特卡罗误差估计

我们为偏微分方程离散误差和 QMC 求积误差构建可计算的后验误差估计量；后者的可靠性不受积分维数 s的影响。

2.1 参数正则性

为了利用 [5, 14] 中的结果并克服维数灾难，我们需要量化关于 $\boldsymbol{y} \in U$的正则性。为此，我们记 $|\boldsymbol{\nu}| = \sum_j \nu_j$, $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\nu}) = \{j : \nu_j \neq 0\}$，并且对于光滑的 $F: U \to \mathcal{Y}$ 和 $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{F} := \{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}} : |\operatorname{supp}(\boldsymbol{\nu})| < \infty\}$，引入多重指标记法 $\partial^{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{y}} F(\boldsymbol{y}) = \prod_{j\in\operatorname{supp}(\boldsymbol{\nu})} \partial^{\nu_j}_{y_j} F(\boldsymbol{y})$，用于表示关于 $\boldsymbol{y}$ 的导数。此外，给定 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$，其中某个 $p \in (0,1)$、$n \in \mathbb{N}$ 和 $c > 0$，我们通过以下方式定义 SPOD 权重 $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_{\mathfrak{u}})_{\mathfrak{u}\subseteq\{1:s\}}$

$$\gamma_{\mathfrak{u}} = \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\{1:\alpha\}^{|\mathfrak{u}|}} (|\boldsymbol{\nu}| + n)! \prod_{j\in\mathfrak{u}} c\beta_j^{\nu_j}. \tag{16}$$

定义 1。设 $\mathcal{Y}$为可分希尔伯特空间，$\alpha \in \mathbb{N}$、$\alpha \geq 2$。我们将带有主导混合光滑性的加权无锚定 Sobole夫空间 $\mathcal{W}_{s,\ \alpha,\ \boldsymbol{\gamma}}$ 定义为 $C^\infty(U,\ \mathcal{Y})$ 关于范数的完备化

$$\begin{aligned}\|F\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}} := \max_{\mathfrak{u}\subseteq\{1:s\}} \gamma_{\mathfrak{u}}^{-1} \sum_{\mathfrak{v}\subseteq\mathfrak{u}} \sum_{\boldsymbol{\nu}_{\mathfrak{u}\setminus\mathfrak{v}}\in\{1:\alpha\}^{|\mathfrak{u}\setminus\mathfrak{v}|}} \\ \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^{|\mathfrak{v}|}} \left\| \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^{s-|\mathfrak{v}|}} \partial_{\boldsymbol{y}}^{(\boldsymbol{\nu}_{\mathfrak{u}\setminus\mathfrak{v}},\boldsymbol{\alpha}_{\mathfrak{v}})} F(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}_{\{1:s\}\setminus\mathfrak{v}} \right\|_{\mathcal{Y}} \mathrm{d}\boldsymbol{y}_{\mathfrak{v}},\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\nu}_{\mathfrak{u}\setminus\mathfrak{v}},\ \boldsymbol{\alpha}_{\mathfrak{v}}) \in \mathcal{F}$满足：当 $j \in \mathfrak{u}\setminus\mathfrak{v}$时为 $\mu_j = \nu_j$，当 $j \in \mathfrak{v}$ 时为 $\mu_j = \alpha$，否则为 $\mu_j = 0$。内层积分解释为博赫纳积分。

在我们的背景下，空间 $\mathcal{W}_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}}$ 的重要性由以下结果说明，这也是我们分析的起点。这是所谓的逐分量（CBC）构造的推论，详见 [5,14]。该构造以 $s, \alpha, \boldsymbol{\gamma}$和 m为输入，并返回一个多项式格 P_m。

定理 1. 设 $\alpha \in \mathbb{N}, \alpha \geq 2$ 和 $F\colon U \to \mathcal{Y}$ 属于某个可分希尔伯特空间$\mathcal{Y}$，且满足 $F \in \mathcal{W}_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}}$，其中权重 $\boldsymbol{\gamma}$ 具有(16) 所示形式，适用于 $\boldsymbol{\beta} \in \ell^p(\mathbb{N}), p \in (0, 1/2]$。那么，存在一个多项式格规则序列$(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$，使得当 $m \to \infty$

$$\mathfrak{E}_m(F) := \int_U F - \frac{1}{b^m} \sum_{\boldsymbol{y}\in P_m} F(\boldsymbol{y}) = \|F\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}}\, O(b^{-m}),$$

以及对所有 $\varepsilon > 0$

$$\mathfrak{E}_m(F) = \frac{1}{b^m} \sum_{\boldsymbol{y}\in P_m} F(\boldsymbol{y}) - \frac{1}{b^{m-1}} \sum_{\boldsymbol{y}\in P_{m-1}} F(\boldsymbol{y}) + \|F\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}}\, O(b^{-2m+\varepsilon}).$$

$O(\cdot)$ 中隐藏的常数与 s、$m \in \mathbb{N}$ 和 F 无关，但取决于 ε 和 $\boldsymbol{\gamma}$。此外，点集 $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 可以通过 ***CBC*** 构造，在 $O(smb^m + s^2b^m)$ 次运算内显式构造。

证明。 对于情形 $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$，这一点已由 [5, 定理 4.1] 证明。否则，任取满足 $\|v\|_{\mathcal{Y}} = 1$ 的 $v \in \mathcal{Y}$。那么， $\partial_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\nu}} \langle F(\boldsymbol{y}),\ v\rangle = \langle \partial_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\nu}} F(\boldsymbol{y}),\ v\rangle$ 对所有 $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{F}$ 均成立，这意味着 $\|\langle F,\ v\rangle\|_{s,\ \alpha,\ \boldsymbol{\gamma}} \leq \|F\|_{s,\ \alpha,\ \boldsymbol{\gamma}}$。因此，我们将问题归结为情形 $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$；由积分和求积的线性性可得结论。 □

推论 1. 假设偏微分方程 (5) 满足 (6) 和 (7)。那么，我们可以构造多项式格规则 $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$（依赖于 $\boldsymbol{b}$），并在 $O(smb^m + s^2b^m)$次运算内，使得对所有 $\varepsilon > 0$，贝叶斯逆问题均满足

$$Z - Z_m = Z_m - Z_{m-1} + O(b^{-2m+\varepsilon}), \qquad Z' - Z'_m = Z'_m - Z'_{m-1} + O(b^{-2m+\varepsilon}),$$

当 $m \to \infty$ 时成立。 $O(\cdot)$ 中的隐含常数与 s、$m \in \mathbb{N}$ 无关。

证明。 根据 [18, 第4节。1], [4, 定理 3。1] 和 $\boldsymbol{\nu}! := \prod_{j\in\mathrm{supp}(\boldsymbol{\nu})} \nu_j! \leq |\boldsymbol{\nu}|!$，我们有 $\sup_s \|\Theta\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}} + \sup_s \|\Theta'\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}} < \infty$，其中 $\alpha = 1 + \lfloor 1/p \rfloor$，且存在由序列 $\boldsymbol{\beta} \sim \boldsymbol{b}$ 和 $n = 0$定义的某些 SPOD 权重 (16)。因此，我们可以应用定理 1 并得出结论。 □

基于 [8, 9] 中的结果，可以针对最优控制问题给出类似的结果。

推论 2. 假设偏微分方程 (5) 满足 (6) 和 (7)。那么，我们可以构造多项式格规则 $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$（依赖于 $\boldsymbol{b}$），并在 $O(smb^m + s^2b^m)$ 次运算内完成，使得对于所有 $\varepsilon > 0$，最优控制问题都满足

$$Z - Z_m = Z_m - Z_{m-1} + O(b^{-2m+\varepsilon}), \qquad Z' - Z'_m = Z'_m - Z'_{m-1} + O(b^{-2m+\varepsilon}),$$

如 $m \to \infty$ 所示。 $O(\cdot)$ 中的隐含常数与 s、$m \in \mathbb{N}$ 无关。

证明。 应用 [8, <style id='?'>引理 4。6] 中的结果以及 [9, 定理 5.4 和 5.6]，我们得出 $\sup_s \|\Theta\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}} + \sup_s \|\Theta'\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}} < \infty$ 对于 $\alpha = 1 + \lfloor 1/p \rfloor$ 以及某些由序列 $\boldsymbol{\beta} \sim \boldsymbol{b}$ 和 $n = 2$定义的 SPOD 权重 (16)。 □

2.2 比率误差估计量

命题 2。 假设 *PDE* (5) 满足 (6) 和 (7)。那么，对于贝叶斯逆问题和最优控制问题，我们可以构造多项式格点规则 $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ，使得

$$\frac{Z'}{Z}-\frac{Z'_m}{Z_m}=\frac{1}{bZ_m-Z_{m-1}}\left(\frac{Z_{m-1}Z'_m-Z_mZ'_{m-1}}{Z_m}\right)+O(b^{-2m+\varepsilon}),\qquad(17)$$

对所有 $\varepsilon>0$ 当 $m\to\infty$时均成立。 $O(\cdot)$ 中的隐藏常数与 s、 m无关。

证明。 首先， $Z-Z_m\to 0$ 当 $m\to\infty$ 时意味着，对于充分大的 m, $Z_m>Z/2>0$ 成立。其次，由推论 1 或 2，对于所有 $\varepsilon>0$ ，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{Z'}{Z}-\frac{Z'_m}{Z_m}\\
&=\frac{(Z'-Z'_m)Z_m-(Z-Z_m)Z'_m}{(Z-Z_m)Z_m+Z_m^2}\\
&=\frac{\frac{1}{b-1}(Z'_m-Z'_{m-1}+O(b^{-2m+\varepsilon}))Z_m-\frac{1}{b-1}(Z_m-Z_{m-1}+O(b^{-2m+\varepsilon}))Z'_m}{\frac{1}{b-1}(Z_m-Z_{m-1}+O(b^{-2m+\varepsilon}))Z_m+Z_m^2}\\
&=\frac{\frac{1}{b-1}(Z'_m-Z'_{m-1})}{\frac{1}{b-1}(bZ_m-Z_{m-1})+O(b^{-2m+\varepsilon})}\\
&\quad-\frac{\frac{1}{b-1}(Z_m-Z_{m-1})Z'_m}{(\frac{1}{b-1}(bZ_m-Z_{m-1})+O(b^{-2m+\varepsilon}))Z_m}+O(b^{-2m+\varepsilon}).
\end{aligned}$$

显然， $A_m:=\frac{1}{b-1}(bZ_m-Z_{m-1})\to Z$ 当 $m\to\infty$时成立，因此对于充分大的 m , $A_m>Z/2>0$ 成立。于是，根据几何级数求和论证，将分母中包含于 $O(b^{-2m+\varepsilon})$ 的所有项归入 B_m ，我们得到对于 $m\to\infty$

$$\frac{1}{A_m+B_m}=\frac{1}{A_m}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{B_m}{A_m}\right)^k=\frac{1}{A_m}+O(b^{-2m+\varepsilon}).$$

因此，当 $m\to\infty$时

$$\frac{Z'}{Z}-\frac{Z'_m}{Z_m}=\frac{\frac{1}{b-1}(Z'_m-Z'_{m-1})}{A_m}-\frac{\frac{1}{b-1}(Z_m-Z_{m-1})Z'_m}{A_mZ_m}+O(b^{-2m+\varepsilon}),\qquad(18)$$

整理各项后，即得所要证明的结论。 □

由于 $\frac{Z'}{Z}-\frac{Z'_m}{Z_m}=O(b^{-m})\gg O(b^{-2m+\varepsilon})$，命题 2 指出

$$E_{b^m}(\Theta',\Theta):=\frac{1}{bZ_m-Z_{m-1}}\left(\frac{Z_{m-1}Z'_m-Z_mZ'_{m-1}}{Z_m}\right)\qquad(19)$$

是一个可计算且渐近精确的误差估计器。

3 后验有限元法误差估计

实际中，参数化解 $u(\boldsymbol{y})\in\mathcal{X}$ 并不能精确获得，因此Z_m, Z'_m无法计算。对于任意 $\boldsymbol{y}\in U$， $u(\boldsymbol{y})$ 将由相应的 Galerkin 离散 $u_h(\boldsymbol{y})\in\mathcal{X}_h$ 近似。

3.1 比值误差估计量

分别在Θ, Θ', Z, Z'的定义中，将 u 和 q 替换为 u_h, q_h，以此定义 $\Theta_h, \Theta'_h, Z_h, Z'_h$。类似地，分别在 Z_m, Z'_m 的定义中，将 u 和 q 替换为 u_h, q_h，以此定义 $Z_{m,h}, Z'_{m,h}$。

命题 3. 假设存在 $\zeta_{m,h}, \zeta'_{m,h}$，使得对于某个与 $h \in H$ 无关的 $c > 0$，$|Z_m - Z_{m,h}| \leq c\zeta_{m,h}$ 和 $\left\|Z'_m - Z'_{m',h}\right\|_{\mathcal{Y}} \leq c\zeta'_{m,h}$。假设当 $h \to 0$ 时，$\zeta_{m,h} \to 0$。那么，存在 $h_0 \in H$，使得对于所有 $h \leq h_0$

$$\left\|\frac{Z'_m}{Z_m} - \frac{Z'_{m,h}}{Z_{m,h}}\right\|_{\mathcal{Y}} \leq c\frac{Z_{m,h}\zeta'_{m,h} + \left\|Z'_{m,h}\right\|_{\mathcal{Y}}\zeta_{m,h}}{Z^2_{m,h} - c\zeta_{m,h}Z_{m,h}}.$$

证明。由于限制 $\zeta_{m,h} \to 0$，存在 $h_1 \in H$ 使得 $Z_{m,h} \geq Z_m/2 > 0$对所有 $h \leq h_1, h \in H$ 均成立。因此，我们可以选取 $h_0 \in H$ 使得 $Z_{m,h} > c\zeta_{m,h}$对所有 $h \leq h_0, h \in H$ 均成立。因此

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{Z'_m}{Z_m} - \frac{Z'_{m,h}}{Z_{m,h}}\right\|_{\mathcal{Y}} &= \left\|\frac{(Z'_m - Z'_{m,h})Z_{m,h} - (Z_m - Z_{m,h})Z'_{m,h}}{(Z_m - Z_{m,h})Z_{m,h} + Z^2_{m,h}}\right\|_{\mathcal{Y}} \\
&\leq \frac{\left\|Z'_m - Z'_{m,h}\right\|_{\mathcal{Y}} Z_{m,h} + |Z_m - Z_{m,h}|\left\|Z'_{m,h}\right\|_{\mathcal{Y}}}{Z^2_{m,h} - |Z_m - Z_{m,h}|\, Z_{m,h}} \\
&\leq c\frac{Z_{m,h}\zeta'_{m,h} + \left\|Z'_{m,h}\right\|_{\mathcal{Y}}\zeta_{m,h}}{Z^2_{m,h} - c\zeta_{m,h}Z_{m,h}}.
\end{aligned}$$

□

鉴于这一结果，我们接下来的任务是寻找可计算的 $\zeta_{m,h}$，$\zeta'_{m,h}$，使其满足条件 $|Z_m - Z_{m,h}| \leq c\zeta_{m,h}$ 和 $\left\|Z'_m - Z'_{m',h}\right\|_{\mathcal{Y}} \leq c\zeta'_{m,h}$，其中某个 $c > 0$ 与 m，h无关。因此，在接下来的章节中，我们将为贝叶斯逆问题和最优控制问题给出这样的误差估计量。

3.2 贝叶斯逆问题的有限元误差估计量

对于有限个观测泛函 $\mathcal{O} = (\mathcal{O}_1, \ldots\ldots, \mathcal{O}_K) \in (\mathcal{X}^*)^K$，定义 $\|\mathcal{O}\|_{\mathcal{X}^*} = \sqrt{\sum_{k=1}^K \|\mathcal{O}_k\|^2_{\mathcal{X}^*}}$ 估计有限元法误差的出发点是以下众所周知的结果，例如 [16]。设 $\{\mathcal{T}_h\}_{h\in H}$ 是 D 的一族形状正则单纯形网格，并设 $\mathbb{P}_k(\mathcal{T}_h)$ 是 $\mathcal{T}_h$ 上次数至多为 $k \in \mathbb{N}_0$ 的分片多项式函数集合，其中每个 $T \in \mathcal{T}_h$均如此。设 $\mathcal{E}_h$ 是所有单元 $T \in \mathcal{T}_h$的内部边集合。我们假设 $\mathcal{X}_h := \mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h) \cap \mathcal{X}$，$f \in L^2(D)$，且 $a(\boldsymbol{y}) \in W^{1,\infty}(D)$。令 $h_T = |T|^{1/2}$对应于 $T \in \mathcal{T}_h$，并令 h_e表示边 $e \in \mathcal{E}_h$的长度。于是定义后验误差估计量

$$\begin{aligned}
\eta^2_{\boldsymbol{y},h} := \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \Bigg[& h^2_T \left\|f + \operatorname{div}(a(\boldsymbol{y})\nabla u_h(\boldsymbol{y}))\right\|^2_{L^2(T)} \\
& + \frac{1}{2}\sum_{e\subseteq\partial T, e\in\mathcal{E}_h} h_e \left\|[\![a(\boldsymbol{y})\nabla u_h(\boldsymbol{y})]\!]\right\|^2_{L^2(e)} \Bigg].
\end{aligned} \tag{20}$$

根据 [16, 定理 6.3]，存在某个 $c^* > 0$，它仅取决于 D 和 $\{\mathcal{T}_h\}_{h\in H}$的形状正则性常数，使得对于所有 $\boldsymbol{y} \in U$ 和 $h \in H$

$$\|u(\boldsymbol{y}) - u_h(\boldsymbol{y})\|_{\mathcal{X}} \le c^* \eta_{\boldsymbol{y},h}. \tag{21}$$

对于重要的特殊情形 $\mathcal{O} \in (L^2(D))^K$ 和 $G \in L^2(D)$，我们可以推导出更精确的估计。为简化表述，这里假设物理域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个凸多边形（另见下文注 3），并引入 $L^2(D)$–残差估计器

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}^2_{\boldsymbol{y},h} := \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \Bigg[& h_T^4 \left\| f^*_{m,h} + \operatorname{div}(a(\boldsymbol{y})\nabla u_h(\boldsymbol{y})) \right\|^2_{L^2(T)} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{e\subseteq\partial T, e\in\mathcal{E}_h} h_e^3 \left\| [\![a(\boldsymbol{y})\nabla u_h(\boldsymbol{y})]\!] \right\|^2_{L^2(e)} \Bigg].\end{aligned} \tag{22}$$

额外因子 h_T，h_e 由标准的对偶性论证推导得出，参见例如 [21, 第 1.11] 节。于是，存在某个 $c^* > 0$，它仅依赖于 D 和 $\{\mathcal{T}_h\}_{h\in H}$的形状正则性常数，使得对所有 $\boldsymbol{y} \in U$ 和 $h \in H$

$$\|u(\boldsymbol{y}) - u_h(\boldsymbol{y})\|_{L^2(D)} \le c^* \tilde{\eta}_{\boldsymbol{y},h}. \tag{23}$$

引理 1. 固定由 D 中的单纯形构成的正则网格 $\mathcal{T}_h$ 和参数向量$\boldsymbol{y} \in U$，并假设 (21)。则

$$|\Theta(\boldsymbol{y}) - \Theta_h(\boldsymbol{y})| \le \Theta_h(\boldsymbol{y})(e^{\chi_{\boldsymbol{y},h}} - 1) =: \zeta_{\boldsymbol{y},h}$$

对.....成立

$$\chi_{\boldsymbol{y},h} := \left\| \Gamma^{-1/2}\mathcal{O} \right\|_{\mathcal{X}^*} \left[|\delta - \mathcal{O}(u_h(\boldsymbol{y}))|_\Gamma + \frac{1}{2} \left\| \Gamma^{-1/2}\mathcal{O} \right\|_{\mathcal{X}^*} c^* \eta_{\boldsymbol{y},h} \right] c^* \eta_{\boldsymbol{y},h}.$$

此外，若 $\mathcal{O} \in (L^2(D))^K$ 且 $G \in L^2(D)$，则

$$|\Theta(\boldsymbol{y}) - \Theta_h(\boldsymbol{y})| \le \Theta_h(\boldsymbol{y})(e^{\tilde{\chi}_{\boldsymbol{y},h}} - 1) := \tilde{\zeta}_{\boldsymbol{y},h}$$

对.....成立

$$\tilde{\chi}_{\boldsymbol{y},h} := \left\| \Gamma^{-1/2}\mathcal{O} \right\|_{L^2(D)} \left[|\delta - \mathcal{O}(u_h(\boldsymbol{y}))|_\Gamma + \frac{1}{2} \left\| \Gamma^{-1/2}\mathcal{O} \right\|_{L^2(D)} c^* \tilde{\eta}_{\boldsymbol{y},h} \right] c^* \tilde{\eta}_{\boldsymbol{y},h}.$$

证明。 我们定义 $\Delta_h(\boldsymbol{y}) := -\frac{1}{2} |\delta - \mathcal{O}(u(\boldsymbol{y}))|^2_\Gamma + \frac{1}{2} |\delta - \mathcal{O}(u_h(\boldsymbol{y}))|^2_\Gamma$，从而得到

$$|\Theta(\boldsymbol{y}) - \Theta_h(\boldsymbol{y})| = |\Theta_h(\boldsymbol{y})(e^{\Delta_h(\boldsymbol{y})} - 1)| \le \Theta_h(\boldsymbol{y})(e^{|\Delta_h(\boldsymbol{y})|} - 1).$$

利用式 (21)，现在可得该结论的第一部分，因为

$$\begin{aligned}|\Delta_h(\boldsymbol{y})| &\le \frac{1}{2} \left\| \Gamma^{-1/2}\mathcal{O} \right\|_{\mathcal{X}^*} |2\delta - \mathcal{O}(u(\boldsymbol{y}) + u_h(\boldsymbol{y}))|_\Gamma \|u(\boldsymbol{y}) - u_h(\boldsymbol{y})\|_{\mathcal{X}} \\ &\le \left\| \Gamma^{-1/2}\mathcal{O} \right\|_{\mathcal{X}^*} |\delta - \mathcal{O}(u_h(\boldsymbol{y}))|_\Gamma \|u(\boldsymbol{y}) - u_h(\boldsymbol{y})\|_{\mathcal{X}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\| \Gamma^{-1/2}\mathcal{O} \right\|^2_{\mathcal{X}^*} \|u(\boldsymbol{y}) - u_h(\boldsymbol{y})\|^2_{\mathcal{X}}.\end{aligned}$$

证明的第二部分可通过将 $\mathcal{X}$ 替换为 $L^2(D)$，并使用 (23) 代替 (21) 以类似方式得到。 □

引理 2。 固定一个由单纯形 $\mathcal{T}_h$ 和 $\boldsymbol{y} \in U$ 组成的正则网格，并假设 (21)。则存在一个常数 $c^* > 0$，使得对于所有 $\boldsymbol{y} \in U$ 和 $h \in H$

$$|\Theta'(\boldsymbol{y}) - \Theta'_h(\boldsymbol{y})| \leq \|G\|_{\mathcal{X}^*} \left(c^* \eta_{\boldsymbol{y},h} \Theta_h(\boldsymbol{y}) e^{\chi_{\boldsymbol{y},h}} + \zeta_{\boldsymbol{y},h} \|u_h(\boldsymbol{y})\|_{\mathcal{X}}\right) =: \zeta'_{\boldsymbol{y},h}.$$

此外，若 $\mathcal{O} \in (L^2(D))^K$ 且 $G \in L^2(D)$，则

$$|\Theta'(\boldsymbol{y}) - \Theta'_h(\boldsymbol{y})| \leq \|G\|_{L^2(D)} \left(c^* \tilde{\eta}_{\boldsymbol{y},h} \Theta_h(\boldsymbol{y}) e^{\tilde{\chi}_{\boldsymbol{y},h}} + \tilde{\zeta}_{\boldsymbol{y},h} \|u_h(\boldsymbol{y})\|_{L^2(D)}\right) =: \tilde{\zeta}'_{\boldsymbol{y},h}.$$

证明。 由于 $\Theta'(\boldsymbol{y}) = G(u(\boldsymbol{y}))\Theta(\boldsymbol{y}) = G(u(\boldsymbol{y})\Theta(\boldsymbol{y}))$，我们得到

$$\begin{aligned}|\Theta'(\boldsymbol{y}) - \Theta'_h(\boldsymbol{y})| &\leq \|G\|_{\mathcal{X}^*} \|u(\boldsymbol{y})\Theta(\boldsymbol{y}) - u_h(\boldsymbol{y})\Theta_h(\boldsymbol{y})\|_{\mathcal{X}} \\ &\leq \|G\|_{\mathcal{X}^*} \left(\|u(\boldsymbol{y}) - u_h(\boldsymbol{y})\|_{\mathcal{X}} \Theta(\boldsymbol{y}) + \|u_h(\boldsymbol{y})\|_{\mathcal{X}} |\Theta(\boldsymbol{y}) - \Theta_h(\boldsymbol{y})|\right),\end{aligned}$$

因此，结合引理 1 可得所述结论，因为 $\Theta(\boldsymbol{y}) \leq \Theta_h(\boldsymbol{y}) e^{\chi_{\boldsymbol{y},h}}$。该结论的第二部分可由引理 1 的第二部分以类似方式推出。 □

备注 2. 我们指出，引理 2 证明中的估计较为保守：我们在引理 1 中使用了 $K \geq 1$。对于 $K = 1$，即仅有一个观测泛函的情形，可以利用 [1], 及其中的参考文献所述的目标导向自适应有限元方法结果，以获得更紧的后验误差界。

我们通过对 $\zeta_{\boldsymbol{y},h}$ 取平均来定义 $\zeta_{m,h}$，其中 $\boldsymbol{y} \in P_m$，即 $\zeta_{m,h} := \frac{1}{b^m} \sum_{\boldsymbol{y} \in P_m} \zeta_{\boldsymbol{y},h}$。于是，由引理 1 可得

$$|Z_m - Z_{m,h}| \leq \frac{1}{b^m} \sum_{\boldsymbol{y} \in P_m} |\Theta(\boldsymbol{y}) - \Theta_h(\boldsymbol{y})| \leq \zeta_{m,h}. \tag{24}$$

同理，利用 $\zeta'_{m,h} = \frac{1}{b^m} \sum_{\boldsymbol{y} \in P_m} \zeta'_{\boldsymbol{y},h}$，引理 2 可得

$$\left|Z'_m - Z'_{m,h}\right| \leq \frac{1}{b^m} \sum_{\boldsymbol{y} \in P_m} |\Theta'(\boldsymbol{y}) - \Theta'_h(\boldsymbol{y})| \leq \zeta'_{m,h}. \tag{25}$$

特别地，如果我们构造 $\mathcal{T}_h$，使其同时满足 $\eta_{\boldsymbol{y},h} \to 0$ 对所有 $\boldsymbol{y} \in U$ 均有 $h \to 0$，则估计式 (24) 和 (25) 验证了命题 3 的假设，其中$c = 1$。

3.3 具有熵风险的最优控制问题的有限元误差估计量

对于最优控制问题，我们需要在离散最优控制 $f^*_{m,h}$ 处对参数化状态进行误差估计，即 $u(\boldsymbol{y}) = \mathcal{L}^{\boldsymbol{y}} f^*_{m,h}$，并对相应的伴随状态 $q(\boldsymbol{y}) = \alpha_1 \mathcal{L}^{\boldsymbol{y}}(\mathcal{L}^{\boldsymbol{y}} f^*_{m,h} - \hat{u})$ 进行误差估计。误差将通过 $L^2(D)$-范数度量。同样，我们假设 $\mathcal{X}_h := \mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h) \cap \mathcal{X}$，且 $f \in L^2(D)$ 和 $a(\boldsymbol{y}) \in W^{1,\infty}(D)$，并且 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个凸多边形。

引理 3。 固定网格 $\mathcal{T}_h$ 并施加 $\boldsymbol{y} \in U$ 以及 (23)。采用命题 *1* 的记号，并令 $\tilde{\eta}_{\boldsymbol{y},h}$ 按照 (22)中的定义给出，则有

$$|\Theta(\boldsymbol{y}) - \Theta_h(\boldsymbol{y})| \leq \Theta_h(\boldsymbol{y})(e^{\chi_{\boldsymbol{y},h}} - 1) =: \zeta_{\boldsymbol{y},h},$$

其中

$$\chi_{\boldsymbol{y},h} := \theta c^* \left(\frac{\alpha_1}{2} \tilde{\eta}^2_{\boldsymbol{y},h} + \alpha_1 \left\|\mathcal{L}^{\boldsymbol{y}}_h f^*_{m,h} - \hat{u}\right\|_{L^2(D)} \tilde{\eta}_{\boldsymbol{y},h}\right).$$

证明。 通过两次应用三角不等式，我们有

$$\begin{aligned}\left|\Phi_{f^*_{m,h}}(\boldsymbol{y})-\Phi_{h,f^*_{m,h}}(\boldsymbol{y})\right| &\le \frac{\alpha_1}{2}\left\|(\mathcal{L}^{\boldsymbol{y}}-\mathcal{L}^{\boldsymbol{y}}_h)f^*_{m,h}\right\|^2_{L^2(D)}\\ &\quad+\alpha_1\left\|\mathcal{L}^{\boldsymbol{y}}_h f^*_{m,h}-\hat{u}\right\|_{L^2(D)}\left\|(\mathcal{L}^{\boldsymbol{y}}-\mathcal{L}^{\boldsymbol{y}}_h)f^*_{m,h}\right\|_{L^2(D)}\\ &\le c^*\left(\frac{\alpha_1}{2}\tilde{\eta}^2_{\boldsymbol{y},h}+\alpha_1\left\|\mathcal{L}^{\boldsymbol{y}}_h f^*_{m,h}-\hat{u}\right\|_{L^2(D)}\tilde{\eta}_{\boldsymbol{y},h}\right)=:c^*\xi_{\boldsymbol{y},h}.\end{aligned}$$

注意到，由注 1 可计算 $\xi_{\boldsymbol{y},h}$。于是，由 $\Delta_h(\boldsymbol{y}):=\theta(\Phi_{f^*_{m,h}}(\boldsymbol{y})-\Phi_{h,f^*_{m,h}}(\boldsymbol{y}))$ 可得

$$|\Theta(\boldsymbol{y})-\Theta_h(\boldsymbol{y})|=\left|\Theta_h(\boldsymbol{y})(e^{\Delta_h(\boldsymbol{y})}-1)\right|\le\Theta_h(\boldsymbol{y})(e^{|\Delta_h(\boldsymbol{y})|}-1).$$

□

对伴随问题使用形式为 (22) 的残差估计器可得

$$\|q(\boldsymbol{y})-q_h(\boldsymbol{y})\|_{L^2(D)}\le 2\max(c^*,1)c^*\tilde{\tilde{\eta}}_{\boldsymbol{y},h},\tag{26}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{\eta}}^2_{\boldsymbol{y},h}:=\alpha_1^2\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\Bigg[&h_T^4\left\|u_h(\boldsymbol{y})-\hat{u}+\operatorname{div}(a(\boldsymbol{y})\nabla q_h(\boldsymbol{y}))\right\|^2_{L^2(T)}\\ &+\frac{1}{2}\sum_{e\subseteq\partial T,e\in\mathcal{E}_h}h_e^3\left\|[\![a(\boldsymbol{y})\nabla q_h(\boldsymbol{y})]\!]\right\|^2_{L^2(e)}\Bigg]+(\max_{T\in\mathcal{T}_h}h_T^4)\tilde{\eta}^2_{\boldsymbol{y},h}.\end{aligned}\tag{27}$$

引理 4. 设 $\mathcal{Y}=L^2(D)$。固定网格 $\mathcal{T}_h$ 和 $\boldsymbol{y}\in U$，并施加 (23) 和(26)。采用命题 *1* 中的记号，我们有

$$\|\Theta'(\boldsymbol{y})-\Theta'_h(\boldsymbol{y})\|_{\mathcal{Y}}\le\zeta_{\boldsymbol{y},h}\|q_h(\boldsymbol{y})\|_{\mathcal{Y}}+2c^*\Theta_h(\boldsymbol{y})e^{\chi_{\boldsymbol{y},h}}\tilde{\tilde{\eta}}_{\boldsymbol{y},h}=:\zeta'_{\boldsymbol{y},h}.$$

证明。 如引理 2 的证明所示，由 $\Theta(\boldsymbol{y})\le\Theta_h(\boldsymbol{y})e^{\chi_{\boldsymbol{y},h}}$ 可得

$$\begin{aligned}\|q(\boldsymbol{y})\Theta(\boldsymbol{y})-q_h(\boldsymbol{y})\Theta_h(\boldsymbol{y})\|_{\mathcal{Y}}&\le|\Theta(\boldsymbol{y})-\Theta_h(\boldsymbol{y})|\,\|q_h(\boldsymbol{y})\|_{\mathcal{Y}}\\ &\quad+\Theta(\boldsymbol{y})\|q(\boldsymbol{y})-q_h(\boldsymbol{y})\|_{\mathcal{Y}}\\ &\le\zeta_{\boldsymbol{y},h}\|q_h(\boldsymbol{y})\|_{\mathcal{Y}}+2c^*\Theta_h(\boldsymbol{y})e^{\chi_{\boldsymbol{y},h}}\tilde{\tilde{\eta}}_{\boldsymbol{y},h}.\end{aligned}$$

□

注 3. 若 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 是非凸多边形，则可靠性假设 (23) 以及 $\tilde{\eta}_{\boldsymbol{y},h},\tilde{\tilde{\eta}}_{\boldsymbol{y},h}$ 的相应定义 (22)、(27) 必须通过采用带权 L^2 范数进行调整，并在凹角附近设置权重。关于泊松方程情形下的精确结果，参见 [22, 定理 3.1] 。

4 准蒙特卡罗-有限元法组合估计量

鉴于命题 2 和 3，我们采用可计算的后验估计器

$$EST_{b^m,h}:=\|E_{b^m}(\Theta'_h,\Theta_h)\|_{\mathcal{Y}}+\frac{Z_{m,h}\zeta'_{m,h}+\left\|Z'_{m,h}\right\|_{\mathcal{Y}}\zeta_{m,h}}{Z^2_{m,h}-\zeta_{m,h}Z_{m,h}}.\tag{28}$$

请注意，由命题 2 得出的 QMC 误差估计量 $\|E_{b^m}(\Theta',\Theta)\|_{\mathcal{Y}}$ 本身也是通过可计算表达式 $\|E_{b^m}(\Theta'_h,\Theta_h)\|_{\mathcal{Y}}$ 进行逼近的。下一命题将明确指出，由此额外逼近所产生的误差具有更高的渐近阶，即 $m\to\infty$。我们在集合$C^0(U,\mathcal{Y})$ 上赋予范数 $\|F\|_\infty=\sup_{\boldsymbol{y}\in U}\|F(\boldsymbol{y})\|_{\mathcal{Y}}$。

命题 4. 固定一族正则网格 $\{\mathcal{T}_h\}_{h\in H}$，使得对于某个$C>0$（与 $s\in\mathbb{N}$ 无关），$h\in H$，并且对于某些 *SPOD* 权重 (16)，有

$$\max(\|\Theta\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}},\|\Theta'\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}},\|\Theta_h\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}},\|\Theta'_h\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}})\le\tilde{C}. \tag{29}$$

假设空间 $\{\mathcal{X}_h\}_h$ 包含于 $\mathcal{X}$，并且它们的选取满足：当 $h\to0$ 时，$\|\Theta-\Theta_h\|_\infty\to0$。那么我们可以构造一个多项式格序列 $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$，其构造需要 $O(smb^m+s^2b^m)$ 次运算；对于某个 $h_0\in H$ 以及某个常数 $C>0$（与 m、h、s 无关），对任意 $h<h_0$，有

$$\begin{aligned}&\|E_{b^m}(\Theta',\Theta)-E_{b^m}(\Theta'_h,\Theta_h)\|_{\mathcal{Y}}\\&\quad\le Cb^{-m}(\|\Theta-\Theta_h\|_\infty+\|\Theta'-\Theta'_h\|_\infty+\|\Theta-\Theta_h\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}}+\|\Theta'-\Theta'_h\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}}).\end{aligned}$$

证明。在整个证明过程中，$C>0$ 表示一个与 m,h,s 无关的通用常数。我们计算分子的差

$$\begin{aligned}\Delta_1&:=Z_{m-1}Z'_m-Z_mZ'_{m-1}-Z_{m-1,h}Z'_{m,h}+Z_{m,h}Z'_{m-1,h}\\&=-(Z_m-Z_{m-1})(Z'_m-Z'_{m,h})-(Z_m-Z_{m,h}-Z_{m-1}+Z_{m-1,h})Z'_{m,h}\\&\quad+(Z_m-Z_{m,h})(Z'_m-Z'_{m-1})+Z_{m,h}(Z'_m-Z'_{m,h}-Z'_{m-1}+Z'_{m-1,h}).\end{aligned}$$

我们有$|Z_m-Z_{m,h}|\le\|\Theta-\Theta_h\|_\infty$ 以及 $\left\|Z'_m-Z'_{m,h}\right\|_{\mathcal{Y}}\le\|\Theta'-\Theta'_h\|_\infty$。由定理 1 可知，当 $m\to\infty$ 时，$Z_m=Z_{m-1}+\|\Theta\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}}O(b^{-m})$ 以及 $Z'_m=Z'_{m-1}+\|\Theta'\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}}O(b^{-m})$，其中 $O(\cdot)$ 中隐含的常数与s、m、h 无关。此外，$Z_m-Z_{m,h}-Z_{m-1}+Z_{m-1,h}=\|\Theta-\Theta_h\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}}O(b^{-m})$ 以及$Z'_m-Z'_{m,h}-Z'_{m-1}+Z'_{m-1,h}=\|\Theta'-\Theta'_h\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}}O(b^{-m})$ 也可由定理 1 得出。因此，我们有

$$\|\Delta_1\|_{\mathcal{Y}}\le Cb^{-m}(\|\Theta-\Theta_h\|_\infty+\|\Theta'-\Theta'_h\|_\infty+\|\Theta-\Theta_h\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}}+\|\Theta'-\Theta'_h\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}}).$$

接下来，我们定义 $T_1:=Z_{m-1,h}Z'_{m,h}-Z_{m,h}Z'_{m-1,h}$ 并得到估计 $\|T_1\|_{\mathcal{Y}}\le C(\|\Theta_h\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}}+\|\Theta'_h\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}})b^{-m}$。此外，

$$\begin{aligned}\Delta_2&:=(bZ_m-Z_{m-1})Z_m-(bZ_{m,h}-Z_{m-1,h})Z_{m,h}\\&=(b(Z_m-Z_{m,h})+(Z_{m-1,h}-Z_{m-1}))Z_m+(bZ_{m,h}-Z_{m-1,h})(Z_m-Z_{m,h})\end{aligned}$$

给出 $|\Delta_2|\le C\|\Theta-\Theta_h\|_\infty$。接下来，我们注意到，对于充分小的 h，$T_2=(bZ_{m,h}-Z_{m-1,h})Z_{m,h}$的下界严格大于0。因此，对于充分小的 h，我们应用初等不等式

$$\left\|\frac{T_1+\Delta_1}{T_2+\Delta_2}-\frac{T_1}{T_2}\right\|_{\mathcal{Y}}\le\max(\|\Delta_1\|_{\mathcal{Y}},\|T_1\Delta_2\|_{\mathcal{Y}})\frac{1+|T_2|}{|T_2|\,(|T_2|-|\Delta_2|)},$$

对 T_1，T_2，Δ_1，$\Delta_2\in\mathbb{R}$，其中 $|\Delta_2|<|T_2|$，由于 $|\Delta_2|\to0$，因此满足条件，因为 $h\to0$。综合以上所有观察，我们便得到所述结论。 □

定理 2。 对于贝叶斯逆问题或最优控制问题，假设 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个凸多边形，且偏微分方程 (5) 满足 (6)、(7)、 $f \in L^2(D)$ 以及 $\boldsymbol{b}' \in \ell^p(\mathbb{N})$ $p \in (0、1/2]$，其中 $b'_j = \|\psi_j\|_{W^{1,\infty}(D)}$。设 $\mathcal{X}_h = \mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h) \cap \mathcal{X}$是一族形状正则网格 $\mathcal{T}_h$，满足 $h = \max_{T\in\mathcal{T}_h} h_T$。那么，我们可以构造多项式格 $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$，使得估计量 $EST_{b^m,h}$ 满足 (28)

$$\left\| \frac{Z'}{Z} - \frac{Z'_{m,h}}{Z_{m,h}} \right\|_{\mathcal{Y}} \leq EST_{b^m,h} + O(b^{-2m+\varepsilon} + b^{-m}h),$$

对于任意 $\varepsilon > 0$，当 $m \to \infty, h \to 0$ 时。 $O(\cdot)$ 中的常数与 s, m 和 h 无关，但取决于 ε。

证明。 由于 $b_j \leq b'_j$，根据推论 1 或 2，存在如 (16) 中的 SPOD 权重 $\boldsymbol{\gamma}'$，满足 $\boldsymbol{\beta}' \sim \boldsymbol{b}'$，使得 $\sup_s \|\Theta\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}'} + \|\Theta'\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}'} < \infty$。结合 (20)、引理 1 和 $h \to 0$，对于任意 $m \in \mathbb{N}$，我们可得贝叶斯逆问题情形下的 $\zeta_{m,h} \to 0$。类似地，结合 (22) 和引理 3，可得最优控制问题情形下相同的结论。因此，我们可以应用命题 2 和 3，得到可以构造多项式格，使得当 $m \to \infty$

$$\left\| \frac{Z'}{Z} - \frac{Z'_{m,h}}{Z_{m,h}} \right\|_{\mathcal{Y}} \leq \|E_{b^m}(\Theta', \Theta)\|_{\mathcal{Y}} + \frac{Z_{m,h}\zeta'_{m,h} + \left\|Z'_{m,h}\right\|_{\mathcal{Y}} \zeta_{m,h}}{Z^2_{m,h} - \zeta_{m,h}Z_{m,h}} + O(b^{-2m+\varepsilon}).$$

接下来，我们称 $\boldsymbol{\rho} \in (1,\infty)^{\mathbb{N}}$ 是 $(\boldsymbol{b}', \varepsilon)$-可容许的，如果 $\sum_{j\geq 1}(\rho_j - 1)b'_j \leq \varepsilon$，见 [4]。然后我们定义 $\mathfrak{T}_{\boldsymbol{b}',\varepsilon} = \bigcup_{\boldsymbol{\rho}\,(\boldsymbol{b}',\varepsilon)\text{-可容许}} \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^s : \operatorname{dist}(y_j, [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) \leq \rho_j - 1\}$。按照 [2, 定理 4.1], 中的计算，对于 $h_0 \in H$ 和充分小的 $\varepsilon > 0$，我们得到 $\sup_{\boldsymbol{y}\in\mathfrak{T}_{\boldsymbol{b}',\varepsilon}} |\Theta(\boldsymbol{y}) - \Theta_h(\boldsymbol{y})| + \|\Theta'(\boldsymbol{y}) - \Theta'_h(\boldsymbol{y})\|_{\mathcal{Y}} \leq Ch$ 对所有 $h \leq h_0$, $h \in H$ 均成立。根据 [4, 定理 3.1], ，这意味着存在一个与 h, s 无关的常数 C,

$$\|\Theta - \Theta_h\|_{\infty} + \|\Theta' - \Theta'_h\|_{\infty} + \|\Theta - \Theta_h\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}'} + \|\Theta' - \Theta'_h\|_{s,\alpha,\boldsymbol{\gamma}'} \leq Ch.$$

因此，(29) 和 $\|\Theta - \Theta_h\|_{\infty} \to 0$ 成立，我们应用命题 4 得出结论。

□

5 数值实验

我们在物理域 $D := (0, 1)^2$, 上考虑偏微分方程 (5)，其中 $f \equiv 10$，参数化扩散系数为

$$a(x, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{16} \frac{y_j}{(k_{j,1}^2 + k_{j,2}^2)^2} \sin(k_{j,1}x_1) \sin(k_{j,2}x_2).$$

数对 $(k_j,1, k_j,2) \in \mathbb{N}^2$ 由 $\mathbb{N}^2$ 的排序定义，使得对于 $j \in \mathbb{N}, k_{j,1}^2 + k_{j,2}^2 \leq k_{j+1,1}^2 + k_{j+1}^2,2$，若相等则排序任意。我们研究一个贝叶斯逆问题，其观测泛函 $\mathcal{O} = (\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_4) \in (L^2(D))^4$, 由 $\mathcal{O}_k(v) := \frac{1}{0.01}\int_{I_k} v dx$ 给出，其中 $v \in L^2(D)$ 和 $k = 1, \ldots, 4$，且 $I_1 := [0.1, 0.2]^2, I_2 := [0.1, 0.2] \times [0.8, 0.9], I_3 := [0.8, 0.9] \times [0.1, 0.2], I_4 := [0.8, 0.9]^2$。我们抽取一个（随机）样本 a，以计算在一系列通过均匀细化得到的规则三角形有限元网格上观测值 $\mathcal{O}(\mathcal{S}(a))$的“真实值”，这些网格

其自由度为525.313。我们向观测值添加随机噪声 $\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathcal{I}_4)$，其中 σ 设为 $\mathcal{O}(\mathcal{S}(a)) \in \mathbb{R}^4$的算术平均值的10%。实现得到的合成数据为$\delta = (0.5205, 0.5037, 0.5443, 0.4609)^\top$。一个众所周知的问题是，随着 $\sigma \to 0$（即 $Z \to 0$）增大，比率估计量的性能会下降；关于这一问题的进一步讨论，参见下文第6节。

我们的目标是通过比率估计量 Z 近似 $\mathbb{E}^{\pi^\delta}[G(u)]$ $= \frac{1}{0.5} \int_{[0.25,0.75]^2} v dx$ 对于 $v \in L^2(D)$。有限元网格和多项式格点规则最终决定 h 和 m，并根据式 (28) 中的组合估计量逐步细化。对于容差 τ_{FEM}、$\tau_{QMC} > 0$，我们从一个包含 D 的初始有限元网格开始，并对其进行均匀细化，直至满足停止准则 $\leq \tau_{FEM}$。此后，我们增加格点数 b^m，直至满足 $|E_{b^m}(\Theta'_h, \Theta_h)| \leq \tau_{QMC}$。我们以包含 41 个自由度的有限元网格和具有基数 $b = 2$、参数 $m_0 = 2$ 的 b^{m_0} 个准蒙特卡罗点作为初始设置，并将容差设为 $\tau_{FEM} = \tau_{QMC} = 2^{-6}$。为评估实际得到的总误差，我们通过多层蒙特卡罗比率估计量计算参考解 Z' ref$_{Z_{\text{ref}}}$，参见 [17]，并报告绝对误差 $\left| \frac{Z'_m}{Z_m} - \frac{Z'}{Z_{\text{ref}}} \right|$。参考估计量使用 6 个细化层级，最粗层和最细层的自由度分别为 545/525.313，并使用均匀的（伪）随机数 y_0。每一层的样本数均经过调整，以平衡统计误差和离散化偏差。该实验使用 MATLAB 和 MooAFEM 库 [11] 实现有限元离散化。所有产生的线性系统均由 MATLAB 中的 \ 算子直接求解。

估计误差和实际误差随迭代次数（按细化步计）的变化如图 1 所示。这里，在较粗的网格上，有限元后验估计器给出的值为负，其中 $c^* \tilde{\eta}_{\boldsymbol{y},h} > 1$。因此，我们在图中剔除了这些“预渐近”值。可以看到，命题 3 中的有限元后验估计器起初较为保守，但随着网格变细，最终逐渐接近实际误差。准蒙特卡罗估计量 $|E_{b^m}(\Theta'_h, \Theta'_h)|$ 起初与 σ 的量级相同；有限元网格足够细后，只需再进行两步细化。正如理论分析所预期的，综合误差估计 $EST_{b^m,h}$ 与实际误差吻合良好。

6 结论

本文概述了后验 QMC-FEM 估计器的构造，该估计器可用于量化以下近似误差：a）贝叶斯反问题中的后验期望，以及 b）熵风险度量下的最优控制。该估计器可计算，适用于参数数量较多的情形 s，并且渐近地构成 a）和 b）中误差的上界。此外，所求量的特定比值结构 $\frac{Z'}{Z}$ 使得我们能够以统一的方式处理贝叶斯逆问题和最优控制问题。在这两种情况下，我们都假设底层模型是具有仿射参数化扩散的参数化椭圆偏微分方程。尽管如此，目前用于高维积分的 QMC 方法也适用于具有已量化的全纯参数依赖的非仿射参数化偏微分方程，参见 [4] 及其中的参考文献

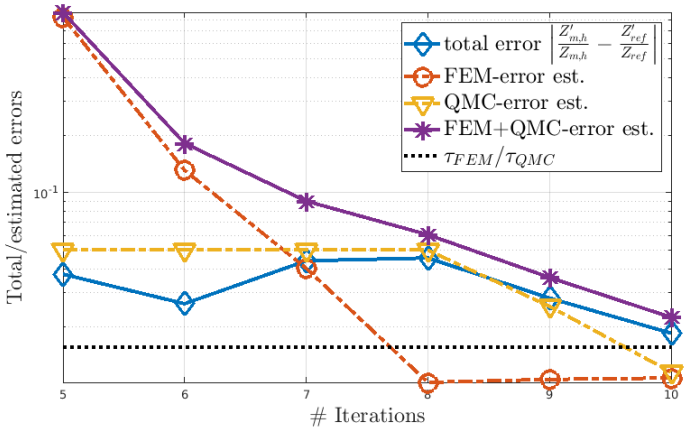

图 1： 采用后验比率细化的 QMC-FEM 比率估计量结果。首先细化有限元网格，直至达到容差 τ_{FEM} （带圆点的虚线），然后进行 QMC 后验细化（带三角形的虚线）。对于粗网格，估计误差（带星号的实线）较为保守，但最终会逐渐接近实际误差（带菱形的实线）。

因此。由于误差估计量 $\eta_{\boldsymbol{y},\,h}$，$\tilde{\eta}_{\boldsymbol{y},\,h}$，$\tilde{\tilde{\eta}}_{\boldsymbol{y},\,h}$ 表示为针对 $T \in \mathcal{T}_h$ 的局部误差贡献之和，一个可能的研究方向是利用当前提出的估计量 $\zeta_{\boldsymbol{y},\,h}$，$\zeta'_{\boldsymbol{y},\,h}$ 来指导自适应 QMC-FEM 算法 [13]。

在 $\Gamma \downarrow 0$ 小噪声极限（或在 $K \gg 1$大数据情形）下，贝叶斯逆问题中比率估计量的性能会恶化：两种情况下分母 $Z \to 0$。仅凭本文提出的技术无法克服比率估计量相对于 Γ 的非稳健性。按照 [19]中的说明，在对后验分布进行适当的重新参数化后应用本文方法，或许可以缓解这一问题。鉴于 [2]，在第 1.1 小节的一致椭圆情形下，可以构造多层比率估计量的后验误差界。由于篇幅所限，本文未纳入这些扩展，但将作为未来的研究方向。

参考文献

[1] R. Becker、M. Brunner、M. Innerberger、J. M. Melenk 和 D. Praetorius。半线性椭圆偏微分方程的速率最优目标导向自适应有限元法。*Comput. Math. Appl.*，118：18–35，2022年。[2] J. Dick、R. N. Gantner、Q. T. L. Gia 和 Ch. Schwab。多层高阶准蒙特卡罗贝叶斯估计。*Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*，27(5)：953–995，2017年。[3] J. Dick、T. Goda 和 T. Yoshiki。多项式格点规则的理查森外推。*SIAM J. Numer. Anal.*，57(1)：44–69，2019年。[4] J. Dick、Q. T. Le Gia 和 Ch. Schwab。全纯参数化算子方程的高阶准蒙特卡罗积分。*SIAM/ASA J. Uncertain. Quantif.*，4(1)：48–79，2016年。

[5] J. Dick、M. Longo 和 Ch. Schwab。计算不确定性量化中的外推多项式格点规则积分。*SIAM/ASA J. Uncertain. Quantif.*，10(2)：651–686，2022年。[6] A. Ern 和 J.-L. Guermond。有限元 *I*——逼近与插值，应用数学文本丛书第72卷。施普林格，Cham，2021年。[7] H. Föllmer 和 T. Knispel。熵风险度量：相干性与凸性、模型模糊性及稳健大偏差。*Stoch. Dyn.*，11(2-3)：333–351，2011年。[8] P. A. Guth、V. Kaarnioja、F. Y. Kuo、C. Schillings 和 I. H. Sloan。用于不确定性下最优控制的拟蒙特卡罗方法。*SIAM/ASA J. Uncertain. Quantif.*，9(2)：354–383，2021年。[9] P. A. Guth、V. Kaarnioja、F. Y. Kuo、C. Schillings 和 I. H. Sloan。采用拟蒙特卡罗积分、具有熵风险度量的不确定性下抛物型偏微分方程约束最优控制。arXiv:2208.02767，2022年。[10] L. Herrmann、M. Keller、Ch. Schwab。椭圆型反问题中 Besov 先验下的拟蒙特卡罗贝叶斯估计。Math. Comp.，**90**(2021) 1831–1860。[11] M. Innerberger 和 D. Praetorius。“MooAFEM：用于高阶（非线性）自适应有限元法的面向对象 MATLAB 代码。”，arXiv:2203.01845，2022年。[12] D. P. Kouri 和 T. M. Surowiec。风险规避型偏微分方程约束优化的存在性与最优性条件。*SIAM/ASA J. Uncertain. Quantif.*，6 815，2018 2 787( ): – 。[13] M. Longo。参数化椭圆偏微分方程的自适应拟蒙特卡罗有限元方法。*J. Sci. Comput.*，92(1)，2022年。[14] M. Longo。计算不确定性量化中的外推多项式格与自适应性。博士论文，苏黎世联邦理工学院，2022年。[15] H. Niederreiter。通过有限域上的数字构造得到的低差异点集。*Czechoslovak Math. J.*，42(117)(1)：143–166，1992年。[16] R. H. Nochetto、K. G. Siebert 和 A. Veeser。自适应有限元方法理论：导论。载于多尺度、非线性与自适应逼近，第409–542页。施普林格，柏林，2009年。[17] R. Scheichl、A.M. Stuart 和 A.L. Teckentrup。用于计算椭圆型反问题后验期望的拟蒙特卡罗与多层蒙特卡罗方法。*SIAM/ASA J. Uncertain. Quantif.*，5(1)：493-518，2017年。[18] C. Schillings 和 Ch. Schwab。参数化算子方程贝叶斯反演中的稀疏性。《反问题》，30(6)：065007，30，2014年。[19] C. Schillings 和 Ch. Schwab。计算贝叶斯反演中的尺度极限。*ESAIM*：数学建模与数值分析，50(6)：1825-1856，2016年。[20] A. M. Stuart。反问题：贝叶斯视角。*Acta Numer.*，19 559，2010 451：– 。[21] R. Verfürth。有限元方法的后验误差估计技术。数值数学与科学计算。牛津大学出版社，牛津，2013年。[22] T. P. Wihler。多边形中有限元法的加权 L^2-范数后验误差估计。*Int. J. Numer. Anal. Model.*，4(1)：100–115，2007年。