arXiv:2301.03361v1 [math.QA] 9 Jan 2023

有限李型单群上的有限维尖点霍普夫代数 VII：$\mathrm{PSL}_n(q)$ 和 $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ 中的半单类

´NICOLAS ANDRUSKIEWITSCH、GIOVANNA CARNOVALE 和
´ ´ ´GASTON ANDRES GARCIA

Abstract. 我们证明，若有限域上的射影特殊线性群的一个简单 Yetter-Drinfeld 模的支撑是半单轨道，且该轨道中的元素均可约，则其 Nichols 代数是无限维的；对于有限辛群中的所有半单轨道，我们也得到类似结论，低秩情形除外。我们证明，采用我们的方法无法处理射影特殊线性群中由不可约元素构成的轨道。最后，我们得出结论：任何群样元群同构于 $\mathrm{PSL}_n(q)$ ($n \geq 4$)、$\mathrm{PSL}_3(q)$ ($q > 2$) 或 $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ ($n \geq 3$) 的有限维尖点霍普夫代数 H 都同构于群代数，从而完成了 arXiv:1506.06794 中的工作。

Contents

1. 引言 1 致谢 5 2. 架 5 3. 代数群 8 4. 分裂共轭类 15 5. 特殊线性群 18 6. 在 K 29 中表示的半单共轭类7. 辛群 37 参考文献 41

1. Introduction

1.1. 问题。设 G 是一个有限群。 $x \in G$ 的共轭类记作 $\mathcal{O}_x^G$ 或 $\mathcal{O}_x$。由 $I \subset G$ 生成的 G 的子群记作 $\langle I \rangle$。考虑 G 的共轭类 $\mathcal{O}$ 的以下性质：

2010 数学主题分类：16T05, 20D06。*Keywords:* Nichols 代数；Hopf 代数；rack；李型有限群；共轭类。

(C) 存在 $H < G$ 和 r、$s \in H \cap \mathcal{O}$，使得 $rs \neq sr$、$H = \langle \mathcal{O}_r^H$、$\mathcal{O}_s^H \rangle$、$\mathcal{O}_r^H \neq \mathcal{O}_s^H$，且 $\min\{|\mathcal{O}_r^H|, |\mathcal{O}_s^H|\} > 2$ 或 $\max\{|\mathcal{O}_r^H|, |\mathcal{O}_s^H|\} > 4$。(D) 存在 r、$s \in \mathcal{O}$，使得 $\mathcal{O}^{\langle r, \ s\rangle} \neq \mathcal{O}^{\langle r, \ s^{s}\rangle}$ 且 $(rs)^2 \neq (sr)^2$。(F) 存在 $r_a \in \mathcal{O}$、$a \in \mathbb{I}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$，使得 $\mathcal{O}^{\langle r_a^r : \ a\in\mathbb{I}_4\rangle} \neq \mathcal{O}^{\langle r_a : \ a\in\mathbb{I}_4\rangle}$，且对于 $a \neq b \in \mathbb{I}_4$，$r_a r_b \neq r_b r_a$。

当相应性质成立时，我们称 $\mathcal{O}$ 为 C、D、F 型。正如 [5], 的引言中所解释的，下一个问题对有限维尖点 Hopf 代数的分类有着深远影响。

问题 1. 确定给定有限（非阿贝尔）群 G 的哪些共轭类属于 C、D 或 F 型。

事实上，如果共轭类 $\mathcal{O}$ 属于 C、D 或 F 型，那么任何支撑与 $\mathcal{O}$ 同构的群型 Nichols 代数都是无限维的；为简便起见，我们称这种情况下 $\mathcal{O}$ 会塌缩。对于本文的目的，无需进一步精确说明 Nichols 代数。

如果 $\mathcal{O}$ 既非 C 型、D 型，也非 F 型，我们就称它为 kthulhu。根据前面的定义可立即得出，如果 $\mathcal{O} \cap H$ 是阿贝尔的，或者是 H 对任意 $H \leq G$ 的单个共轭类，那么 $\mathcal{O}$ 就是 kthulhu。

直观地说，C、D 和 F 型判据是归纳论证；用架的语言表述时，这些论证更为灵活，见第 2 节。共轭类是架的典型例子。人们或许会想知道，是否还有其他归纳论证能够迫使一个共轭类坍缩。对此，我们称一个架为 sober，若其每个子架要么是阿贝尔的，要么是不可分解的 [1, §1.5]；若由两个元素生成的每个子架要么是阿贝尔的，要么是不可分解的 [3, 2.11]，则称其为 austere。显然，sober 蕴含 austere，而 austere 蕴含 kthulhu。作为问题 1 的补充，我们提出：

问题 2. 确定给定有限（非阿贝尔）群 G的哪些共轭类是 sober 或 austere，或是 kthulhu。

1.2. 李型单群。假设 G 是单非阿贝尔群，以此作为着手处理问题 1 和 2 的出发点，既自然又方便，见[9] 了解这一约化的重要性。当 G 是交错群或散在群时，这一问题已在 [7, 8, 14, 15]中得到探讨。论文系列 [1, 2, 3, 4, 5, 12] 研究 G 为李型单群的情形。前五篇论文回答了关于 Chevalley 群或 Steinberg 群中非半单共轭类的问题 1 和 2。第六篇专论铃木群与 Ree 群。

本文研究经典切瓦利群中的半单共轭类。主要困难在于算术的影响更为深远；与之相对，幺幂类和混合类在大多数情况下都可以归约为较小群中的一个幺幂类。我们总结主要结果，并随后讨论证明。

定理 I. 设 $\mathcal{O} \neq \{e\}$ 是群 $\boldsymbol{G}$中的一个半单共轭类。

(i) 若 $\boldsymbol{G} =$PSL$_n(q)$，则表 1 中未列出的任何 $\mathcal{O}$ 都会塌缩。(ii) 若 $\boldsymbol{G} =$ PSp$_n(q)$，则任何 $\mathcal{O}$ 都会塌缩，但当 $n = 2$ 且 $q \in \{3, 5, 7\}$时，非平凡对合的轨道可能例外。

部分 (i) 在定理 5.4 中证明；对于陈述中排除的小q 情形，见注 5.3。部分 (ii) 在定理 7.1 中证明。对于其他 Chevalley 群，定理 4.1 和 6.2 提供了大量信息。

这些结果的证明大致如下：取一个单群 $\boldsymbol{G}$、群的一个满射态 $\pi : G \to \boldsymbol{G}$，以及分别属于 G 和 $\boldsymbol{G}$ 的共轭类 $\mathfrak{O}$ 和 $\mathcal{O}$，使得 $\pi(\mathfrak{O}) = \mathcal{O}$。然后考察与 $\mathfrak{O}$ 相交的子群H。如果对于某个 $H \leq G$， $H \cap \mathfrak{O}$ 分裂为多个 H的共轭类，那么就详细分析，证明 $\mathfrak{O}$ 属于 C 型或 D 型，并且这一性质在投影 $\pi : \mathfrak{O} \to \mathcal{O}$ 下保持不变。当 G 为李型时，通常可以通过某种方式考察其背后的代数群结构，找到子群 H G。

但是，如果对于每个$H \leq G$， $\pi(H) \cap \mathcal{O}$要么是阿贝尔群，要么是 $\pi(H)$的一个共轭类，那么 $\mathcal{O}$ 就是kthulhu。出现这种情况时，通常 $\boldsymbol{G}$ 规模“较小”，且子群不多。

在本文中，我们发现，对于 PSL$_n(q)$ 中不可约元素的任意共轭类$\mathcal{O}$，当 n 为奇素数时，也会出现这种情况。为证明这一点，我们利用了 [17] 的主要结果，结合一些算术运算，得到了与 $\mathfrak{O}$相交的 $H \leq G$ 列表。这一结果与本系列此前各篇论文的结果显著不同，并突显了半单类与算术方面之间的联系。

TABLE 1. PSL$_n(q)$ 中的 kthulhu 半单类。

n	q	类	注记
2	2, 特殊线性群$_2(2) \simeq \mathbb{S}_3$	(3)	阿贝尔
	3， PSL$_2(3) \simeq \mathbb{A}_4$	(2^2)	阿贝尔
	4， PSL$_2(4) \simeq \mathbb{A}_5$	(5)	sober
	5， PSL$_2(5) \simeq \mathbb{A}_5$	$(1, 2^2)$	sober
	9， PSL$_2(9) \simeq \mathbb{A}_6$	$(1, 5)$	kthulhu
	偶数且不是平方数	不可约，阶 3	sober
	all	不可约 ，阶 > 3	sober
奇素数	all	不可约	kthulhu

1.3. 对霍普夫代数的应用。与之前的论文一样，我们称有限群 G 塌缩，是指每个带有H 且满足 $G(H) \simeq G$ 的有限维尖点霍普夫代数H 必然同构于 $\mathbb{C}G$。作为我们的主要定理以及本系列之前论文中结果的推论，我们得到了一些新的塌缩群族，见定理 III，这扩展了 [3, 定理

1.2]。为此，我们首先列出单群 $\mathrm{PSL}_n(q)$ 和 $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ 中所有 kthulhu 类的完整清单，其中 $n \geq 2$、任意 q。该信息结合了本文的主要结果、经过修正的 [1, 表 1], [3,表 3] 以及 [5, 定理 1.1] ，并对群 $\mathrm{PSL}_2(q)$ 在 $q = 2$、3、4、5、7、9 情形下进行了细致分析，其中存在一些例外。我们指出，在 $\mathrm{Sp}_{2n}(9)$ 中标记为 $(1^{r_1}, 2)$ 的类（见 [3, 表3,5] ）实际上并非 kthulhu：它们属于 C 型，因为每个类都包含 $\mathrm{PSL}_2(9)$ 中一个类型为 (2) 的非平凡幺正类 $\simeq \mathbb{A}_6$ ，该类属于 C 型，参见例 2.7。此外， [3, 表 1]中 $\mathrm{PSL}_2(7)$ 的对合类也并非 kthulhu：由于 $\mathrm{PSL}_3(2) \simeq \mathrm{PSL}_2(7)$，根据 [3,引理 2.12]，它们属于 C 型。

定理 II. 设 $\boldsymbol{G}$ 为 $\mathrm{PSL}_n(q)$ 或 $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$， $n \geq 2$ 且设 $\mathcal{O}$ 为 $\boldsymbol{G}$中的一个非平凡共轭类，且不同于 $\mathrm{PSp}_4(7)$ 中分裂对合的共轭类。那么，当且仅当 $\mathcal{O}$ 出现在表 2 中时，它才是 kthulhu。

TABLE 2. Kthulhu 类， $\boldsymbol{G} = \mathrm{PSL}_n(q)$ 或 $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$， $n \geq 2$。

$\boldsymbol{G}$	n	q	类的类型	描述/标签
$\mathrm{PSL}_n(q)$	2	偶数，否则奇数且不是平方数	幺幂	(2)
		5	半单	对合
		all	半单	不可约， $\lvert x\rvert > 3$
		even and not a 平方数	半单	不可约 $\lvert x\rvert = 3$
	3	2	幺幂	(3)
	奇素数	all	半单	不可约
$\mathrm{PSp}_{2n}(q)$	≥ 2	even	幺幂	$W(1)^a \oplus V(2)$
		为奇数且不是平方数	幺幂	$(1^{r_1}, 2)$
	2	even	幺幂	$W(2)$
		3,5	半单	分裂对合

目前仍未确定 $\mathrm{PSp}_4(7)$ 中分裂对合的共轭类是否为 kthulhu。

下一个结果结合了 [1, 定理1.4], [3, 定理1.2] 和 [5, 定理 1.2] 以及定理 I。

定理 III. 群 $\mathrm{PSL}_n(q)$（其中 $n \geq 4$）、$\mathrm{PSL}_3(q)$（其中 $q > 2$）以及 $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$（ $n \geq 3$）均会坍缩。□

在群 $\mathrm{PSL}_3(2)$ 中，只有一个无法处理的类，即正则幺幂类 $\mathcal{O}$，它是 sober。实际上，$\mathrm{PSL}_3(2) \simeq \mathrm{PSL}_2(7)$，而对于这个群， $\mathcal{O}$ 是半单的。

1.4. 约定。若 $a \leq b \in \mathbb{N}_0$，则 $\mathbb{I}_{a,\ b}$ 表示 $\{a, a+1, \dots, b\}$；为简便起见，也$\mathbb{I}_a = \mathbb{I}_{1,\ a}$。

设 G 是一个群。$X \subset G$ 的中心化子记作 $C_G(X)$。若$x, y \in G$，则 $x \triangleright y := xyx^{-1}$。我们用 $X \geq Y$ 或 $Y \leq X$表示Y是 X 的子架（或子群，或更一般地，给定范畴中的子对象）。子群的正规性用 $N \lhd G$表示。

设 $q = p^m$、p 为素数，且 $m \in \mathbb{N}$。设 $\mathbb{F}_q$ 是含有 q 个元素的域，$\Bbbk$ 是 $\mathbb{F}_q$的代数闭包。我们用 $\mathbb{G}_n$(k)表示域 k 中 n次单位根组成的群。

Acknowledgements

我们感谢 Gunter Malle 通过电子邮件进行了非常有帮助的交流，也感谢 Andrea Lucchini 指出了若干参考文献。

N. A. 部分获得了 CONICET（PIP 11220200102916CO）、FONCyT-ANPCyT（PICT-2019-03660）和 Secyt（UNC）的资助。G. A. G. 部分获得了 CONICET（PIP 11220200100423CO）、Secyt（UNLP）和 FONCyT-ANPCyT（PICT-2018-00858）的资助。G. C. 部分获得了帕多瓦大学项目 BIRD179758/17、DOR2207212/22 和 BIRD203834 的资助。研究成果是在 N. A. 访问帕多瓦大学以及 G. C. 访问科尔多瓦大学期间取得的，部分经费由两校双边协议及 INdAM-GNSAGA 访问教授计划提供。

2. Racks

2.1. 架。与以往的论文一样，我们使用 rack 的术语；更多信息请参见 [9] 。架是一个二元组（$\mathcal{O}$，$\triangleright$），其中 $\mathcal{O}$ 是非空集合，且$\triangleright\colon \mathcal{O}\times\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ 是自分配运算，并且对任意 $x \in \mathcal{O}$，$\varphi_x := x\triangleright$ 都是双射。若子集 $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ 满足 $\mathcal{O}' \triangleright \mathcal{O}' \subset \mathcal{O}'$，则称其为子架。令 Inn$\mathcal{O}$ 表示由映射 $\varphi\colon \mathcal{O} \to \mathbb{S}_{\mathcal{O}}$ 的像生成的群。本文考虑的架的主要例子是有限群的共轭类（的并），其中 $\triangleright$ 为共轭作用。若对任意 x、$y \in \mathcal{O}$，都有 $x \triangleright y = y$，则架（$\mathcal{O}$，$\triangleright$）是阿贝尔的。此外，若一个架不能表示为两个子架的不交并，则称其为不可分解；否则称为可分解。

以下观察将很有用，尤其是在处理正交群时。

注 2.1. 设 G 是一个有限群，$N \lhd G$、$g \in G - N$ 和 $\mathcal{O}_g^N$ 是 N 对 g 的共轭作用轨道。那么 $\mathcal{O}_g^N$ 是 $\mathcal{O}_g^G$ 的子架。

这是 [13, 注记 3.2] 的一个特殊情形，可以直接验证。注意，如果 $N \leq G$ 不正规，那么 $\mathcal{O}_g^N$ 可能不是 $\mathcal{O}_g^G$ 的子架。例如，取 $G = \mathbb{S}_4$、$g =$ (123) 和 $N = \langle$(12)(34)$\rangle$；此时 $\mathcal{O}_g^N =$ {(123)、(142)} 对架运算不封闭。

2.2. C 型架。以下概念在 [3, 定义 2.3] 中引入，其动机来自 [18, 定理 2.1]。

定义 2.2. 架 X 是 C 型的，当且仅当存在一个可分解子架$Y = R \coprod S \leq X$，$r \in R$和 $s \in S$，使得 $r \triangleright s \neq s$，

$$R = \mathcal{O}_r^{\operatorname{Inn} Y}, \qquad S = \mathcal{O}_s^{\operatorname{Inn} Y}, \quad \min\{|R|, |S|\} > 2 \text{ or } \max\{|R|, |S|\} > 4.$$

类型 C 定义的群论重述 (C) 是 [3,引理 2.8]。我们需要对 [3, 引理 2.8] 作一处变动，以涵盖注 2.1 中的情形。证明可以逐字重复：为求完整起见，我们在此重述。

引理 2.3. 设 G 为一个有限群，$g \in G$ 和 $N \lhd G$。轨道 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_g^N$是 C 型的，当且仅当存在 $H \leq \langle \mathcal{O} \rangle$, $r, s \in \mathcal{O} \cap H$ 使得

$$\mathcal{O}_r^H \neq \mathcal{O}_s^H; \tag{2.1}$$

$$rs \neq sr; \tag{2.2}$$

$$H = \langle \mathcal{O}_r^H, \mathcal{O}_s^H \rangle; \tag{2.3}$$

$$\min\{|\mathcal{O}_r^H|, |\mathcal{O}_s^H|\} > 2 \quad \textit{or} \quad \max\{|\mathcal{O}_r^H|, |\mathcal{O}_s^H|\} > 4. \tag{2.4}$$

证明。假设 r、s 和 H 如上所述，并令 $R := \mathcal{O}_r^H$ 和 $S := \mathcal{O}_s^H$。若对某个 $h \in H$ 有 $r' = h \triangleright r \in \mathcal{O}_r^H = R$，则存在 x_1、$\cdots$、$x_k \in \mathcal{O}$ 使得 $h = x_1 \cdots x_k$。因此

$$r' = x_1 \triangleright (x_2 \triangleright (\cdots (x_k \triangleright r)) \in \mathcal{O}(\triangleright \mathcal{O}(\triangleright \cdots \mathcal{O} \triangleright \mathcal{O}))) \subset \mathcal{O},$$

于是 $R \subset \mathcal{O} \cap H$，类似地有 $S \subset \mathcal{O} \cap H$。由 (2.1)，子集 $Y := R \coprod S \subset \mathcal{O}$ 是一个可分解子架，而 $r \triangleright s \neq s$ 满足 (2.2)。此外，

$$\mathcal{O}_r^{\operatorname{Inn} Y} = \mathcal{O}_r^{\langle R, S \rangle} = \mathcal{O}_r^H = R,$$

其中第二个等式由 (2.3) 得出，类似地，$\mathcal{O}_s^{\operatorname{Inn} Y} = S$。关于 R 和 S 的估计是 (2.4)。因此 $\mathcal{O}$ 属于 C 型。

反过来，设 $X = \mathcal{O}$ 和 r、s、R、S、Y 如定义 2.2 所述。令 $H := \langle R, S \rangle$，即可得到 (2.3)、$H \leq \langle \mathcal{O} \rangle$、$R = \mathcal{O}_r^H$、$S = \mathcal{O}_s^H$ 以及 r、$s \in \mathcal{O} \cap H$。最后，(2.2)、(2.1) 和 (2.4) 显然成立。□

注 2.4. 设 G、N 和 $\mathcal{O}$ 如引理 2.3 中所述。

(a) 若存在满足 (2.2) 的 r、$s \in \mathcal{O}$，$\mathcal{O}^{\langle r,\ s^{r}\rangle} \neq \mathcal{O}^{\langle r,\ s^{s}\rangle}$，且：

$$\min\{|\mathcal{O}_r^{\langle r,s\rangle}|, |\mathcal{O}_s^{\langle r,s\rangle}|\} > 2 \quad \text{or} \quad \max\{|\mathcal{O}_r^{\langle r,s\rangle}|, |\mathcal{O}_s^{\langle r,s\rangle}|\} > 4,$$

那么，根据应用于 $H := \langle r, s \rangle$ 的引理 2.3，$\mathcal{O}$ 属于 C 型。

(b) 如果 $|g|$ 为奇数且 $r, s \in \mathcal{O}$，那么对于任何包含 r 和 s 的 $H \leq G$，估计式 (2.4) 可由 (2.2) 推出，因为此时 $|s| = |r| = |g|$ 为奇数，从而 $|\mathcal{O}_r^H| \geq |\mathcal{O}_r^{\langle s \rangle}| \geq 3$，对于 $\mathcal{O}_s^H$ 也同样如此。这将 [3, 引理 2.7(b)] 推广到了注 2.1 的情形。

例 2.5. 设 $n \geq 5$ 为奇数。那么 $\mathbb{S}_n$ 中 n-循环的共轭类 $\mathcal{O}$ 属于 C 型。事实上，$\mathcal{O}$ 在 $\mathbb{A}_n$ 中分裂为两个类 $\mathcal{O}'$ 和 $\mathcal{O}''$，且$|\mathcal{O}'| = |\mathcal{O}''| = \frac{(n-1)!}{2} > n$ 个元素。因此，若 $r \in \mathcal{O}'$，则存在 $s \in \mathcal{O}''$，使得 $s \notin C_{\mathbb{A}_n}(r) = \langle r \rangle$，结论由注 2.4 得出。

例 2.6. 在 $\mathbb{A}_6$ 中，对应于分拆 $(1^2, 2^2)$ 的类 $\mathcal{O}$ 属于 C 型。事实上，$H := C_{\mathbb{A}_6}(56) \simeq \mathbb{S}_4$，且 $H \cap \mathcal{O}$ 包含所有形如 $(ab)(cd)$ 的对合，其中 $a, b, c, d \notin \{5, 6\}$，以及所有形如 $(ab)(56)$ 的对合，其中 $a, b \notin \{5, 6\}$。因此，$|\mathcal{O}' \cap H| = 12$，且 $\mathcal{O}'$ 包含 H 中的所有对合。现在，$\mathbb{S}_4$ 中的对合分成两个大小为 6 的类，而$\mathbb{S}_4$ 包含不交换且不共轭的对合。因此，我们可以找到$r, s \in H \cap \mathcal{O}'$，使得 $r \triangleright s \neq s$ 且 $\mathcal{O}_r^H \neq \mathcal{O}_s^H$，其中$|\mathcal{O}_r^H| = |\mathcal{O}_s^H| = 6$。最后，$\langle \mathcal{O}_s^H, \mathcal{O}_r^H \rangle = H$，因为 $\mathbb{S}_4$ 由其对合生成。由引理 2.3 得出结论。

例 2.7。$G = \mathbb{A}_3$ or $\mathbb{A}_4$ 中的 3-循环共轭类是 kthulhu，因为它与 G 的任意子群的交集要么是阿贝尔群，要么是一个共轭类。

$\mathbb{A}_n$ 中对应于 $n \geq 5$ 的 3-循环共轭类 $\mathcal{O}$，以及$\mathbb{A}_6$ 中标记为（3^2）的共轭类 $\mathcal{O}'$，均为 C 型。事实上，$\mathcal{O} \cap \mathbb{A}_4$ 分裂为共轭类 $\mathcal{O}_{(123)}$ 和 $\mathcal{O}_{(124)}$。由于这些代表元不交换，根据注 2.4，$\mathcal{O}$ 是 C 型。$\mathbb{S}_6$ 的任意非内自同构都会在 $\mathbb{A}_6$中交换 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{O}'$，因此 $\mathcal{O}'$ 也是 C 型。

下面给出前一个引理的一个简单但有用的应用。

引理 2.8。设 G 是一个有限群，$H \leq G$、$x \in H$。假设

$$H \text{ is not abelian}; \tag{2.5}$$

$$H = \langle \mathcal{O}_x^H \rangle; \tag{2.6}$$

$$\text{there exists } s \in \mathcal{O}_x^G \cap H : \ s \notin \mathcal{O}_x^H, \ |\mathcal{O}_s^H| > 2. \tag{2.7}$$

那么 $\mathcal{O}_x^G$ 是 C 型。

证明。存在 $r \in \mathcal{O}_x^H$ 使得 $rs \neq sr$；否则，由（2.6）可得 $s \in Z(H)$，从而 $|\mathcal{O}_s^H| = 1$。因此（2.2）成立，而（2.1）和（2.3）由构造显然成立。最后，由（2.5）可得 $|\mathcal{O}_r^H| > 2$，故（2.4）成立。□

这里还有另一种判定 C 型架的方法。

引理 2.9. 设 G_1 和 G_2 是有限群，$a_1 \neq b_1 \in G_1$, $a_2, b_2 \in G_2$。令 $r = (a_1, a_2)$ $s = (b_1, b_2) \in G := G_1 \times G_2$。假设

$$a_1 b_1 = b_1 a_1, \qquad a_2 b_2 \neq b_2 a_2; \tag{2.8}$$

$$\mathcal{O}_{a_1}^{G_1} = \mathcal{O}_{b_1}^{G_1}, \qquad \mathcal{O}_{a_2}^{G_2} = \mathcal{O}_{b_2}^{G_2}; \tag{2.9}$$

$$G_2 = \langle \mathcal{O}_{a_2}^{G_2} \rangle. \tag{2.10}$$

那么 $\mathcal{O}_r^G = \mathcal{O}_{a_1}^{G_1} \times \mathcal{O}_{a_2}^{G_2}$ 属于 C 型。

证明。设 $H = \langle \{a_1\} \times \mathcal{O}_{a_2}^{G_2}, \{b_1\} \times \mathcal{O}_{a_2}^{G_2} \rangle \ni r, s$；(2.2) 显然成立。我们断言 $\mathcal{O}_r^H = \{a_1\} \times \mathcal{O}_{a_2}^{G_2}$。事实上，$\subseteq$ 由 (2.8) 得出，而 $\supseteq$ 由 (2.10) 得出：

$$\begin{aligned} y \in G_2 &\implies \exists x_1, \dots, x_t \in \mathcal{O}_{a_2}^{G_2} : y = x_1 \dots x_t \\ &\implies (a_1, y \triangleright a_2) = (a_1, x_1) \triangleright ((a_1, x_2) \triangleright \dots (a_1, a_2)) \in \mathcal{O}_r^H. \end{aligned}$$

类似地，$\mathcal{O}_s^H = \{b_1\} \times \mathcal{O}_{b_2}^{G_2}$。因此 (2.1) 和 (2.3) 得证。最后，若 $|\mathcal{O}_r^H| = |\mathcal{O}_s^H| = |\mathcal{O}_{a_2}^{G_2}| \leq 2$，则 a_2 和 b_2 可交换，这与 (2.8) 矛盾。□

注记2.10. 设 G_1 和 G_2 是有限群，$a_1 \neq b_1 \in G_1$。当 G_2 满足引理 2.9 的假设时，若 $G_2/Z(G_2)$是非阿贝尔单群且$a_2 \in G_2$ 不是中心的，则这些假设成立。也就是说，$\langle \mathcal{O}_{a_2}^{G_2} \rangle \lhd G_2$，因此它就是 G_2 的全部，从而得到 (2.10)。此外，存在一个 $b_2 \in \mathcal{O}_{a_2}^{G_2}$不与 a_2交换，因为 G_2不是阿贝尔群，这正是 (2.8) 所需的。

2.3. D 型架。若架 X 含有一个可分解子架 $Y = R \coprod S$，其元素为 $r \in R$、$s \in S$，且满足 $r \triangleright (s \triangleright (r \triangleright s)) \neq s$[7, 定义 3.5]，则称其为 D 型。若 $\mathcal{O}$ 是有限群 G中的一个共轭类，则架 $\mathcal{O}$ 是 D 型，当且仅当 (D) 成立，见 [7]。

3. Algebraic groups

设 $\mathbb{G}$ 是定义在 $\Bbbk = \overline{\mathbb{F}_q}$ 上的连通约化代数群，且 $F\colon \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ 是一个 Frobenius 映射，也就是说，它是一个 $\mathbb{F}_q$-分裂的 Steinberg端同态[22, 第 21] 章。因此，存在一个 F-稳定环面 $\mathbb{T}$，使得对于 $t \in \mathbb{T}$，$F(t) = t^q$，而 $\mathbb{G}^F = \mathbb{G}(\mathbb{F}_q)$ 是 $\mathbb{F}_q$ 点构成的有限群。我们在下文每个小节中对 $\mathbb{G}$ 作出更精确的假设。本文的主要目标涵盖以下情形：

◇ 群 $\mathbb{G}$ 或为 $\mathsf{SL}_n(\Bbbk)$，或为 $\mathsf{Sp}_{2n}(\Bbbk)$（$n \geq 2$），且

$$\boldsymbol{G} := \mathbb{G}^F / Z(\mathbb{G}^F) = [\mathbb{G}^F, \mathbb{G}^F] / Z([\mathbb{G}^F, \mathbb{G}^F])$$

是一个有限单群。

◇ 该群 $\mathbb{G}$ 或者是 $\mathsf{SO}_{2n+1}(\Bbbk)$（$n \geq 2$，$p$ 为奇数），或者是 $\mathsf{SO}_{2n}(\Bbbk)$（$n \geq 4$），且 $\boldsymbol{G} := [\mathbb{G}^F, \mathbb{G}^F] / Z(\mathbb{G}^F)$是一个有限单群。

在这两种情形下，我们称 $\boldsymbol{G}$为一个（经典）Chevalley群。为便于进行某些递归论证，我们允许 $\mathrm{SO}_5(\Bbbk)$，其单连通覆盖为 $\mathrm{Sp}_6(\Bbbk)$，以及 $\mathrm{SL}_2(3)$、$\mathrm{SL}_2(4)$、$\mathrm{SL}_2(5)$、$\mathrm{SL}_2(9)$。

设 Φ 为 $\mathbb{G}$ 的根系，并固定一个由单根组成的子集 Δ。令 Q 和 Λ 分别为根格和权格。则 $\Lambda = \oplus_{i\in\mathbb{I}}\mathbb{Z}\omega_i$；这里 θ 是 $\mathbb{G}$ 的秩，$\mathbb{I} = \mathbb{I}_\theta$ 和 $(\omega_i)_{i\in\mathbb{I}}$ 为基本权。令 W 为 Φ 的 Weyl群，并令 $s_\alpha \in W$ 为对应于 $\alpha \in \Phi$ 的反射。此外，$\alpha_i^\vee\colon \Bbbk^\times \to \mathbb{T}$, $i \in \mathbb{I}$ 为单余根。于是

$$\omega_i(\alpha_j^\vee(\xi)) = \xi^{\delta_{ij}}, \qquad \xi \in \Bbbk^\times,\ i,j \in \mathbb{I}.$$

若 $\alpha \in \Phi$，则存在一个阿贝尔群之间的单态射 $x_\alpha\colon \Bbbk \to \mathbb{G}$；令$\mathbb{U}_\alpha = \operatorname{Im} x_\alpha$（一个根子群），并令 $\mathbb{U}$ 和 $\mathbb{U}^-$ 分别为由满足 $\alpha \in \Delta$ 和 $-\alpha \in \Delta$ 的 $\mathbb{U}_\alpha$ 所生成的 $\mathbb{G}$ 的子群。

3.1. 经典群。本节固定我们将要讨论的经典群的记号。对于 $m \geq 1$，我们令 $\mathtt{J}_m = \begin{pmatrix} & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$。我们将由 $(a_{ij}) \mapsto (a_{ij}^q)$ 给出的 Frobenius 映射 Fr_q：一般线性群$_m(\Bbbk) \to$ 一般线性群$_m(\Bbbk)$ 记为 Fr_q，对任何适当子群的限制也类似。

我们将经常使用由下式给出的自同构 ϕ：一般线性群$_m(\Bbbk) \to$ 一般线性群$_m(\Bbbk)$：

$$\phi(A) := \mathtt{J}_m\, {}^tA^{-1} \mathtt{J}_m. \tag{3.1}$$

辛群 $\mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk)$。辛群 $\mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk)$ 是一般线性群$_{2n}(\Bbbk)$ 的子群，它保持双线性型 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathtt{J}_n \\ -\mathtt{J}_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 不变。因此，$\mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk)$ 由满足下式的可逆矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ 组成：

$$ {}^tC\mathtt{J}_nA = {}^tA\mathtt{J}_nC, \quad {}^tB\mathtt{J}_nD = {}^tD\mathtt{J}_nB, \quad -{}^tC\mathtt{J}_nB + {}^tA\mathtt{J}_nD = \mathtt{J}_n. \tag{3.2}$$

在这种情况下，$F =$Fr$_q$ 和 $\boldsymbol{G} = \mathrm{Sp}_{2n}(q)/Z(\mathrm{Sp}_{2n}(q)) = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$。

正交群 $\mathrm{SO}_{2n+1}(\Bbbk)$。设 p 为奇数。正交群 $\mathrm{SO}_{2n+1}(\Bbbk)$ 是特殊线性群 $\mathrm{SL}_{2n+1}(\Bbbk)$ 中保持双线性型 $\mathtt{J}_{2n+1}$ 不变的子群。因此，$\mathrm{SO}_{2n+1}(\Bbbk)$ 由满足以下条件的可逆矩阵组成：

$$X = \begin{pmatrix} A & e & B \\ {}^tf & k & {}^tg \\ C & h & D \end{pmatrix}, \qquad A,B,C,D \in \Bbbk^{n\times n}, \qquad e, {}^tf, {}^tg, h \in \Bbbk^{n\times 1}, \qquad k \in \Bbbk$$

使得 $\det X = 1$ 且

$$\begin{aligned} {}^tC\mathtt{J}_nA + {}^tf f + {}^tA\mathtt{J}_nC &= 0, & {}^tC\mathtt{J}_ne + {}^tfk + {}^tA\mathtt{J}_nh &= 0,\\ {}^tC\mathtt{J}_nB + {}^tfg + {}^tA\mathtt{J}_nD &= \mathtt{J}_n, & {}^th\mathtt{J}_ne + k^2 + {}^te\mathtt{J}_nh &= 1,\\ {}^th\mathtt{J}_nB + kg + {}^te\mathtt{J}_nD &= 0, & {}^tD\mathtt{J}_nB + {}^tgg + {}^tB\mathtt{J}_nD &= 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

在此情形下，$F =$ Fr$_q$ 和 $\boldsymbol{G} = [\mathrm{SO}_{2n+1}(q), \mathrm{SO}_{2n+1}(q)] = \mathrm{P\Omega}_{2n+1}(q)$。

正交群 $\mathrm{SO}_{2n}(\Bbbk)$。令 $n \geq 4$。正交群 $\mathrm{SO}_{2n}(\Bbbk)$ 是 $\mathrm{SL}_{2n}(\Bbbk)$ 中保持二次型 $\sum_{i=1}^{n} x_i x_{2n-i+1}$ 不变的矩阵所组成的子群。若 p 为奇数，则此类元素自动保持其关联矩阵为 $\mathtt{J}_{2n}$ 的双线性型。因此，$\mathrm{SO}_{2n}(\Bbbk)$ 由满足 A、B、C、$D \in \Bbbk^{n\times n}$ 的矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_{2n}(\Bbbk)$ 组成，使得

$$(3.4)\quad {}^tC\mathtt{J}_n A + {}^tA\mathtt{J}_n C = 0,\ {}^tC\mathtt{J}_n B + {}^tA\mathtt{J}_n D = \mathtt{J}_n,\ {}^tD\mathtt{J}_n B + {}^tB\mathtt{J}_n D = 0.$$

若 $p = 2$，则 $\mathrm{SO}_{2n}(\Bbbk)$ 由满足 (3.4) 且 ${}^tC\mathtt{J}_n A$ and ${}^tB\mathtt{J}_n D$ 中对角项为 0 的矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_{2n}(\Bbbk)$ 组成。在此情形下，$F = \mathrm{Fr}^q$ and

$$\boldsymbol{G} = [\mathbf{SO}_{2n}(q), \mathbf{SO}_{2n}(q)]/Z([\mathbf{SO}_{2n}(q), \mathbf{SO}_{2n}(q)]) = \mathbf{P\Omega}^{+}_{2n}(q).$$

3.2. 关于正规化子。在第5.3小节中，我们将用到有限酉群 $\mathrm{SU}_n(q)$ 和 $\mathrm{GU}_n(q)$，以及以下众所周知的事实。我们考虑：

- $\mathbb{G} = \mathrm{SL}_n(\Bbbk)$, $q_0 = p^{m_0}$ 其中 $m_0 | m$，使得 q 是 q_0 的幂；
- $F_0 \colon \mathrm{GL}_n(\Bbbk) \to \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ 可由以下任一种方式定义：$F_0(A) := \mathrm{Fr}_{q_0}(A)$，或由 $F_0(A) := \mathrm{Fr}_{q_0}^{1/2}(\phi(A))$ 定义，其中 $A \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$，$\phi$ 如 (3.1) 所示；后一种情况仅在 m_0 为偶数时出现，此时按惯例记为 $\mathrm{SU}_n(q_0^{1/2}) = \mathbb{G}^{F_0}$ 和 $\mathrm{GU}_n(q_0^{1/2}) = \mathrm{GL}_n(\Bbbk)^{F_0}$。

命题 3.1. $N_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathbb{G}^{F_0}) = Z$(一般线性群$_n(q)$)一般线性群$_n(\Bbbk)^{F_0}$。

证明。我们证明 $N_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathbb{G}^{F_0}) \leq Z$(一般线性群$_n(q)$)一般线性群$_n(\Bbbk)^{F_0}$，另一包含关系显然成立。设 $g \in N_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathbb{G}^{F_0})$。对任意 $y \in \mathbb{G}^{F_0}$，有 $F_0(gyg^{-1}) = gyg^{-1}$，即 $z := g^{-1}F_0(g) \in C_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathbb{G}^{F_0})$。现在，$\mathbb{G}^{F_0}$在 $\mathbb{U}$ 和 $\mathbb{U}^-$中包含正则幺幂元，因此由 [26,引理 5.3] 可得 $C_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathbb{G}^{F_0}) = Z$(一般线性群$_n(q)$)。此外，$F_0$ 在连通群 Z(一般线性群$_n(\Bbbk)) \simeq \Bbbk^\times$上限制为一个 Steinberg端同态，因此 Lang-Steinberg定理 [22, 定理 21.7] 适用，且存在 $\zeta\mathrm{id} \in Z$(一般线性群$_n(\Bbbk))$，使得 $\zeta^{-1}F_0(\zeta)\,\mathrm{id} = z$。因此，$\zeta^{-1}g \in$一般线性群$_n(\Bbbk)^{F_0} \leq$一般线性群$_n(q)$，从而 $\zeta\,\mathrm{id} \in Z$(一般线性群$_n(\Bbbk)) \cap$一般线性群$_n(q) = Z$(一般线性群$_n(q)$)。断言得证。□

3.3. 子群 K。我们引入 $\mathbb{G}$ 的一个子群 K，它将在第4节和第6节中发挥作用。在本小节中，$\mathbb{G}$ 是以下群之一

$$\mathbf{Sp}_{2n}(\Bbbk),\ n \geq 2; \qquad \mathbf{SO}_{2n}(\Bbbk),\ n \geq 3, \qquad \text{or} \qquad \mathbf{SO}_{2n+1}(\Bbbk),\ n \geq 3,$$

其中，当 $\mathbb{G} = \mathrm{SO}_{2n+1}(\Bbbk)$ 时，$p \neq 2$。若 $\mathbb{G} = \mathrm{SO}_{2n}(\Bbbk)$ 或 $\mathbb{G} = \mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk)$，则令 $n' = 2n$；若 $\mathbb{G} = \mathrm{SO}_{2n+1}(\Bbbk)$，则令 $n' = 2n+1$，从而 $\mathbb{G} \leq$一般线性群$_{n'}(\Bbbk)$。

回忆一下 ϕ（见 (3.1)）。那么 K 是单射群态射的像

$$j \colon \mathbf{GL}_n(q) \to \mathbb{G}^F, \quad A \mapsto \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & \phi(A) \end{smallmatrix}\right), & \text{if } \mathbb{G} = \mathbf{SO}_{2n}(\Bbbk), \text{ or } \mathbf{Sp}_{2n}(\Bbbk), \\ \left(\begin{smallmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \phi(A) \end{smallmatrix}\right), & \text{if } \mathbb{G} = \mathbf{SO}_{2n+1}(\Bbbk). \end{cases}$$

3.4. Weyl群中的尖点类。设 $S=\{s_\alpha:\alpha\in\Delta\}$，使得 (W,S) 是一个 Coxeter 群。给定 $J\subset\Delta$，我们定义
- $W_J=\langle s_\alpha:\ \alpha\in J\rangle$;
- $\mathbb{P}_J=$ $\mathbb{G}$ 的标准抛物子群，由 J 确定;
- $\mathbb{L}_J=$ $\mathbb{P}_J$ 的标准（约化）Levi 子群。

定义 3.2. [16, 3.1.1] 如果共轭类 $\mathcal{C}$ 在 W 中满足$\mathcal{C}\cap W_J=\emptyset$ 对 S 的所有真子集 J 均成立，则称其为尖点的；若一个元素的共轭类是尖点的，则称该元素为尖点的。

$w\in W$ 的一个分解是指 Φ 中的一个族 $\Gamma=(\gamma_j)_{j\in\mathbb{I}_l}$，满足

$$w=s_{\gamma_1}\cdots s_{\gamma_l}, \tag{3.5}$$

其中 s_{γ_j} 是相应的反射，而 l 是最小的（具有此性质）。于是 l 记作 $\ell^a(w)$，称为 w的绝对长度。根据 Kostant 的一个结果，见 [24]，Γ 于是构成一个线性无关族，且

$$\ell^a(w)=\mathrm{rk}(\mathrm{id}-w) \tag{3.6}$$

在 W的自然表示中。根据 [16, 练习 3.16], ，我们有

$$w\text{ is cuspidal}\iff \ell^a(w)=\mathrm{rk}\,\mathbb{G}. \tag{3.7}$$

注意，$\ell^a(w)=\mathrm{rk}\,\mathbb{G}$ 表示 w 没有不动点。

给定 w的一个分解 Γ，我们定义

$$\Psi_\Gamma=\Phi\cap(\mathbb{Z}\gamma_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}\gamma_l), \tag{3.8}$$

$$\mathbb{G}_\Gamma=\langle\mathbb{T},\mathbb{U}_\beta:\beta\in\Psi_\Gamma\rangle. \tag{3.9}$$

显然，Ψ_Γ 是 Φ 的一个根子系统，而 $\mathbb{G}_\Gamma$ 是 $\mathbb{G}$的一个连通约化子群。若 Γ和 Γ' 是同一个 w的不同分解，则子系统 Ψ_Γ和 $\Psi_{\Gamma'}$以及子群 $\mathbb{G}_\Gamma$和 $\mathbb{G}_{\Gamma'}$可能不同。

注记 3.3. 若 $w\in W$ 是尖点的，则根据 (3.7)，对于 w的任意分解 Γ，$\mathbb{G}_\Gamma$ 都是半单的。

注记 3.4. 若 $w\in W_J$ 对某个 $J\subset S$成立，则存在一个分解 Γ，使得 $\mathbb{G}_\Gamma\leq\mathbb{L}_J$。

事实上，w 在 W_J 中的任意分解，依据 (3.6)，必然也是在W中的分解。因为，w在 $(\mathbb{R}J)^\perp$中平凡作用，因此 $\mathrm{rk}(\mathrm{id}-w)=\mathrm{rk}(\mathrm{id}-w)|_{\mathbb{R}J}$。

3.5. F-稳定环面。这里假设 $\mathbb{G}$ 是连通约化的，且 F 是 Frobenius 映射。根据 [22, 命题 25.1], ，$\mathbb{G}^F$-共轭类中 F-稳定极大环面的集合与 W 中的共轭类集合之间存在一个双射，描述如下。设 $\mathbb{T}'$ 是 $\mathbb{G}$ 中一个 F-稳定环面。那么，$\mathbb{T}'=g\mathbb{T}g^{-1}$对某个 $g\in\mathbb{G}$，使得 $g^{-1}F(g)\in N(\mathbb{T})$。令

$$w=\text{ class of }g^{-1}F(g)\in N(\mathbb{T})/\mathbb{T}\simeq W. \tag{3.10}$$

赋值 $\mathbb{T}' \mapsto w$ 给出了上述双射。我们定义

$$\mathbb{T}_w := g\mathbb{T}g^{-1}. \tag{3.11}$$

注 3.5. 设 $\mathbb{T}'$ 是 $\mathbb{G}$ 中的一个 F-稳定极大环面，使其对应于上述对应关系中的 $\mathbb{T}' \mapsto w$，并设 $\mathbb{G}'$ 是 $\mathbb{G}$ 的导出群。那么，$\mathbb{T}' \cap \mathbb{G}'$ 是 $\mathbb{G}'$ 中的一个 F-稳定极大环面，且 $\mathbb{T}' \cap \mathbb{G}' \mapsto w$。

事实上，$\mathbb{T} \cap \mathbb{G}'$ 是 $\mathbb{G}'$ 的一个分裂环面。满足 $\mathbb{T}' = g\mathbb{T}g^{-1}$ 且 $g^{-1}F(g) \in N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})$ 的元素 $g \in \mathbb{G}$ 是 w 的一个代表元，可写为 $g = g'z$，其中 $g' \in \mathbb{G}'$，且 z 是中心的。于是，$\mathbb{T}' \cap \mathbb{G}' = g'(\mathbb{T} \cap \mathbb{G}')(g')^{-1}$，且 $(g')^{-1}F(g') \in N_{\mathbb{G}'}(\mathbb{T} \cap \mathbb{G}')$ 是 w 的一个代表元。

定义 3.6. 若与 F 稳定的极大环面对应的共轭类在 W 中如上所述是尖点的，则称该极大环面为尖点的。

例 3.7. 设 $w \in W$ 是一个考克斯特元素，即一个乘积

$$w = s_1 \dots s_\theta, \tag{3.12}$$

其中 $(s_i)_{i\in\mathbb{I}_\theta}$ 是 S 的一种编号；这给出了 w 的一个分解 Γ。那么 w 的共轭类是尖点的，并且 $\mathbb{G}_\Gamma = \mathbb{G}$。若 $W = \mathbb{S}_n$，则 w 的共轭类是 W 中唯一的尖点类，[16, §3.1.2]。

定义 3.8. 考克斯特环面是一个与 F 稳定的极大环面，它对应于包含考克斯特元素的共轭类。

姑且沿用这一术语，称考克斯特环面 $\mathbb{G}$ 与 $\mathbb{G}^F$ 的交集为 $\mathbb{G}^F$ 的考克斯特环面。

3.6. 半单类。除非另有说明，$\mathbb{G}$ 是连通的约化群，F 是 Frobenius 映射，而 $\mathbb{T}$ 是一个与 F 稳定的环面，使得 $F(t) = t^q$ 对于 $t \in \mathbb{T}$ 成立。

设 $x \in \boldsymbol{G} = \mathbb{G}^F/Z(\mathbb{G}^F)$ 为非平凡半单元，并取 $\mathrm{x} \in \mathbb{G}^F$ 作为 x 的一个代表元，因此 x 是半单的，但不是中心的。设 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_x^{\boldsymbol{G}}$ 和 $\mathfrak{O} = \mathcal{O}_{\mathrm{x}}^{\mathbb{G}^F}$；存在一个 rack 满同态 $\mathfrak{O} \twoheadrightarrow \mathcal{O}$。

设 $\mathrm{y} \in \mathbb{G}^F$ 为半单元。根据 [22, 命题 26.6], ，存在一个包含 y 的 F-稳定极大环面 $\mathbb{T}'$；然而，并非所有与 $\mathcal{O}_{\mathrm{y}}^{\mathbb{G}^F}$ 相交的 F-稳定极大环面都必然与 $\mathbb{T}'$ 共轭于 $\mathbb{G}^F$。因此，我们赋予 $\mathcal{O}_{\mathrm{y}}^{\mathbb{G}^F}$ 集合 $\mathcal{S}_{\mathcal{O}_{\mathrm{y}}^{\mathbb{G}^F}}$，其中包含 W 中对应于与 $\mathcal{O}_{\mathrm{y}}^{\mathbb{G}^F}$ 相交的 F-稳定极大环面 $\mathbb{T}'$ 的所有共轭类 $\mathcal{C}$。

备注3.9. 假设 $\mathbb{G}$ 是单的，且我们不属于 [22, 定理24.17]中排除的情形。若 $\mathcal{C} \in \mathcal{S}_{\mathcal{O}_{\mathrm{y}}^{\mathbb{G}^F}}$，则 $\mathcal{O}_{\mathrm{y}}^{[\mathbb{G}^F,\mathbb{G}^F]}$与一个 F-稳定的极大环面 $\mathbb{T}''$ 相交于 $\mathbb{G}^F$ 中对应于 $\mathcal{C}$内某个元素的点。

事实上，取满足 $g^{-1}F(g) \in N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})$表示 $\mathcal{C}$中一个元素的 $g \in \mathbb{G}^F$，并令 $\mathbb{T}' = g\mathbb{T}g^{-1}$。于是存在 $l \in \mathbb{G}^F$ 使得 $l \triangleright \mathrm{y} \in \mathbb{T}'$。现在，由 $\mathbb{G}^F = \mathbb{T}^F[\mathbb{G}^F, \mathbb{G}^F]$、[22, 推论24.2、命题24.15、命题24.21],，可知 l 分解为 $l = t_1 l_1$，其中 $t_1 \in \mathbb{T}^F$ 且 $l_1 \in [\mathbb{G}^F, \mathbb{G}^F]$，并且$l_1 \triangleright \mathrm{y} \in t_1^{-1} g\mathbb{T}g^{-1}t_1 = \mathbb{T}''$；这里 $g^{-1}t_1F(t_1^{-1})F(g) = g^{-1}F(g)$表示 $\mathcal{C}$中的一个元素。

为达到我们的目的，引入以下概念会很方便。

定义 3.10. 若半单共轭类 $\mathcal{O}_{\mathrm{y}}^{\mathbb{G}^F}$ 在 $\mathbb{G}^F$ 中的集合 $\mathcal{S}_{\mathcal{O}_{\mathrm{y}}^{\mathbb{G}^F}}$由 W中的尖点共轭类组成，则称其为尖点的。换言之，与 $\mathcal{O}_{\mathrm{y}}^{\mathbb{G}^F}$ 相交的所有 F-稳定极大环面都是尖点的。

此外，若 $\mathcal{O}_{\mathrm{y}}^{\mathbb{G}^F}$ 只与 Coxeter 环面相交，则称其为 Coxeter类。此时必有 $\mathcal{O}_{\mathrm{y}}^{\mathbb{G}^F}$ 为尖点的。

注记 3.11. 由于 $Z(\mathbb{G}^F) = Z(\mathbb{G})^F$包含于 $\mathbb{G}^F$的每个环面中，当且仅当其投影$\mathcal{O}'$ 在 $\mathbb{G}^F/Z(\mathbb{G}^F)$中只与尖点环面相交（分别只与 $\mathbb{G}^F/Z(\mathbb{G}^F)$中的 Coxeter 环面相交）时，共轭类 $\mathcal{O}_{\mathrm{y}}^{\mathbb{G}^F}$ 分别为尖点的或 Coxeter类。因此，我们也称 $\mathcal{O}'$为尖点的或 Coxeter。特别地，若 $\mathbb{G}$ 为单连通且 $\mathfrak{O}$ 为尖点的，则称 $\mathcal{O}$ 为尖点的。

如果 $\mathbb{G}$ 不是单连通的，注记 3.9 保证：$\mathcal{O}_{\mathrm{y}}^{\mathbb{G}^F}$ 是尖点的当且仅当 $\mathcal{O}_{\mathrm{y}}^{[\mathbb{G}^F,\mathbb{G}^F]}$仅与 $\mathbb{G}^F$中的尖点环面相交；$\mathcal{O}_{\mathrm{y}}^{\mathbb{G}^F}$ 是 Coxeter 当且仅当 $\mathcal{O}_{\mathrm{y}}^{[\mathbb{G}^F,\mathbb{G}^F]}$ 仅与 $\mathbb{G}^F$中的 Coxeter 环面相交。我们也将 $\mathcal{O}_{\mathrm{y}}^{[\mathbb{G}^F,\mathbb{G}^F]}$分别称为尖点的或 Coxeter。

命题 3.12. 假设 $\mathbb{G}$ 是单连通的。若 $\mathbb{T}'$ 是一个与 $\mathfrak{O}$相交的极大 F-稳定环面，$\mathcal{C}$ 是 W 中对应于$\mathbb{T}'$ 的共轭类，且 Γ 是 $w \in \mathcal{C}$的一个分解，则 $\mathfrak{O}$ 与 $\mathbb{G}_\Gamma^F$相交。特别地，下列条件等价：

(a) $\mathfrak{O}$不是尖点的。(b) $\mathfrak{O}$与真标准 Levi 子群 $\mathbb{L}$相交。

证明。由于 F 是一个 Frobenius自同构，$\mathbb{G}_\Gamma$ 是 F-稳定的。选取 w 的一个代表元 $\dot{w}$；根据定义，它属于 $\mathbb{G}_\Gamma$。由 Lang-Steinberg定理，存在 $h \in \mathbb{G}_\Gamma$ 使得 $h^{-1}F(h) = \dot{w}$。环面 $\mathbb{T}'$ 和 $h\mathbb{T}h^{-1}$ 是 $\mathbb{G}^F$-共轭的，因为它们都映到 w，参见 (3.10)。也就是说，存在 $\mathrm{y} \in \mathbb{G}^F$ 使得 $\mathrm{y} \triangleright \mathrm{x} \in h\mathbb{T}h^{-1} \leq \mathbb{G}_\Gamma$，因此 y 可分解为 $\mathrm{y} = \mathrm{y}'$，其中某个 $\mathrm{y} \triangleright \mathrm{x} \in \mathbb{G}_\Gamma^F \cap \mathfrak{O}$。

如果 $\mathfrak{O}$ 不是尖点的，那么选取非尖点的 $\mathcal{C}$ 并应用注记 3.4。反过来，如果 $\mathrm{y} \in \mathfrak{O} \cap \mathbb{L}$，那么存在一个 $\mathbb{L}$ 的 F-稳定极大环面 $\mathbb{T}'$，其中包含 y。因此，对于某个 $u \in \mathbb{L}$，有 $\mathbb{T}' = u\mathbb{T}u^{-1}$ 使得 $\sigma := u^{-1}F(u) \in N_{\mathbb{L}}(\mathbb{T}) \leq N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})$；所以 σ 的共轭类属于 $\mathbb{L}$ 的 Weyl 群。□

回想一下，半单元 y 若其中心化子 $C_{\mathbb{G}}(y)$ 由半单元素构成，则称其为正则；等价地，若包含单位元的 $C_{\mathbb{G}}(y)$ 的不可约分支 $C_{\mathbb{G}}(y)^\circ$ 是环面，[27, II.11]，则称其为正则。当且仅当 y 位于唯一的极大环面中时，这种情况才会发生。若 $\mathrm{x} \in \mathbb{G}^F$ 正则，则包含 x 的唯一 F-稳定极大环面为 $C_{\mathbb{G}}(\mathrm{x})^\circ$。

命题 3.13. 若 x 是尖点元，则它是正则的。

我们感谢 Gunter Malle 提出了以下证明。

证明。设 $\mathbb{G}$ 中包含 x 的一个 F-稳定极大环面为 $\mathbb{T}_0$，取 $g \in \mathbb{G}$ 使得 $\mathbb{T}_0 = g\mathbb{T}g^{-1}$，并令对应的 Weyl群 元为 w，即如 (3.10) 中的 $g^{-1}F(g) \in w\mathbb{T}$。$\mathbb{G}$ 中包含 x 的 F-稳定极大环面，也是连通约化群 $C = C_{\mathbb{G}}(\mathrm{x})^\circ$ 中的 F-稳定极大环面。C 中每个 F-稳定极大环面都具有形式 $c\mathbb{T}_0c^{-1}$，其中 $c \in C$ 满足 $c^{-1}F(c) \in N_C(\mathbb{T}_0) \leq gN_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})g^{-1}$。令 C 的 Weyl群 为 $W_C = N_C(\mathbb{T}_0)/\mathbb{T}_0$。我们断言 W_C 是平凡的。反设 W_C 非平凡。取 W_C 中的一个反射 s，并取 $c \in C$ 使得 $c^{-1}F(c) = \dot{s}$，它是 s 在 $N_C(\mathbb{T}_0)$ 中的一个代表元。于是，$\dot{s'} := g^{-1}\dot{s}g$ 将表示 W 中的一个反射 s'，且 $c\mathbb{T}_0c^{-1} = cg\mathbb{T}g^{-1}c^{-1}$ 是 $\mathbb{G}$ 的一个 F-稳定极大环面，包含 x，并对应于 $g^{-1}c^{-1}F(c)F(g) = (g^{-1}c^{-1}F(c)g)(g^{-1}F(g)) \in s'w\mathbb{T}$。因此，根据关于 x 的假设，$s'w$ 是尖点的。然而，尖点元的特征多项式是若干不同于 $(X-1)$ 的分圆多项式之积，因此其在 0 处的值为 1，见 (3.6) 和 (3.7)。另一方面，$\det(s'w) = -\det(w)$。因此，$s'w$ 和 w 不可能同时是 W 中的尖点元，这与关于 x 的假设矛盾。因此，W_C 没有反射，且 $C = \mathbb{T}_0$ 是包含 x 的唯一极大环面。□

以下著名结果是应用引理 2.9 的关键。

引理 3.14. 假设 $\mathbb{G}$ 是单连通的。(a) $\mathrm{x}^q \in \mathfrak{O}$。
(b) 若 $\mathrm{x}^q = \mathrm{x}$，则 $\mathfrak{O} \cap \mathbb{T}^F \neq \emptyset$。

证明。首先，$\mathcal{O}^{\mathbb{G}}_{\mathrm{x}}$ 是 F-稳定的：若存在某个 $h \in \mathbb{G}$ 使得 $\mathrm{x} = h\mathrm{y}h^{-1}$，则

$$F(\mathrm{y}) = F(h)^{-1}\mathrm{x}F(h) \in \mathcal{O}^{\mathbb{G}}_{\mathrm{x}}.$$

由于 x 是半单的，因此存在 $t \in \mathbb{T}$ 和 $g \in \mathbb{G}$，使得 $\mathrm{x} = gtg^{-1}$。于是$t^q = F(t) \in \mathcal{O}_{\mathrm{x}}^{\mathbb{G}}$，从而 $\mathrm{x}^q \in \mathcal{O}_{\mathrm{x}}^{\mathbb{G}} \cap \mathbb{G}^F = \mathfrak{O}$；这里最后一个等式成立是因为 $C_{\mathbb{G}}(\mathrm{x})$ 是连通的，$\mathbb{G}$ 是单连通的，参见 [20, §2.11、§8.5]。最后，若 $\mathrm{x}^q = \mathrm{x}$，则出于同样的原因有 $t^q = t \in \mathbb{T}^F \cap \mathcal{O}_{\mathrm{x}}^{\mathbb{G}} \subset \mathfrak{O}$。□

4. Split conjugacy classes

我们沿用 §3.6 中的记号，即 $\mathbb{G}$ 是单连通的单群，但不是 A 型。此外，F 是 Frobenius 映射；$\mathbb{T}$ 是一个 F-稳定环面，使得对 $t \in \mathbb{T}$，$F(t) = t^q$；$e \neq x \in \boldsymbol{G} = \mathbb{G}^F/Z(\mathbb{G}^F)$ 是半单的；$\mathrm{x} \in \mathbb{G}^F$ x的一个代表元；$\mathcal{O} = \mathcal{O}_x^{\boldsymbol{G}}$且 $\mathfrak{O} = \mathcal{O}_{\mathrm{x}}^{\mathbb{G}^F}$。因此存在一个架满同态 $\mathfrak{O} \twoheadrightarrow \mathcal{O}$。

我们还假设 $\mathfrak{O} \cap \mathbb{T}^F \neq \emptyset$。不失一般性，设 $\mathrm{x} \in \mathbb{T}^F$，即 x 是分裂的。我们改编了 [3, 引理 3.9]关于 A型的证明，但需要做更多工作来处理这类共轭类。

我们需要单独考虑以下特殊情形：

$$\mathbb{G} \text{ 是 } B_\theta\text{类型，} \quad q \text{ 为奇数；若 } j < \theta, \text{ 则 } \mathrm{x} \text{ 满足} s_{\alpha_j}(\mathrm{x}) = \begin{cases} \mathrm{x}; & \text{若} \\ \alpha_\theta^\vee\ -1 & j = \theta. \end{cases} \tag{4.1}$$

这里 $\theta \geq 2$（如 $B_2 = C_2$）。在这种情况下，x 的形式为

$$\mathrm{x} = \left(\prod_{i \in \mathbb{I}_{\theta-1}} \alpha_i^\vee((-1)^i) \right) \alpha_\theta^\vee(\eta), \qquad \text{where } \eta^2 = (-1)^\theta. \tag{4.2}$$

注意，若 θ 为奇数，则当且仅当 $q \equiv 1$ 模4时，这样的 x 属于 $\mathbb{G}^F$。

本节的主要结果如下：

定理 4.1. 假设 $q > 2$；$\mathbb{G}$ 不是 A_θ类型；若处于（4.1）的情形，则 $q \notin \{3, 5, 7\}$；且 $\mathcal{O}_{\mathrm{x}}^{\mathbb{G}^F}$ 与分裂环面 $\mathbb{T}^F$相交。那么 $\mathcal{O}$ 塌缩。

当 $q = 2$时，$\mathbb{T}^F$ 是平凡的，并且 x 的共轭类无法与之相交。

4.1. 定理 4.1 的证明。这由引理 4.2 和 4.3 得出。

引理 4.2. 假设 $q > 2$，且我们不处于情形 (4.1) 中。那么 $\mathcal{O}$ 是 C 型。

证明。回忆一下，$\mathrm{x} \in \mathbb{T}^F$。我们将依据 [5, 引理 4.1、4.2]的证明。那里证明了，对于任意满足 $s_\alpha(\mathrm{x}) \neq \mathrm{x}$ 的单根 α，$\mathcal{O}_{\mathrm{x}}^{\mathbb{G}^F}$ 的子架 $\mathrm{Y} = \mathrm{x}\mathbb{U}_\alpha^F \coprod s_\alpha(\mathrm{x})\mathbb{U}_\alpha^F$ 是 C 型。我们断言，可以选择 α，使得投影 $\pi : \mathrm{Y} \to \mathcal{O}$ 的限制是单射。若$\mathbb{G}$ 是 E_8、F_4、G_2类型，则 $Z(\mathbb{G})$ 是平凡的，且 $\boldsymbol{G} = \mathbb{G}^F$。取 $u \neq v \in \mathrm{Y}$，使得 $\pi(u) = \pi(v)$，即存在 $z \in Z(\mathbb{G}^F)$、$z \neq 1$，满足 $u = zv$。因此，要么$u = \mathrm{x}x_\alpha(a)$且 $v = s_\alpha(\mathrm{x})x_\alpha(a)$，要么反之。无论哪种情况，$\mathrm{x} \overset{\star}{=} zs_\alpha(\mathrm{x})$。

TABLE 3. 某些 $\mathbb{G}$, q 奇数； $\zeta \in \mathbb{F}_q^\times$ 阶为4

type	q	$Z(\mathbb{G})$
B_θ		$\langle \alpha_\theta^\vee(-1) \rangle$
C_θ, $\theta > 2$		$\left\langle \prod_{i \text{ 奇数}} \alpha_i^\vee(-1) \right\rangle$
D_θ, $\theta \in 2\mathbb{Z}+1$	$q \equiv 1 \mod 4$	$\left\langle \prod_{i \text{ 奇数 } i \le \theta-2} \alpha_i^\vee(-1)\alpha_{\theta-1}^\vee(\zeta)\alpha_\theta^\vee(\zeta^3) \right\rangle$
	$q \equiv 3 \mod 4$	$\left\langle \prod_{i \text{ 奇数}} \alpha_i^\vee(-1) \quad \alpha_{\theta-1}^\vee(-1)\alpha_\theta^\vee(-1) \right\rangle$
D_θ, $\theta \in 2\mathbb{Z}$		
E_7		$\langle \alpha_2^\vee(-1)\alpha_5^\vee(-1)\alpha_7^\vee(-1) \rangle$

应用 s_α，我们得到 $z^2 = 1$。因此， $\mathbb{G}$ 不是 E_6 类型（此处 $Z(\mathbb{G}) \simeq \mathbb{Z}/3$）；并且 q 应为奇数。由 $\star$，我们有

$$\omega_i(\mathtt{x}) = \omega_i(zs_\alpha(\mathtt{x})) = \omega_i(z)s_\alpha(\omega_i)(\mathtt{x}), \qquad i \in \mathbb{I}_\theta. \tag{4.3}$$

设 $\alpha = \alpha_j$, $j \in \mathbb{I}_{\theta\circ}$ 则当 $i \neq j$ 时， $s_\alpha(\omega_i) = \omega_i$ ，因此 $\omega_i(z) = 1$。现在，这样的 z 仅在情形 (4.1) 中存在，参见表3中 $Z(\mathbb{G})$ 的形状。□

引理4.3. 若在情形 (4.1) 中有 $q = 9$，则 $\mathcal{O}$ 属于 C 型。若在情形 (4.1) 中有 $q > 9$，则 $\mathcal{O}$ 属于 D 型。

证明. 我们先处理 $\theta = 2$；此时 $B_2 = C_2$ 和 $\mathbb{G} = \mathsf{Sp}_4(\Bbbk)$。令$K \simeq \mathsf{GL}_2(q)$ 为 $\mathbb{G}^F$ 的子群，它是 §3.3 中所述的 j 的像。因此，我们有一个群单态射 $\mathsf{GL}_2(q)/\{\pm 1\} \to \boldsymbol{G} = \mathsf{PSp}_4(q)$。

令 $\mathtt{y} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in$ 一般线性群$_2(q)$；根据我们对 x 的假设，可知 $\mathtt{x} \overset{\star}{=} j(\mathtt{y})$ 或 $\mathtt{x} = -j(\mathtt{y})$。令 ϖ : 一般线性群$_2(q) \to$ 射影一般线性群$_2(q)$ 为典范投影，并令 $y = \varpi(\mathtt{y})$。于是我们得到一个满射架映射

$$\mathcal{O} \cap K/\{\pm 1\} \to \mathcal{O}_y^{\mathbf{PGL}_2(q)}.$$

因此，只需证明当 $q = 9$ 时， $\mathcal{O}^{\mathbf{PGL}_2(q)y}$ 属于 C 型，而当 $q > 9$ 时属于 D 型。

设 $q = 9$。则 $\mathsf{PGL}_2(9) \simeq \mathbb{A}_6$，在此同构下，类$_{\mathcal{O}^{\mathbf{PGL}_2(q)y}}$ 对应于标记为 $(1^2, 2^2)$ 的类，根据例 2.6，该类属于 C 型。

现在设 $q > 9$。如果 $q \equiv 3$ 模4，则 [6, 推论 5.4（b）] 适用[1]。因此假设 $q \equiv 1$ 模4。设 $\zeta \in \mathbb{F}_q^\times$ 为1的四次本原根，并设 $\mathtt{u} \in \mathrm{PGL}_2(q)$ 是类 $\left(\begin{smallmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & -\zeta \end{smallmatrix}\right)$。于是

$$\mathcal{O}_y^{\mathbf{PGL}_2(q)} = \mathcal{O}_{\mathtt{u}}^{\mathbf{PGL}_2(q)} = \mathcal{O}_{\mathtt{u}}^{\mathbf{PSL}_2(q)}$$

根据 [6, 推论5.4 (a)]，其属于 D 型。

接下来假设 $\theta > 2$。这里

$$\boldsymbol{G} = \mathbf{P\Omega}_{2\theta+1}(q) = \mathbb{G}^F/Z(\mathbb{G}^F) \simeq [\mathbf{SO}_{2\theta+1}(q), \mathbf{SO}_{2\theta+1}(q)].$$

我们通过包含映射将 $\mathrm{P\Omega}_5(q)$ 视为 $\mathrm{P\Omega}_{2\theta+1}(q)$ 的一个子群

$$\mathbf{SO}_5(q) \hookrightarrow \mathbf{SO}_{2\theta+1}(q), \quad \begin{pmatrix} A & e & B \\ f & k & g \\ C & h & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 & e & 0 & B \\ 0 & \mathrm{id}_{\theta-2} & 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & k & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{id}_{\theta-2} & 0 \\ C & 0 & h & 0 & D \end{pmatrix},$$

$k \in \mathbb{F}_q$, $A, B, C, D \in \mathbb{F}_q^{2\times 2}$，等等。固定形如 (4.2) 的 $t_\theta \in \mathbb{T}$，并类似地固定形如 (4.2) 但属于类型 B_2 的 t_2。如果 $\pi : \mathbb{G}^F \to \boldsymbol{G}$ 是投影，那么

$$\pi(t_\theta) = \mathrm{diag}\,(-\mathrm{id}_\theta, 1, -\mathrm{id}_\theta) = \pi(t_2)\gamma,$$

其中

$$\gamma = \mathrm{diag}\,(\mathrm{id}_2, -\mathrm{id}_{\theta-2}, 1, -\mathrm{id}_{\theta-2}, \mathrm{id}_2)\,.$$

这里 diag 表示块对角线。于是

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\pi(t_\theta)}^{\boldsymbol{G}} \geq \mathcal{O}_{\pi(t_\theta)}^{\mathbf{P\Omega}_5(q)\times\langle\gamma\rangle} \simeq \mathcal{O}_{\pi(t_2)}^{\mathbf{P\Omega}_5(q)}$$

根据前面的论证，它属于 D 型。因此 $\mathcal{O}$ 属于 D 型。 □

引理 4.4. 若我们处于情形 (4.1)，且有 $n = 2$ 和 $q = 3$，则 $\mathcal{O}$ 是 austere，因此是 kthulhu。

证明. 实际上，$\mathrm{PSp}_4(3) \simeq \mathrm{PSU}_4(2)$，我们在前一个群中讨论的半单共轭类对应于后一个群中类型为 $(2, 1^2)$ 的幺正类；根据 [4, Lemma 5.2]，该类是 austere。□

注4.5. 假设 $n = 2$。如果我们处于情形 (4.1)，且 $q = 5$，那么通过 GAP 进行计算表明，$\mathcal{O}$ 是 austere，因此是 kthulhu。通过执行不同计算所获得的证据似乎表明，在 $q = 7$ 的情形下，该类也是 kthulhu。

[1]请注意，*loc. cit.* 中的推论 5.4（b）隐含地指的是 $\mathrm{PGL}_2(q)$ 中、而非 $\mathrm{PSL}_2(q)$ 中的对合类，这一点从证明中可以清楚看出。

4.2. 正交群中的分裂类。定理 4.1 的证明假设 $\mathbb{G}$ 是单连通的。对于正交群上的递归论证，我们需要关于 $\mathbb{G}^F = \mathrm{SO}_{n'}(q)$ 中分裂元素的轨道的类似结论，其中作用为 $[\mathbb{G}^F, \mathbb{G}^F]$，且 $n' = 2n$ 或 $2n+1$。设 $\mathbb{T} \leq \mathbb{G}$ 为对角矩阵组成的子群

$$\begin{aligned} &\mathrm{diag}(t_1, \dots, t_n, t_n^{-1}, \dots, t_1^{-1}), && \text{if } n' = 2n, \\ &\mathrm{diag}(t_1, \dots, t_n, 1, t_n^{-1}, \dots, t_1^{-1}), && \text{if } n' = 2n+1. \end{aligned}$$

回顾注 2.1。

引理 4.6。若 $y \in \mathbb{T}^F - Z(\mathrm{SO}_{n'}(q))$，则 $\mathcal{O}^{[\mathbf{SO}_{n'}(}{}_{y}{}^{q\,,\ n'\ q\,])\mathbf{SO}()}$会塌缩，但情形 (4.1) 除外，即当 $n' = 2n+1$ 且 $t_i = -1$ 时，其中 $i \in \mathbb{I}_n$。

证明。总存在一个单根 α，使得引理 4.2] 的证明可以照搬。若对于某个 $i < n$，有 $t_i \neq t_{i+1}$，则取 $\alpha = \alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$；反之，若对于所有 $i < n$，都有 $t_i = t_{i+1}$，则我们的假设意味着 $t_n \neq t_n^{-1}$，于是取 $\alpha = \alpha_n$，即当 $n' = 2n+1$ 时 ε_n，当 $n' = 2n$时 $\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$。这一论证在类型 B_2 和 D_3 中同样成立。□

5. The special linear groups

在本节中，我们研究 $\mathbb{G}$ =特殊线性群$_n(\Bbbk)$，即研究 $\boldsymbol{G}$ = 射影特殊线性群$_n(q)$ 中的半单类。如 §3.6 所述，$e \neq x \in \boldsymbol{G}$ 是半单元，$\mathrm{x} \in \mathbb{G}^F - Z(\mathbb{G}^F)$ 是 x、$\mathcal{O} = \mathcal{O}_x^{\boldsymbol{G}}$和 $\mathfrak{O} = \mathcal{O}_{\mathrm{x}}^{\mathbb{G}^F}$ 的一个代表元。存在架满同态 $\mathfrak{O} \twoheadrightarrow \mathcal{O}$。

为进行归纳论证，我们还将考虑一般线性群 $\mathrm{GL}_n(q)$ 中元素的类。正如 [1, 注 4.1], 中所述，对于任意半单元 $\mathrm{y} \in$一般线性群$_n(q)$，有 $\mathcal{O}^{\mathbf{GL}_n(}{}_{\mathrm{y}}{}^{q} = \mathcal{O}_{\mathrm{y}}^{\mathbf{SL}_n)\ q)}$。

定义 5.1. 如果 $A \in$一般线性群$_n(q)$ 的特征多项式 p_A 不可约，则称其为不可约的；必然地，A 是正则半单的。

根据我们先前的工作，我们知道：

注 5.2. (i) [3, 定理 1.1] 如果 $n = 2$，且 $q \notin \{2, 3, 4, 5, 9\}$，那么表 1 中未列出的任何$\mathcal{O}$ 都会塌缩。

(ii) [3, 命题 5.4, 5.5] 若 $n = 3$ 且 x 不可约，则 $\mathcal{O}$ 是 kthulhu。

(iii) [3, 定理 1.1] 若 $n \geq 3$ 且 x 不可约，则 $\mathcal{O}$ 塌缩。

注 5.3. 设 $n = 2$。我们记录关于具有 $q \in \{2, 3, 4, 5, 9\}$ 的半单类的信息，以供递归论证之用。回顾一下，$\mathrm{PSL}_2(q)$ 有两类极大环面：分裂环面，其阶为 $q - 1/(2, q-1)$；以及 Coxeter 环面，其阶为 $q+1/(2, q+1)$，其中包含不可约元素。

◦ 若 $q=2$，则 $\mathrm{PSL}_2(2)\simeq\mathbb{S}_3$，半单元素是构成阿贝尔rack的 3-循环；若 $q=3$，则 $\mathrm{PSL}_2(3)\simeq\mathbb{A}_4$，半单元素的阶为 2，且构成阿贝尔rack。

◦ 若 $q=4$，则 $\mathrm{PSL}_2(4)\simeq\mathbb{A}_5$。不可约元素的阶为 5，并构成两个共轭类；根据 [14, 注记 3.2 (b) 和 (c)]，这两个共轭类都是 sober。分裂半单元素构成由 3-循环组成的共轭类，根据例 2.7，该类属于 C 型。

◦ 若 $q=5$，则 $\mathrm{PSL}_2(5)\simeq\mathbb{A}_5$。不可约元素构成由 3-循环组成的共轭类，根据例 2.7，该类属于 C 型。分裂半单元素是类 $(1,2_2)$ 中的对合；该类是 sober 的，因为它与 $\mathbb{A}_5$ 的任意子群的交集要么是平凡的，要么是阿贝尔的，要么是不可分解的。

◦ 若 $q=9$，则 $\mathrm{PSL}_2(9)\simeq\mathbb{A}_6$。不可约元素的阶为 5，并构成两个共轭类；根据 [14, 注记 3.2 (b) 和 (c)]，这两个共轭类都是 sober。分裂半单元素是类 $(1_2,2_2)$ 中的对合；根据例 2.6，该类属于 C 型。

本节的主要结果如下：

定理 5.4. 设 $\mathcal{O}\neq\{e\}$ 是 $\mathrm{PSL}_n(q)$ 中的一个半单共轭类。那么，表 1 中未列出的任意 $\mathcal{O}$ 都会塌缩。

根据注 5.2，我们将考虑满足假设 $n>3$ 的不可约元素的共轭类。我们将看到，若 n 是素数，则由命题5.15，这类共轭类是 kthulhu；否则，由命题5.9，它们属于 C 型。

我们先介绍一个经典结果，并附上证明以求完整。

引理5.5. 设 $n\geq 2$ 和 $\epsilon=\pm 1$。若 $P(X)=X^n+\epsilon\in\mathbb{F}_p[X]$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上不可约，则 $n=2$、$\epsilon=1$ 且 $q\equiv 3$ 模4。

证明. 首先，$\epsilon=1$ 和 q 是奇数，否则 $P(1)=0$；并且 $n=2m$ 是偶数，否则 $P(-1)=0$。此外，$q\equiv 3$ 模4，否则对于某个 $\xi\in\mathbb{F}_q$，$-1=\xi^2$，且 $P(X)=(X^m+\xi)(X^m-\xi)$ 将是可约的。现在令 $n=2^ha$，其中 a 为奇数，并令 $\Phi_d(X)$ 为第 d 个分圆多项式。我们在 $\mathbb{Z}$ 上有如下分解，因此在 $\mathbb{F}_p$ 上也成立：

$$(X^n-1)P(X)=X^{2n}-1=\prod_{d|2n}\Phi_d(X)\implies P(X)=\prod_{d|2n,\ d\nmid n}\Phi_d(X)$$

因此 $\Phi_{2^{h+1}}|P(X)$，故二者相等，且 $n=2^h$。最后，若 $X^{2^h}+1$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上不可约，且 $q\equiv 3$ 模 4，则由 [23, 定理 1]可得 $h=1$。□

5.1. Coxeter 环面。在本节余下部分，我们假设 $n > 3$，且 x 不可约。在此情形下，$W = \mathbb{S}_n$；由命题 3.12 和例 3.7 可知，每个不可约类都与每个 Coxeter 环面相交。我们固定该 n-循环

$$w = (1, 2, \dots, n).$$

出于技术原因，我们固定一般线性群$_n(\Bbbk)$中的一个 Coxeter 环面 $\mathbb{T}_w$；由注 3.5 可知，特殊线性群$_n(\Bbbk)$中的 $\mathbb{T}_w \cap$是一个 Coxeter 环面。根据 [22, 例 25.4], ，我们有

$$|\mathbb{T}_w^F| = q^n - 1 = (n)_q(q-1), \qquad |\mathbb{T}_w^F \cap \mathbf{SL}_n(q)| = (n)_q. \tag{5.1}$$

群 $\mathbb{T}_w^F$ 同构于 $\mathbb{F}_{q^n}^\times$，因此是循环群；此外，一般线性群$_n(q)$中任意阶为 $q^n - 1$ 的循环子群都与 $\mathbb{T}_w^F$ [19, 例 1.13]共轭。

注 5.6。（[21, 命题 II.7.3] 和 [25, 定理 2.3.5 及下文]）。我们有

$$N_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathbb{T}_w) = N_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathbb{T}_w^F) \simeq \mathbb{T}_w^F \rtimes C_W(w),$$
$$N_{\mathbf{SL}_n(q)}(\mathbb{T}_w^F \cap \mathbf{SL}_n(q)) = N_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathbb{T}_w^F) \cap \mathbf{SL}_n(q),$$

其中 $C_W(w) \simeq \mathbb{Z}/n$。设 σ 是$N_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathbb{T}_w^F)$的子群 $C_W(w)$的一个生成元；σ 可以选取为使得对任意 $\mathsf{y} \in \mathbb{T}_w^F$，都有 $\sigma \triangleright \mathsf{y} = \mathsf{y}^q$。

引理 5.7. 设 $\mathsf{y} \in \mathbb{T}_w^F$ 在 GL$_n(q)$ 中不可约。那么

$$\mathcal{O}_{\mathsf{y}}^{\mathbf{GL}_n(q)} \cap \mathbb{T}_w^F = \mathcal{O}_{\mathsf{y}}^{N_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathbb{T}_w^F)} = \langle\sigma\rangle \triangleright \mathsf{y} = \{\mathsf{y}, \mathsf{y}^q, \dots, \mathsf{y}^{q^j}, \dots, \mathsf{y}^{q^{n-1}}\}, \tag{5.2}$$

$$\mathcal{O}_{\mathsf{y}}^{N_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathbb{T}_w^F)} = \mathcal{O}_{\mathsf{y}}^{\mathbf{SL}_n(q)} \cap \mathbb{T}_w^F = \mathcal{O}_{\mathsf{y}}^{N_{\mathbf{SL}_n(q)}(\mathbb{T}_w^F)} \tag{5.3}$$

证明. 若 $\mathsf{z} \in \mathbb{T}_w^F \cap \mathcal{O}_{\mathsf{y}}^{\mathbf{GL}_n(q)}$，则存在 $g \in$ GL$_n(q)$，使得 $g\mathsf{y}g^{-1} = \mathsf{z}$，因此 $gC_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathsf{y})g^{-1} = C_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathsf{z})$，也就是说，$g \in N_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathbb{T}_w)$，因为显然 z 也是不可约的。由此及注 5.6 可得 (5.2)。由于 $\mathcal{O}^{\mathbf{SL}_n}$（

y $^q = \mathcal{O}_{\mathsf{y}}^{\mathbf{GL}_n)\,q)}$，由上述中心化子论证可得 (5.3)。□

我们考察不可约类中的两个元素何时在自然投影 π: SL$_n(q) \to$ PSL$_n(q)$ 下具有相同的像。回顾一下，$\mathbb{G}_n(\mathbb{F}_q)$ 是 $\mathbb{F}_q$ 中 n 次单位根构成的群。

引理 5.8.（仅对本引理，$n \geq 3$）。设 $\mathsf{y}, \mathsf{z} \in \mathfrak{O}$ 满足 $\pi(\mathsf{y}) = \pi(\mathsf{z})$，即对于某个 $1 \neq \lambda \in \mathbb{G}_n(\mathbb{F}_q)$，有 $\mathsf{y} = \lambda\mathsf{z}$。那么

(i) 存在 $j \in \mathbb{I}_{n-1}$ 使得 $\lambda\mathsf{z} = \mathsf{z}^{q^j}$。

(ii) 令 $j \in \mathbb{I}_{n-1}$ 为满足对某个 $1 \neq \lambda \in \mathbb{G}_n(\mathbb{F}_q)$有 $\mathsf{z}^{q^j} = \lambda\mathsf{z}$ 的最小值。那么 $j|n$，且 λ 是 1 的一个 $\frac{n}{j}$ 次本原根。

(iii) 设 $j \in \mathbb{I}_{n-1}$ 为满足 $\mathsf{z}^{q^j} = \lambda\mathsf{z}$ 的最小值，其中某个 $1 \neq \lambda \in \mathbb{G}_n(\mathbb{F}_q)$，并令 $a := \frac{n}{j}$。则特征多项式为 $p_{\mathsf{z}} \in \mathbb{F}_q[X^a]$。这一观察修正了 [3,注记 3.1 (d)]。

(iv) 设 $j \in \mathbb{I}_n$ 为满足 $\pi\left(\mathsf{z}^{q^j}\right) = \pi(\mathsf{z})$ 的最小值。则 $j \neq 1$。

证明。(i): 元素 y 和 z 属于同一个（唯一的）极大环面，因此由引理 5.7，存在某个 $j \in \mathbb{I}_{1,\ n}$，使得 $\mathsf{y} = \mathsf{z}^{q^j}$。因此，$\lambda\mathsf{z} = \mathsf{z}^{q^j}$，且 $\lambda \neq 1$ 蕴含 $j < n$。

(ii): 若 $n = aj + b$，其中 $a \geq 1$ 且 $0 \leq b < j$，则

$$\mathsf{z} = \mathsf{z}^{q^n} = \mathsf{z}^{q^{aj+b}} = (\mathsf{z}^{q^{aj}})^{q^b} = (\lambda^a\mathsf{z})^{q^b} = \lambda^a\mathsf{z}^{q^b}$$

也就是说，$\mathsf{z}^{q^b} = \lambda^{-a}\mathsf{x}$。因此，由极小性可得 $b = 0$，且 $\lambda^a = 1$。现在，若 $\lambda^c = 1$ 且 $c \in \mathbb{N}$，则 $\mathsf{z}^{q^{cj}} = \lambda^c\mathsf{z} = \mathsf{z}$，因此 $c \geq a = \frac{n}{j}$。

(iii): 根据假设，$p_{\mathsf{z}} = p_{\mathsf{z}^{q^j}} = p_{\lambda\mathsf{z}}$。若 $p_{\mathsf{z}}(X) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_0$，则 $p_{\lambda\mathsf{z}}(X) = X^n + \lambda c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \lambda^n c_0$。因此，$p_{\mathsf{z}}(X) = p_{\lambda\mathsf{z}}(X)$ 当且仅当对所有 $h \notin \frac{n}{j}\mathbb{Z}$，$c_h = 0$。

(iv): 若 $j = 1$，则根据 (iii)，p_{z} 将是 $X^n + (-1)^n$。由引理5.5，$n = 2$，矛盾。□

5.2. $\mathrm{SL}_n(q)$ 的不可约元素，n 不是素数。本小节中，我们假设 $n = cd$，其中 c、$d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$。给定 $\mathsf{S} \in \mathrm{SL}_d(q)$ 不可约，考虑 $\mathsf{y} = \mathrm{diag}(\mathsf{S}\ldots, \mathsf{S}) \in \mathrm{SL}_n(q)$。那么 $C_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathsf{y}) \simeq$ 一般线性群$_c(q^d)$。

~我们断言，$C_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathsf{y})$ 的一个 Coxeter 环面 T 在一般线性群$_n(q)$ 中仍是 Coxeter 环面，因此 T: $\mathrm{SL}_n(q)$ 是 $\mathrm{SL}_n(q)$ 中的 Coxeter 环面。

事实上，由 (5.1) 得 $|\widetilde{T}| = ((q^c)^d - 1) = (q^n - 1)$。由于 $\widetilde{T}$ 是循环的，它与 (5.1) 后所述的 $\mathbb{T}_w^F$ 共轭。因此，$|T| = (n)_q$。

在本小节中，我们假设 x 属于由上述某个 y 产生的 Coxeter 环面 T $\mathbb{G}^F$。

命题5.9. 若 x 不可约，则 $\mathcal{O} = \mathcal{O}^{\mathbf{PSL}_n(q)x}$ 是 C 型。

证明. 设 $n = cd$，其中 c 为素数且 $d \geq 2$。我们令:

$$\widetilde{M} \coloneqq C_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathsf{y}) \simeq \mathbf{GL}_c(q^d);$$
$$M \coloneqq C_{\mathbf{SL}_n(q)}(\mathsf{y}) = \widetilde{M} \cap \mathbf{SL}_n(q);$$
$$M_1 \coloneqq [\widetilde{M}, \widetilde{M}] \simeq \mathbf{SL}_c(q^d).$$

~因此 $M_1 \leq M \leq M$。引理 5.7 给出

$$\mathcal{O}_{\mathsf{x}}^{\mathbf{GL}_n(q)} \cap T = \mathcal{O}_{\mathsf{x}}^{\mathbf{SL}_n(q)} \cap T = \{\mathsf{x}, \mathsf{x}^q, \ldots, \mathsf{x}^{q^j}, \ldots, \mathsf{x}^{q^{n-1}}\}$$
$$\mathcal{O}_{\mathsf{x}}^{M} \cap T = \mathcal{O}_{\mathsf{x}}^{M_1} \cap T = \mathcal{O}_{\mathsf{x}}^{\widetilde{M}} \cap T = \{\mathsf{x}, \mathsf{x}^{q^d}, \ldots, \mathsf{x}^{q^{d(c-1)}}\}.$$

因此 $\mathsf{x}^q \in \mathfrak{O} \cap T$但 $\mathsf{x}^q \notin \mathcal{O}_{\mathsf{x}}^M$。我们断言 $\mathcal{O}_{\mathsf{x}^q}^M \not\subset N_{\widetilde{M}}(T)$。反设不然。那么，$\langle \mathcal{O}_{\mathsf{x}^q}^M \rangle$ 将是一个非中心的正规子群

$\widetilde{M} \simeq$一般线性群$_c(q^d)$。于是 SL$_c(q^d) \simeq M_1 \leq \langle \mathcal{O}^M_{\mathbf{x}^q} \rangle \leq N_{\widetilde{M}}(T)$，因此 $T \cap M_1$ 将是 M_1 的正规子群，矛盾。

我们取 $\mathsf{s} \in \mathcal{O}^M_{\mathbf{x}^q} \setminus N_{\widetilde{M}}(T)$，并令

$$s := \pi(\mathbf{s}) \in \mathcal{O}; \qquad r := \pi(\mathbf{x}) \in \mathcal{O}; \qquad H := \langle r, s, \pi(M_1) \rangle.$$

我们断言 r, s 和 H 满足引理 2.3 的假设。首先，$\mathsf{s} \notin N_{\widetilde{M}}(T)$ 蕴含 $s \triangleright r \neq r$，即 (2.2) 成立。事实上，若 $s \triangleright r = r$，则会得到 $\mathsf{s} \triangleright \mathbf{x} \in \mathbb{Z}(\mathbb{G}^F)\mathbf{x}$；结合 $T = C_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathbf{x})$，便会迫使 $\mathsf{s} \triangleright T = T$。

$\sim$ $\sim$此外，$\langle \mathcal{O}^{M_1}_{\mathbf{x}}, \mathcal{O}^{M_1}_{\mathbf{s}} \rangle = \langle \mathcal{O}^M_{\mathbf{x}}, \mathcal{O}^M_{\mathbf{s}} \rangle$ 是 $\widetilde{M} \simeq$ 一般线性群$_c(q^d)$的一个非中心正规子群，因此 $\langle M_1, \mathbf{x}, \mathsf{s} \rangle \leq \langle \mathcal{O}^{M_1}_{\mathbf{x}}, \mathcal{O}^{M_1}_{\mathbf{s}} \rangle$，故

$$H = \langle \pi(M_1),\, r,\, s \rangle \leq \langle \mathcal{O}_r^{\pi(M_1)}, \mathcal{O}_s^{\pi(M_1)} \rangle \leq \langle \mathcal{O}_r^H,\, \mathcal{O}_s^H \rangle \leq H.$$

也就是说，(2.3) 成立，且 $H \leq \langle \mathcal{O} \rangle$。

注意到 $\pi(M) \simeq M/Z$(特殊线性群$_n(q)) \cap M$ 映到射影一般线性群$_c(q^d)$上，因此轨道$\mathcal{O}_x^{\pi(M)}$和 $\mathcal{O}_{x^q}^{\pi(M)}$ 投影为射影一般线性群$_c(q^d)$中的非平凡轨道，从而$|\mathcal{O}_r^H| \geq |\mathcal{O}_r^{\pi(M)}| > 2$ 和 $|\mathcal{O}_s^H| \geq |\mathcal{O}_s^{\pi(M)}| > 2$，即 (2.4) 成立。

最后我们分析 $\mathcal{O}_r^H \cap \mathcal{O}_s^H$。首先，$\pi(M_1) \leq H \leq \pi(M)$ 和 $\mathcal{O}^{M_1}_{\mathbf{x}} = \mathcal{O}^M_{\mathbf{x}}$推出 $\mathcal{O}_r^H = \mathcal{O}_r^{\pi(M)}$。类似地，$\mathcal{O}_s^H = \mathcal{O}_s^{\pi(M)}$。

若 $\mathcal{O}_r^{\pi(M)} \cap \mathcal{O}_s^{\pi(M)} = \emptyset$，则结论成立。否则，

$$x \in \mathcal{O}_s^{\pi(M)} \cap \pi(T) = \mathcal{O}_{x^q}^{\pi(M)} \cap \pi(T) = \{x^q, (x^q)^{q^d}, \dots, (x^q)^{q^{d(c-1)}}\}.$$

因此存在 $l \in \mathbb{I}_{0,c-1}$，使得 $\mathbf{x}^{q^{dl+1}} \in \mathbb{G}_n(\mathbb{F}_q)\mathbf{x}$。引理 5.8 (iv) 给出 $l \neq 0$。令 $j \in \mathbb{I}_{n-1}$ 为满足 $\mathbf{x}^{q^j} \in \mathbb{G}_n(\mathbb{F}_q)\mathbf{x}$ 的最小值。由引理 5.8 (ii) 可得$j|n$，其论证表明 j 也整除 $dl+1$。因此，$(j,d) = 1$。由于再次由引理 5.8 (iv) 可知 $j > 1$，这只有在 $j = c$ 且 $(c,d) = 1$ 时才可能发生。在这种情况下，d 有一个不同于 c 的素因子 c'，我们可以重复整个构造，将 c 替换为 c'，并将 d 替换为 $\frac{n}{c'}$。由于$j = c \neq c'$，我们得到 $\mathcal{O}_r^{\pi(M)} \cap \mathcal{O}_s^{\pi(M)} = \emptyset$。引理 2.3 的假设已得到验证，因此 $\mathcal{O}$ 为 C 型。□

5.3. SL$_n(q)$ 中的不可约元素，$n > 3$ 素数。这里 $n > 3$ 是素数。回顾一下，$e \neq x \in \boldsymbol{G} =$ PSL$_n(q)$ 中的 $\mathbf{x} \in \mathbb{G}^F - Z(\mathbb{G}^F)$ 是 x 的一个代表元，它是不可约的，且属于 Coxeter 环面 $T := \mathbb{T}_w^F \cap$SL$_n(q)$；我们令 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_x^{\boldsymbol{G}}$ 和 $\mathfrak{O} = \mathcal{O}_{\mathbf{x}}^{\mathbb{G}^F}$。存在一个 rack 满同态 $\mathfrak{O} \twoheadrightarrow \mathcal{O}$。

我们将分析 GL$_n(q)$ 中所有与 $\mathfrak{O}$ 相交的可能子群。首先介绍一些对我们的分析很有帮助的著名算术结果。

引理 5.10. 设 n 是一个奇素数。

(i) *If* $(n, q-1) = 1$, *then* $(n, q^n - 1) = (n, (n)_q) = 1$.
(ii) *If* $(n, q-1) = n$, *then* $(n^2, (n)_q) = (n, (n)_q) = n$.
(iii) $(q-1, (n)_q) = (n, q-1)$.
(iv) $(n(q-1), (n)_q) = (n, q-1)$.

证明. (i) 和 (ii) 由 [25, 引理 4.1.1]，得出，而 (iii) 则由欧几里得算法得到。我们证明 (iv)。结合 (i)、(ii) 和 (iii)，可得

$$(n, (n)_q) = (n, q-1) = (q-1, (n)_q),$$

因此，如果 $(n, q-1) = 1$，则 $(n(q-1), (n)_q) = 1$；如果 $(n, q-1) = n$，则 $n \leq (n(q-1), (n)_q) \leq n^2$。在这种情况下，根据 (ii)，我们舍弃 $(n(q-1), (n)_q) = n^2$。□

回顾注 5.6 中的 $\sigma \in N_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathbb{T}_w)$。

引理5.11. 设 n 是一个素数。

(i) 设 $g \in N_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathbb{T}_w^F) \setminus \mathbb{T}_w^F$。则 $|g|$ 整除 $n(q-1)$。
(ii) $\mathfrak{O} \cap N_{\mathbb{G}^F}(\mathbb{T}_w) \subset \mathbb{T}_w^F$。

证明。(i) 根据注 5.6，存在 $k \in \mathbb{I}_{1,n-1}$ 和 $t \in \mathbb{T}_w^F$，使得 $g = \sigma^k t$。于是

$$(\sigma^k t)^n = \left(\prod_{\tau \in \langle \sigma^k \rangle} \tau \triangleright t \right) \sigma^{nk} = \prod_{\tau \in \langle \sigma \rangle} \tau \triangleright t = \left(\prod_{i=1}^{n} t^{q^i} \right) = t^{(n)_q}$$

通过直接计算。因此，$|g|$ 整除 $n(q-1)$。

(ii) 令 $g \in \mathfrak{O} \cap N_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathbb{T}_w^F) = \mathfrak{O} \cap N_{\mathbb{G}^F}(\mathbb{T}_w^F)$。回忆一下，$|\mathrm{x}|$ 整除 $(n)_q$。若 $g \notin \mathbb{T}_w^F$，则根据 (i)，$|g|$ 整除 $(n(q-1), (n)_q)$。由引理 5.10 (iv)，$|g|$ 整除 $(n, q-1)$，因此 g 是中心的，这与其不可约性矛盾。□

我们回顾一下，$q^n - 1$ 的本原素因子是指满足以下条件的素数 ℓ：$\ell | q^n - 1$，并且对每个 $e \in \mathbb{I}_{n-1}$都有 $\ell \nmid q^e - 1$

引理 5.12。（此处 n 为任意奇素数。）设 y 是 $\mathrm{GL}_n(q)$ 中的不可约半单元。则，

(i) 要么存在 $q^n - 1$ 的本原素因子 ℓ，使其整除 $|\mathrm{y}|$；要么 $|\mathrm{y}|$ 整除 $n(q-1)$，但不整除 $(q-1)$，且 $n | q-1$。(ii) 如果 $\mathrm{y} \in$特殊线性群$_n(q)$，那么总存在 $q^n - 1$ 的本原素因子 ℓ，使其整除 $|\mathrm{y}|$。

证明。（i）如果对 $|\mathrm{y}|$ 的每个素因子 ℓ，都存在一个 $e \in \mathbb{I}_{n-1}$，使得 ℓ 整除 $q^e - 1 = (q-1)(e)_q$，那么任意这样的 ℓ 都整除 $(q-1)((n)_q, (e)_q)$，其中某个 $e < n$。根据欧几里得算法，后者等于 $(q-1)(e, n)_q = q - 1$，因此 $\ell | q-1$ 对 $|\mathrm{y}|$ 的任意素因子 ℓ 都成立。

由于 y 不可约， |y| 不能整除 $q-1$，因此存在 |y| 的一个素因子 ℓ_0，它整除 $q-1$ 和 $(n)_q$。根据引理 5.10 (iii)，只有在 $n|q-1$ 的情况下才可能，而此时 $\ell_0 = n$。于是，引理 5.10 (ii) 蕴含 |y| 整除 $n(q-1)$。

(ii) 若 y ∈ 特殊线性群$_n(q)$，则 |y| 整除 $(n)_q$。反设 q^n-1 的本原素因子均不整除 |y|。那么，根据 (i) 和引理 5.10 (iii)， |y| 将整除 $(n(q-1), (n)_q) = (n, q-1)$。因此，y 不可能是不可约的。□

按照 [17, 定义 1.2], 引理 5.12 的术语，若 n 是奇素数，则 SL$_n(q)$ 中的所有不可约元素都是 ppd$(n, q; n)$-元素。以下结果是 [17]的推论。

引理 5.13。设 ℓ 是 q^n-1 的一个本原素因子，且它整除 |x|；设 $H \leq$ 一般线性群$_n(q)$ 满足 x ∈ H。那么 H 属于下列列表中的一项。
(a) 特殊线性群$_n(q_0) \leq H \leq N_{\mathbf{GL}_n}(q)$(特殊线性群$_n(q_0)$)，其中$q_0 = p^{m_0}$ 满足 $m = m_0 d$、$d \in \mathbb{N}$ 且 $(d, n) = 1$。(b) SU$_n(q_0^{1/2}) \leq H \leq N_{\mathbf{GL}_n}(q)$ (SU$_n(q_0)$)，其中$q_0 = p^{m_0}$ 为平方数，满足$m = m_0 d$、 $d \in \mathbb{N}$ 且 $(d, n) = 1$。(c) $H \leq N_{\mathbf{GL}_n}(q)(\mathbb{T}_w^F) = N_{\mathbf{GL}_n}(q)(T)$，且 ℓ 整除 $|H|$。(d) $H/(H \cap Z$ (一般线性群$_n(q)) \simeq M_{11}$、 $n = 5$、 $\ell = 11$，且模 11 $q^5 \equiv 1$。(e) $H/($ $H \cap Z$(一般线性群$_n(q)) \simeq M_{23}$，或 M_{24}、 $n = 11$、 $\ell = 23$、模 23 $q^{11} \equiv 1$。(f) PSL$_2(\ell) \leq H/(H \cap Z$(一般线性群$_n(q))) \leq$ PGL$_2(\ell)$，当 $\ell \geq 7$、 $n = \frac{1}{2}(\ell - 1)$且模 ℓ $q^n \equiv 1$ 时。

证明。 [17] 中的主要结果指出，对于某个 $\frac{1}{2}d < e \leq d$，GL$_d(q)$ 中包含 ppd$(d, q;\ e)$-元的子群，恰好是其中列出的例 2.1 至例 2.9 中出现的那些。我们提取满足$d = e = n$ 为奇素数 > 3的情形。

○例 2.1 (b) 和 (d) 以及例 2.5 不予考虑，因为它们只在 d 或 e 为偶数时出现。

○ 例 2.1 (a) 和 (c) 分别是我们列表中的 (a) 和 (b)。
○ 不考虑例 2.2，因为它要求 GL$_n(q)$ 的自然表示具有一个 H-稳定子空间，而 x ∈ H 不可约。
○ 不考虑例 2.3 和例 2.4 (a)，因为它们要求 $e \neq d$。
○ 例 2.4 (b) 是我们列表中的情形 (c)。
○ 例 2.6 (a) 被舍弃，因为它要求素数 $\ell = n+1$，而这是不可能的，因为 $n > 2$。

○ 例 2.6 (b) 和 (c) 汇总于 [17, 表 2,3,4]。在表 2 中， d为偶数。在表 3 和 4 中，数值 e 从不为奇数 > 3。

∘ 例2.7 列于 [17, 表 5]。包含 $\ell = e+1$ 的列立即被舍弃，所有 d 不是素数的行也同样舍弃。剩下的是 (d) 和 (e) 中列出的 $H' \simeq H/H\cap Z$(一般线性群$_n(q)$) 的三种可能选择。

∘ 例2.8列于 [17, 表 6] 中，并因 $e \neq d$而被排除。
∘ 例2.9列于 [17, 表 7,8] 中，且若 d 是素数，则 e是偶数。在表8中，我们排除了所有满足 $\ell = e+1$ 的情形，最后仅剩列表中的情形 (f)。□

引理 5.14. 设 $\mathbb{G}$ = 特殊线性群$_n(\Bbbk)$, $m = m_0 d$ 满足 $(d,n) = 1$ 且 $q_0 = p^{m_0}$。
(i) 若 $(n, q_0-1) = n$，则 Z(一般线性群$_n(q)$)一般线性群$_n(q_0) \cap$ 特殊线性群$_n(q)$ = 特殊线性群$_n(q_0)$。

(ii) 若 m_0 是偶数且 $(n, q_0^{1/2}+1) = n$，则

$$Z(\mathbf{GL}_n(q))\mathbf{GU}_n(q_0^{1/2}) \cap \mathbf{SL}_n(q) = \mathbf{SU}_n(q_0^{1/2}).$$

证明。（i）我们证明 $\subset$。设 $\zeta \mathrm{id}_n \in Z$(一般线性群$_n(q)$) 且 $g \in$ 一般线性群$_n(q_0)$，使得 $\zeta g \in$ 特殊线性群$_n(q)$。现在，$|\zeta|$ 整除 $n(q_0-1)$，因为 $\zeta^{-n} = \det(g) \in \mathbb{F}_{q_0}^{\times}$。它也整除 $q-1$，因为$\zeta \in \mathbb{F}_q^{\times}$。因此它整除

$$(n(q_0-1),\, q-1) = (q_0-1)\,(n, (d)_{q_0})\,.$$

因此，$(d)_{q_0} \equiv d$ 模 n；由于 $(d,n) = 1$，所以 $|\zeta|$ 整除 q_0-1，即 $\zeta \in \mathbb{F}_{q_0}^{\times}$ 且 $\zeta g \in$特殊线性群$_n(q_0)$。

（ii）我们证明 $\subset$。设 $\zeta \mathrm{id}_n \in Z$(一般线性群$_n(q)$) 且 $g \in \mathrm{GU}_n(q_0^{1/2})$，使得 $(\zeta\,\mathrm{id}_n)g \in$ 特殊线性群$_n(q)$。现在，由于 $g = \mathrm{Fr}_{q_0^{1/2}}\phi(g)$，我们有 $(\det g)^{q_0^{1/2}+1} = 1$。因此 $|\zeta|$整除 $n(q_0^{1/2}+1)$，并且也整除 $q-1$，因为$\zeta \in \mathbb{F}_q^{\times}$，所以它整除

$$(n(q_0^{1/2}+1),\, q-1) = (q_0^{1/2}+1)\left(n, (q_0^{1/2}-1)(d)_{q_0^{1/2}}\right).$$

然而，n 是一个整除 $q_0^{1/2}+1$ 的奇素数，因此它不整除 $q_0^{1/2}-1$；此外，根据将 (i) 中的论证应用于 $q_0^{1/2}$，有 $(n, (d)_{q_0^{1/2}}) = 1$。因此，$|\zeta|$ 整除 $q_0^{1/2}+1$，也就是说，$\zeta \mathrm{id}_n \in Z(\mathrm{GU}_n(q_0^{1/2}))$，所以 $\zeta g \in \mathrm{SL}_n(q) \cap \mathrm{GU}_n(q_0^{1/2}) = \mathrm{SU}_n(q_0^{1/2})$。□

在本小节中，$\widetilde{\pi}$: $\mathrm{GL}_n(q) \to \mathrm{PGL}_n(q)$ 是自然投影，其在 $\mathrm{SL}_n(q)$ 上的限制为 π。

命题5.15. 设 x 是 Coxeter 环面$T = \mathbb{T}_w^F$中的一个不可约元素。那么 $\mathcal{O}$ 是 kthulhu。

证明。我们考虑每个包含 x 的 $\mathrm{M} \leq \boldsymbol{G}$ 所对应的所有可能交集 $\mathcal{O} \cap \mathrm{M}$。这些群都具有如下形式：$\mathrm{M} = \pi(H \cap$特殊线性群$_n(q))$，其中某个$H \leq$一般线性群$_n(q)$包含 x。我们将证明，要么 $\mathcal{O} \cap \mathrm{M} = \mathcal{O}_x^{\mathrm{M}}$，要么$\mathcal{O} \cap \mathrm{M}$ 是阿贝尔子货架。这说明 $\mathcal{O}$ 是 kthulhu。

在分析中，我们将用到以下辅助事实：

断言 1. $C_{\mathbf{PSL}_n}(x) \cap \mathcal{O} = \{x, x^q, \dots, x^{q^{n-1}}\}$。

事实上，引理 5.7 给出

$$C_{\mathbf{SL}_n(q)}(\mathtt{x}) \cap \mathfrak{O} = \{\mathtt{x}, \mathtt{x}^q, \dots, \mathtt{x}^{q^{n-1}}\}.$$

我们描述 $C_{\mathbf{PSL}_n(q)}(x)$。若 $\mathtt{z} \in$ 特殊线性群$_n(q)$ 满足 $\mathtt{zxz}^{-1} \in \mathbb{G}_m(\mathbb{F}_q)\mathtt{x} \cap \mathfrak{O}$，则根据 n 的素性以及引理 5.8 (ii) 和 (iv)，我们得出 $\mathtt{zxz}^{-1} = \mathtt{x}$，因此 $C_{\mathbf{PSL}_n(q)}(x) = \pi(C_{\mathbf{SL}_n(q)}(\mathtt{x})) = \pi(T)$，由此得证。

断言 2. 若 $\widetilde{\pi}(H)$ 是单的，则 $\widetilde{\pi}(H) \leq$PSL$_n(q)$。特别地，我们可以假设 $H \leq$ SL$_n(q)$。

事实上，若 $\widetilde{\pi}(H)$ 是单的，则

$$\widetilde{\pi}(H) = [\widetilde{\pi}(H), \widetilde{\pi}(H)] = \widetilde{\pi}([H, H]) \leq \widetilde{\pi}([\mathbf{GL}_n(q), \mathbf{GL}_n(q)]) = \pi(\mathbf{SL}_n(q)).$$

从现在起，设 $H_1 := H \cap$SL$_n(q)$，并考察所有可能的 $\mathtt{M} = \pi(H_1)$，其中 H 遍历引理 5.13 中包含 $\mathtt{x}$ 的子群列表，且 ℓ 是 $q^n - 1$ 的一个本原素因子，整除 $|\mathtt{x}|$。各项的编号与引理 5.13 中相同。

情形 (a). 此处 $q = p^m$, $q_0 = p^{m_0}$，其中 $m = m_0 d$, $d \in \mathbb{N}$，且 $(n, d) = 1$。由命题 3.1 得到 $N_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathrm{SL}_n(q_0)) = Z(\mathrm{GL}_n(q))\mathrm{GL}_n(q_0)$，因此

$$\mathbf{SL}_n(q_0) \leq H_1 \leq Z(\mathbf{GL}_n(q))\mathbf{GL}_n(q_0) \cap \mathbf{SL}_n(q). \tag{5.4}$$

我们将首先证明

$$\mathfrak{O} \cap Z(\mathbf{GL}_n(q))\mathbf{GL}_n(q_0) \cap \mathbf{SL}_n(q) = \mathcal{O}_{\mathtt{x}}^{\mathbf{SL}_n(q_0)}. \tag{5.5}$$

若 $(n, q_0 - 1) = n$，则根据引理 5.14 (i)，(5.4) 中的包含关系全都是等式。在此情形下

$$\begin{aligned}\mathfrak{O} \cap Z(\mathbf{GL}_n(q))\mathbf{GL}_n(q_0) \cap \mathbf{SL}_n(q) &= \mathfrak{O} \cap \mathbf{SL}_n(q_0) \\ &= \mathcal{O}_{\mathtt{x}}^{\mathbf{SL}_n(\Bbbk)} \cap \mathbf{SL}_n(q_0) = \mathcal{O}_{\mathtt{x}}^{\mathbf{SL}_n(q_0)}\end{aligned}$$

其中，最后两个等式由 [22, 定理 21.11] 和 [20, §2.11]得出。现在假设 $(n, q_0 - 1) = 1$。由于 $\mathtt{x} \in H_1 \leq Z$(一般线性群$_n(q)$)一般线性群$_n(q_0)$，因此
存在 $z = \zeta \mathtt{id}_n \in Z$(一般线性群$_n(q)$)，以及 $\mathtt{y} \in$ 一般线性群$_n(q_0)$，使得

$$\mathtt{x} = z\mathtt{y}.$$

考虑 $\mathtt{x}_1 \in \mathfrak{O} \cap Z(\mathrm{GL}_n(q))\mathrm{GL}_n(q_0)$。设 $z_1 = \zeta_1 \mathtt{id}_n \in Z(\mathrm{GL}_n(q))$ 和 $\mathtt{y}_1 \in \mathrm{GL}_n(q_0)$ 满足 $\mathtt{x}_1 = z_1 \mathtt{y}_1$。根据构造，$|\zeta|$ 和 $|\zeta_1|$ 整除$n(q_0 - 1)$，因为 $\mathtt{x}$、$\mathtt{x}_1 \in \mathrm{SL}_n(q)$。由于 $\mathtt{x}$ 不可约，$\mathtt{y}$ 和 $\mathtt{y}_1$ 在 $\mathrm{GL}_n(q)$ 中也不可约，因此在 $\mathrm{GL}_n(q_0)$ 中也不可约，因为它们是正则的，且属于 $\mathrm{GL}_n(q)$ 的一个 Coxeter 环面。令 $\{\eta^{q^j} : j \in \mathbb{I}_{0,n-1}\} \subset \mathbb{F}_{q_0^n}$ 和$\{\eta_1^{q^j} : j \in \mathbb{I}_{0,n-1}\} \subset \mathbb{F}_{q_0^n}$ 分别为 $\mathtt{y}$ 和 $\mathtt{y}_1$，的特征值集合，

因此 $\{\zeta\eta^{q^j} : j \in \mathbb{I}_{0,n-1}\}$ 和 $\{\zeta_1\eta_1^{q^j} : j \in \mathbb{I}_{0,n-1}\}$ 分别为 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x}_1$，的特征值集合。于是

$$\{\zeta\eta^{q^j} : j \in \mathbb{I}_{0,n-1}\} = \{\zeta_1\eta_1^{q^j} : j \in \mathbb{I}_{0,n-1}\}$$

因此，对于某个 j_0，有 $\zeta\eta = \zeta_1\eta_1^{q^{j_0}}$。因此 $|\zeta_1\zeta^{-1}| = |\eta\eta_1^{-q^{j_0}}|$ 整除 $(n(q_0-1)\ q_0^n-1) = (q_0-1)(n,(n)_{q_0}) = q_0-1$，其中最后一个等式由引理 5.10 (i) 得出。换言之，$\zeta_1 \in \zeta\mathbb{F}_{q_0}^{\times}$，且 $z^{-1}\mathbf{x}_1$ 是一般线性群$_n(q_0)$ 中的正则半单矩阵，其特征值与 $\mathbf{y}$ 相同，因此它与 $\mathbf{y}$ 在特殊线性群$_n(q_0)$ 中共轭。因此，

$$\mathfrak{O} \cap Z(\mathbf{GL}_n(q))\mathbf{GL}_n(q_0) \subset z\mathcal{O}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{SL}_n(q_0)} = \mathcal{O}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{SL}_n(q_0)}.$$

现在设 $x' = \pi(\mathbf{x}') \in \mathcal{O} \cap \mathbb{M}$。那么，对于某个 $z' \in Z$，有 $z'\mathbf{x}' \in \mathfrak{O}$ (特殊线性群$_n(q)$)，且 $\mathbf{x}' \in Z$ (特殊线性群$_n(q)$)H_1，也就是说，

$$z'\mathbf{x}' \in \mathfrak{O} \cap Z(\mathbf{SL}_n(q))H_1 \subset \mathfrak{O} \cap Z(\mathbf{GL}_n(q))\mathbf{GL}_n(q_0) \cap \mathbf{SL}_n(q) = \mathcal{O}_{\mathbf{x}}^{H_1}.$$

其中等式由 (5.4) 和 (5.5) 得出。因此，$\mathbf{x}' \in Z$(特殊线性群$_n(q)$)$\mathcal{O}_{\mathbf{x}}^{H_1}$and $x' \in \mathcal{O}^{\pi(H_1)_x} = \mathcal{O}_x^{\mathbf{M}}$，这表明 $\mathcal{O} \cap \mathbb{M} = \mathcal{O}_x^{\mathbf{M}}$。

情形 (b). 此处 $q = p^m$, $q_0 = p^{m_0}$ 其中 $m_0|m$, m_0 是偶数，且 $(n,d) = 1$。我们采用与情形 (a) 相同的策略。

命题 3.1 给出 $N_{\mathbf{GL}_n(q)}(\mathrm{SU}_n(q_0^{1/2})) = Z$(一般线性群$_n(q)$)$\mathrm{GU}_n(q_0^{1/2})$，因此

$$\mathbf{SU}_n(q_0^{1/2}) \le H_1 \le Z(\mathbf{GL}_n(q))\mathbf{GU}_n(q_0^{1/2}) \cap \mathbf{SL}_n(q). \tag{5.6}$$

我们首先证明

$$\mathfrak{O} \cap Z(\mathbf{GL}_n(q))\mathbf{GU}_n(q_0^{1/2}) \cap \mathbf{SL}_n(q) = \mathcal{O}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{SU}_n(q_0^{1/2})}. \tag{5.7}$$

若 $(n, q_0^{1/2}+1) = n$，则根据引理 5.14 (ii)，(5.6) 中的包含关系全都是等式。在这种情况下

$$\begin{aligned}\mathfrak{O} \cap Z(\mathbf{GL}_n(q))\mathbf{GU}_n(q_0^{1/2}) \cap \mathbf{SL}_n(q) &= \mathfrak{O} \cap \mathbf{SU}_n(q_0^{1/2}) \\ &= \mathcal{O}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{SL}_n(\Bbbk)} \cap \mathbf{SU}_n(q_0^{1/2}) = \mathcal{O}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{SU}_n(q_0^{1/2})}\end{aligned}$$

其中最后两个等式分别由 [22, 定理 21.11] 和 [20, §2.11] 得出。

现在假设 $(n, q_0^{1/2}+1) = 1$。由于 $\mathbf{x} \in H_1 \le Z$(一般线性群$_n(q)$)$\mathrm{GU}_n(q_0^{1/2})$，存在 $z = \zeta\mathrm{id}_n \in Z$(一般线性群$_n(q)$)，以及 $\mathbf{y} \in \mathrm{GU}_n(q_0) \le$ 一般线性群$_n(q_0)$，使得

$$\mathbf{x} = z\mathbf{y}.$$

考虑 $\mathbf{x}_1 \in \mathfrak{O} \cap Z$(一般线性群$_n(q)$)$\mathrm{GU}_n(q_0^{1/2})$。令 $z_1 = \zeta_1\,\mathrm{id}_n \in Z$(一般线性群$_n(q)$)，并取 $\mathbf{y}_1 \in \mathrm{GU}_n(q_0) \le$一般线性群$_n(q_0)$，使得 $\mathbf{x}_1 = z_1\mathbf{y}_1$。根据构造，$|\zeta|$ 和$|\zeta_1|$ 整除 $n(q_0^{1/2}+1)$，因为 $\mathbf{x}$、$\mathbf{x}_1 \in$ 特殊线性群$_n(q)$，并且对任意$g \in \mathrm{GU}_n(q_0^{1/2})$，$\det(g)^{q_0^{1/2}+1} = 1$。

由于 $\mathbf{x}$ 不可约，$\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{y}_1$ 在 $\mathrm{GL}_n(q)$ 中也不可约，因此在 $\mathrm{GL}_n(q_0)$ 中也不可约。我们证明 $|\mathbf{y}|$ 不能整除 $n(q_0-1)$。事实上，若

确实如此，那么对于某个 $\xi \in \mathbb{G}_n(\mathbb{F}_q^\times)$，就有 $\mathrm{y}^{q_0-1} = \xi \mathrm{id}_n$，其中$\xi \neq 1$。由于 $\mathrm{y}^{q_0} \in \mathcal{O}^{\mathbf{GL}_n(q_0)\mathrm{y}}$，特征多项式 p_y 应为$X^n - \det(\mathrm{y}) = X^n - \xi^{-n}$，这不是不可约的。因此，根据引理 5.12 (i)，存在 $|\mathrm{y}|$ 的一个本原素因子 ℓ，它整除 $q_0^n - 1$。

给定 F_0: 一般线性群$_n(\mathbb{k}) \to$ 一般线性群$_n(\mathbb{k})$，其定义为 $F_0(A) := \mathrm{Fr}_{q_0^{1/2}} \phi(A)$，其中 $A \in$一般线性群$_n(\mathbb{k})$，参见小节 3.2。根据 [22, 命题 26.6]，存在一个 F_0-稳定环面 $\mathbb{T}'$，包含于一般线性群$_n(\mathbb{k})$中，且包含 y。令 $\mathcal{T} = \mathbb{T}' \cap \mathbf{GU}_n(q_0^{1/2})$。根据 [22,命题25.3 (c)] 以及对对称群中 ϕ-类的分析，存在一个 λ 的分拆 n，使得

$$|\mathcal{T}| = \prod_{\lambda_i \text{ even}} (q_0^{\lambda_i/2} - 1) \prod_{\lambda_i \text{ odd}} (q_0^{\lambda_i/2} + 1).$$

后者整除 $\prod_{\lambda_i \text{ 偶数}} (q_0^{\lambda_i/2} - 1) \prod_{\lambda_i \text{ 奇数}} (q_0^{\lambda_i} - 1)$，且可被 $q_0^n - 1$的本原素因子 ℓ整除。因此，$\lambda = (n)$ 且 $|\mathcal{T}| = (q_0^{n/2} + 1)$。

现在我们按照情形 (a) 的方法，考虑 x 的特征值集合，以及 x_1 和 y、y_1, 的特征值集合，推得 $|\zeta_1\zeta^{-1}|$ 整除

$$\left(n(q_0^{1/2}+1), q_0^{n/2}+1\right) = (q_0^{1/2}+1)(n, (n)_{-q_0^{1/2}}) = (q_0^{1/2}+1)$$

其中 $(n, (n)_{-q_0^{1/2}}) = 1$，因为 $(n)_{-q_0^{1/2}}$ 整除 $q_0^{n/2}+1$，且根据我们对 q_0 和 n 的假设，$q_0^{1/2}$ 不是 $\mathbb{F}_n$ 中的 $X^n + 1 = (X+1)^n$ 的根。

因此，$\mathrm{z}_1 \in \mathrm{z}Z(\mathrm{GU}_n(q_0^{1/2}))$，并且 $z^{-1}\mathrm{x}_1$ 是 $\mathrm{GU}_n(q_0^{1/2})$ 中的正则半单矩阵，其特征值与 y 相同。因此，由 [20,§2.11, §8.5]，它与 y 在 $\mathrm{SU}_n(q_0)$ 中共轭。于是，

$$\mathfrak{O} \cap Z(\mathbf{GL}_n(q))\mathbf{GU}_n(q_0^{1/2}) \subset z\mathcal{O}_\mathrm{y}^{\mathbf{SU}_n(q_0^{1/2})} = \mathcal{O}_\mathrm{x}^{\mathbf{SU}_n(q_0^{1/2})}.$$

现在设 $x' = \pi(\mathrm{x}') \in \mathcal{O} \cap \mathrm{M}$。那么，对于某个 $z' \in Z$(特殊线性群$_n(q)$)，有 $z'\mathrm{x}' \in \mathfrak{O}$，且 $\mathrm{x}' \in Z$(特殊线性群$_n(q))H_1$，也就是说，

$$z'\mathrm{x}' \in \mathfrak{O} \cap Z(\mathbf{SL}_n(q))H_1 \subset \mathfrak{O} \cap Z(\mathbf{GL}_n(q))\mathbf{GU}_n(q_0^{1/2}) \cap \mathbf{SL}_n(q) = \mathcal{O}_\mathrm{x}^{H_1}.$$

等式由 (5.6) 和 (5.7) 得出。因此，$\mathrm{x}' \in Z$(特殊线性群$_n(q))\mathcal{O}_\mathrm{x}^{H_1}$and $x' \in \mathcal{O}^{\pi(H_1)_x} = \mathcal{O}_x^{\mathrm{M}}$，这表明 $\mathcal{O} \cap \mathrm{M} = \mathcal{O}_x^{\mathrm{M}}$。

情形 (c) 在此情形下，$\mathrm{M} \leq \pi(N_{\mathbf{SL}_n(q)}(T)) = N_{\boldsymbol{G}}(\pi(T))$，其中第二个等式成立是因为 Z(特殊线性群$_n(q)) \leq T$。若 $y = \pi(\mathrm{y}) \in \mathcal{O} \cap \mathrm{M}$，则存在 $\mathrm{z} \in Z$(特殊线性群$_n(q))$，使得 $\mathrm{y} \in \mathcal{O}^{\mathbf{SL}_n(q)\mathrm{zx}} \cap N_{\mathbf{SL}_n(q)}(T)$，且 zx 仍然不可约。由引理5.11 可知 $\mathrm{y} \in T$，因此 $\mathcal{O} \cap \mathrm{M} \subset \pi(T)$ 是阿贝尔群。

情形 (d) 在此情形下，$n = 5$ 和 $\ell = 11$ 和 $\tilde{\pi}(H) = M_{11} = \pi(H_1)$。我们证明 $\mathcal{O} \cap M_{11} = \mathcal{O}_x^{M_{11}}$。在 M_{11} 中，阶能被 ℓ 整除的元素只有 11 阶，因此 $|x| = 11$。在 M_{11}中，这类元素有两个共轭类，分别记为 $\mathcal{O}_x^{M_{11}}$和 $\mathcal{O}_y^{M_{11}}$。若 $\mathcal{O} \cap M_{11} = \mathcal{O}_x^{M_{11}} \cup \mathcal{O}_y^{M_{11}}$，则$\langle x\rangle - 1 \subset \mathcal{O} \cap M_{11} \cap C_{\mathbf{PSL}_n(q)}(x)$ $= \{x, x^q, x^{q^2}, x^{q^3}, x^{q^4}\}$，矛盾。

情形 (e) 在此情形下，$n = 11$ 和 $\ell = 23$。在 $\mathbf{M} = M_{23}$ 或 M_{24} 中，阶能被 ℓ 整除的元素只有 23 阶，且这类元素有 2 个共轭类。我们按照情形 (c) 的方法继续。

情形 (f) 在此情形下，$\ell | q^n - 1$ 且 $\mathbf{M} = \pi(H_1) \simeq H_1/H_1 \cap Z(\mathrm{SL}_n(q))$，并且

$$\mathbf{PSL}_2(\ell) \leq H_1/H_1 \cap Z(\mathbf{SL}_n(q)) \leq \mathbf{PGL}_2(\ell).$$

由于 $[\mathrm{PGL}_2(\ell) : \mathrm{PSL}_2(\ell)] \leq 2$，我们有 $\mathbf{M} \simeq \mathrm{PGL}_2(\ell)$ 或 $\mathbf{M} \simeq \mathrm{PSL}_2(\ell)$。在这两种情形下，$|x| = \ell$ 并且我们断言 $\mathcal{O} \cap \mathbf{M} = \mathcal{O}_x^{\mathbf{M}}$。在 $\mathrm{PGL}_2(\ell)$ 中，所有非平凡幺幂元都彼此共轭，因此断言成立。令 $y \in \mathcal{O} \cap \mathrm{PSL}_2(\ell)$。将 y 替换为 $\mathrm{PSL}_2(\ell)$ 的同一 Borel 子群中与 x 属于同一共轭类的代表元后，我们可以确保

$$y \in C_{\mathbf{PSL}_2(\ell)}(x) \cap \mathcal{O} \subset C_{\mathbf{PSL}_n(q)}(x) \cap \mathcal{O} = \{x, x^q, \dots, x^{q^{n-1}}\}.$$

不失一般性，我们可以假设 x 是某个 $\xi \in \mathbb{F}_\ell^\times$ 的 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 的共轭类，因此 y 是某个 $j \in \mathbb{I}_{n-1}$ 的 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{q^j} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & q^j\xi \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 的共轭类。根据假设，$q \equiv q^{n+1}$ 模 ℓ，故 q 是模 ℓ 的平方数。因此，x 和 y 在 $\mathrm{PSL}_2(\ell)$ 中共轭，断言得证。□

注5.16. 考虑 $g \in M_{11}$、$|g| = 11$ 或 $g \in M_{23}$ or M_{24}、$|g| = 23$ 中的任意一种情形。根据 [17] 和断言 2，参见情形 (d) 和 (e)，共轭类 $\mathcal{O}_g^{M_{11}}$、$\mathcal{O}_g^{M_{23}}$or $\mathcal{O}_g^{M_{24}}$分别包含于某个 $\mathcal{O}^{\mathbf{PSL}_5(q)g}$（其中 q），或某个 $\mathcal{O}^{\mathbf{PSL}_{11}(q')g}$（其中 q'）。由命题5.15，由于 g 在所有情形下均不可约，$\mathcal{O}_g^{\boldsymbol{G}}$ 是 kthulhu，其中 $\boldsymbol{G}$ 为 $\mathrm{PSL}_5(q)$ 或 $\mathrm{PSL}_{11}(q')$。因此 $\mathcal{O}_g^{M_{11}}$、$\mathcal{O}_g^{M_{23}}$ 和 $\mathcal{O}_g^{M_{24}}$ 也都是 kthulhu，正如先前在 [10,Teorema 3.26] 中所证明的。

6. Semisimple conjugacy classes represented in K

本节讨论与子群 K 相交的半单共轭类；该子群是 §3.3 中引入的映射 j: $\mathrm{GL}_n(q) \to \mathbb{G}^F$ 的像。我们针对两类单群给出平行的证明：

- $\mathbb{G} = \mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk)$，其中 $n \geq 2$；此处 $\boldsymbol{G} := \mathbb{G}^F/Z(\mathbb{G}^F)$，而 π: $\mathbb{G}^F \to \boldsymbol{G}$ 表示标准投影。
- $\mathbb{G} = \mathrm{SO}_{n'}(\Bbbk)$，其中 $n' = 2n$ 和 $n \geq 4$，或 $n' = 2n + 1$ 和 $n \geq 3$；此处$\boldsymbol{G} := [\mathbb{G}^F, \mathbb{G}^F]/Z(\mathbb{G}^F)$，而 π: $[\mathbb{G}^F, \mathbb{G}^F] \to \boldsymbol{G}$ 是标准投影。

在辛情形中，$\mathbb{G}^F = [\mathbb{G}^F, \mathbb{G}^F]$，因此为使表述简洁，我们在两种情形下都写作 $[\mathbb{G}^F, \mathbb{G}^F]$。有时，为了递归论证，我们也考虑具有较小 n 的此类群。

我们将考虑 $\boldsymbol{G}$ 中的半单共轭类 $\mathcal{O}$，以及 $[\mathbb{G}^F, \mathbb{G}^F]$ 中满足 $\pi(\mathfrak{O}) = \mathcal{O}$ 的共轭类 $\mathfrak{O}$，并假设存在 $A \in$ 一般线性群$_n(q)$，使得 $j(A) \in \mathfrak{O}$。

以下是本节的主要结果：

定理 6.1. 设 $\mathbb{G} = \mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk)$，$n \geq 2$，且 $A \in \mathrm{GL}_n(q) - Z(\mathrm{GL}_n(q))$ 是一个半单元；若 $n = 2$ 且 $q \leq 7$，则它不是对合。于是 $\mathcal{O} = \mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(j(A))}$ 塌缩。

定理 6.2. 设 $\mathbb{G} = \mathrm{SO}_{2n}(\Bbbk)$ 或 $\mathrm{SO}_{2n+1}(\Bbbk)$，其中两种情形下均有 $n \geq 3$，并设 $A \in \mathrm{GL}_n(q) - Z(\mathrm{GL}_n(q))$ 是一个半单元。

进一步假设，当 $q \in \{3, 5, 7\}$ 时，$j(A)$ 不对应于情形 (4.1)。于是 $\mathcal{O} = \mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(j(A))}$ 塌缩。

我们在第 6.2 小节证明这些定理；此前，我们在第 6.1 小节处理 A 不可约的情形。

在正交情形中，为了后续应用，我们考虑轨道 $\mathcal{O}^{[\mathbb{G}^F, \mathbb{G}^F]}_{j(A)}$，即使 $j(A)$ 不一定属于 $[\mathbb{G}^F, \mathbb{G}^F]$，如注 2.1 所述。参见引理 6.4 和 6.5。

我们先作一些一般性的考察。

引理 6.3。设 $A \in \mathrm{GL}_n(q)$ 是一个半单元。

(i) $\mathcal{O}^{j(\mathbf{SL}_n(q))}_{j(A)} = \mathcal{O}^{[K,K]}_{j(A)} = \mathcal{O}^{K}_{j(A)} = \mathcal{O}^{j(\mathbf{GL}_n(q))}_{j(A)}$。(ii) 若 A 不可约，则要么 $\mathcal{O}^{\mathbf{GL}_n(q)}_{A} = \mathcal{O}^{\mathbf{GL}_n(q)}_{A^{-1}}$，要么 $j(A)$ 在 $\mathrm{GL}_{n'}(q)$ 中正则。(iii) 若 A 不可约，则要么 $\mathcal{O}^{[\mathbb{G}^F, \mathbb{G}^F]}_{j(A)} = \mathcal{O}^{[\mathbb{G}^F, \mathbb{G}^F]}_{j(A^{-1})}$，要么 $j(A)$ 正则。

证明。(i) 是以下包含关系的推论

$$j(\mathbf{SL}_n(q)) \simeq [K, K] \leq K \simeq \mathbf{GL}_n(q).$$

(ii)：若 ζ^{q^h}、$h \in \mathbb{I}_{0,\, n-1}$ 是 $\Bbbk$ 中 A 的（互不相同的）特征值，则 $\zeta^{\pm q^h}$（当 $n' = 2n + 1$ 时还包括 1）是 $j(A)$ 的特征值。假设 $j(A)$ 在一般线性群$_{n'}(q)$ 中不是正则的；于是 A 和 A^{-1} 有一个公共特征值。由不可约性可知，A 和 A^{-1} 的特征值集合相同，即 A 和 A^{-1} 在一般线性群$_n(\Bbbk)$ 中共轭。由于一般线性群$_n(\Bbbk)$ 中的中心化子是连通的，[20，第 19] 页，$\mathcal{O}^{\mathbf{GL}_n(q)}_{A} = \mathcal{O}^{\mathbf{GL}_n(q)}_{A^{-1}}$。(iii) 由 (i)、(ii) 以及包含关系 $[K, K] \leq K \cap [\mathbb{G}^F, \mathbb{G}^F]$ 得出。□

6.1. $A \in$一般线性群$_n(q)$ 是不可约的。我们首先分析这种情况。

引理 6.4。（此处 $n \geq 3$ 当 $\mathbb{G} =$SO$_{2n}(\Bbbk)$ 或 $\mathbb{G} =$SO$_{2n+1}(\Bbbk)$ 时）。设$A \in$一般线性群$_n(q)$ 是一个不可约元素，使得

◦ $j(A)$ 在一般线性群$_{n'}(q)$ 中不是正则的，

∘ $p_A(X) \neq X^2+1$ 当 $\mathbb{G} = \mathsf{Sp}_4(\Bbbk)$ 且 $q \equiv 3$ 模4时。

Then

(i) $\mathscr{O} \coloneqq \mathcal{O}_{j\ A}^{[\mathbb{G}^F, \mathbb{G}^F]}()$ 塌缩。(ii) 若 $j(A)$ $\in \mathfrak{O} \subseteq [\mathbb{G}^F, \mathbb{G}^F]$，则 $\mathcal{O}$ 塌缩。

证明。注意，(ii) 直接由我们将要证明的 (i) 得出。最初的讨论对正交群和辛群均成立。回顾 (3.1) 中的 ϕ。A 中的不可约性假设确保 A 的特征值两两不同，即 A 是正则半单的，因此我们可以假设 A 是其特征（亦即最小）多项式 $p_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots a_0$ 的伴随矩阵。也就是说，A、$\phi(A)$、${}^tA$、${}^tA^{-1}$、A^{-1} 以及 $\phi(A^{-1})$ 具有以下形式：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \phi(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -1/a_0 & -a_{n-1}/a_0 & \cdots & -a_2/a_0 & -a_1/a_0 \end{pmatrix},$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad {}^tA^{-1} = \begin{pmatrix} -a_1/a_0 & -a_2/a_0 & \cdots & -a_{n-1}/a_0 & -1/a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -a_1/a_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2/a_0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n-1}/a_0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1/a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi(A^{-1}) = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

此外，$A \neq A^{-1}$，否则 A 将具有特征值 ± 1，这与不可约性矛盾。我们考虑以下互不相交的子架：

$$R_1 \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} A & Y \\ 0 & \phi(A) \end{pmatrix} \in \mathscr{O} \right\}, \quad R_2 \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} A^{-1} & Y \\ 0 & \phi(A^{-1}) \end{pmatrix} \in \mathscr{O} \right\}, \quad \text{if } n' = 2n;$$

$$R_1 \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & Y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \phi(A) \end{pmatrix} \in \mathscr{O} \right\}, \quad R_2 \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 & Y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \phi(A^{-1}) \end{pmatrix} \in \mathscr{O} \right\}, \quad \text{if } n' = 2n+1.$$

现在，由构造可知 $R_1 \neq \emptyset$，由引理 6.3 (iii) 可知 $R_2 \neq \emptyset$。容易看出 $R_i \triangleright R_j = R_j$、$1 \leq i$、$j \leq 2$。我们接下来分别讨论各个群。

情形1. $\mathbb{G} = \mathsf{Sp}_{2n}(\Bbbk)$。令

$$r_1 \coloneqq \begin{pmatrix} \mathrm{id}_n & \mathtt{J}_n \\ 0 & \mathrm{id}_n \end{pmatrix} \triangleright j(A) = \begin{pmatrix} A & -A\mathtt{J}_n + {}^tA^{-1}\mathtt{J}_n \\ 0 & \mathtt{J}_n\, {}^tA^{-1}\mathtt{J}_n \end{pmatrix} \in R_1, \quad r_2 \coloneqq j(A^{-1}) \in R_2.$$

直接计算可得

$$r_1 r_2 \coloneqq \begin{pmatrix} \mathrm{id}_n & -A\,{}^tA\mathtt{J}_n + \mathtt{J}_n \\ 0 & \mathrm{id}_n \end{pmatrix} \qquad r_2 r_1 \coloneqq \begin{pmatrix} \mathrm{id}_n & -\mathtt{J}_n + A^{-1}\,{}^tA^{-1}\mathtt{J}_n \\ 0 & \mathrm{id}_n \end{pmatrix}$$

因此 $r_1 r_2 = r_2 r_1$ 当且仅当 $2\,\mathrm{id}_n = A^{-1}\,{}^tA^{-1} + A\,{}^tA$。我们来验证这种等式绝不会成立。比较对角元可得$a_i^2 = (-1)^{i+1} a_0^{2i}(1 - a_0^2)$，其中 $i > 0$；而比较第一行的元素可得

$a_1(a_2+a_0^3)=0$，且 $a_1a_l=-a_0^3a_{l-1}$，其中 $l>2$。条件 $a_2+a_0^3=0$ 和 $a_2^2=-a_0^4(1-a_0^2)$ 导致矛盾，因此必有 $a_1=0$，从而对任意 $l>0$ 和 $a_0^2=1$，均有 $a_l=0$。换言之，$p_A(X)=X^n\pm1$。由引理5.5，这只有在 $n=2$、$q\equiv3$ 模4 且 $p_A(X)=X^2+1$ 时才可能，而这与假设相悖。

于是，$r_1\triangleright r_2\neq r_2$并且，对于 $H:=\langle r_1,\ r_2\rangle$ 我们有 $\mathcal{O}_{r_1}^H\cap\mathcal{O}_{r_2}^H\subset R_1\cap R_2=\emptyset$，因为 $A^2\neq\mathsf{id}$。如果 $p=2$，那么 $|r_1|=|r_2|$ 为奇数，并且根据注 2.4（b），$\mathcal{O}^{\mathbf{Sp}_{2n}(q)\ j(A)}$ 属于 C 型。反之，如果 p 为奇数，则 $r_1r_2\neq r_2r_1$ 推出 $(r_1r_2)^2\neq(r_2r_1)^2$，因为它们是 p-元素，所以 $\mathcal{O}^{\mathbf{Sp}_{2n}(q)\ j(A)}$ 属于 D 型。

我们断言，投影 $\pi\colon\mathsf{Sp}_{2n}(q)\to\boldsymbol{G}$ 到$R_1\coprod R_2$的限制是单射。事实上，只有在 $A^2=\pm1$时这才可能失败；但由于A不可约，我们将有 $A^2=-1$，这将给出 $p_A(X)=X^2+1$，其中 $q\equiv3$ 模4，即被舍弃的情形。因此 $\mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(j(A))}$ 塌缩。

情形 2。$\mathbb{G}=\mathsf{SO}_{2n}(\Bbbk)$ 或 $\mathsf{SO}_{2n+1}(\Bbbk)$。对于 $n\geq3$，我们考虑以下矩阵：

$$E:=\begin{cases}\operatorname{diag}(\mathrm{id}_{\frac{n}{2}},-\mathrm{id}_{\frac{n}{2}}) & \text{if } n \text{ is even},\\ \operatorname{diag}(\mathrm{id}_{[\frac{n}{2}]},0,-\mathrm{id}_{[\frac{n}{2}]}) & \text{if } n \text{ is odd},\end{cases}$$

$$U:=\begin{cases}\begin{pmatrix}\mathrm{id}_n & E\\ 0 & \mathrm{id}_n\end{pmatrix} & \text{if } \mathbb{G}=\mathbf{SO}_{2n}(\Bbbk),\\ \begin{pmatrix}\mathrm{id}_n & 0 & E\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{id}_n\end{pmatrix} & \text{if } \mathbb{G}=\mathbf{SO}_{2n+1}(\Bbbk).\end{cases}$$

于是，根据 $U\in[\mathbb{G}^F,\mathbb{G}^F]$ 定理 24.15、命题 24.21]，我们考虑元素 $r_i\in R_i$、$i=1$、2：

$$r_1:=U\triangleright j(A)\in R_1=\begin{cases}\begin{pmatrix}A & -AE+E\phi(A)\\ 0 & \phi(A)\end{pmatrix} & \text{if } \mathbb{G}=\mathbf{SO}_{2n}(\Bbbk),\\ \begin{pmatrix}A & 0 & -AE+E\phi(A)\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \phi(A)\end{pmatrix} & \text{if } \mathbb{G}=\mathbf{SO}_{2n+1}(\Bbbk),\end{cases}$$

$$r_2:=j(A^{-1})\in R_2.$$

直接计算可得，$r_1r_2=r_2r_1$ 当且仅当

$$2E=AE\phi(A^{-1})+A^{-1}E\phi(A). \tag{6.1}$$

我们验证这种情况绝不会发生。首先假设 p 是奇数。考察 (1, 1) 项可知，若 $n\geq3$，则 (6.1) 绝不成立。由于 r_1r_2 和 r_2r_1 是 p 元素，因此可得 $\pi(r_1r_2)^2\neq\pi(r_2r_1)^2$。$\pi$ 到 $R_1\coprod R_2$ 的限制是单射，因为若 $A^2=-\mathsf{id}$ 不可约，则会推出 $n=2$，而这是已排除的情形。因此 $\mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(j(A))}$ 是 D 型。

假设 $p=2$，则 $\mathbb{G}=\mathsf{SO}_{2n}(\Bbbk)$。于是 (6.1) 等价于 $A^2E \overset{\star}{=} E\phi(A)^2$。若 $n\geq 4$，考察第一行可知 $\star$ 绝不成立。若 $n=3$，则 (6.1) 仅在 $a_2=a_0^{-1}$、$a_1=a_0^2$ 时成立，但在这种情况下

$$p_A(X)=X^3+a_0^{-1}X^2+a_0^2X+a_0=(X+a_0)^2(X+a_0^{-1})$$

不可约。由于 $|r_1|$ 是奇数且 π 是单射，注 2.4 (b) 适用，因此 $\mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(j(A))}$ 属于 C 型。□

引理 6.5。（此处 $n\geq 3$ 表示 $\mathbb{G}=\mathsf{SO}_{2n}(\Bbbk)$，$n\geq 2$ 表示 $\mathbb{G}=\mathsf{SO}_{2n+1}(\Bbbk)$ 或 $\mathsf{Sp}_{2n}(\Bbbk)$）。设 $A\in \mathsf{GL}_n(q)$ 是一个不可约元素，且 $j(A)$ 在 $\mathsf{GL}_{n'}(q)$ 中正则。那么

(i) $\mathscr{O}\coloneqq \mathcal{O}^{[\mathbb{G}^F,\mathbb{G}^F]}_{j(A)}()$ 塌缩。(ii) 若 $j(A)\in \mathfrak{O}\subseteq [\mathbb{G}^F,\mathbb{G}^F]$，则 $\mathcal{O}$ 塌缩。

证明。由于 A 不可约，$\mathcal{O}^{\mathbf{GL}_n}(A^q)=\mathcal{O}^{\mathbf{GL}_n}(q)$。由引理 6.3 (i) 可知 $\mathscr{O}=\mathcal{O}^{[\mathbb{G}^F,\mathbb{G}^F]}_{j(A^q)}()$，因此我们可以考虑以下不相交子架：

$$R_1\coloneqq\left\{\begin{pmatrix} A & Y\\ 0 & \phi(A)\end{pmatrix}\in\mathscr{O}\right\},\quad R_2\coloneqq\left\{\begin{pmatrix} A^q & Y\\ 0 & \phi(A^q)\end{pmatrix}\in\mathscr{O}\right\},\quad \text{if } n'=2n;$$

$$R_1\coloneqq\left\{\begin{pmatrix} A & 0 & Y\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \phi(A)\end{pmatrix}\in\mathscr{O}\right\},\quad R_2\coloneqq\left\{\begin{pmatrix} A^q & 0 & Y\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \phi(A^q)\end{pmatrix}\in\mathscr{O}\right\},\quad \text{if } n'=2n+1.$$

于是，对于 $1\leq i,\ j\leq 2$ 有 $R_i\triangleright R_j\subseteq R_j$。

设 $r_1=j(A)\in R_1$。由于 $j(A^q)$ 是正则的，$C_{\mathbf{GL}_{n'(q)}}(r_1)$ 由半单元素构成，因此存在 $u\in[\mathbb{G}^F,\mathbb{G}^F]$ 幺幂分块上三角矩阵，其对角块为大小 n 的单位对角块；若 $n'=2n$ 且 n，则为 n；若 $n'=2n+1$，则为 1、n，使得 $r_2\coloneqq u\triangleright j(A^q)\in R_2\setminus\{j(A^q)\}$。注意，对某个非平凡的分块上三角幺幂元 v，有 $r_2=j(A^q)v$。现在，$r_1j(A^q)=j(A^q)r_1$，且 $v\notin C_{\mathbf{GL}_{n'}(q)}(r_1)$，因为后者由半单元素构成。因此，$r_1r_2\neq r_2r_1$。

若 $p=2$，则 $|A|$ 为奇数，且根据注 2.4（b），$\mathcal{O}^{[\mathbb{G}^F,\mathbb{G}^F]}_{j(A)}()$ 属于 C 型。

设 p 为奇数。则 $H\coloneqq\langle r_1,r_2\rangle=\langle r_1,v\rangle=\langle r_2,v\rangle$，其中 v 是一个 p-元元素。因此，对于 $i=1,\ 2$，$\left|\mathcal{O}^H_{r_i}\right|\geq\left|\mathcal{O}^{\langle v\rangle}_{r_i}\right|\geq 3$，故根据引理 2.3，$\mathcal{O}^{[\mathbb{G}^F,\mathbb{G}^F]}_{j(A)}()$ 属于 C 型。

由于 A 不可约，$A\neq A^q$，因此 π 在 $R_1\coprod R_2$ 上的限制是单射，从而得到 (ii)。□

引理 6.6. 设 $\mathbb{G}=\mathsf{Sp}_4(\Bbbk)$，设 $q\equiv 3$ 模4，且设 $A=\left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$。那么 $\mathcal{O}=\mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(j(A))}$ 属于 D 型，因此它会塌缩。

证明。根据假设， $\pi(j(A))$ 是一个对合。设 $s_{c,\ d} := \left(\begin{smallmatrix} c & d \\ d & -c \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{F}_q^{2\times 2}$，其中 $(c,\ d)\ \in \mathbb{F}_q^2$。直接计算可得

$$As_{c,d}A^{-1} = s_{-c,-d} = -s_{c,d}.$$

因此，若 $s_{c,d} \in$一般线性群$_2(q)$，则

$$\pi(j(A)) \triangleright \pi(j(s_{c,d})) = \pi(j(s_{c,d})); \qquad \text{also} \qquad \phi(s_{c,d}) = \frac{-1}{c^2+d^2} s_{c,-d}.$$

我们选取 $(a, b)\ \in \mathbb{F}_q^2$ 使得 $a^2 + b^2 = -1$。由于 $q \equiv 3$ 模4，我们有$ab \neq 0$。由于 $s_{a,b}$ 是半单的，且与 A具有相同的迹和行列式，因此它属于 $\mathcal{O}^{\mathbf{SL}_2}{}_{(q)}$ $_A$，所以 $\pi(j(s_{a,b}))\ \in \mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(j(A))^\circ}$

考虑互不相交的非空子架

$$R_1 := \left\{\pi\left(\begin{smallmatrix} A & X \\ 0 & -A \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(j(A))}\right\}, \qquad R_2 := \left\{\pi\left(\begin{smallmatrix} s_{a,b} & X \\ 0 & s_{a,-b} \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(j(A))}\right\}$$

$\mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(j(A))}$的。则 $R_i \triangleright R_j = R_j$对于 $i, j \in \{1, 2\}$。

我们设

$$r := \pi\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id}_2 & \mathrm{id}_2 \\ 0 & \mathrm{id}_2 \end{smallmatrix}\right) \triangleright \pi(j(A)) = \pi\left(\begin{smallmatrix} A & -2A \\ 0 & -A \end{smallmatrix}\right) \in R_1, \qquad s := \pi(j(s_{a,b})) \in R_2.$$

现在， $ab \neq 0$ 意味着$s_{a,\ b}s_{a,\ -b}$ 不是对角的，因此

$$(rs)^2 = \pi\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id}_2 & 2(\mathrm{id}_2 + s_{a,b}s_{a,-b}) \\ 0 & \mathrm{id}_2 \end{smallmatrix}\right) \neq \pi\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id}_2 & -2(\mathrm{id}_2 + s_{a,b}s_{a,-b}) \\ 0 & \mathrm{id}_2 \end{smallmatrix}\right) = (sr)^2,$$

所以 $\mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(j(A))}$ 是 D 型。 □

6.2. 定理 6.1 和 6.2 的证明。现在我们不再要求不可约性假设，并着手证明本节的主要结果。

定理 6.1 的证明。对于不可约的 A，这就是引理 6.4、6.5 和 6.6。

若 A 不可约，则可设 A 是分块对角矩阵 $\mathrm{diag}(A_1, \cdots, A_f)$，其中各个 A_i均不可约。若它们的大小全为 1，则 $j(A)$属于一个 $\mathbb{F}_q$-分裂环面，命题 4.1 适用。相反，若其中一个矩阵 A_i 的大小为 $n_i \geq 2$，则由于它不可约，$n > 2$ 和 A_i 在一般线性群$_{n_i}(q)$中是非中心的。引理 6.4、6.5 和 6.6 表明 $\mathcal{O}^{\mathbf{Sp}_{2n_i}(q)\ j(A_i)}$ 塌缩。由架映射的复合具有单射性，结论得证：

$$\left(\prod_{l=1}^{i-1}\{j(A_l)\}\right) \times \mathcal{O}^{\mathbf{Sp}_{2n_i}(q)}_{j(A_i)} \times \left(\prod_{m=i+1}^{f}\{j(A_m)\}\right) \to \mathcal{O}^{\mathbf{Sp}_{2n}(q)}_{j(A)} \to \mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(j(A))}. \quad \square$$

定理 6.2 的证明。对于 A 不可约的情形，这就是引理 6.4 和 6.5。

如果 A 不可约，则我们可以假设 A 是分块对角矩阵 $\mathrm{diag}(A_1, \cdots, A_f)$，其中 $f > 1$ 且每个 A_i 都是不可约的 $n_i \times n_i$-矩阵。

如果 $q=2$，则 A 属于特殊线性群$_n(q)$且不可约，因此架包含$\mathcal{O}^{\mathbf{SL}_n(}{}_{A}{}^{q}\hookrightarrow\mathcal{O}^{[\mathbf{SO}_{n'})(}{}_{A}{}_{j}{}^{q,}{}_{n'}{}^{q]})\mathbf{SO}()()$ 结合 [3, 定理 1.1]，可得断言，因为 $\mathrm{P}\Omega^{+}_{n'}(q)=[\mathrm{SO}_{n'}(q),\mathrm{SO}_{n'}(q)]$。

若对所有 i 均有 $n_i=1$，则 $j(A)$ 属于一个 $\mathbb{F}_q$-分裂环面，引理 4.6 即可应用。

因此，从现在起，我们假设对于某个 i，有 $q>2$ 和 $n_i\geq 2$。

若对某个 i 有 $n_i\geq 3$，则 $\mathcal{O}^{[\mathbf{SO}_{2n_i}(}{}_{j}{}_{A_i}{}^{q,}{}_{2n_i}{}^{q]})\mathbf{SO}()()$ 由引理 6.4 和 6.5 塌缩。由于架态射的复合是单射，断言随即成立

$$\left(\prod_{l=1}^{i-1}\{j(A_l)\}\right)\times\mathcal{O}^{[\mathbf{SO}_{2n_i}(q),\mathbf{SO}_{2n_i}(q)]}_{j(A_i)}\times\left(\prod_{l=i+1}^{f}\{j(A_l)\}\right)\to\mathcal{O}^{[\mathbf{SO}_{n'}(q),\mathbf{SO}_{n'}(q)]}_{j(A)}$$
$$\to\mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(j(A))}.$$

从现在起，我们假设 $n_1=2$，且对所有 i 均有 $n_i\leq 2$。

若对某个 i 有 $n_i=1$，不妨设 $i=2$，则对某个 $c\in\mathbb{F}_q^{\times}$ 有 $A_2=(c)$。由于A_1 不可约，它是正则的，且在 $\mathbb{F}_q$ 中没有特征值。因此，分块$\tilde{}$对角矩阵 $A_1=\mathrm{diag}(A_1,c)$ 在 $\overline{\mathbb{F}_q}$ 中有 3 个不同的特征值。矩阵 $\left(\begin{smallmatrix}A_1&v\\0&c\end{smallmatrix}\right)$、$v\in\mathbb{F}_q^2$ 具有相同的特征值，因此它们属于 $\mathcal{O}^{\mathbf{GL}_3}{}_{(q)}{}_{\tilde{A}_1}=\mathcal{O}^{\mathbf{SL}_3(q)}{}_{\tilde{A}_1}$，参见注 2.1。考虑映射 $j:$ 一般线性群$_3(q)\to\mathrm{SO}_6(q)$。我们断言 $j\left(\begin{smallmatrix}A_1^{-1}&0\\0&c\end{smallmatrix}\right)\in\mathscr{O}:=\mathcal{O}^{[\mathbf{SO}_6(}{}_{j}{}_{\tilde{A}_1}{}^{q,}{}_{6}{}^{q]})\mathbf{SO}()()$。

事实上，在 $[\mathrm{SO}_6(q)$、$\mathrm{SO}_6(q)]$ 中，对角矩阵环面$\tilde{}$的正规化子里存在一个适当 $w\in W$ 的代表元 g，满足 $g\triangleright j(A_1)=j\left(\begin{smallmatrix}{}^tA_1^{-1}&0\\0&c\end{smallmatrix}\right)$。此外，${}^tA_1^{-1}\in\mathcal{O}^{\mathbf{SL}_3}{}_{(q)}{}_{A^{-1}}$，因此 $j\left(\begin{smallmatrix}{}^tA_1^{-1}&0\\0&c\end{smallmatrix}\right)\in\mathscr{O}$。于是

$$R_1=\left\{j\left(\begin{smallmatrix}A_1&v\\0&c\end{smallmatrix}\right):v\in\mathbb{F}_q^2\right\},\qquad R_2=\left\{j\left(\begin{smallmatrix}A_1^{-1}&v\\0&c\end{smallmatrix}\right):v\in\mathbb{F}_q^2\right\}$$

它们是 $\mathscr{O}$ 的子架，由于 A_1 不可约，因此彼此不相交。显然，$R_i\triangleright R_j\subset R_j$、$1\leq i$、$j\leq 2$。取 $0\neq v\in\mathbb{F}_q^2$ 并令：

$$r:=j\left(\begin{smallmatrix}A_1&0\\0&c\end{smallmatrix}\right)\in R_1;\qquad s:=j\left(\begin{smallmatrix}A_1^{-1}&v\\0&c\end{smallmatrix}\right)\in R_2.$$

通过直接计算，$rs=sr$ 推出 c 是 A_1 的一个特征值，这与假设矛盾。类似地，$(rs)^2=(sr)^2$ 当且仅当 $c^2=-1$，这仅在 q 为偶数或 $q\equiv 1$ 模4时才可能发生。如果 q 为偶数，那么根据注 2.4（b），$\mathscr{O}$ 是 C 型。如果 $q\equiv 3$ 模4或 $q\equiv 1$ 模4且 $c^2\neq -1$，那么 $\mathscr{O}$ 是 D 型。

假设 $q\equiv 1$ 模4 且 $c^2=-1$。我们断言：

$$3=|\{s,rsr^{-1},r^2sr^{-2}\}|\leq\left|\mathcal{O}^{\langle r,s\rangle}_s\right|,\tag{6.2}$$

$$3=|\{r,srs^{-1},rsrs^{-1}r^{-1}\}|\leq\left|\mathcal{O}^{\langle r,s\rangle}_r\right|\tag{6.3}$$

通过直接计算，$r^2sr^{-2} = s$ 当且仅当 $A_1^2v = -v = c^2v$，也就是说，因此 c或 $-c$ 是 A_1的特征值，这与它们都属于 $\mathbb{F}_q$矛盾；于是得到 (6.2)。类似地，$rsrs^{-1}r^{-1} = srs^{-1}$ 当且仅当 $(A_1 - c)^2v = 0$，因此 c 是 A_1的特征值，矛盾。现在，$srs^{-1} \neq r$ 推出 $rsrs^{-1}r^{-1} \neq r$，于是得到 (6.3)。因此，根据引理 2.3，$\mathcal{O}^{[\mathbf{SO}_3(\ \ q,\ \ 3\ q\ ])\mathbf{SO}()()}_{j\ \tilde{A}_1}$ 是 C 型。由于该合成

$$(R_1 \coprod R_2) \times \left(\prod_{l=3}^{f}\{j(A_l)\}\right) \to \mathcal{O}^{[\mathbf{SO}_3(q),\mathbf{SO}_3(q)]}_{j(\tilde{A}_1)} \times \left(\prod_{l=3}^{f}\{j(A_l)\}\right)$$
$$\to \mathcal{O}^{[\mathbf{SO}_{n'}(q),\mathbf{SO}_{n'}(q)]}_{j(A)} \to \mathcal{O} = \mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(j(A))}$$

是 rack 的单射态射，因此此情形下的结论得证。

剩下的情形是 $n_i = 2$ 对所有 i。不妨假设 $f = 2$，于是 $\mathbb{G} =$SO$_8(q)$，且 A_1 和 A_2 是其特征多项式 $p_{A_1} = X^2 + aX + b$ 和 $p_{A_2} = X^2 + cX + d$的伴随矩阵，因此

$$A_1 \coloneqq \left(\begin{smallmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{smallmatrix}\right), \qquad A_2 \coloneqq \left(\begin{smallmatrix} 0 & -d \\ 1 & -c \end{smallmatrix}\right), \qquad A \coloneqq \left(\begin{smallmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{smallmatrix}\right).$$

与上一步一样，存在一个 [SO$_8(q)$, SO$_8(q)$] 中的元素，将 $j(A)$ 映射到 $j\left(\begin{smallmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2 \end{smallmatrix}\right)$。我们考虑由下式给出的 $\mathcal{O}^{[\mathbf{SO}_8(\ \ q,\ \ 8\ q\ ])\mathbf{SO}()()}_{j\ A}$ 的子架

$$R_1 \coloneqq \left\{ j\left(\begin{smallmatrix} A_1 & M \\ 0 & A_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{O}^{[\mathbf{SO}_8(q),\mathbf{SO}_8(q)]}_{j(A)} \right\},$$
$$R_2 \coloneqq \left\{ j\left(\begin{smallmatrix} A_1^{-1} & M \\ 0 & A_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{O}^{[\mathbf{SO}_8(q),\mathbf{SO}_8(q)]}_{j(A)} \right\}$$

由于 A_1不可约，它们互不相交。显然，$R_i \triangleright R_j \subset R_j$、$1 \leq i$、$j \leq 2$。令 $u \coloneqq \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id}_2 & \mathrm{id}0 \\ & {}^2\mathrm{id}_2 \end{smallmatrix}\right) \in$ 特殊线性群$_4(q)$，并考虑

$$r \coloneqq j(u) \triangleright j(A) = j\left(\begin{smallmatrix} A_1 & A_2 - A_1 \\ 0 & A_2 \end{smallmatrix}\right) \in R_1, \qquad s \coloneqq j\left(\begin{smallmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2 \end{smallmatrix}\right) \in R_2.$$

在一般线性群$_4(q)$中进行直接计算可得，$(rs)^2 = (sr)^2$ 当且仅当

$$(A_2 - A_1)A_2(\mathrm{id}_2 + A_2^2) = A_1^{-1}(A_2 - A_1)(\mathrm{id}_2 + A_2^2). \tag{6.4}$$

现在，$\det(\mathrm{id}_2 + A_2^2) = 0$ 意味着存在 $0 \neq v \in \mathbb{F}_q^2$ 使得 $A_2^2v = -v$。由 A_2的不可约性，我们得到 $p_{A_2} = X^2 + 1$，即 $A_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$。

假设 $\det(\mathrm{id}_2 + A_2^2) \neq 0$。则 (6.4) 等价于 $A_2 - A_1 = A_1^{-1} - A_2^{-1}$，而这又等价于 $A_1 = A_2$。因此，若 $A_1 \neq A_2$，或许交换 A_1 和 A_2的角色后，我们可以确保 (6.4) 不成立，于是 $(rs)^2 \neq (sr)^2$, , 所以 $\mathcal{O}^{\mathbf{SL}_4(q)\ A}$ 是 D 型。若 $A_1 = A_2 \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$，则交换 A_1 和 A_1^{-1}，并按上述方法论证。在所有情况下，π 到$R_1 \coprod R_2$ 的限制都是单射，因此 $\mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(j(A))}$ 是 D 型。

最后，若 $A_1 = A_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$，则 $A \in$ 特殊线性群$_4(q)$，并且根据引理 3.15、3.16、3.17]，，$\mathcal{O}^{\mathbf{PSL}_4(q)}{}_{\pi^{\mathbf{SL}_4(q)}(A)}$ 是 D 型，且 $\mathcal{O}_{\pi}^{\pi(K)}{}_{A(j())}$ 将其映射到该类型。因此 $\mathcal{O}_{\pi}^{\pi(K)}{}_{A(j())}$ 也属于 D 型。□

7. The symplectic groups

在本节中，$\mathbb{G} = \mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk)$，$n \geq 2$。回想一下，$e \neq x \in \boldsymbol{G}$ 是半单的，$\mathbb{G}^F \ni \mathbf{x} \mapsto x$，$\mathfrak{O} = \mathcal{O}_{\mathbf{x}}^{\mathbb{G}^F}$ 且 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_x^{\boldsymbol{G}}$。本节的主要结果如下：

定理 7.1. 设 $\mathbf{x} \notin Z(\mathbb{G})$ 为半单的。那么，除非 $n = 2$，且 $\mathbf{x}$ 是一个对合，否则 $\mathcal{O}$ 会塌缩。

在 K 中表示的共轭类已在第 6 节讨论。我们在小节 7.1 中讨论非 Coxeter 的尖点类，随后在小节 7.2 中讨论 Coxeter 类。定理 7.1 在小节 7.3 中证明。

7.1. 尖点类。这里讨论尖点但非 Coxeter 的半单类。下文不再特别说明，均使用如下事实：根据命题 3.12，尖点类不会与标准Levi子群相交。我们先给出以下观察：在 $\mathrm{GL}_{2n}(q)$ 中共轭的两个半单辛矩阵，在 $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ 中也共轭。

引理7.2. 在以下任一情形中，$\mathfrak{O}$ 都不是尖点的：(a) $\mathbf{x}$ 的某个特征值属于 $\mathbb{F}_q$。(b) $|x| \in \{2, 3, 4\}$。

证明。(a)。事实上，若 $\lambda \in \mathbb{F}_q$ 是 $\mathbf{x}$ 的一个特征值，则 λ^{-1}也必然是特征值，因此$\mathfrak{O}$ 包含一个形如 $\begin{pmatrix} A' & B' & \\ C' & D' & \\ & & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ 的元素，它属于一个同构于 $\mathrm{Sp}^{2(n-1)}(\Bbbk) \times \Bbbk^\times$ 的 Levi 子群。因此 $\mathfrak{O}$ 不是尖点的。

(b)。由 (a) 可知，我们可以假设 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbb{F}_q$中没有特征值，因此排除 ± 1 。若 $|\mathbf{x}| \in \{2, 3, 4\}$，则 $\mathbf{x}$ 至多有两个不同的特征值，即 1 的两个本原根，所以根据命题 3.13，它不是尖点的。□

7.1.1. Weyl群中的尖点类。众所周知，Weyl群是 $W = (\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \mathbb{S}_n$；设 $(e_j)_{j \in \mathbb{I}_n}$ 为 $(\mathbb{Z}/2)^n$的典范基。我们按照 [11] 中的方式，将W 视为 $\mathbb{S}_{2n}$ 的一个子群：

$$W \simeq \{\varsigma \in \mathbb{S}_{2n} : \varsigma(2n+1-j) = 2n+1-\varsigma(j), j \in \mathbb{I}_n\},$$

$$\mathbb{S}_n \ni \sigma \mapsto \sigma', \qquad \sigma'(j) = \begin{cases} \sigma(j), & \text{if } j \in \mathbb{I}_n, \\ 2n+1-\varsigma(2n+1-j), & \text{if } j \in \mathbb{I}_{n+1,2n}; \end{cases}$$

$$e_j \mapsto \tau_j = (j \quad 2n+1-j), \qquad j \in \mathbb{I}_n.$$

给定 $h \leq k \in \mathbb{I}_n$，我们考虑由下式定义的 $\mathbb{S}_{2n}$ 中的 $2(k-h+1)$-循环

(7.1) 显然，$\mathbf{c}_{h,\ k} = (h \quad h+1 \ \ldots \ k \quad 2n+1-h \quad 2n-h \ \ldots \ 2n+1-k)$。

显然，$\mathtt{c}_{h,\ k} \in W$。现在令 $\boldsymbol{\lambda} = (\mathtt{d}_1,\ \ldots,\ \mathtt{d}_t)$为 n的一个分拆，记作$\boldsymbol{\lambda} \vdash n$，其中$\mathtt{d}_1 \geq \cdots \geq \mathtt{d}_t$。设

$$\mathtt{c}_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathtt{c}_{1,\mathtt{d}_1}\mathtt{c}_{\mathtt{d}_1+1,\mathtt{d}_1+\mathtt{d}_2}\cdots\mathtt{c}_{\mathtt{d}_1+\cdots+\mathtt{d}_{t-1}+1,n} \in W. \tag{7.2}$$

根据上述识别，我们可以将命题 3.4.6]重新表述为：

命题 7.3. 这类 $\mathtt{c}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 的共轭类是尖点的。族 $\mathtt{c}_{\boldsymbol{\lambda}}$, $\boldsymbol{\lambda} \vdash n$ 是 W 的尖点共轭类的一组完备代表元。□

例如，若 $\boldsymbol{\lambda} = (n)$，则 $\mathtt{c}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 是一个考克斯特元素。

7.1.2. 尖点但非考克斯特类。设 $\boldsymbol{\lambda} = (\mathtt{d}_1, \ldots, \mathtt{d}_t) \vdash n$，其中 $\mathtt{d}_1 \geq \cdots \geq \mathtt{d}_t$。设 $\mathbb{G}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 为以下单射群态射的像

$$\mathbf{Sp}_{2\mathtt{d}_1}(\Bbbk) \times \mathbf{Sp}_{2\mathtt{d}_2}(\Bbbk) \times \cdots \times \mathbf{Sp}_{2\mathtt{d}_t}(\Bbbk) \longrightarrow \mathbf{Sp}_{2n}(\Bbbk),$$

$$\left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} A_t & B_t \\ C_t & D_t \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} A_1 & & & & & B_1 \\ & \ddots & & & & \\ & & A_t & B_t & & \\ & & C_t & D_t & & \\ & & & & \ddots & \\ C_1 & & & & & D_1 \end{pmatrix}.$$

断言。$\mathtt{c}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 有一个分解 Γ，使得 $\mathbb{G}_\Gamma = \mathbb{G}_{\boldsymbol{\lambda}}$，参见 (3.9)。

证明。首先，$w_j = \mathtt{c}_{\mathtt{d}_1+\mathtt{d}_2+\cdots+\mathtt{d}_{j-1}+1,\ \mathtt{d}_1+\mathtt{d}_2+\cdots+\mathtt{d}_j}$ 是 $\mathbb{G}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 的因子 $\mathrm{Sp}^{2\mathtt{d}_j}(\Bbbk)$ 的一个考克斯特元素。经过适当的识别，w_1、.....、w_t 的分解 Γ_1、.....、Γ_t 的并集是 $\mathtt{c}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 的一个分解。这就说明了该断言。□

引理 7.4。若 $\mathbb{G}^F$ 中的共轭类 $\mathfrak{O}$ 是尖点的但不是考克斯特元素，则它属于 C 型，因此会塌缩。

证明。根据命题 3.12，存在分拆 $\boldsymbol{\lambda} \neq (n)$，使得 $\mathfrak{O}$ 与 $\mathbb{G}^F_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathrm{Sp}^{2\mathtt{d}_1}(q) \times \mathrm{Sp}^{2\mathtt{d}_2}(q) \times \cdots \times \mathrm{Sp}^{2\mathtt{d}_t}(q)$ 相交。令 $\mathtt{x} = (\mathtt{x}_1,\ .....,\ \mathtt{x}_t) \in \mathbb{G}^F_{\boldsymbol{\lambda}} \cap \mathfrak{O}$，其中对所有 j，均有 $\mathtt{x}_j \in \mathrm{Sp}^{2\mathtt{d}_j}(q)$，于是

$$\mathcal{O}_{\mathtt{x}}^{\mathbb{G}^F_{\boldsymbol{\lambda}}} = \mathcal{O}_{\mathtt{x}_1}^{\mathbf{Sp}_{2\mathtt{d}_1}(q)} \times \mathcal{O}_{\mathtt{x}_2}^{\mathbf{Sp}_{2\mathtt{d}_2}(q)} \times \cdots \times \mathcal{O}_{\mathtt{x}_t}^{\mathbf{Sp}_{2\mathtt{d}_t}(q)} \leq \mathfrak{O}.$$

我们断言，对于所有 $j \in \mathbb{I}_t$，$\mathtt{x}_j \notin Z(\mathrm{Sp}^{2\mathtt{d}_j}(q))$。事实上，若对某个 j 有 $\mathtt{x}_j \in Z(\mathrm{Sp}^{2\mathtt{d}_j}(q))$，则 $\mathtt{x}$ 属于环面 $\mathbb{T}_{\mathtt{c}^j_{\boldsymbol{\lambda}}}$，参见 (3.11)，其中 $\mathtt{c}^j_{\boldsymbol{\lambda}} \in W$ 的定义与 (7.2) 中的 $\mathtt{c}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 相同，但省略了 $\mathtt{c}_{\mathtt{d}_1+\cdots+\mathtt{d}_{j-1}+1,\ \mathtt{d}_1+\cdots+\mathtt{d}_j}$。这与 $\mathtt{c}^j_{\boldsymbol{\lambda}}$ 不是尖点的相矛盾，从而证明了该断言。于是，由

引理 2.9，根据备注2.10 和引理 3.14，可得结论。事实上，$\mathtt{x}_j \neq \mathtt{x}_j^q$，否则 由引理 7.2 □ 可知 x 属于某个非尖点环面

引理 7.5. 若 $\mathfrak{O}$ 在 $\mathbb{G}^F$ 中的共轭类是尖点的但不是 Coxeter，则 $\mathcal{O}$ 在 $\boldsymbol{G}$ 中的共轭类为 C 型，因此它塌缩。

证明. 令 $\pi : \mathrm{Sp}_{2n}(q) \to \mathrm{PSp}_{2n}(q)$ 为典范投影。我们可以假设 q 是奇数，因此 $\ker \pi = \{\pm \mathrm{id}\}$。沿用引理 7.4 的记号。

断言 1. 该引理对 $t > 2$ 成立。

事实上，引理 2.9 给出了 $\mathfrak{O}$ 的一个 C 型子架，其形式为

$$Y = \left(\{\mathtt{x}_1\} \times \mathcal{O}_{\mathtt{x}_2}^{\mathbf{Sp}_{2\mathtt{d}_2}(q)} \times \{\mathtt{x}_3\}\right) \coprod \left(\{\mathtt{x}_1^q\} \times \mathcal{O}_{\mathtt{x}_2}^{\mathbf{Sp}_{2\mathtt{d}_2}(q)} \times \{\mathtt{x}_3\}\right)$$

并且显然，π 到 Y 的限制是单射。

断言 2. 引理对 $t = 2$ 成立。

若 $\mathtt{x}_1 \neq -\mathtt{x}_1^q$，则 π 在 C 型子架上的限制

$$Y = \left(\{\mathtt{x}_1\} \times \mathcal{O}_{\mathtt{x}_2}^{\mathbf{Sp}_{2\mathtt{d}_2}(q)}\right) \coprod \left(\{\mathtt{x}_1^q\} \times \mathcal{O}_{\mathtt{x}_2}^{\mathbf{Sp}_{2\mathtt{d}_2}(q)}\right)$$

是单射；类似地，若 $\mathtt{x}_2 \neq -\mathtt{x}_2^q$，也成立。因此我们可以假设 $\mathtt{x}_1 = -\mathtt{x}_1^q$ 且 $\mathtt{x}_2 = -\mathtt{x}_2^q$。现在 $\mathtt{x}_1$ 属于 $\mathrm{Sp}_{2\mathtt{d}_1}(q)$ 中的 Coxeter 环面 $\mathbb{T}_1^F$。根据 [22,命题 25.3] 和 [16, §3.4.3], ，我们有

$$|\mathbb{T}_1^F| = q^{\mathtt{d}_1} + 1.$$

因此，若 $q^{\mathtt{d}_1} \equiv 1 \mod 4$，则 $|\mathtt{x}_1|$ 整除 $(2(q-1)q^{\mathtt{d}_1} + 1)$

$= \begin{cases} 2 \text{ 整除 } 4 & \text{若 } q^{\mathtt{d}_1} \equiv 3 \mod 4. \\ \text{由对称性，我们可以假设 } \mathtt{x}_2 \text{ 也满足同样的条件。因此 } |\mathtt{x}| \text{ 整除 } 4\text{；这与引理 7.2 矛盾。□} \end{cases}$

7.2. $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$中的Coxeter共轭类。设 $\mathtt{x} \in T' = \mathbb{T}_w^F$ 是一个考克斯特元素，并设 $\mathfrak{O} = \mathcal{O}_{\mathtt{x}}^{\mathbb{G}^F}$。因此，x 是正则的，且其阶整除 $q^n + 1$，所以 $\mathtt{x}^{q^n} = \mathtt{x}^{-1}$。仿照 [5, §2.5] 中的论证可知，$\mathfrak{O} \cap T' = \{\mathtt{x}^{\pm q^j},\ j \in \mathbb{I}_{0,\ n-1}\}$，且 w 的作用将 x 变为 $\mathtt{x}^q$。若 $\xi \in \overline{\mathbb{F}_q}$ 是 x 的一个特征值，则 x 的所有其他特征值均形如 $\{\xi^{q^j},\ j \in \mathbb{I}_{0,2n-1}\} = \{\xi^{\pm q^j},\ j \in \mathbb{I}_{0,n-1}\}$，其中 $\xi^{q^n} = \xi^{-1}$；由命题 3.13 可知，它们两两不同。

引理 7.6. 假设 q 为奇数。若 x 是一个考克斯特元素，则 $-\mathtt{x} \notin \mathfrak{O}$。

证明。若 $-\mathtt{x} \in \mathfrak{O}$，则采用上述记号，$-\xi$ 是 x 的一个特征值，因此$-\xi = \xi^{q^j}$ 或 $-\xi = \xi^{-q^j}$，其中 $j < n$。在第一种情况下，$\xi^{q^{2j}} = (-\xi)^{q^j} = \xi$；在第二种情况下，$\xi^{q^{2j}} = (-\xi^{-1})^{q^j} = -(\xi^{q^j})^{-1} = \xi$，两种情况下均有 $2j < 2n$，这与 x 的正则性矛盾。□

引理 7.7。设 x 是 $\mathbb{G}^F$ 中的一个考克斯特元素。那么 $\mathcal{O}$ 是 C 型。

证明。设 H 是 $\mathbb{G}^F$ 的一个子群，且与 $\mathrm{SL}_2(q^n)$ 同构；根据[21, II Satz 9. 24]，这样的子群存在。由 (5.1)，$T' \leq H$ 的任意非分裂环面阶为 q^n+1，因此它是 $\mathbb{G}^F$, [16, 3.4.3] 中的 Coxeter 环面。所以

$$|\mathfrak{O} \cap T'| = |\{\mathtt{x}^{\pm q^j},\ j \in \mathbb{I}_{0,n-1}\}| = 2n, \qquad |\mathcal{O}_{\mathtt{x}}^H \cap T'| \leq 2,$$

因此，交集 $\mathfrak{O} \cap H$ 不是单个 H-共轭类。假设 $\mathtt{x} \in H$。由于 $H \simeq \mathrm{SL}_2(q^n)$ 且 $n \geq 2$，群 $H/Z(H)$ 是单群，因此非中心正规子群 $\langle \mathcal{O}_{\mathtt{x}}^H \rangle$ 与 H 重合。此外，$|\mathcal{O}_{\mathtt{x}}^H| = q^n(q^n-1) > 4$，因此根据引理 2.8，$\mathfrak{O}$ 为 C 型。根据引理 7.6，投影 $\pi\colon \mathbb{G}^F \to \boldsymbol{G}$ 到 $\mathfrak{O}$ 的限制是单射，因此 $\pi(\mathfrak{O}) = \mathcal{O}$ 也为 C 型。□

7.3. 一般情形。设 $\mathbb{L}$ 是 $\mathbb{G}$ 的一个分裂的 F-稳定 Levi 子群。那么，存在 $f > 0$、$m \geq 0$ 和 n_i，使得对于满足 $n = e + \sum_{i=1}^{f} n_i$ 的 $i \in \mathbb{I}_f$，$\mathbb{L}$ 与单射群态射的像同构

$$\widetilde{j}\colon \mathbf{GL}_{n_1}(\Bbbk) \times \cdots \times \mathbf{GL}_{n_f}(\Bbbk) \times \mathbf{Sp}_{2e}(\Bbbk) \to \mathbf{Sp}_{2n}(\Bbbk) \tag{7.3}$$

$$(A_1, \cdots, A_f, A) \mapsto \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_r, A, \phi(A_f), \dots, \phi(A_1)) \tag{7.4}$$

定理 7.1 的证明。若 $n = 2$、$q = 3$ 且 x 是非中心对合，则由引理 4.4，$\mathcal{O}$ 是 kthulhu。假设当 $n = 2$ 且 x 是非中心对合时，$q \notin \{5, 7\}$。若 x 是尖点的但不是 Coxeter，则我们应用引理 7.5；若 x 是 Coxeter，则断言由引理 7.7 得出。若 x 不是尖点的，则由命题 3.12，我们可以假设对于真标准 Levi 子群 $\mathbb{L}$ of $\mathbb{G}$，$\mathtt{x} \in \mathbb{L}^{F\widetilde{\ }}$。令 j 如 (7.3) 所示，并令 $\widetilde{\mathtt{x}} = j(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_f, \mathtt{y})$。取 n_i，使 $i \in \mathbb{I}_f$ 和 e 为最小值，并在必要时增大 f，我们可以假设每个 $\mathtt{x}_i$ 在一般线性群 $_{n_i}(q)$ 中不可约，且 y 在 $\mathrm{Sp}_{2e}(q)$ 中是尖点的。在这些假设下，$\mathtt{x}_i \in Z($一般线性群 $_{n_i}(q))$ 当且仅当 $n_i = 1$。若 $e = 0$，则由定理 6.1 得出该结论。若 $e \geq 2$，则我们考虑架嵌入

$$\{\mathtt{x}_1\} \times \cdots \times \{\mathtt{x}_f\} \times \mathcal{O}_{\mathtt{y}}^{\mathbf{Sp}_{2e}(q)} \to \mathcal{O}_{\mathtt{x}}^{\mathbf{Sp}_{2n}(q)} \to \mathcal{O}_x^{\mathbf{PSp}_{2n}(q)} \tag{7.5}$$

并调用引理 7.5 或引理 7.7。

从现在起，假设 $e = 1$，即 y 在 $\mathrm{Sp}_2(q) \simeq \mathrm{SL}_2(q)$ 中不可约。若存在 and n_i 使得 $n_i > 1$，则我们考虑 rack 嵌入

$$\{\mathtt{x}_1\} \times \cdots \times \mathcal{O}_{\mathtt{x}_i}^{\mathbf{Sp}_{2n_i}(q)} \times \cdots \times \{\mathtt{x}_f\} \times \{\mathtt{y}\} \to \mathcal{O}_{\mathtt{x}}^{\mathbf{Sp}_{2n}(q)} \to \mathcal{O}_x^{\mathbf{PSp}_{2n}(q)} \tag{7.6}$$

并调用定理 6.1。

还剩下这样的情况：对每个 i，都有 $n_i = 1$。我们假设 $f = 1$，因为如果 $f > 1$，就可以使用 rack 注入

$$\{\mathtt{x}_1\} \times \cdots \times \{\mathtt{x}_{f-1}\} \times \mathcal{O}_{\widetilde{j}(\mathtt{x}_f, \mathtt{y})}^{\mathbf{Sp}_{2(n_f+1)}(q)} \to \mathcal{O}_{\mathtt{x}}^{\mathbf{Sp}_{2n}(q)} \to \mathcal{O}_x^{\mathbf{PSp}_{2n}(q)}.$$

由于 $\mathtt{y}$ 不可约，它属于一个非分裂极大环面，因此其阶整除$q+1$，从而 $\mathtt{y}^q = \mathtt{y}^{-1} \in \mathcal{O}^{\mathbf{SL}_2}{}_{(q)\mathtt{y}}$。此外，若 $p_{\mathtt{y}} = X^2 - zX + 1$，则 $z \neq \pm 2$。我们可以假设 $\mathtt{y} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & z \end{smallmatrix}\right)$，因此 $\mathtt{y}^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} z & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$，且 $\mathtt{x} = \mathrm{diag}(\lambda, \mathtt{y}\ \lambda^{-1})$。我们考虑 $\mathfrak{O} = \mathcal{O}^{\mathbf{Sp}_4}{}_{(q)\mathtt{x}}$ 的以下子架：

$$R \coloneqq \left\{ \mathtt{x}' = \begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & \mathtt{y} & * \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} : \mathtt{x}' \in \mathfrak{O} \right\}, \quad S \coloneqq \left\{ \mathtt{x}' = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & * & * \\ 0 & \mathtt{y}^{-1} & * \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} : \mathtt{x}' \in \mathfrak{O} \right\}.$$

根据构造，$R \triangleright S \subset S$ 和 $S \triangleright R \subset R$。注意，$R \cap S = \emptyset$；否则 $\mathtt{y} = \mathtt{y}^{-1}$ 且 $p = 2$，但在这种情况下，$\mathtt{y}$ 就不是半单的。令 $M \in \mathrm{SL}_2(q)$ 满足 $M \triangleright \mathtt{y} = \mathtt{y}^{-1}$，并令

$$r \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \triangleright \mathtt{x} = \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & z & z-\lambda^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in R,$$

$$s \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & M & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleright \mathtt{x} = \mathrm{diag}(\lambda^{-1}, \mathtt{y}^{-1}, \lambda) \in S.$$

直接计算表明，只有当 $\lambda^2 = 1$ 和 $z = \pm 2$时，$rs = sr$ 才成立；这是一个舍弃的情形。取 $H \coloneqq \langle r, s \rangle$，可知 $\mathcal{O}_r^H \cap \mathcal{O}_s^H \subset R \cap S = \emptyset$。因此，若 $p = 2$，则 $|\mathtt{x}|$ 为奇数，所以根据注 2.4，$\mathcal{O}^{\mathbf{Sp}_4}{}_{(q)\mathtt{x}}$ 属于 C 型。若 p为奇数，则 $(rs)^2 \neq (sr)^2$，因为根据构造，rs 和 sr 是上三角幺幂矩阵，因此 $\mathcal{O}^{\mathbf{Sp}_4}{}_{(q)\mathtt{x}}$ 属于 D 型。我们断言，π到 $R \coprod S$的限制是单射：事实上，单射性只有在$\lambda^2 + 1 = 0$ 和 $z = 0$ 时才可能失效，但在这种情况下，$\lambda \in \mathbb{F}_q$ 将是$p_{\mathtt{y}}$ 的一个根，而$p_{\mathtt{y}}$ 不可约，矛盾。□

References

[1] N. Andruskiewitsch, G. Carnovale, G. A. Garc´ıa. *Finite-dimensional pointed Hopf algebras over finite simple groups of Lie type I. Unipotent classes in* 特殊线性群$_n(q)$. J. Algebra, 442, 36–65 (2015).

[2] ——— *Finite-dimensional pointed Hopf algebras over finite simple groups of Lie type II. Unipotent classes in symplectic groups*,《当代数学通讯》18, No. 4, Article ID 1550053, 35 pp. (2016).

[3] ——— *Finite-dimensional pointed Hopf algebras over finite simple groups of Lie type III. Semisimple classes in* 特殊线性群$_n(q)$, Rev.Mat. Iberoam. 33, 995–1024, (2017).

[4] ——— *Finite-dimensional pointed Hopf algebras over finite simple groups of Lie type IV. Unipotent classes in Chevalley and Steinberg groups*, Algebr. Represent. Theory 23, 621–655(2020).

[5] ——— *Finite-dimensional pointed Hopf algebras over finite simple groups of Lie type V. Mixed classes in Chevalley and Steinberg groups*,《数学手稿》166, 605–647 (2021).[6] N. Andruskiewitsch, F. Fantino, G. A. Garc´ıa, L. Vendramin. *On Nichols algebrasassociated to simple racks*, Contemp. Math. 537 (2011), 31–56.

[7] N. Andruskiewitsch, F. Fantino, M. Gra˜na, L. Vendramin.
Finite-dimensionalpointed Hopf algebras with alternating groups are trivial, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 190 (2011), 225–245.
[8] ———. *Pointed Hopf algebras over the sporadic simple groups*. J. Algebra 325 (2011), 305–320.[9] N. Andruskiewitsch, M. Gra˜na.
From racks to pointed Hopf algebras, Adv. Math. 178 (2003), 177–243.[10] S. Beltr´an Cubillos. *Álgebras de Nichols sobre grupos diedrales y pecios kthulhu en grupos esporádicos*. Tesis doctoral, Universidad Nacional de C´ordoba (2020).[11] S. Billey, V. Lakshmibai. *Singular loci of Schubert varieties*. Progr. Math. 182. Birkh¨auser Boston, Inc., 波士顿, MA, 2000. xii+251[12] G. Carnovale, M. Costantini. *Finite-dimensional pointed Hopf algebras over finite simple groups of Lie type VI. Suzuki and Ree groups*, J. Pure Appl. Alg. 225, 106568 (2021).[13] G. Carnovale, A. Garc´ıa Iglesias,
θ-semisimple twisted conjugacy classes of type Din PSL(n,q), Journal of Lie Theory 26(1), 193–218 (2016).[14] F. Fantino.
Conjugacy classes of p-cycles of type D in alternating groups. Commun. Algebra 42 4426–4434 (2014).[15] F. Fantino, L. Vendramin.
On twisted conjugacy classes of type D in sporadic simplegroups. Contemp. Math. 585 (2013) 247–259.[16] M. Geck, G. Pfeiffer.
Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke alge-bras, Oxford: Clarendon Press (2000).[17] R. Guralnick, T. Penttila, C. Praeger, J. Saxl.
Linear groups with orders havingcertain large prime divisors, Proc. London Math. Soc. 78 (1999), 167–214.[18] I. Heckenberger and L. Vendramin.
The classification of Nichols algebras with finiteroot system of rank two, J. Europ. Math. Soc. 19 (2017), 1977–2017.[19] G. Hiss.
Finite groups of Lie type and their representations, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 387 (2011), 1–40.[20] J. E. Humphreys.
Conjugacy classes in semisimple algebraic groups, Amer. Math. Soc., 普罗维登斯, RI, 1995.[21]B. Huppert. *Endliche Gruppen I*. Grundlehren der mathematischen Wissen- schaften. 134. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag (1979).[22] G. Malle and D. Testerman.
Linear Algebraic Groups and Finite Groups of LieType, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 133 (2011).[23] H. Meyn.
Factorization of the Cyclotomic Polynomial $x^{2^n}+1$ over Finite Fields, 有限域及其应用 2, 439–442 (1996).[24] S. Pasiencier, H. -C. Wang.
Commutators in a semi-simple Lie group, Proc. Amer. Math. Soc. 13, 907–913 (1962).[25] M. W. Short.
The Primitive Soluble Permutation Groups of Degree Less than 256, Lecture Notes in Mathematics 1519, Springer (1992).[26] T. A.Springer.
Some arithmetical results on semi-simple Lie algebras., Publications Math´ematiques de l'Institut des Hautes Scientifiques 30, 115–141 (1966).[27] R. Steinberg. *Regular elements of semisimple algebraic groups*, Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math. 25, 49?-80 (1965).

N. A.: FaMAF-Universidad Nacional de Córdoba, CIEM (CONICET), Medina Allende s/n, Ciudad Universitaria, 5000 Córdoba, Argentina.*Email address*: nicolas.andruskiewitsch@unc.edu.ar

G. C.: Dipartimento di Matematica Tullio Levi-Civita, Università degli Studi di Padova, via Trieste 63, 3512,1 Padova, Italia.*Email address*: carnoval@math.unipd.it, +39-049-8271354

G. A. G.: Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata. CMaLP-CIC-CONICET. Calle 47 y Calle 115, 1900 La Plata, Argentina.*Email address*: ggarcia@mate.unlp.edu.ar