arXiv:2301.03336v1 [math.FA] 8 Dec 2022

偏序巴拿赫代数中泛函微分方程存在性定理

$AmorFahem^{(1)}$、*Aref Jeribi* (1) 和 *Najib Kaddachi* (2)

(1) 突尼斯斯法克斯，邮政信箱 *1171*，邮编 *3000*，苏克拉路 *3.5* 公里处，斯法克斯大学斯法克斯理学院数学系电子邮箱：amorfahem.edp@gmail.com 电子邮箱：Aref.Jeribi@fss.rnu.tn

(2) 突尼斯西迪布济德，农业大学城校区 – *9100*，凯鲁万大学西迪布济德理工学院电子邮箱：najibkadachi@gmail.com

摘要。本文研究二次泛函微分方程耦合系统的存在性结果。该系统被归结为一个带有非线性输入项的分块算子矩阵的不动点问题。为证明解的存在性，我们建立了 Dhage 型不动点定理，该定理适用于偏序巴拿赫代数中的分块矩阵算子。

关键词：偏序巴拿赫代数、不动点理论、部分非紧性测度、微分方程、分块算子矩阵。

数学主题分类：47H10, 47H08, 47H09。

1 引言

不动点理论是现代数学中最强大、最富有成果的工具之一，可视为非线性分析的基础内容。近年来，许多杰出作者撰写的有关不动点理论的优秀专著和综述相继问世，例如 [1, 2, 5, 6, 9, 20]。鉴于巴拿赫空间是线性分析和非线性分析的基础空间，这促使我们思考以下问题：如果在巴拿赫空间上赋予序结构（偏序或格），该空间就成为偏序巴拿赫空间。那么，在解决该空间上的某些问题时，除了拓扑结构和代数结构之外，序结构也能提供一种新的有力工具。这一重要思想已广泛应用于求解积分方程 [4, 7, 12, 18, 19, 21, 24, 26]。本文主要

研究以下二次非线性泛函微分方程组（简称二次泛函微分方程，QFDE）的解的存在性结果

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x(t)-f_1(t,x(t))}{f_2(t,y(t))}\right)' + \lambda\left(\dfrac{x(t)-f_1(t,x(t))}{f_2(t,y(t))}\right) = g(t,y(t)) \\ y(t) = \dfrac{1}{1-b(t)|x(t)|} - p\left(t, \dfrac{1}{1-b(t)|x(t)|}\right) + p(t,y(t)) \\ \big(x(0),y(0)\big) = (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}_+$、$b: J \longrightarrow \mathbb{R}$，且 f_1、f_2、g、$p: J\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 均为连续函数，且 f_2 始终不为零。泛函微分方程 (1.1) 的第一个方程具有一般性，因为它包含了若干重要的泛函微分方程类。若取 $x = y$、$f_1(t, x) = \phi(t, x) = 0$，以及 $f_2(t, x) = f(t, x, y)$，并令 $g(t, x) = g(t, x, y)$，则泛函微分方程 (1.1) 化为以下含时滞的泛函微分方程：

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x(t)}{f(t,x(t),X(t))}\right)' + \lambda\left(\dfrac{x(t)}{f(t,x(t),X(t))}\right) = g(t,x(t),x_t), \quad t\in I \\ x_0 = \phi \in C([-r,0],\mathbb{R}), \quad r>0 \end{cases}$$

当 $I=[0,T]$、$T>0.$ 时，该方程在文献 [15, 17] 中进行了研究，其若干特殊情形则在文献 [25] 中进行了讨论。
同样，当 $f_1(t, x) = \phi(t, x) = 0$、$f_2(t, x) = 1$，且 $g(t, x) = g(t, x, y)$ 时，二次泛函微分方程 (1.1) 化为以下已知的含最大值的非线性微分方程

$$\begin{cases} x'(t) + \lambda x(t) = g(t,x(t),X(t), \quad t\in I \\ x(0) = \alpha_0 \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

上述含最大值的非线性微分方程已在 [3] 中通过绍德尔和巴拿赫不动点原理的经典方法，对解的存在性和唯一性进行了讨论。

此外，若 $f_1(t, x) = f(t, x, y)$，$f_2(t, x) = 1$，$\phi(t, x) = 0$ 且 $g(t, x) = g(t, x, y)$，则二次泛函微分方程 (1.1) 可化为下列不含最大值的混合微分方程，

$$\begin{cases} (x(t) - f(t,x(t),X(t))' + \lambda(x(t) - f_1(t,x(t))) = g(t,x(t),X(t)) \\ x(0)) = \alpha_0 \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{1.2}$$

该方程在 [14] 中通过 Dhage 迭代法进行了讨论，并在一些混合偏 Lipschitz 条件和偏紧性条件下，证明了存在性和近似结果。

注意，系统 (1.1) 可转化为以下 2×2 分块算子矩阵的不动点问题

$$\begin{pmatrix} A & B\cdot B' \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

其中，矩阵的各项通常是定义在偏序巴拿赫代数上的非线性算子。表示式 (1.3) 中出现的算子均为非线性算子，我们的假设如下： A a 是偏序巴拿赫代数 E到 E的非递减映射，而 B、C、D和 B'是从 E到 E的非递减正算子。

沿着这一方向，作者 A. Jeribi、B. Krichen 和 N. Kaddachi 在 [22, 23] 中为算子矩阵 (1.3) 建立了某个不动点，其中 X 是巴拿赫代数

满足对在满足某些条件的情况下。需要指出的是，理论研究是基于下列方程的解的存在性

$$x = Ax \cdot Bx + Cx \tag{1.4}$$

并获得了许多有价值的结果（[10, 12, 13] 及其中的参考文献）。这些研究主要基于有界域的闭包以及算子 A、B 和 C 的性质（参见部分完全连续、部分非线性 k-集压缩、部分凝聚，以及公理化部分非紧性测度这一潜在工具，.....）。

本文结构安排如下。下一节中，我们给出后续讨论所需的一些预备结果。第 3 节中，我们提出方程（1.4）的存在性结果。第 4 节中，我们将讨论偏序巴拿赫代数中 2×2 块算子矩阵的一些不动点结果。本节的主要结果是定理 4.1 和定理 4.2。第 5 节中，我们给出一个应用，说明系统（1.1）在偏序巴拿赫代数中的解的存在性。

2 辅助结果

在本文中，设 $(E, \preceq, \|\cdot\|)$ 是一个带零元θ的偏序巴拿赫代数。若关系 $x \preceq y$ 或 $y \preceq x$成立，则称 E 中的两个元素 x 和 y 可比较。称 E 的非空子集 C 为链或全序集，若C 中的所有元素均可比较。已知，若 E 中的一个非递减（分别为非递增）序列 $\{x_n\}$ 满足 $n \to \infty$，且 $x_n \to x^*$ 趋于 E，则对所有 $n \in \mathbb{N}$，$x_n \preceq x^*$（分别为 $x_n \succeq x^*$）。关于保证 E 正则的条件，可参见 Guo 和 Lakshmikentham [20]、Nieto 和 Lopez [26] 及其中的参考文献。

本节开头，我们介绍关于 E中部分非紧性测度的一些基本事实。若 E中的 C 是一个链，则 C' 表示 E中 C 的所有极限点构成的集合。符号$\overline{C}$ 表示 E 中 C 的闭包，定义为 $\overline{C} = C \cup C'$。称集合 $\overline{C}$为 E中的闭链。因此，$\overline{C}$ 是所有包含 C的闭链的交集。下文中，我们分别用 $\mathcal{P}_{cl}(E)$、$\mathcal{P}_{bd}(E)$、$\mathcal{P}_{rcp}(E)$、$\mathcal{P}_{ch}(E)$、$\mathcal{P}_{bd,\ ch}(E)$、$\mathcal{P}_{rcp,\ ch}(E)$表示 E 中所有非空且闭、有界、相对紧、为链、有界链及相对紧链的类。回顾一下，E 上的部分Kuratowski非紧性测度 $\alpha^p(.)$由下式定义：

$$\alpha^p(C) = \inf\left\{r > 0, C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i, \operatorname{diam}(C_i) \leq r\ \forall i\right\}$$

其中 $\operatorname{diam}(C_i) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in C_i\}$。为方便起见，我们回顾一下下文所需的$\alpha^p(.)$的一些基本性质 [11, 12, 13, 15]。

定义 2.1 若映射 $\alpha^p : \mathcal{P}_{bd,ch}(E) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 满足以下条件，则称其为 E 上的部分非紧性测度：

1. $\varnothing \neq (\alpha^p)^{-1}(\{0\}) \subset \mathcal{P}_{rcp,\ ch}(E)$，；
2. $\alpha^p(\overline{C}) = \alpha^p(C)$，
3. α^p 是非递减的，
4. 若 $\{C_n\}$ 是来自 $\mathcal{P}_{bd,\ ch}(E)$ 的非递减闭链序列，且 $\lim_{n\to\infty} \alpha^p(C_n) = 0$，则 $\overline{C}_\infty = \cap_{n=0}^{\infty} C_n$ 是非空集，且 $\alpha^p(C_\infty) = 0$，

1. 中描述的集合族称为非紧性测度的核 *ss*
α^p 并定义为

$$\ker \alpha^p = \{C \in \mathcal{P}_{bd,ch}(E) | \alpha^p(C) = 0\}$$

显然，$\ker\alpha^p \subset \mathcal{P}_{rcp,\ ch}$（$E$）。注意，根据条件4，交集 C_∞ 是族 $ker\alpha^p$中的一个成员。事实上，由于对于任意 n都有 α^p（C_∞）$\leq \alpha^p$（C_n），我们可推得α^p（C_∞）$= 0$. 这表明 α^p（C_∞）$\in \ker \alpha^p$。这一简单观察将在我们进一步的研究中发挥重要作用。

部分测度 α^p 的非紧性被称为次线性的，如果它满足

5. α^p（$C_1 + C_2$）$\leq \alpha^p$（C_1）$+ \alpha^p$（C_2），对于所有 C_1，$C_2 \in \mathcal{P}_{bd,\ ch}$，
6. α^p（λC_1）$= |\lambda|\alpha$（C_1），对于所有 $\lambda \in \mathbb{R}$，

同样，如果 α^p 满足最大值性质，则

7. $\alpha^p(C_1 \cup C_2)$ $=$最大值$\{\alpha^p(C_1)\ \alpha^p(C_2)\}$。

最后，如果 α^p 满足以下条件，则称其为满或完备：

8. $\ker\alpha^p = \mathcal{P}_{rcp,ch}(E)$ ♢

下列定义（参见 [11, 12, 13] 及其中的参考文献）在本文后续部分中经常用到。

定义 2.2 如果映射 $T: E \longrightarrow E$ 保持序关系 $\preceq$，即对于所有 $x, y \in E$，若 $x \preceq y$则有 $Tx \preceq Ty$，则称其为单调不减映射。类似地，对于所有 $x, y \in E$，若 $x \preceq y$则有 $Tx \succeq Ty$，则称 T 为单调不增映射。单调映射 T是指在 E上单调不减或单调不增的映射。♢

定义2.3 映射 $\psi: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 称为支配函数，或简称为 $\mathcal{D}$-函数，若其为满足条件 $\psi(0) = 0$ ♢ 的上半连续单调非递减函数。

定义 2.4 若存在一个 $\mathcal{D}$-函数 $\psi: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 满足以下条件，则称映射 $T: E \longrightarrow E$ 为部分非线性 $\mathcal{D}$-利普希茨型：

$$\|Tx - Ty\| \leq \psi(\|x - y\|),$$

对所有可比较元素 $x, y \in E$，其中 $\psi(0) = 0$。函数 ψ 称为 $\mathcal{D}$ 在 E 上的 T-函数。若 $\psi(r) = kr$, $k > 0$，则称 T 为部分利普希茨型，其利普希茨常数为 k。特别地，若 $k < 1$，则称 T 为 E 上的部分压缩映射，其压缩常数为 k。最后，若 T 是部分非线性 $\mathcal{D}$- 利普希茨型映射，且对 $r > 0$ 有 $\psi(r) < r$，则称其为部分非线性 $\mathcal{D}$-压缩映射。♢

注2.1 显然，每个部分利普希茨型映射都是部分非线性 $\mathcal{D}$-利普希茨型映射。反之则未必成立。

定义 2.5 若存在一个 $\mathcal{D}$-函数 ψ，使得非递减映射 $T: E \longrightarrow E$ 称为部分非线性 $\mathcal{D}$-集利普希茨型映射。

$$\alpha^p(TC) \leq \psi(\alpha^p(C)),$$

对所有有界链 C *in* E。T称为部分 k-集 *Lipschitz* 映射，如果 $\psi(r) = kr$, $k > 0$。T称为部分 k-集压缩映射，如果它是部分 k-集 *Lipschitz* 映射且满足 $k < 1$。最后，如果 T 是部分非线性 $\mathcal{D}$-*Lipschitz* 映射且满足$\psi(r) < r$，则称其为部分非线性 $\mathcal{D}$-集压缩映射，其中 $r > 0$。♢

定义 2.6 若映射 $T:\ E \longrightarrow E$ 在点 $a \in E$ 处部分连续，则称其在该点部分连续；如果对于 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得当 x 与 a 可比较且$\|x-a\| < \delta$时，$\|Tx - Ta\| < \varepsilon$。若映射在 E上的每一点都部分连续，则称其在 E上部分连续。显然，若 T 在 E上部分连续，则它在包含于 E中的每条链 C上连续。♢

定义 2.7 若对 E中的每条链 C，映射 $T:\ E \longrightarrow E$使得 $T(C)$ 有界，则称其为部分有界。若 T 中所有链 $T(C)$ 均由同一个常数有界，则称其为一致部分有界。若 $T(E)$ 是 E的有界子集，则称 T 有界。♢

定义 2.8 若对 E中的所有全序集或链 C，映射 $T:\ E \longrightarrow E$ 使得 $T(C)$ 是 E 的相对紧子集，则称其为部分紧。若 $T(C)$ 在 E上一致部分有界且部分紧，则称 T 一致部分紧。若对 E的任意全序有界子集 C，$T(C)$ 是 E的相对紧子集，则称其为部分全有界。若 T 部分连续且部分全有界，则称其在 E上部分完全连续。♢

注 2.2 注意，在部分赋范线性空间上，每个紧映射都是部分紧的，每个部分紧映射也都是部分全有界的，但反向推论不成立。同样，每个完全连续映射都是部分完全连续的，每个部分完全连续映射也都是部分连续且部分全有界的，但反向推论未必成立。♢

定义 2.9 如果非空集 E 上的序关系 $\preceq$ 与度量 d 相容，那么称它们相容：若 $\{x_n\}$ 是单调的，即单调不减或在 E 中为单调不减序列，且 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_nk\}$ 收敛于 x^*，则整个序列 $\{x_n\}$收敛于 x^*。类似地，给定偏序赋范线性空间 $(E, \preceq, \|\cdot\|)$，如果序关系 $\preceq$ 与范数 $\|\cdot\|$ 相容，则称它们相容；也就是说，$\preceq$ 与由范数 $\|\cdot\|$ 定义的度量 d 相容。♢

定义 2.10 映射 $T:\ E \longrightarrow E$ 称为在 E 上 T-轨道连续，若对任意序列$\{x_n\} \subseteq \mathcal{O}(x;T)$ $= \{x, Tx, T^2x, \ldots, T^nx, \ldots\}$，若 $x_n \to x^*$，则对每个 $x \in E$都有 $Tx_n \to Tx^*$。度量空间 E 称为 T-轨道完备，如果每个柯西序列$\{x_n\} \subseteq \mathcal{O}(x;T)$ 都收敛到某一点 $x^* \in E$。

后文需要以下结果。设 $(E, \preceq, \|\cdot\|)$ 是一个偏序巴拿赫代数。记

$$E^+ = \{x \in E / x \succeq \theta\} \text{ and } \mathcal{K} = \{E^+ \subset E / uv \in E^+ \text{ for all } u, v \in E^+\},$$

其中 θ 是 E 的零元。元素 $\mathcal{K}$ 称为 E 中的正向量。

引理 2.1 [15] 若 $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathcal{K}$ 满足 $u_1 \preceq v_1$ 和 $u_2 \preceq v_2$，则 $u_1u_2 \preceq v_1v_2$。 ♢

定义 2.1算子 $T:\ E \longrightarrow E$ 称为正的，若其值域 $R(T)$ 满足 $R(T) \subseteq \mathcal{K}$。♢

引理 2.2 [12] 若 C_1 和 C_2 是偏序巴拿赫代数 E 中的两个有界链，则

$$\alpha^p(C_1 \cdot C_2) \leq \|C_2\|\alpha^p(C_1) + \|C_1\|\alpha^p(C_2)$$

其中 $\|C\| =$ 上确界$\{\|c\|, c \in C\}$。 ♢

定理 2。1 [11] 设 $(E, \preceq, \|.\|)$ 是一个偏序集，且 $T:\ E \to E$ 是一个非递减映射。假设在 X 上存在一个度量 d，使得 (E, d) 是一个 T-轨道完备度量空间。再假设存在一个 $\mathcal{D}$-函数 ψ，使得

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y))$$

对于所有满足 $\psi(r) < r$ 的可比较元素 $x, y \in E$ （$r > 0$）。进一步假设，T 在 E 上是 T-轨道连续的，或者 E 满足：若 $\{x_n\}$ 是一个满足$x_n \to \overline{x} \in E$的非递减序列，则对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $x \preceq \overline{x}$ 。若存在一个满足 $x_0 \preceq Tx_0$ 或$x_0 \succeq Tx_0$的元素 $x_0 \in E$，则 T有一个不动点；若“E 中每一对元素都有一个下界和一个上界”，则该不动点唯一。$\diamondsuit$

定理 2。2 [11] 设$(E, \preceq, \|\cdot\|)$是一个偏序巴拿赫代数。设 $T: E \longrightarrow E$是一个非递减、部分紧且连续的映射。此外，若 E 中的序关系 $\preceq$ 与范数 $\|\cdot\|$ 相容，且存在一个元素 $x_0 \in E$满足 $x_0 \preceq Tx_0$ 或$x_0 \succeq Tx_0$，则 T有一个不动点。$\diamondsuit$

定理 2。3 [12] 设$(E, \preceq, \|\cdot\|)$是一个正则偏序完备赋范线性空间，且序关系与 $\preceq$ 范数 $\|\cdot\|$ 相容。设 $T: E \longrightarrow E$ 是一个非递减、部分连续且部分有界的映射。若 T 是部分非线性的 $\mathcal{D}$-集压缩映射，并且存在元素 $x_0 \in E$ 使得 $x_0 \preceq Tx_0$ 或 $x_0 \succeq Tx_0$成立，则T有一个不动点 x^*，且连续迭代序列 $\{T^n x_0\}$ 单调收敛至 x^*。$\diamondsuit$

3 Dhage 不动点定理的重新表述

本节中，我们证明偏序巴拿赫代数中的一些不动点定理。我们的结果采用若干 Dhage 型不动点定理的形式。现在，我们通过修改 [12] 中定理 4.1 的一些假设，建立第一个不动点定理。

定理 3.1 设 S 是正则偏序巴拿赫代数 $(E, \preceq, \|\cdot\|)$ 中的非空闭且部分有界子集，使得序关系 $\preceq$ 与 E 中的范数 $\|\cdot\|$ 相容。设 $A: E \longrightarrow \mathcal{K}$、$B: S \longrightarrow \mathcal{K}$ 和 $C: E \longrightarrow E$ 是满足下列条件的三个非递减算子：

(i) A 和 C 是部分非线性的 $\mathcal{D}$*-Lipschitz* 算子，其 $\mathcal{D}$-函数分别为 ψ_A 和 ψ_C；*(ii)* B 连续且部分紧；*(iii)* 存在 $x_0 \in S$，使得对每个 $y \in S$，$x_0 \preceq Ax_0 \cdot By + Cx_0$ 或 $x_0 \succeq Ax_0 \cdot By + Cx_0$；*(iv)* 对所有 $y \in S$，$Ax \cdot By + Cx \in S$；*(v)* 任意两个元素 x、$y \in E$ 在 E 中都有下界和上界。则只要 $M\psi_A(r) + \psi_C(r) < r$（若 $r > 0$），方程 *(1.4)* 就在 E 中有一个不动点，其中$M = \|B(E)\|$。$\diamondsuit$

证明。假设存在 $x_0 \in S$ 使得 $x_0 \preceq Ax_0 \cdot By + Cx_0$。令 $y \in S$，并定义映射 $A_y : S \longrightarrow S$，其公式为

$$A_y(x) = Ax \cdot By + Cx.$$

由于 A 和 B 为正的，且 A、B 和 C 均为非递减的，因此 A_y 为非递减的。现在，令 x_1、$x_2 \in E$ 为两个可比较元素。则

$$\begin{aligned} \|A_y(x_1) - A_y(x_2)\| &= \|Ax_1 \cdot By + Cx_1 - Ax_2 \cdot By - Cx_2\| \\ &\leq \|Ax_1 \cdot By - Ax_2 \cdot By\| + \|Cx_1 - Cx_2\| \\ &\leq \|By\|\|Ax_1 - Ax_2\| + \|Cx_1 - Cx_2\| \\ &\leq (M\psi_A + \psi_C)(\|x_1 - x_2\|). \end{aligned}$$

这表明算子 A_y 是一个部分非线性的 $\mathcal{D}$-压缩映射。因此，根据定理 2.1，存在唯一的点 $x^* \in E$，使得

$$x^* = Ax^* \cdot By + Cx^*.$$

因为对于所有 $y \in S$，假设 (iv) 成立，所以我们有 $x^* \in S$。定义一个映射

$$\begin{aligned} T: \quad S &\longrightarrow S \\ y &\longmapsto x^*, \end{aligned}$$

其中，x^* 是方程 $Ax^* \cdot By + Cx^*$的唯一解。由于 A、B 和 B' 均为非递减的，且 B 和 B' 均为正的，因此 T 是非递减的。现在证明 T 是连续的。设 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $B(E)$中的任意一个序列，且收敛到点 y。由于 S 是闭的，因此 $y \in S$。于是，

$$\begin{aligned} \|Ty_n - Ty\| &= \|Ax_n^* \cdot y_n + Cx_n^* - Ax \cdot y - Cx\| \\ &\leq \|Ax_n^* \cdot y_n - Ax \cdot y\| + \|Cx_n^* - Cx\| \\ &\leq \|Ax_n^* \cdot y_n - Ax \cdot y_n\| + \|Ax \cdot y_n - Ax \cdot y\| + \|Cx_n^* - Cx\| \\ &\leq (M\psi_A + \psi_c)(\|x_n - x\|) + \|Ax\|\|y_n - y\|. \end{aligned}$$

因此

$$\limsup_n \|Ty_n - Ty\| \leq (M\psi_A + \psi_c)(\limsup_n \|x_n - x\|) + \|Ax\| \limsup_n \|y_n - y\|.$$

这表明$\lim_{n \to +\infty} \|Ty_n - Ty\| = 0$，从而得证。接下来证明 T是部分紧的。事实上，设 $\mathcal{C}$ 是 S 中的一条链，对于任意 $z \in \mathcal{C}$，我们有

$$\begin{aligned} \|Az\| &\leq \|Aa\| + \psi_A(\|z - a\|) \\ &\leq \|A_a\| + \frac{\|z - a\|}{M} \\ &\leq c, \end{aligned}$$

其中，对于 $\mathcal{C}$中的某个固定点 a，$c = \|A_a\| + \frac{diam\mathcal{C}}{M}$。

设 $\varepsilon > 0$ 已给定。根据假设（ii），我们推知 $B(\mathcal{C})$是部分全有界的，因此存在 $\mathcal{C}$ 中点构成的一条链 $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$，使得

$$B(\mathcal{C}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{B}_\delta(w_i),$$

其中 $w_i = By_i$和 $\delta = \frac{1}{c}(\varepsilon - (M\phi_A(\varepsilon) + \phi_C(\varepsilon)))$，且 $\mathrm{B}_\delta(w_i)$ 是 E中以w_i 为中心、半径为 δ的开球。因此，对于任意 $y \in \mathcal{C}$，我们有 $y_k \in Y$，使得

$$c\|By_i - By\| \leq \delta.$$

此外，我们有

$$\begin{aligned} \|Ty_k - Ty\| &\leq \|Ax_k^* \cdot By_k - Ax \cdot By\| - \|Cx_k^* - Cx\| \\ &\leq M(\psi_A + \psi_C)\|x_k^* - x\| + \|Ax\|\|By_k - By\| \\ &\leq M(\psi_A + \psi_C)\|x_k^* - x\| + c\|By_k - By\|. \end{aligned}$$

Then

$$(I - M(\psi_A + \psi_C))(\|Ty_k - Ty\|) \leq c\|By_k - By\|.$$

So,

$$\|T(y_k) - T(y)\| < \varepsilon,$$

由于 $y \in \mathcal{C}$ 是任意的，

$$T(S) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{B}_\varepsilon(k_i),$$

其中 $k_i = T(y_i)$。因此， $T(S)$ 在 E 中是部分全有界的。于是， T 是部分紧的。序关系 $\preceq$ 与范数 $\|.\|$ 相容，因此所需结论由定理 2.2 得出： T 在 S 中有一个不动点。□

现在，在 [13], 中对定理 4.8 的相同假设作出修改，我们得到以下结果。

定理 3.2 设 S 是正则偏序巴拿赫代数 $(E, \preceq, \|\cdot\|)$ 的闭且部分有界子集，并且序关系 $\preceq$ 与范数 $\|\cdot\|$ 在 S 的每个紧链 C 上相容。设 A， $B: S \to \mathcal{K}$ 和 $C: S \longrightarrow E$ 是三个满足以下条件的非递减算子

(i) A 和 C 是部分非线性 $\mathcal{D}_1$-利普希茨算子，其 $\mathcal{D}$-函数分别为 ψ_A 和 ψ_C， *(ii)* B 是部分完全连续的， *(iii)* $\left(\frac{I-C}{A}\right)$ 在 $B(S)$ 上存在且为非递减的， *(iv)* 存在 $x_0 \in S$ 使得对于每个 $y \in S$， $x_0 \preceq Ax_0 \cdot By + Cx_0$ 或 $x_0 \succeq Ax_0 \cdot By + Cx_0$， *(v)* 对所有 $y \in S$， $Ax \cdot By + Cx \in S$。那么，只要 $M\psi_A(r) + \psi_C(r) < r$，若 $r > 0$ 且其中 $M = \|B(S)\|$，方程 *(1.4)* 在 S 中有一个不动点。

证明。 假设存在 $x_0 \preceq Ax_0 \cdot By + Cx_0$。容易验证，向量$x \in E$ 是方程 (1.4) 的一个解，当且仅当 x 是算子$T := \left(\frac{I-C}{A}\right) B.$ 的不动点。由假设 (iii) 可知，对于每个 $y \in S$，存在唯一的$x_y \in E$ 使得

$$\left(\frac{I-C}{A}\right) x_y = By$$

或者，等价地

$$Ax_y \cdot By + Cx_y = x_y.$$

由于假设 (v) 成立，因此 $x_y \in S$。于是映射 $T: S \longrightarrow S$ 定义良好。由假设 (iii) 可知， T 是非递减的。现在，根据定理 2.2，只需证明 T 是连续且部分紧的。事实上，设 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 S 中任意一个收敛到点 y的序列。由于 S 是闭的， $y \in S$。现在

$$\begin{aligned} \|Ty_n - Ty\| &= \|Ax_n^* \cdot By_n + Cx_n^* - Ax^* \cdot By - Cx^*\| \\ &\leq \|Ax_n^* \cdot By_n - Ax^* \cdot By\| + \|Cx_n^* - Cx^*\| \\ &\leq \|Ax_n^* \cdot By_n - Ax^* \cdot By_n\| + \|Ax^* \cdot By_n - Ax^* \cdot By\| + \|Cx_n^* - Cx^*\| \\ &\leq (M\psi_A + \psi_C)(\|x_n^* - x^*\|) + \|ATy\|\|By_n - By\|. \end{aligned}$$

因此，

$$\limsup_n \|Ty_n - Ty\| \leq (M\psi_A + \psi_C) \limsup_n \|Ty_n - Ty\| + \|ATy\| \limsup_n \|By_n - By\|.$$

这表明 $\lim_{n\to\infty} \|Ny_n - Ny\| = 0$，且该结论得到了证明。接下来，我们证明 T是部分紧的。由于 B 是部分紧的，且 $\left(\frac{I-C}{A}\right)$ 是连续的，因此复合映射 $T = \left(\frac{I-C}{A}\right) B$ 在 E上连续且部分紧。接下来， E 中的序关系 $\preceq$ 与范数 $\|\cdot\|$ 相容。因此，应用定理 2.2 可知， T 在 S中至少有一个不动点。□

4 Dhage 不动点在分块矩阵算子中的应用

接下来，我们将研究分块矩阵算子的不动点存在性。

定理 4.1 设 $(E, \preceq, \|\cdot\|)$ 是一个正则偏序巴拿赫代数，且 E 中的序关系 $\preceq$ 与范数 $\|\cdot\|$ 相容。设 $A, C, D\colon E \longrightarrow E$ 和 $B, B'\colon E \longrightarrow \mathcal{K}$ 是满足以下假设的五个非递减算子：

(i) A, B 和 C 是部分有界且部分非线性的 $\mathcal{D}$-利普希茨算子，具有 $\mathcal{D}$-函数 ns ψ_A, ψ_B 和 ψ_C 分别，
(ii) $(I-D)^{-1}$ 存在，且是关于 $\mathcal{D}$-函数 ψ_ϕ 的部分非线性 $\mathcal{D}$-利普希茨算子，并且 $(I-D)^{-1}C$ 是非递减的，

(iii) B' 是部分连续的，且 C 是紧的，
(iv) 存在 $x_0 \in E$，使得 $x_0 \preceq Ax_0 + Tx_0 \cdot T'x_0$ 或 $x_0 \succeq Ax_0 + Tx_0 \cdot T'x_0$，其中 $T = B(I-D)^{-1}C$ 和 $T' = B'(I-D)^{-1}C$。

那么，只要 $M\psi(r) \leq r$，且 $r > 0$ 满足 $\psi(r) = \psi_B \circ \psi_\phi \circ \psi_C(r) + \psi_A(r)$ 和 $M = \|T'(E)\|$.，则算子矩阵(1.3) 在 $E \times E$ 中存在一个不动点

证明。假设存在一个元素 $x_0 \in E$ 使得 $x_0 \preceq Ax_0 + Tx_0 \cdot T'x_0$。定义映射 $F\colon E \longrightarrow E$，其公式为

$$Fx = Ax + Tx \cdot T'x.$$

由于 B 和 B' 是正的，且 A、B、B' 和 $(I-D)^{-1}C$ 是非递减的，我们推知 F 是非递减的。接下来，我们声称 F 是部分连续的。为此，设 $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ 是 E 中的一个序列，它收敛到点 x，且 x_n 和 x 可比较。由假设 (i) 可得：

$$\begin{aligned}
\|Fx_n - Fx\| &= \|Ax_n + Tx_n \cdot T'x_n - Ax - Tx \cdot T'x\| \\
&\leq \|Ax_n - Ax\| + \|Tx_n \cdot T'x_n - Tx \cdot T'x\| \\
&\leq \|Ax_n - Ax\| + \|Tx_n\|\|T'x_n - T'_x\| + \|T'x\|\|Tx_n - Tx\| \\
&\leq \psi_A + M\psi_B \circ \psi_\phi \circ \psi_C(\|x_n - x\|) + \|Tx_n\|\|T'x_n - T'x\|.
\end{aligned}$$

由 B' 的部分连续性，并对上述不等式取上极限，可得

$$\lim_{n\to\infty} \|Fx_n - Fx\| = 0.$$

这证明 F 是 E 上的部分连续算子。再由假设 (iv)，显然 $x_0 \preceq Fx_0$。此外，容易证明 F 是部分有界的。进一步地，我们证明 F 是 E 上的部分非线性 $\mathcal{D}$-集压缩映射。设 $\mathcal{C}$ 是 E 中的一个有界链。根据 F 的定义，有

$$F(\mathcal{C}) \subseteq A(\mathcal{C}) + T(\mathcal{C})T'(\mathcal{C}).$$

由于 F 是非递减且部分连续的，$F(\mathcal{C})$ 仍是 E 中的有界链。考虑到 $T'(\mathcal{C})$ 的相对紧性，并利用引理 2.2 以及部分 Kuratowski 非紧性测度 α^p 的次可加性，可得

$$\begin{aligned}
\alpha^p(F(\mathcal{C})) &\leq \|T(\mathcal{C}))\|\alpha^p(T'(\mathcal{C})) + \|T'(\mathcal{C})\|\alpha^p(T(\mathcal{C})) + \alpha^p(A(\mathcal{C})) \\
&\leq M\alpha^p(T(\mathcal{C})) + \alpha^p(A(\mathcal{C})) \\
&\leq M\psi_B \circ \psi_\phi \circ \psi_C(\alpha^p(\mathcal{C})) + \psi_A(\alpha^p(\mathcal{C})) \\
&= \psi(\alpha^p(\mathcal{C})),
\end{aligned}$$

其中，对于所有 $r > 0.$，$\psi(r) = \psi_A(r) + M\psi_B \circ \psi_\phi \circ \psi_C(r) < r$。这表明，$F$ 是 E 上的部分非线性 $\mathcal{D}$-集压缩映射。最后，关系 $\preceq$ 与范数 $\|\cdot\|$ 相容，因此应用定理 2.3 即可得到所需结论：$x = Ax + Tx \cdot T'x$ 在 E 中有一个解。现在，利用向量 $y = (I-D)^{-1}Cx$ 完成证明。□

注记 4.1 如果 A 是从 S 到自身的压缩映射，其压缩常数为 k，且 B 是具有 $\mathcal{D}$-函数 ψ_B的部分非线性 $\mathcal{D}$-利普希茨映射，并且 $C(S) \subset (I-D)(E)$，那么算子逆$(I-A)^{-1}B$ 存在，且是具有 $\mathcal{D}$-函数 $\psi(r) = \frac{1}{1-k}\psi_B(r)$的部分非线性 $\mathcal{D}$-利普希茨映射。

接下来，我们将结合定理 4.1 和注记 4.1，以得到以下不动点定理：

推论 4.1 设$(E, \preceq, \|\cdot\|)$ 是一个正则偏序巴拿赫代数，其中序关系 $\preceq$和范数 $\|\cdot\|$ 在 E 中相容。设 $A, C, D\colon E \longrightarrow E$和 $B, B'\colon E \longrightarrow \mathcal{K}$是五个非递减算子，满足以下假设：

(i) A、 B 和 C 是部分有界且部分非线性的 $\mathcal{D}$-*Lipschitz* 算子，其 $\mathcal{D}$-函数分别为ψ_A、 ψ_B 和 ψ_C，

(ii) D 是压缩映射，其压缩常数为 k，且$(I-D)^{-}C$ 是非递减的 ^{1}
g,(iii) B' 是部分连续的， C 是部分紧的，且 $C(E) \subset (I-D)(E)$
(iv) $x_0 \preceq Ax_0 + Tx_0 \cdot T'x_0$或 $x_0 \succeq Ax_0 + Tx_0 \cdot T'x_0$，对于某个 $x_0 \in E$，其中 $T = B(I-D)^{-1}C$且 $T' = B'(I-D)^{-1}C$。

那么，只要 $M\psi(r) \leq r$，且 $r > 0$ *with*$\psi(r) = \psi_B \circ (\frac{1}{1-k})\psi_C(r) + \psi_A(r)$和 $M = \|T'(E)\|$.，算子矩阵(1.3) 在 $E \times E$中有一个不动点。

根据条件 $C \equiv 0_E$ 和 $D = 1_E$，其中 0_E 和 1_E 分别表示偏序巴拿赫代数 E中的零元和单位元，由定理 4.1 可得以下结果：

推论 4.2 *[12]*设$(E, \preceq, \|\cdot\|)$ 是一个正则偏序巴拿赫代数，其中 E 上的序关系 $\preceq$和范数 $\|\cdot\|$ 相容。设 $A\colon E \longrightarrow E$和 $B, B'\colon E \longrightarrow \mathcal{K}$是满足以下假设的五个非递减算子：

(i) A、 B 和是具有 $\mathcal{D}$-函数ψ_A、 ψ_B 的部分有界、部分非线性 $\mathcal{D}$-*Lipschitz* 算子，分别为，

(ii) B' 是部分连续且紧的，(ii) 存在 $x_0 \in E$, 使得 $x_0 \preceq Ax_0 + Bx_0 \cdot B'x_0$ 或
$x_0 \succeq Ax_0 + Bx_0 \cdot B'x_0$。

那么，只要 $M\psi(r) \leq r$，且 $r > 0$ 满足$\psi(r) = \psi_B + \psi_A(r)$ 以及 $M = \|B'(E)\|$.，算子矩阵(1.3) 在 $E \times E$ 中有一个不动点。

接下来，我们可以修改定理 3.2 的一些假设，以研究分块算子矩阵中的问题。

定理 4.2 设 S 是正则偏序巴拿赫代数$(E, \preceq, \|\cdot\|)$ 的非空闭部分有界子集，并且序关系 $\preceq$与范数 $\|\cdot\|$ 在 S的每个紧链 $\mathcal{C}$上相容。设 $A, C\colon S \longrightarrow E$和 $B, B', D\colon E \longrightarrow \mathcal{K}$ 是满足以下假设的五个非递减算子：

(i) A、 B 和 C 分别是具有 $\mathcal{D}$-函数 ψ_A、 ψ_B 和 ψ_C的部分非线性 $\mathcal{D}$-*Lipschitz* 映射，*(ii)* $(I-D)^{-1}$ 是非递减的，并且具有 $\mathcal{D}$-函数 ψ_ϕ的部分非线性 $\mathcal{D}$-*Lipschitz* 映射，*(iii)* B' 是连续的， C 是部分紧算子，使得对于所有 $y \in S$， $C(S) \subseteq (I-D)(S)$ *(iv)* $Ax + Tx \cdot T'y \in S$，其中 $T = B(I-D)^{-1}C$且 $T' = B'(I-D)^{-1}C$；*(v)* $\left(\frac{I-A}{T}\right)$ 存在于 $T'(S)$ 上且为非递减的；*(vi)* $x_0 \preceq Ax_0 + Tx_0 \cdot T'y$或 $x_0 \succeq Ax_0 + Tx_0 \cdot T'y$，对每个 $y \in S$；*(vii)* x、 $y \in E$ 中的任意一对元素在 E 中都有一个下界和一个上界。那么，只要 $M\psi(r) \leq r$ *if* $r > 0$ *with*$\psi(r) = \psi_B \circ \psi_\phi \circ \psi_C(r) + \psi_A(r)$ *and* $M = \|T'(S)\|$.，算子矩阵 *(1.3)* 在 $S \times S$ 中具有一个不动点。

证明。假设存在一个元素 $x_0 \in E$，使得 $x_0 \preceq Ax_0 + Tx_0 \cdot T'y$。由假设（$iv$）可知，对于每个 $y \in S$，存在唯一的点 $x \in S$，使得

$$\left(\frac{I-A}{T}\right)x = T'y$$

或者，等式可以定义 等价地， $x = Ax + Tx \cdot T'y$。由于假设（iv）成立，因此 $x \in S$。所以，we 定义 $F: S \longrightarrow S$，定义公式如下

$$F(x) = \left(\frac{I-A}{T}\right)^{-1} T'x. \tag{4.1}$$

根据假设（v），可知 F 在 E上非递减。接下来，我们将证明 F 是连续的。为此，任取 E 上的一个序列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$，使得 $z_n \to z$，并令

$$\begin{cases} y_n = T'(z_n) \text{ and } y = T'(z) \\ x_n = \left(\frac{I-A}{T}\right)^{-1}(y_n) \text{ and } x = \left(\frac{I-A}{T}\right)^{-1}(y). \end{cases}$$

那么，容易证明 $y_n \to y$，并且我们有

$$\begin{cases} x_n &= Ax_n + Tx_n \cdot T'y_n \\ x &= Ax + Tx \cdot T'y. \end{cases}$$

So,

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &= \|Ax_n + Tx_n \cdot T'y_n - Ax + Tx \cdot T'y\| \\ &\leq \|Ax_n - Ax\| + \|Tx_n \cdot T'y_n - Tx \cdot T'y\| \\ &\leq \|Ax_n.y_n - Ax.y_n\| + \|Ax.y_n - Ax.y\| + \|Cx_n - Cx\| \\ &\leq \psi_A + M\psi_B \circ \psi_\phi \circ \psi_C(\|x_n - x\|) + \|Tx\|\|y_n - y\|, \end{aligned}$$

其中，对于所有 $r > 0$，都有 $\psi(r) = \psi_A(r) + (M\psi_B \circ \psi_\phi \circ \psi_C)(r) < r$。由于 T' 是 S 上的部分有界算子，常数 M 存在。对上述不等式取上极限可得 F 是连续的。此外，由假设（iii），我们证明 $B'(I-D)^{-1}C$，且 F是部分紧的。最后，关系 $\preceq$与范数 $\|\cdot\|$相容。因此，应用定理 2.2可推知，F 在 $S \times S$中至少有一个解。现在，利用向量 $y = (I-D)^{-1}Cx$ 完成证明。□

由此我们得到以下不动点结果。

推论 4.3 设 S 是正则偏序巴拿赫代数$(E, \preceq, \|\cdot\|)$ 的非空闭的部分有界子集，并且E中的序关系 $\preceq$与范数 $\|\cdot\|$ 相容。设 A，$C: S \longrightarrow E$和 B，B'，$D: E \longrightarrow \mathcal{K}$是满足以下假设的五个非递减算子：

(i) A、B 和 C 是部分有界且部分非线性的 $\mathcal{D}$-*Lipschitz* 算子，具有 $\mathcal{D}$-函数ψ_A、ψ_B 和 ψ_C，分别为：

(ii) D 是压缩映射，其压缩常数为 k，且 $C(S) \subset (I-D)(S)$，*(iii)* B' 是连续的，C 是部分紧算子，*(iv)* $x = Ax + Tx \cdot T'y, y \in S \Rightarrow x \in S$，其中 $T = B(I-D)^{-1}C$且 $T' = B'(I-D)^{-1}C$，*(v)* $\left(\frac{I-A}{T}\right)$ 存在于 $T'(S)$上且为非递减的，*(vi)* $x_0 \preceq Ax_0 + Tx_0 \cdot T'x_0$或

$x_0 \succeq Ax_0 + Tx_0 \cdot T'x_0$，对某个 $x_0 \in E$，*(vii)* 每对元素 $x, y \in E$ 在 E中都有一个下界和一个上界。于是，当 $M\psi(r) \leq r$若 $r > 0$且$\psi(r) = \psi_B \circ (\frac{1}{1-k})\psi_C(r) + \psi_A(r)$且 $M = \|T'(S)\|$.时，算子矩阵*(1.3)*在 $S \times S$中有一个不动点。

From 定理 4.2 和推论 4.3，无需任何障碍，我们可以得出以下推论 y.

推论 4.4 设 S 是正则偏序巴拿赫代数 $(E, \preceq, \|\cdot\|)$ 的非空闭的部分有界子集，且 E 中的序关系 $\preceq$ 与范数 $\|\cdot\|$ 相容。设 A，$C: S \longrightarrow E$ 以及 B，B'，$D: E \longrightarrow \mathcal{K}$ 是满足以下假设的五个非递减算子：

(i) A、 B 和 C 是部分有界且部分非线性的 $\mathcal{D}$-利普希茨算子，其 $\mathcal{D}$-函数分别为 ψ_A、 ψ_B 和 ψ_C ; *(ii)* D 是压缩映射，压缩常数为 k ，且 $C(S) \subset (I-D)(E)$; *(iii)* B' 是部分完全连续的; *(iv)* $x = Ax + Tx \cdot T'y$、 $y \in S \Rightarrow x \in S$，其中 $T = B(I-D)^{-1}C$，且 $T' = B'(I-D)^{-1}C$; *(v)* $\left(\frac{I-A}{T}\right)$ 存在于 $B'(E)$ 上且为非递减; *(vi)* $x_0 \preceq Ax_0 + Tx_0 \cdot T'x_0$ 或 $x_0 \succeq Ax_0 + Tx_0 \cdot T'x_0$，其中某个 $x_0 \in E$; *(vii)* 任意一对元素 x、 $y \in E$ 在 E 中均有下界和上界。于是，只要 $M\psi(r) \leq r$ （当 $r > 0$ 且 $\psi(r) = \psi_B \circ (\frac{1}{1-k})\psi_C(r) + \psi_A(r)$ 且 $M = \|T'(E)\|$. 时），算子矩阵 *(1.3)* 在 $S \times E$ 中有一个不动点。

5 泛函微分方程组的解的存在性

在连续实值函数空间 $E = C(J, \mathbb{R})$ 中考虑泛函微分方程（1.1），该空间由定义在 J 上的连续实值函数构成。我们在 $C(J, \mathbb{R})$ 中定义范数 $\|\cdot\|$ 和序关系 $\preceq$，即

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in J} |x(t)| \tag{5.1}$$

and

$$x \leq y \Longleftrightarrow x(t) \leq y(t) \tag{5.2}$$

对所有 $t \in J$ 均成立。显然， $C(J, \mathbb{R})$ 关于上述上确界范数是一个巴拿赫空间，并且关于上述偏序关系 $\leq$也是偏序的。已知偏序巴拿赫空间 $C(J, \mathbb{R})$ 关于其中的上述序关系具有一些良好性质。下面的引理可由应用 Arzelà-Ascoli定理得到。

引理 5。**1** *[16]*设 $(C(J, \mathbb{R}) \leq, \|\cdot\|)$ 是一个偏序巴拿赫空间，其范数为 $\|\cdot\|$，序关系为 $\leq$，分别由（5.1）和（5.2）定义。则在 $C(J, \mathbb{R})$的每个部分紧子集中， $\|\cdot\|$和 $\leq$是相容的。

本节旨在应用定理 4.1，讨论下列非线性二次泛函微分方程 QFDE (1.1) 的解的存在性。下面先给出接下来需要的定义。

定义 5.1 若函数 $u, v \in C(J, \mathbb{R})$ 满足

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u(t) - f_1(t, u(t))}{f_2(t, v(t))}\right)' + \lambda \left(\dfrac{u(t) - f_1(t, u(t))}{f_2(t, v(t))}\right) \leq g(t, v(t)) \\ v(t) \leq \dfrac{1}{1 - b(t)|u(t)|} - p\left(t, \dfrac{1}{1 - b(t)|u(t)|}\right) + p(t, v(t)) \\ \\ \big(u(0), v(0)\big) \leq (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

对所有 $t \in J$ 均成立，则称其为 *FDE*(1.1) 的下解。类似地，若函数 $u', v' \in C(J, \mathbb{R})$ 满足上述条件且不等号反向，则称其为上解。

下面考虑以下假设:

$(\mathcal{H}_0)$ 函数 $b : J \longrightarrow \mathbb{R}$ 连续。$(\mathcal{H}_1)$ 函数 $t \longmapsto f_1(t, 0)$ 在 J 上有界，
上界为 F_0。

($\mathcal{H}_2$) f_2 定义了函数 $f_2: J\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$ 对所有 $t\in J$ 关于 x 均为非递减函数。
($\mathcal{H}_3$) 存在两个常数 $L,K\in\mathbb{R}_+^*$，使得

$$0<f_i(t,x(t))-f_i(t,y(t))\leq\frac{L(x-y)}{K+(x-y)}$$

对所有 $t\in J$, $i=1,2$ 和 $x,y\in\mathbb{R}$，满足 $x\geq y$。此外，$L\leq K$。

($\mathcal{H}_4$) 函数 $p: J\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 关于 x 非递减，对所有 $t\in J$ 均成立，且是压缩映射，其常数为 k。

($\mathcal{H}_5$) 函数 $g: J\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$ 非递减，且存在函数 $h\in L^1(J)$，使得

$$\|g(t,x)\|\leq\|h\|_{L^1}\text{ for all }t\in J\text{ and }x\in\mathbb{R}.$$

($\mathcal{H}_6$) QFDE (1.1) 在 $C(J,\mathbb{R})\times C(J,\mathbb{R})$ 中有一个下解

注5.1 假设条件 $(\mathcal{H}_6)$ 成立。那么，函数 $x\in C(J,\mathbb{R})$ 是 (1.1) 的解，当且仅当它是以下泛函积分方程的解

$$\begin{cases} x(t) &= f_1(t,x(t))+f_2(t,y(t))\left(ce^{-\lambda t}+e^{-\lambda t}\displaystyle\int_0^t e^{\lambda s}g(s,y(s))ds\right)\\ y(t) &= \dfrac{1}{1-b(t)|x(t)|}-p\left(t,\dfrac{1}{1-b(t)|x(t)|}\right)+p(t,y(t))\end{cases}\tag{5.3}$$

其中 $c=\dfrac{x_0-f_1(0,x_0)}{f_2(0,y_0)}$.

事实上，令 $g\in C(J,\mathbb{R})$。首先假设 x 是定义在 J 上的 QFDE (1.1) 的一个解。根据定义，函数 $t\longmapsto\left(x(t)-f_1(t,x(t))\right.$ $\left.f_2(t,y(t))\right)'$ 在 J 上连续，因此在该处可微，由此 $\left(x(t)-f_1(t,x(t))\right.$ $\left.f_2(t,y(t))\right)'$ 在 J 上可积。对 (1.1) 从 0 到 t 积分，得到 J 上的 HIE (5.3)。

反过来，假设 x 满足方程 (5.3)。那么，通过直接求导，我们得到 QFDE (1.1) 中的第一个方程。再次将 $t=0$ 代入方程 (5.3)，得到

$$\frac{x(0)-f_1(0,x(0))}{f_2(0,y(0))}=\frac{x_0-f_1(0,x_0)}{f_2(0,y_0)}$$

由此，$(x(0)\ y(0))=(x_0,y_0)$。因此，QFDE (1.1) 成立。

现在，我们可以证明以下关于二次泛函微分方程（1.1）的存在性定理。

定理 5.1 假设条件 $(\mathcal{H}_0))$ 至 $(\mathcal{H}_7)$ 成立。此外，如果

$$\begin{cases} L\left(\left|\dfrac{x_0-f_1(0,x_0)}{f_2(0,y_0)}\right|+\|h\|_{L^1}\right)\leq K\\ \\ M_1\|\gamma\|+K\leq 1-k.\end{cases}\tag{5.4}$$

那么，泛函微分方程组 (1.1) 至少在$C(J,\mathbb{R})\times C(J,\mathbb{R})$中有一个解。$\diamondsuit$

证明。 注意，上述问题 (1.1) 可写成如下形式

$$\begin{cases} x(t) = (Ax)(t) + (By)(t) \cdot (B'y)(t) \\ y(t) = (Cx)(t) + (Dy)(t) \end{cases}.$$

其中， A、 B、 C、 D 和 B' 在 $C(J,\mathbb{R})$上定义如下:

$$\begin{cases} (Ax)(t) = f_1(t, x(t)) \\ (By)(t) = f_2(t, y(t)) \\ (Cx)(t) = \dfrac{1}{1 - b(t)|x(t)|} - p\left(t, \dfrac{1}{1 - b(t)|x(t)|}\right) \\ (Dy)(t) = p(t, y(t)) \\ (B'y)(t) = ce^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \displaystyle\int_0^t e^{\lambda s} g(s, y(s))ds. \end{cases}$$

根据上述假设以及积分的连续性可知，算子B、 B'： $E \longrightarrow \mathcal{K}.$。为了应用定理 4.1，我们必须验证以下步骤。

步骤 1： A、 B、 C、 D 和 B' 在 E上均为非递减。

设 x、 $y \in E$ 满足 $x \geq y$。则对所有 $t \in J$， $x(t) \geq y(t)$。由假设（$\mathcal{H}_3$），可得

$$\begin{aligned} Ax(t) &= f_1(t, x(t) \\ &\geq f_1(t, y(t) \\ &= Ay(t), \end{aligned}$$

对所有 $t \in J$均成立。这表明算子算子 A 在 E上是非递减的。同理，由假设（$\mathcal{H}_3$），可得

$$\begin{aligned} Bx(t) &= f_2(t, x(t) \\ &\geq f_2(t, y(t)) \\ &= By(t), \end{aligned}$$

对所有 $t \in J$均成立。这表明算子 B 在 E上也是非递减的。此外，由假设（$\mathcal{H}_5$），可得 C 是 E上的非递减算子。事实上，设 x、 $y \in E$ 满足$x(t) \geq y(t)$

$$\begin{aligned} Cx(t) &= \frac{1}{1 - b(t)|x(t)|} - p\left(t, \frac{1}{1 - b(t)|x(t)|}\right) \\ &\geq \frac{1}{1 - b(t)|y(t)|} - p\left(t, \frac{1}{1 - b(t)|y(t)|}\right) \\ &= Cy(t), \end{aligned}$$

对所有 $t \in J$ 均成立。这表明算子 C 在 E 上是非递减的。再次根据假设（$\mathcal{H}_4$），我们得到

$$\begin{aligned} Dx(t) &= p(t, x(t) \\ &\geq p(t, y(t)) \\ &= Dy(t), \end{aligned}$$

对所有 $t \in J$ 均成立。这表明算子 D 在 E 上是非递减的。最后，根据假设（$\mathcal{H}_5$），我们得到

$$\begin{aligned} B'x(t) &= ce^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} g(s, x(s))ds \\ &\geq ce^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} g(s, y(s))ds \\ &= B'y(t), \end{aligned}$$

对所有 $t \in J$ 均成立。这表明算子 B' 在 E 上是非递减的。
步骤 2： A、 B 和 C 在 E上是部分有界的，并且是部分 $\mathcal{D}$-Lipschitz 的。令 $x \in E$ 为任意元素。不妨设 $x \geq 0$。于是，根据假设（$\mathcal{H}_1$）和（$\mathcal{H}_2$），我们有

$$\begin{aligned} |Ax(t)| &= |f_1(t, x(t))| \\ &\leq |f_1(t, x(t)) - f_1(t, 0)| + |f_1(t, 0)| \\ &\leq \frac{L\|x\|}{K + \|x\|} + F_0 \\ &\leq L + F_0, \end{aligned}$$

对所有 $t \in J$均成立。对上述不等式中的 t 取上确界，得到

$$\|Ax\| \leq L + F_0$$

对所有 $x \in E$均成立。因此， A 是有界的。这进一步意味着 A 在 E上是部分有界的。接下来，令 x、 $y \in E$ 满足 $x \geq y$。于是，我们有

$$\begin{aligned} |Ax(t) - Ay(t)| &= |f_1(t, x(t)) - f_1(t, y(t))| \\ &\leq \frac{L\|x - y\|}{K + \|x - y} \| \\ &= \psi_A(\|x - y\|), \end{aligned}$$

对所有 $t \in J$均成立，其中 $\psi_A\ (r) = \dfrac{Lr}{K + r}$。对 t取上确界，得到

$$\|Ax - Ay\| \leq \psi_A(\|x - y\|),$$

对所有满足 $x \geq y$的 x、 $y \in E$ 均成立。因此， A 是 E 上的一个部分非线性 $\mathcal{D}$-Lipschitz 函数，其 $\mathcal{D}$-函数为 ψ_A。通过使用相同的论证，我们得出： B 在 E上是部分有界的，并且是部分 $\mathcal{D}$-Lipschitz 的，其中 $\psi_B\ (r) = \dfrac{Lr}{K + r}$。此外，我们将证明 C 是部分有界的，并且是部分 $\mathcal{D}$-Lipschitz 的。事实上，对所有 $t \in J$，我们得到

$$\begin{aligned} |Cx(t)| &= \left| \frac{1}{1 - b(t)|x(t)|} - p\left(t, \frac{1}{1 - b(t)|x(t)|}\right) \right| \\ &\leq 1 + \left| p\left(t, \frac{1}{1 - b(t)|x(t)|}\right) \right| \\ &\leq 1 + k \end{aligned}$$

这意味着算子 C 部分有界。此外，设 x、 $y \in E$ 满足 $x \geq y$。于是我们得到

$$\begin{aligned} |Cx(t) - C(y)(t)| &\leq \left| \frac{1}{1 - b(t)|x(t)|} - p\left(t, \frac{1}{1 - b(t)|x(t)|}\right) - \frac{1}{1 - b(t)|y(t)|} - p\left(t, \frac{1}{1 - b(t)|y(t)|}\right) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{1 - b(t)|x(t)|} - \frac{1}{1 - b(t)|y(t)|} \right| + \left| p\left(t, \frac{1}{1 - b(t)|x(t)|}\right) - p\left(t, \frac{1}{1 - b(t)|y(t)|}\right) \right| \\ &\leq (1 + k) \left| \frac{1}{1 - b(t)|x(t)|} - \frac{1}{1 - b(t)|y(t)|} \right| \\ &\leq (1 + k)\|b\||x(t) - y(t)|. \end{aligned}$$

对 t 取上确界，可得 C 是部分非线性的 $\mathcal{D}$-利普希茨函数，其 $\mathcal{D}$-函数为 $\psi_C(r) = (1 + k)\|b\|r$

步骤 3：$(I-D)^{-1}$ 是部分非线性的 $\mathcal{D}$-利普希茨函数，且 $(I-D)^{-1}C$ 是非递减的。由于 D 是压缩映射，因此 $(I-D)^{-1}$ 存在，且是压缩映射，其常数为 $\frac{1}{1-k}$。因此，$(I-D)^{-1}$ 是部分 $\mathcal{D}$-利普希茨函数，其 $\mathcal{D}$-函数为 $\psi_\phi(r)=\frac{1}{1-k}r$现在，我们证明 $(I-D)^{-1}C$ 是非递减的。由于 $(I-D)^{-1}Cx=\frac{1}{1-b|x|}$对所有 $x\in E$ 均成立，因此对所有满足 $x\le y$ 的 x、$y\in E$，有

$$(I-D)^{-1}Cx=\frac{1}{1-b|x|}\le\frac{1}{1-b|y|}=(I-D)^{-1}Cy.$$

步骤 4：B' 是部分连续的，且 C 是紧的。设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是链 C 中的一个序列，满足当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to x$。于是，根据积分的控制收敛定理，我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty}Bx_n(t) &= ce^{-\lambda t}+e^{-\lambda t}\int_0^t\lim_{n\longrightarrow\infty}e^{\lambda s}g(s,x_n(s))ds\\ &= ce^{-\lambda t}+e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s}g(s,x(s))ds\\ &= Bx(t),\end{aligned}$$

对所有 $t\in J$均成立。这表明 $\{Bx_n\}$ 在 J上逐点收敛到 Bx。现在我们证明 $\{Bx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 E 中的一个等度连续函数序列。设 t_1、$t_2\in J$满足 $t_1>t_2>0$。于是我们有

$$\begin{aligned}|Bx_n(t_2)-Bx_n(t_1)| &\le \left|ce^{-\lambda t_2}-ce^{-\lambda t_1}\right|+\left|e^{-\lambda t_2}\int_0^{t_2}e^{\lambda s}g(s,x_n(s))ds\right.\\ &- \left.e^{-\lambda t_1}\int_0^{t_1}e^{\lambda s}g(s,x_n(s))ds\right|\\ &\le |ce^{-\lambda t_2}-ce^{-\lambda t_1}|+\left|e^{-\lambda t_2}\int_0^{t_2}e^{\lambda s}g(s,x_n(s))\,ds\right.\\ &- e^{-\lambda t_2}\int_0^{t_1}e^{\lambda s}g(s,x_n(s))ds+e^{-\lambda t_2}\int_0^{t_1}e^{\lambda s}g(s,x_n(s))ds\\ &- \left.e^{-\lambda t_1}\int_0^{t_1}e^{\lambda s}g(s,x_n(s))ds\right|\\ &\le |ce^{-\lambda t_2}-ce^{-\lambda t_1}|+\left|e^{-\lambda t_2}\int_{t_1}^{t_2}e^{\lambda s}g(s,x_n(s))ds\right|\\ &+ \left|(e^{-\lambda t_2}-e^{-\lambda t_1})\int_0^{t_1}e^{\lambda s}g(s,x_n(s))ds\right|.\end{aligned}$$

这意味着 $\lim_{t_1\to t_2}|Bx_n(t_2)-Bx_n(t_1)|=0$，因此 B 是部分连续的。接下来，我们证明 C 是紧的。为此，对任意 $x\in J$

$$\begin{aligned}|Cx(t)| &= \left|\frac{1}{1+b(t)|x(t)|}-p\left(t,\frac{1}{1+b(t)|x(t)|}\right)\right|\\ &\le 1+\left|p\left(t,\frac{1}{1+b(t)|x(t)|}\right)\right|\\ &\le 1+k\end{aligned}$$

这 证明 C 有界。现在证明 C 在 E 上等度连续。对于每个 t_1，$t_2\in$ J

使得 $t_2 > t_1$，我们得到

$$\begin{aligned}
|Cx(t_2) - Cx(t_1)| &= \left| \frac{1}{1+b(t)|x(t_2)|} - p\left(t_2, \frac{1}{1+b(t_2)|x(t_2)|}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{1+b(t_1)|x(t_1)|} - p\left(t_1, \frac{1}{1+b(t_1)|x(t_1)|}\right) \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{1+b(t)|x(t_2)|} - \frac{1}{1+b(t_1)|x(t_1)|} \right| \\
&\quad + \left| p\left(t_2, \frac{1}{1+b(t_2)|x(t_2)|}\right) - p\left(t_1, \frac{1}{1+b(t_1)|x(t_1)|}\right) \right| \\
&\leq \|b\|_\infty \left| \frac{x(t_2) - x(t_1)}{(1+b(t_2)|x(t_2)|)(1+b(t_1)|x(t_1)|)} \right| \\
&\quad + k\|b\|_\infty \left| \frac{x(t_2) - x(t_1)}{(1+b(t_2)|x(t_2)|)(1+b(t_1)|x(t_1)|)} \right| \\
&\leq (1+k)\|b\|_\infty |x(t_2) - x(t_1)|.
\end{aligned}$$

这意味着

$$\lim_{t_2 \to t_1} |Cx(t_2) - Cx(t_1)| = 0$$

这意味着 C 在 J 上等度连续。由阿尔泽拉–阿斯科利定理， [8] $C(E)$ 的闭包相对紧，因此 C 是紧算子。

步骤 5： u 满足算子不等式 $u \leq Au + B(I-D)^{-1}Cu \cdot B'(I-D)^{-1}Cu$。根据假设（$\mathcal{H}_6$），我们有

$$\begin{cases}
\left(\dfrac{u(t) - f_1(t,u(t))}{f_2(t,v(t))}\right)' + \lambda\left(\dfrac{u(t) - f_1(t,u(t))}{f_2(t,v(t))}\right) \leq g(t,v(t)) \\
v(t) \leq \dfrac{1}{1-b(t)|u(t)|} - p\left(t, \dfrac{1}{1-b(t)|u(t)|}\right) + p(t,v(t)) \\
\\
\big(u(0), v(0)\big) \leq (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2
\end{cases}$$

对所有 $t \in J$ 均成立。

那么，由注2.1可得

$$\begin{cases}
u(t) &\leq f_1(t,u(t)) + f_2(t,v(t)) \left(ce^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \displaystyle\int_0^t e^{\lambda s} g(s, v(s)) ds \right) \\
v(t) &\leq \dfrac{1}{1-b(t)|u(t)|} - p\left(t, \dfrac{1}{1-b(t)|u(t)|}\right) + p(t,v(t))
\end{cases}$$

因此，根据算子 A、 B、 C、 D 和 B' 的定义可知

$$u(t) \leq Au(t) + B(I-D)^{-1}Cu(t) \cdot B'(I-D)^{-1}Cu(t),$$

对于所有 $t \in J$。取上确界可得

$$u \leq Au + B(I-D)^{-1}Cu \cdot B'(I-D)^{-1}Cu.$$

最后，利用假设（$\mathcal{H}_5$），我们得到

$$\begin{aligned}
M &= \|T'(E)\| \\
&= \left\| ce^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda t} g(s, x(s)) ds \right\| \\
&\leq |c| + \|h\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

由方程 (5.4)，我们推知 $M\psi_B \circ \psi_\phi \circ \psi_C(r) + \psi_A(r) < r$。因此，算子 A, B, C, D 和 B' 满足定理 4.1 的所有要求，因此 QFDE (1.1) 在 $C(J \times \mathbb{R}) \times C(J \times \mathbb{R})$ 中有一个正解。□

注 5.2 如果将假设$(\mathcal{H}_7)$ 替换为以下假设$(\mathcal{H}_7')$，定理 *5.1* 的结论仍然成立：二次泛函微分方程 (1.1) 在 $C(J, \mathbb{R}) \times C(J, \mathbb{R})$中存在一个上解。

在这一新假设下，证明与定理 5.1 的证明类似，结论同样可由应用定理 4.1 得出。

参考文献

[1] *R. P. Agarwal*、*D. O'Regan* 和 *D. R. Sahu*，《*Lipschitz* 型映射不动点理论及其应用》，施普林格，纽约（*2009*年）。[2] *R. P. Agarwal* 和 *D. O'Regan*，《微分方程、差分方程和积分方程的无限区间问题》，克鲁维尔学术出版社，纽约（*2001*年）。[3] *D. D. Bainov* 和 *S. Hristova*，《含最大值的微分方程》，*Chapman and Hall/CRC* 纯粹与应用数学（*2011*年）。[4]*J. Banas* 和 *M. Lecko*，巴拿赫代数中算子乘积的不动点，《泛美数学杂志》，*12*（*2002*年），第*2*期，*101-109*。[5] *F. E. Browder*，不动点理论与非线性问题，《美国数学会通报》，*9*（*1983*年），第*1*期，*1-39*。[6] *J. Caballero*、*B. Lopez* 和 *K. Sadarangani*，带有线性自变量变换的积分方程非递减连续解的存在性，《数学学报（英文版）》，*23*（*2007*年），第*9*期，*1719-1728*。[7] *S. Carl* 和 *S. Heikkila*，有序集中的不动点理论及其应用，施普林格（*2011*年）。[8] *R. F. Curtain* 和 *A. J. Pritchard*，现代应用数学中的泛函分析，学术出版社（*1977*年）。[9] *B. C. Dhage*，巴拿赫代数中的一个不动点定理及其应用，《应用数学快报》，*18*（*2005*年），第*3*期，*273-280*。[10] *B. C. Dhage*，*Leray-Schauder* 型非线性替代定理及泛函积分方程，《布尔诺数学文献》，*42*（*2006*年），第*1*期，*11-23*。[11]*B. C. Dhage*，偏序赋范线性空间中的混合不动点理论及其在分数阶积分方程中的应用，《微分方程及其应用》，*5*（*2013*年），第*2*期，*155-184*。[12] *B. C. Dhage*，偏序赋范线性空间中的部分压缩映射及其在泛函积分方程中的应用，《淡江数学杂志》，*45*（*2014*年），第*4*期，*397-426*。[13] *B. C. Dhage*，偏序赋范线性空间中的非线性 $\mathcal{D}$-集压缩映射及其在泛函混合积分方程中的应用，《马来亚数学杂志》，*3*（*2015*年），第*1*期，*62-85*。[14]*B.C. Dhage*，非线性一阶混合微分方程的 *Dhage* 迭代法：第二类线性扰动，《国际分析与应用杂志》，*12*（*2016*年），第*1*期，*49-61*。

[15] *B. C. Dhage*，*Dhage* 迭代法：二次泛函微分方程正解的近似，《马来西亚数学与科学杂志》，*6*（*2018*年），第*1*期，*1-13*。[16] *B.C. Dhage*、*S.B. Dhage*，通过混合不动点理论近似求解混合微分方程的非线性周期边值问题，《印度数学杂志》，*57*（*2015*年），*103-119*。[17] *B. C. Dhage*、*S. B. Dhage* 和 *J. R. Graef*，*Dhage* 迭代法：近似求解带时滞和最大值的非线性一阶二次中性函数微分方程初值问题的正解，《国际应用数学杂志》，*31*（*2018*年），第*1*期，*1-21*。[18]*A. Fahem*、*A. Jeribi* 和 *N. Kaddachi*，弱拓扑下巴拿赫代数中钱德拉塞卡方程组解的存在性，*Filomat*，*33*（*2019*年），第*18*期，*5949-5957*。[19] *D. Guo*，非线性分析中的偏序方法，山东学术出版社（*1997*年）。[20] *D. Guo* 和 *V. Lakshmikantham*，《抽象锥中的非线性问题》，学术出版社，纽约（*1988*年）。[21] *A. Jeribi* 和 *B. Krichen*，《巴拿赫空间与巴拿赫代数中的非线性泛函分析：弱拓扑下非线性算子及块算子矩阵的不动点理论及其应用》，数学专著与研究札记，*CRC*出版社（*2015*年）。[22] *A. Jeribi*、*N. Kaddachi* 和 *B. Krichen*，弱拓扑下巴拿赫代数中非线性积分方程组解的存在性结果，《不动点理论》，*18*（*2017*年），第*1*期，*247-267*。[23] *N. Kaddachi*、*A. Jeribi* 和 *B. Krichen*，巴拿赫代数上块算子矩阵的不动点定理及其在泛函积分方程中的应用，《数学方法与应用科学》，*36*（*2013*年），第*6*期，*659-673*。[24] *J. L. Li*，利用偏序集上的不动点定理证明非线性 *Hammerstein* 积分方程连续解的存在性，《非线性凸分析杂志》，*17*（*2016*年），第*7*期，*1311-1323*。[25] *D. V. Mule* 和 *B. R. Ahirrao*，一阶二次泛函微分方程初值与周期边值问题解的近似，《国际纯粹与应用数学杂志》，*113*（*2017*年），第*2*期，*251-271*。[26] *J. J. Nieto* 和 *R. R. Lopez*，偏序集上的压缩映射定理及其在常微分方程中的应用，*Order*，*22*（*2005*年），第*3*期，*223-239*。