arXiv:2301.03328v1 [stat.AP] 9 Jan 2023

基于时空 Copula 时间序列模型的天然气价格预测

Sven Pappert[a,*], Antonia Arsova[a,b]

[a]多特蒙德工业大学计量经济学教席、统计系，德国[b]莱布尼茨经济研究所，德国

摘要

大宗商品价格时间序列具有一些有趣的特征，例如重尾性、偏度、异方差性和非线性依赖结构。这些特征给建模和预测带来了挑战。本文探讨如何有效地运用时空 Copula 时间序列模型来应对这些问题。我们重点关注化石燃料和碳排放的价格序列。此外，我们还展示了如何将 t-Copula 用于条件异方差建模，并考察和可视化这一背景下可能出现的非椭圆概率预测。本文讨论了如何根据非椭圆概率预测确定合适的点预测，并提出一种解决方案：利用人工神经网络（人工神经网络）增强预测。该人工神经网络预测作为点预测时效果最佳（以均方误差衡量）的分位数。在一项预测研究中，我们发现基于 Copula 的模型具有竞争力。

关键词：大宗商品价格、基于 Copula 的时间序列、条件波动率，预测，藤 Copula

*通讯作者电子邮箱： pappert@statistik.tu-dortmund.de (SvenPappert),arsova@statistik.tu-dortmund.de (Antonia Arsova)

提交至《统计学贡献》的预印本 *2023*年*1*月*10*日

1. 引言

对大宗商品价格进行建模和预测，对于交易、政治决策和经济调整都很重要。尤其是近期，俄罗斯入侵乌克兰后，天然气价格预测变得愈发重要。在本研究中，我们着重于对短期天然气期货价格及相关大宗商品价格进行联合建模和预测。我们对这些时间序列进行联合建模，以利用它们相互依赖关系所承载的额外信息。为此，我们采用基于时空 Copula 的时间序列模型。

Copula 是在金融市场的 copula-GARCH 方法中用于建模时间序列横截面依赖的常用选择 [16, 18]，能源市场中也同样如此 [2, 7]。在 copula-GARCH 方法中，每个时间序列的时间依赖由典型的时间序列模型（如 ARMA-GARCH）建模。通过求取单变量时间序列模型标准化残差的 Copula，可以捕捉时间序列的横截面依赖结构。不过，这类模型只能灵活描述横截面维度上的依赖结构。均值过程则采用线性模型建模。

另一方面，时间 Copula 建模（或“基于 Copula 的时间序列建模”）以及时空 Copula 时间序列建模，为经典线性时间序列方法提供了替代方案。这些模型能够灵活地描述横截面依赖和时间依赖。相关研究正不断涌现。Chen & Fan[8] 研究了基于 copula 的半参数时间序列模型的估计。作者给出了 β-混合条件，并使用 Delta 方法证明了相合性和渐近正态性。Beare [4] 进一步研究了混合条件。Smith 等人 [23] 使用成对 Copula 构造分解日内电力负荷的序列依赖。Simard 和 Rémillard [21] 研究了时空 t-Copula 在不同依赖强度和结构以及边缘分布下的预测表现。Beare & Seo [5] 以及 Nagler 等人 [19] 考察了时空 Vine Copula 模型。

以下是灵活的依赖建模可能发挥重要作用的例子。国际股票市场之间的横截面依赖可能呈现非对称性，且下尾依赖占主导地位，这表明金融市场中存在传染效应。Hu [16] 对此进行了研究，发现非对称依赖占主导地位。关于能源市场，Aloui 等人[2] 发现，原油和天然气市场在牛市时期的走势更为同步。此外

表现出非对称横截面依赖结构。Beare 的研究导言中给出了一个简明示例，说明时间域中可能出现非线性依赖结构，因此需要采用复杂的依赖建模方法 [4]。金融时间序列持续增长，与其突然且迅速的下跌形成对比，呈现出非对称时间关系。因此，横截面依赖建模和时间依赖建模在许多领域都可能十分重要。

本文探讨了时空 Copula 模型用于能源市场时间序列建模的可能性及表现。使用 Copula 进行时空时间序列建模的基本思想，是对联合分布进行分解。根据 Sklar 定理， [22] 连续观测值的联合分布被分解为依赖结构和边缘结构，$F_{\mathbf{X}_t,\ \mathbf{X}_{t-1}}(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = C\left[F_{\mathbf{X}_t}(\mathbf{a})\ F_{\mathbf{X}_{t-1}}(\mathbf{b})\right]$。可以采用各种 copula 设定。在本文中，t-Copula [11] 和高斯 Copula 被视为时空时间序列建模的基础 Copula 模型。此外，我们也考虑了藤 Copula 模型。文献 [21]探讨了使用 t-Copula 进行时空预测。文献 [5, 19, 23]等研究了多元时间序列的时空藤 Copula 建模。

利用条件 Copula 的概念，这些模型可用于预测。由此得到的概率预测可能呈非椭圆形。在这种情况下，何为合理的点预测并不显而易见。对于椭圆或近似椭圆的概率预测，期望值是合理的点预测。对于非椭圆预测，例如双峰概率预测，期望值所预测的点出现的可能性很低。解决这一问题的一种方法是将概率预测的众数作为点预测。另一种方法是在预测过程中加入人工神经网络 (ANN)[1] 。ANN预测概率预测中哪个分位数作为点预测最优（以均方误差为准）。ANN的输入是时间序列的历史值和最近的最优分位数。ANN增强的预测有一项优势：ANN的估计和预测应用可完全独立于概率时间序列模型的估计和预测。众所周知，ANN在点预测方面非常强大。采用这种方法，ANN点预测也配有基础概率分布，从而能够计算置信度

[1]简要介绍请参阅 [14]。

区间及其他分布特性。我们通过一项预测研究考察模型的表现。我们将一个与 [6], 所提出的模型密切相关、且已被证明优于其他常用模型的模型作为基准。研究发现，对于天然气及相关大宗商品价格的预测，采用 ANN增强的点预测的时空 Copula 时间序列建模具有竞争力。

本文的主要贡献有两方面。第一，面向应用探索了适用于能源市场的时空（藤）Copula 时间序列模型。我们在一项预测研究中评估了这些模型的表现，发现其效果良好。第二，从方法论角度探索了如何根据非椭圆概率预测进行点预测，并纳入了经人工神经网络增强的预测。

下一节第2节将简要介绍本文使用的数据。第3节将介绍本文采用的统计方法。预测研究的实证结果将在第4节呈现，而第5 节将总结研究结果，并概述未来研究的一些方向。

2. 数据描述

本文分析的时间序列取自网络平台investing.com，使用 Python 软件包 investpy [10]。我们分析荷兰（TTF 枢纽）的月度天然气期货（NGas）。用于建模的相关大宗商品包括短期期碳排放期货（CEF）、短期布伦特原油期货（oil）和短期煤炭期货（coal）。所分析的时间序列由每日观测值构成。观测期为2010年3月至2021年2月。时间序列总计包含2861个观测值。缺失值（尤其是在节假日期间出现的缺失值）均以最后一个已知值进行简单填补。原始时间序列为非平稳序列。为达到平稳性（这是本文所用方法的必要条件），我们对时间序列进行了一阶差分。差分时间序列见图1。迪基-富勒检验在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下拒绝了所有时间序列一阶差分序列非平稳的假设。

3. 统计方法

本节介绍本报告所用方法。首先介绍 Copula 及相关概念。随后介绍并讨论分析中使用的

Copula 设定。接着介绍 Copula 在时间序列建模中的应用。本文还将探讨与 t-Copula 相关的非椭圆概率预测，并说明如何使用 t-Copula 对条件异方差进行建模。最后阐述对新型点预测方法的需求。

3.1. Copula

Copula 是定义在单位立方体上的、具有均匀边缘分布的分布函数：

$$C : [0,1]^d \to [0,1]. \tag{1}$$

根据 Sklar 定理，Copula [22]具有重要意义。该定理指出，每个多元分布都可以分解为一个 Copula 和边缘分布。设$X_1, \ldots, X_d$为取实数值的随机变量，其联合分布为$F_{X_1,\ldots,X_d}$，边缘分布为 $F_{X_1}, \ldots, F_{X_d}$。则存在一个 Copula C，使得

$$F_{X_1,\ldots,X_d}(x_1, \ldots, x_d) = C_{U_1,\ldots,U_d}\left[F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_d}(x_d)\right], \tag{2}$$

其中 $(U_1, \ldots, U_d) := (F_{X_1}(X_1) \ldots, F_{X_d}(X_d))$。下文将省略 Copula 的下标。若随机变量 $X_1, \ldots, X_d$ 连续，则该分解是唯一的 [17]。根据概率积分变换，伪观测值 $(u_1, \ldots, u_d) := F_{X_1}(x_1) \ldots, F_{X_d}(x_d)$ 是来自均匀分布的实现值，$U_i = F_{X_i}(X_i) \sim U[0,1], i \in \{1, \ldots, d\}$ [3]。因此，Copula 可被解释为随机变量 $X_1, \ldots, X_d$ 的依赖结构。

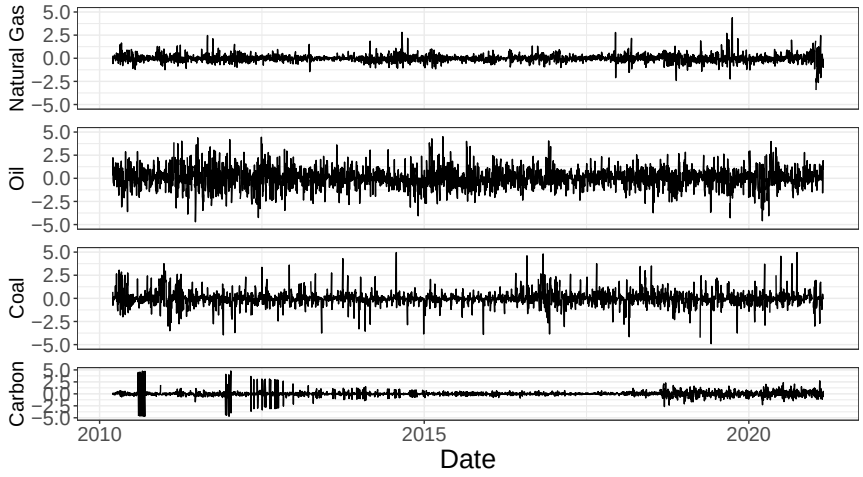


图 1：相应大宗商品价格时间序列的一阶差分。

Copula 密度， c 它将联合密度$f_{X_1,\ldots,X_d}$ 与边缘密度$f_{X_1},\ldots,f_{X_d}$可通过对式2 求导直接得到，

$$f_{X_1,\ldots,X_d}(x_1,\ldots,x_d) = c\left[F_{X_1}(x_1),\ldots,F_{X_d}(x_d)\right] f_{X_1}(x_1)\ldots f_{X_d}(x_d), \tag{3}$$

$$c[u_1,\ldots,u_d] = \frac{\partial^d C[u_1,\ldots,u_d]}{\partial u_1\ldots\partial u_d}. \tag{4}$$

Copula 密度对于通过最大似然进行估计以及依赖结构的可视化都非常重要。本文还将利用 Copula 密度引入藤 Copula 模型的概念。依赖建模中的另一个重要概念是给定 $U_1,\ldots,U_i$时 $U_{i+1},\ldots,U_d$ 的条件 Copula，亦即条件 Copula 密度。条件 Copula（密度）也可以由式2 推导得出。其表达式为 [21]，

$$C[u_1,\ldots,u_i|u_{i+1},\ldots,u_d] = \frac{\partial_{u_{i+1}}\ldots\partial_{u_d} C[u_1,\ldots,u_d]}{c[u_{i+1},\ldots,u_d]}, \tag{5}$$

$$c[u_1,\ldots,u_i|u_{i+1},\ldots,u_d] = \frac{c[u_1,\ldots,u_d]}{c[u_{i+1},\ldots,u_d]}. \tag{6}$$

条件 Copula 对本文介绍的条件时间序列模型尤为重要。条件密度与 Copula 之间的关系如下，

$$f_{X_1,\ldots,X_i|X_{i+1}\ldots X_d}(x_1,\ldots,x_i|x_{i+1},\ldots,x_d) = \frac{c\left[F_{X_1}(x_1),\ldots,F_{X_d}(x_d)\right]}{c[u_{i+1},\ldots,u_d]} \times f_{X_1}(x_1)\ldots f_{X_i}(x_i). \tag{7}$$

用于多元建模的 Copula 方法允许分别对边缘性质和依赖结构进行建模。与标准的多元建模相比，这一特点使该方法灵活得多。多元正态分布或学生 t 分布等联合分布会限制边缘分布的选择。在 Copula 方法中，边缘分布可以是任意的。此外，随机变量的依赖结构可能具有各种特征，因此必须通过选择适当的 copula 设定加以考虑。本文使用高斯、Clayton、Gumbel 和 t-Copula。下文将简要介绍它们，将其视为随机变量 $U_i \sim U[0,1]$、$i \in \{1, \ldots\ldots, d\}$的联合分布。高斯 Copula 常用于对线性依赖结构进行建模。高斯 Copula 通过提取多元

正态分布并滤波边际影响,

$$C^{\text{gaussian}}[u_1, \ldots, u_d] = \Phi_\Sigma[\phi^{-1}(u_1), \ldots, \phi^{-1}(u_d)], \tag{8}$$

其中 ϕ 是标准正态分布的累积分布函数，而 Φ_Σ 是 d元正态分布的累积分布函数，其相关矩阵为 Σ。相关矩阵 $\Sigma \in [0,1]^{d\times d}$ 包含 $^{d}{}_{(d-1)\ 2}$个依赖参数， ρ_1，……，$\rho_{\,d(d-1)}$用于描述随机变量之间的线性依赖₂关系 U_1，……， U_d。图 $\rho = 0.4$ 的左上图展示了依赖参数为 2的二元高斯 copula 的密度。该密度仅显示变量之间的线性关系。与从多元正态分布中提取线性依赖结构类似，也可以利用 t-Copula 从多元学生 t 分布中提取重尾依赖结构

$$C^t[u_1, \ldots, u_d] = t_{\Sigma,\nu}[t_\nu^{-1}(u_1), \ldots, t_\nu^{-1}(u_d)]. \tag{9}$$

其中， t_ν 是自由度为 ν 的学生 t 分布的累积分布函数，ν 是相关矩阵为 Σ 、自由度为 ν 的多元 t 分布的累积分布函数。引入自由度 $\nu \in (0, \infty)$ 可描述重尾依赖结构。重尾性可解释为极端事件同时发生。自由度较低（ ν ）意味着尾部更重。右上方的图 2 面板展示了依赖参数为 $\rho = 0.4$ 、自由度为 $\nu = 4$ 的二元 t-Copula 的密度。该密度展示了变量之间的线性关系以及极端事件同时发生的现象。另一类依赖结构可描述为非对称依赖结构。两种相关的 Copula 是 Gumbel 和 Clayton Copula。Gumbel Copula 表现出较强的上尾依赖，而 Clayton Copula 表现出较强的下尾依赖。它们的二元密度分别显示在图 2 左下方和右下方面板中。这两种 Copula 都属于阿基米德 copula 族。因此，它们可以用合适的生成函数 Ψ [12] 构造为 $C[u_1, \ldots, u_d] = \Psi^{-1}(\Psi(u_1) + \ldots + \Psi(u_d))$,

[15]。Gumbel Copula 和 Clayton Copula 的生成函数分别为

$$\Psi^{\text{Clayton}}(t) = \quad (1+t)^{-\frac{1}{\theta}}, \tag{10}$$

$$\Psi^{\text{Gumbel}}(t) = \qquad e^{-t^{\frac{1}{\theta}}}. \tag{11}$$

Clayton Copula 的显著下尾依赖可解释为下尾事件比上尾事件更常同时发生；Gumbel Copula 的显著上尾依赖则相反。更灵活的一种 Copula 模型是藤 Copula 模型。接下来将介绍藤 Copula 模型。

3.2. 藤 *copula*

藤 Copula 是一种特殊的成对 Copula 构造。成对 Copula 构造的核心思想是将 d维依赖结构分解为二元 copula 的乘积。根据全概率定律， d 个随机变量的联合密度可以分解为条件密度的乘积。利用条件密度与 copula 密度之间的关系（式8），可以得到一种分解形式： [1, 9],

$$c[u_1, \ldots, u_d] = \prod_{j=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{d-j} c[u_i, u_{i+j} | u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}]. \tag{12}$$

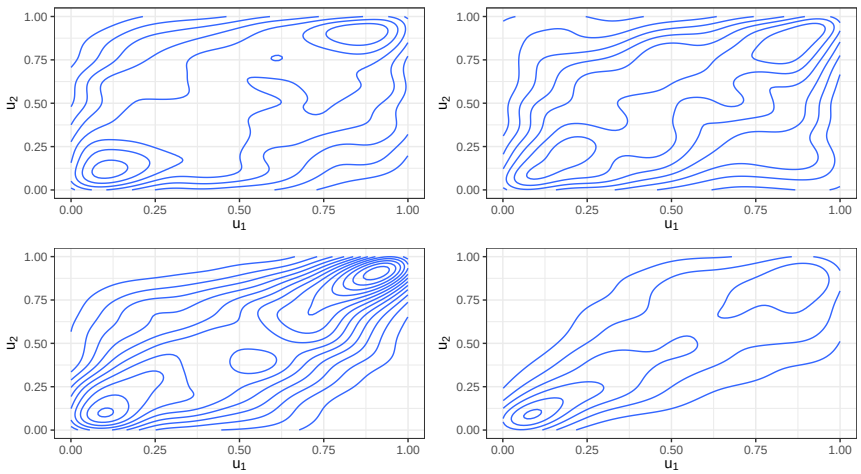


图 2：四种不同二维 Copula 设定的模拟密度图。左上图显示依赖参数设为 $\rho = 0.4$ 的高斯 Copula 密度。右上图显示依赖参数为 $\rho = 0.4$ 、自由度为 $\nu = 4$ 的 t-Copula 密度。左下图显示依赖参数为 $\theta = 2$ 的 Gumbel Copula 密度。右下图显示依赖参数为 $\theta = 2$ 的 Clayton Copula 密度。所有图均基于 2000 个样本的模拟生成。

这种分解并不唯一。式12 中的分解称为可绘制藤（D-Vine）。乘积中的无条件 copula 均刻画相邻变量之间的依赖结构，例如 $c[u_i, u_{i+1}]$，$c[u_{i+1}, u_{i+2}]$ 等等。在图形表示中，变量之间的连接呈现为一条直线，因此得名 D-Vine。[2] 藤 copula 方法能够灵活地进行依赖建模。在变量之间的双变量依赖结构可能呈现不同形态的情况下，这种方法尤为有利，例如，变量 U_1 与 U_2 之间的依赖结构呈线性，而 U_2 与 U_3 之间的依赖结构则呈重尾特征，等等。藤 Copula 模型可以通过最大似然法估计，详情请参阅 [1] 。

3.3. 使用时空 *Copula* 对时间序列建模

本小节将回顾并总结基于 Copula 的时间序列模型，并说明如何利用这些模型进行预测。首先介绍时间 Copula 建模（例如参见 [8], [4]）。随后介绍横截面 Copula 建模与时间 Copula 建模的结合，即时空 copula 建模。本文的阐述基于 [21] 的时空 t-copula 建模，以及 [5, 19, 23]的藤 Copula 建模。此外，还将探讨条件时间 copula 模型如何为条件异方差建模提供一种新方法，并举例说明非椭圆条件分布及相应概率预测的出现。本文还将讨论其对预测的影响，以及对新型点预测方法的需求。设 X_t 为单变量平稳马尔可夫(1) 时间序列。该时间序列的演变完全由连续时间点上随机变量的联合分布指定，即 $F_{X_t,\ X_{t-1}}$。根据 Sklar 定理（式 2），联合分布可分解为 Copula 和边缘分布，

$$F_{X_t, X_{t-1}}(a, b) = C\left[F_{X_t}(a), F_{X_{t-1}}(b)\right]. \tag{13}$$

根据 X_t, $F_{X_t} = F_{X_{t-1}} =$ 的平稳性： F_X。因此，可以通过选择适当的边缘分布 F_X 和适当的 copula 设定来确定模型。请注意，边缘分布 F_X 是无条件分布

[2]另一类特殊的分解是典范藤（C-藤）。在这种分解中，非条件依赖结构都围绕一个变量展开，例如 $c[u_i, u_{i+1}]$，$c[u_i, u_{i+2}]$，.....。在图形表示中，变量之间的无条件连接呈星形。本文仅使用 D-Vine。

X_t 的。时间序列的条件性质完全由条件Copula决定。 $X_t|X_{t-1}$ 的条件密度为

$$f_{X_t|X_{t-1}}(a|b) = c\left[F_X(a), F_X(b)\right] f_X(a). \tag{14}$$

因此，在预测中，可以将 $X_t|X_{t-1} = x_{t-1}$ 的条件密度用作概率预测。该模型可以理解为 AR(1) 模型 [23][3]的推广。通过选择$C = C^{\text{gaussian}}$ 和 $F_X = \Phi$，可以得到高斯自回归模型。当允许采用其他依赖结构时，任何可由 Copula 表示的时间依赖性都可以复现。基于 Copula 的时间序列模型概念还可以通过其条件模型方程进一步说明:

$$X_t|(X_{t-1} = x_{t-1}) = F_X^{-1}(C^{-1}\left[u_t|F_X(x_{t-1})\right]), \quad u_t \sim U[0,1]. \tag{15}$$

在这一表述中， X_t 与 X_{t-1} 之间的非线性联系显而易见。将时间Copula时间序列模型推广至 d元时间序列，即时空时间序列模型，是直接明了的。设$\mathbf{X}_t$ =($X_{1,\ t}$，.....，$X_{d,\ t}$)为平稳Markov(1)时间序列。该时间序列的结构完全由$\mathbf{X}_t$ 和$\mathbf{X}_{t-1}$的联合分布所刻画，

$$F_{\mathbf{X}_t,\mathbf{X}_{t-1}}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = C\left[F_{X_1}(a_1),\ldots,F_{X_d}(a_d), F_{X_1}(b_1),\ldots,F_{X_d}(b_d)\right]. \tag{16}$$

给定时间点 $t-1$ 的观测值后，条件密度如下:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}_t|\mathbf{X}_{t-1}}(\mathbf{a}|\mathbf{b}) = & \frac{c\left[F_{X_1}(a_1),\ldots,F_{X_d}(a_d),F_{X_1}(b_1),\ldots,F_{X_d}(b_d)\right]}{c\left[F_{X_1}(b_1),\ldots,F_{X_d}(b_d)\right]} \\ & \times f_{X_1}(a_1)\cdot\ldots\cdot f_{X_d}(a_d). \end{aligned} \tag{17}$$

为了从条件分布中抽样（这是对条件预测进行蒙特卡洛近似所必需的），采用以下步骤 [21]。首先，将时间 $t-1$ 的观测值转换为伪观测值。具体做法是对观测值应用概率积分变换，$(u_{t-1,1},\ldots,u_{t-1,d})$: $=(F_{X_1}(x_{t-1,1})\ldots,F_{X_d}(x_{t-1,d}))$。然后，从条件 Copula（式 n d）中抽取 5维实现值。（有关如何从 t-Copula 中抽样的详情，请参见

[3]允许时间序列成为马尔可夫（p）过程，即可将模型推广至 AR（p）。

[21]。有关从藤 Copula 中抽样的详情，见 [1]）。最后，必须对这些 n个实现值应用相应边缘分布的分位数变换，从而得到 n 个条件分布样本。本研究涉及的相关模型如下。首先是将 Copula 指定为高斯 Copula 的时空时间序列模型（式 8）。边缘分布通过经验分布进行非参数近似。

$$F_{\mathbf{X}_t,\mathbf{X}_{t-1}}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \Phi_\Sigma[\phi^{-1}(F^{\text{emp}}_{X_1}(a_1)),\dots\phi^{-1}(F^{\text{emp}}_{X_d}(a_d)), \phi^{-1}(F^{\text{emp}}_{X_1}(b_1)),\dots,\phi^{-1}(F^{\text{emp}}_{X_d}(b_d))]. \tag{18}$$

当变量之间的依赖结构以及时间依赖均呈线性时，使用该模型是合理的。当依赖结构表现出重尾性时，采用非参数边缘分布的时空 t-copula 模型是一个可行的选择，

$$F_{\mathbf{X}_t,\mathbf{X}_{t-1}}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = t_{\nu,\Sigma}[t_\nu^{-1}(F^{\text{emp}}_{X_1}(a_1)),\dots t_\nu^{-1}(F^{\text{emp}}_{X_d}(a_d)), t_\nu^{-1}(F^{\text{emp}}_{X_1}(b_1)),\dots,t_\nu^{-1}(F^{\text{emp}}_{X_d}(b_d))]. \tag{19}$$

若要进行更灵活的建模，可以采用具有非参数边缘分布的时空 D-Vine Copula。为方便起见，模型以其联合密度以及变量（$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$）=的形式表示：$\mathbf{p}$

$$f_{\mathbf{X}_t,\mathbf{X}_{t-1}}(\mathbf{p}) = \prod_{j=1}^{2d-1}\prod_{i=1}^{2d-j} c[F_{X_i}(p_i),F_{X_{i+j}}(p_{i+j})|F_{X_{i+1}}(p_{i+1}),\dots,F_{X_{j-1}}(p_{j-1})] \times f_{X_1}(p_1)\cdot\ldots\cdot f_{X_d}(p_d)f_{X_1}(p_{d+1})\cdot\ldots\cdot f_{X_d}(p_{2d}). \tag{20}$$

当变量之间的依赖结构各不相同时，或者时间依赖不同于横截面依赖时，使用该模型是合理的。至于纯时间建模，则采用时间 t-Copula，

$$F_{X_t,X_{t-1}}(a,b) = t_{\nu,\Sigma}[t_\nu^{-1}(F^{\text{emp}}_X(a)),t_\nu^{-1}(F^{\text{emp}}_X(b))]. \tag{21}$$

该模型所体现的重尾时间依赖适用于条件异方差性建模，下一节将对此进行讨论。

来自（时空）copula 时间序列模型的条件分布，即概率预测，可能因

条件变量的非线性影响而呈现非椭圆形。下文将考察标准正态边缘分布下时间 t-Copula 的条件分布特性[4]。图中展示了重尾 t-Copula 产生非椭圆条件密度的情况。3。当条件变量取 $u_1 = 0.5$ 附近的中等值时，得到的条件密度近似呈椭圆形。然而，当条件变量取极端值（例如） $u_1 = 0.03$ 和$u_1 = 0.97$时，条件密度会变成双峰。因此，得到的条件密度可能因条件变量取值不同而具有截然不同的结构。这种特性为条件异方差建模提供了一种新方法。与 GARCH 模型中扩大条件密度的做法不同，这里的密度会变成双峰。这可以视为一种合理的波动率建模方式，因为该模型反映了波动阶段的极端表现：当时间序列在时点 $t-1$ 取值极低时，可以预期时点 t 的取值也会极低或极高。尽管时点 t的方差仍然会增大，但其增大的机制是全新的。

然而，时间 t-Copula 条件波动率方法存在一个问题。当条件密度为非椭圆时，什么样的点预测才合理并不明确。在极端情况下，如果条件密度呈双峰分布，期望值可能并不适用，因为期望值可能落在一个概率低于众数等位置的数值上。将众数作为点预测或许是一种解决方案。点预测问题的另一种可能解决方案是借助人工神经网络（ANN）增强预测。ANN 预测条件分布中哪个分位数最适合作为点预测（以均方误差（MSE）衡量）。ANN 的输入是时间序列的过去值和最近的最优分位数。本研究采用的 ANN 架构是基本的多层感知机（MLP）结构。有关该主题的介绍，请参阅 [14] 。

4. 结果

本节介绍扩展窗口预测研究的结果，考察不同模型的表现。前 1000 个观测值（范围为

[4]选择标准正态分布只是为了方便。使用其他边缘分布（例如学生 t 分布）时，该示例仍然成立。

2010-03-16 至 2013-12-08）用作训练数据集。评估中考虑以下模型。

1) 采用非参数边缘分布的时间 t 联结函数模型，公式 21，下文简称 Tem-t；2) 时空 D-vine copula 模型，公式 20，下文简称 S-Tem D-vine；3) 时空 t-copula 模型，公式 20，下文简称 S-Tem-t；4) 时空高斯 copula 模型，公式 19，下文简称 S-Tem-gaussian；5) 含外生回归变量和绝对值阈值广义自回归条件异方差模型的自回归移动平均模型，下文简称 ARMAX-AVTGARCH（与[6]中的模型密切相关）。

采用连续秩概率评分（CRPS） [13]评估模型的分布预测性能。此外，S-Tem 的人工神经网络辅助点预测

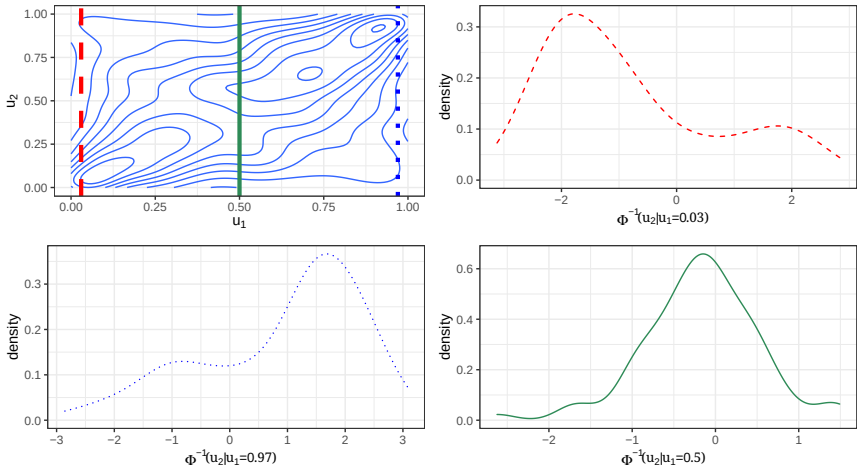


图 3：条件密度结构随条件变量取值变化的可视化。底层模型假设采用依赖参数为 $\rho = 0.4$ 、自由度为 $\nu = 2$ 的 t-Copula。边缘分布假设为标准正态分布。左上图显示了前述 t-Copula 的 2000 次实现所对应的 Copula 密度。三条线表示考察条件密度的三种情形。条件密度的计算方法是：汇总条件变量邻域（$u_1 \pm 0.025$）内的所有取值，并对其进行分位数变换。右上图显示给定 $u_1 = 0.03$ 时的条件密度。下方各图分别显示给定 $u_1 = 0.5$ 和 $u_1 = 0.97$ 时的条件密度。

表 1：四种大宗商品的竞争模型提前一天概率预测的汇总 CRPS 值。CRPS 在 2013-12-19 – 2021-02-23 期间进行评估，共包含 1861 个观测值。

模型/大宗商品	S-Tem D-Vine	ARMAX-AVTGARCH	Tem-t	S-Tem-t	S-Tem-高斯
天然气	0.236	0.227	0.230	0.234	0.234
Oil	0.564	0.548	0.551	0.559	0.558
Coal	0.400	0.389	0.392	0.398	0.397
CEF	0.236	0.222	0.229	0.234	0.234

将 D-vine模型和 Tem-t模型与 ARMAX-AVTGARCH模型的点预测进行比较。针对每个时间序列，分别拟合 ARMAX-AVTGARCH模型。所有模型均采用最大似然法进行估计。不过，为避免传递估计误差，Copula模型的边缘分布采用非参数方法估计 [20]。S-Tem D-vine Copula模型中变量的顺序固定为

$$\text{CEF} - \text{coal} - \text{oil} - \text{NGas} - \text{NGas lag} - \text{oil lag} - \text{coal lag} - \text{CEF lag}. \tag{22}$$

采用这种顺序是为了让滞后天然气价格能够直接与非滞后天然气价格相互作用。在 D-vine 分解中，允许使用高斯、Gumbel、Clayton 和 t-Copula 作为二元 copula（式 12）。所有模型的概率预测均通过蒙特卡洛模拟近似，每次预测使用 1000 个样本。表 1 展示了各模型在连续排序概率得分方面的表现。ARMAX-AVTGARCH模型在单变量分布预测方面表现最佳。不过，S-Tem D-vine模型、S-Tem-t和Tem-t模型也具有竞争力。如果以参数化方式对边缘分布建模，Copula模型的表现可能会有所提升。Copula的经验边缘分布可能无法捕捉时间序列的所有边缘特征。使用更灵活的Copula模型或许能够改善预测。条件依赖建模可能只能捕捉部分条件效应。图 4 展示了Tem-t模型在波动时期的概率预测。在波动时期，概率预测呈非椭圆形。在这些时期，ANN增强的点预测可能很有价值。表 2列出了各模型的点预测性能。评估从第2001个观测值开始，因为前1000个概率预测用于训练ANN。混合模型、ANN增强的S-Tem vine模型和ANN增强的Tem-t模型

表2：四种大宗商品的竞争性点预测程序的汇总均方根误差值。均方根误差评估时段为2017年10月23日—2021年2月23日，共包含861个观测值。

模型/商品	S-Tem D-Vine ANN	ARMAX-AVTGARCH	S-Tem D-Vine Mean	S-Tem D-Vine Mode	Tem-t ANN
Gas	0.594	0.600	0.599	0.597	0.589
oil	1.222	1.222	1.236	1.246	1.220
coal	1.000	0.999	1.009	1.002	0.997
CEF	0.605	0.608	0.614	0.604	0.607

生成的点预测表现最佳。尽管如此，ARMAX-AVTGARCH模型的点预测也具有竞争力。请注意，用于预测的ANN模型采用了基本的多层感知机架构。它并不完全适合捕捉序列模式。使用循环神经网络，尤其是长短期记忆架构，可能会进一步提升性能，也可作为未来的研究方向。此外，纳入用于衡量概率预测结构的指标也可能提升性能。不过，这需要更先进的架构。

5. 结论

本文探讨了将基于 Copula 的时间序列模型应用于天然气及相关大宗商品价格，并开展了一项扩展窗口预测研究。用于分析的时间序列提取自 investing.com

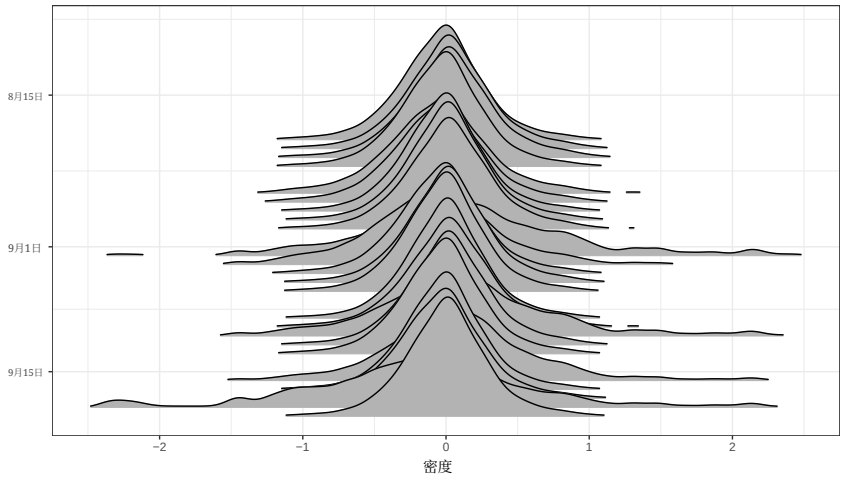


图4：基于时间 t-Copula 模型生成的天然气期货概率预测。在波动剧烈时期（2019年8月–2019年9月），预测密度可能呈非椭圆形。

通过 Python 软件包 investpy。该时间序列由天然气短期期货价格序列构成

，原油 ，煤炭和碳排放

。在介绍了基于 Copula 和 D-Vine Copula 的依赖建模基本概念后，本文回顾了文献中的基于 Copula 的时间序列模型。本文以时间 t-Copula 为例，说明非椭圆概率预测的出现，并展示时间 t-Copula 如何为条件异方差建模提供一种新方法。当概率预测为非椭圆时，何种点预测才合理尚不明确。为此，本文采用人工神经网络来预测概率预测中最适合作为点预测的分位数。人工神经网络的输入是多元时间序列的历史值以及概率预测中最近的最佳分位数。在预测研究中，本文考察了时间 t-Copula、时空 t-Copula 和时空 D-Vine Copula 的预测表现。边缘分布通过相应的经验分布进行估计。本文将其表现与带外生回归变量的自回归移动平均模型和绝对值阈值广义自回归条件异方差建模（ARMAX-AVTGARCH）的表现进行比较。近期研究表明，一个密切相关的模型在天然气预测中表现最佳，因此本文将其视为基准模型。本文采用连续排序概率得分（CRPS）考察分布预测表现。结果发现，基于 Copula 的时间序列模型与 ARMAX-AVTGARCH模型相比具有竞争力。本文采用均方根误差（RMSE）评估点预测。ANN增强的点预测表现最佳，不过ARMAX-AVTGARCH模型的预测仍具有竞争力。

通过对边缘分布进行参数化建模，可以提升基于 Copula 的时间序列模型的性能。非参数建模可能无法捕捉时间序列的所有边缘特征。不过，为了确保估计高效，这一过程需要通过一步法完成估计。提升性能的另一种可能方式是考虑更多样化的 Copula模型。当前的建模可能无法捕捉时间序列的所有条件特征。对于藤 Copula 模型，另一种可能方式是考虑其他藤结构。在本研究中，我们采用了 D-Vine 结构。其他结构或许能更好地捕捉依赖关系。至于点预测，结果表明，经过人工神经网络增强的预测表现良好。尽管我们选择采用

标准的多层感知机架构（其无法很好地对序列信息建模），预测精度仍有所提高。采用更复杂、更适合捕捉序列信息的架构，将作为未来的研究方向。使用其他模型来预测点预测的最佳分位数，也会很有意义。

致谢：
作者谨此感谢多特蒙德工业大学 Linux高性能计算集群（LiDO3）提供的计算时间。该集群部分经德国研究联合会（DFG）大型设备计划资助，项目编号为 271512359。

参考文献

[1] Aas, K., Czado, C., Frigessi, A. & Bakken, H. (2009). 多重依赖关系的成对藤 *copula* 构造。《保险：数学与经济学》，44(2):182-198, 2009。

[2] Aloui, R., Aïssa, M. S. B., Hammoudeh, S. & Nguyen D. K. (2014). 原油与天然气价格的依赖关系及极端依赖关系：风险管理应用。《能源经济学》，42:332-243, 2014.[3] Angus, J. E. (1994). 概率积分变换及相关结果。《SIAM 评论》，36(4), 652-654.[4] Beare, B. K. (2010). *Copula* 与时间依赖。《计量经济学》，78(1), 395-410.[5] Beare, B. K., & Seo, J. (2015).平稳多元马尔可夫链的藤 *Copula* 设定。《时间序列分析杂志》，36(2), 228-246.[6] Berrisch, J., & Ziel, F.(2022). 天然气价格的分布建模与预测。《预测学杂志》.[7]Berrisch, J., Pappert, S., Ziel, F., & Arsova, A. (2022). 欧洲碳与能源价格的波动性与依赖关系建模。arXiv 预印本 arXiv:2208.14311.

[8] Chen, X., & Fan, Y. (2006).基于 *copula* 的半参数时间序列模型估计。《计量经济学杂志》，130(2), 307-335.[9] Czado, C. (2010). 多元 *Copula* 的成对 *copula* 构造。载于《Copula 理论及其应用》（第 93-109 页）。施普林格，柏林，海德堡.[10] Del Canto, A. (2021).*Investpy*——使用 *Python* 从 *Investing.com* 提取金融数据。GitHub 仓库.[11] Demarta, S., & McNeil, A. J. (2005). *t copula* 及相关 *copula*。《国际统计评论》，73(1), 111-129.[12] Genest, C., & Rivest, L. P. (1993). 二元阿基米德 *copula* 的统计推断程序。《美国统计学会杂志》，88(423), 1034-1043.[13] Gneiting, T., & Raftery, A. E. (2007).严格适当评分规则、预测与估计。《美国统计学会杂志》，102(477), 359-378.[14] Higham, C. F., & Higham, D. J. (2019).深度学习：面向应用数学家的入门介绍。《SIAM 评论》，61(4), 860-891.[15] Hofert, M. (2008). 阿基米德 *copula* 抽样。《计算统计与数据分析》，52(12), 5163-5174.[16] Hu, L. (2006).金融市场间的依赖模式：一种混合 *copula* 方法。《应用金融经济学》，16(10), 717-729.[17] Joe, H. (2014). 使用 *copula* 进行依赖建模。CRC 出版社.[18] Jondeau, E., & Rockinger, M. (2006). 条件依赖的 *copula-GARCH* 模型：国际股票市场应用。《国际货币与金融杂志》，25(5), 827-853.[19] Nagler, T., Krüger, D., & Min, A. (2022). 多元时间序列的平稳藤 *copula* 模型。《计量经济学杂志》，227(2), 305-324.[20] Patton, A. (2013). 用于预测多元时间序列的 *copula* 方法。《经济预测手册》，2, 899-960.[21] Simard, C., & Rémillard, B. (2015). 使用多元 *copula* 预测时间序列。依赖建模，3(1).

[22] Sklar, M.（1959）。多维分布函数及其边缘分布。巴黎大学统计研究所，8，229-231。

[23] Smith, M.、Min, A.、Almeida, C. 和 Czado, C.（2010）。使用成对 *Copula* 分解对序列依赖进行纵向数据建模。《美国统计学会杂志》，105（492），1467-1479。