arXiv:2301.03365v1 [math.FA] 1 Jan 2023

局部化下有界近似 Schauder 框架是有限个近似 Riesz 序列的并

K. MAHESH KRISHNA
博士后研究员
统计与数学部门
印度统计研究所班加罗尔中心
卡纳塔克邦 560 059 ，印度
邮箱：kmaheshak@gmail.com

日期：2023年1月10日

摘要：基于 Marcus、Spielman 和 Srivastava 对 Feichtinger猜想的证明 *[*Ann. of Math. (2)*, 2015]* 以及 Gr¨ochenig 的局部化版本 *[*Adv. Comput. Math.*, 2003]*, 我们引入近似 Schauder 框架（ASFs）和近似 Riesz 序列（ARSs）的局部化概念。我们证明，局域化的有正下界近似 Schauder 框架是有限个近似 Riesz 序列的并。关键词：Feichtinger猜想、框架、Riesz 序列、局部化。数学主题分类（2020）：42C15，46A45，46B45。

1. Introduction

在 21^{th} 世纪初，Feichtinger 教授基于他在 Gabor/Weyl-Heisenberg 框架方面的大量研究，提出了以下猜想（历史背景见 [13]，一般理论见 [4, 14, 16–19,22,25–28, 36]）。

猜想 1.1. *[8]*（Feichtinger 猜想/Marcus-Spielman-Srivastava 定理）设 $\{\tau_n\}_n$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的一个框架，满足

$$0 < \inf_{n\in\mathbb{N}} \|\tau_n\|.$$

那么， $\{\tau_n\}_n$ 可以划分为有限个关于 $\mathcal{H}$ 的 Riesz 序列之并。

支持猜想 1.1 的首个突破，是 Gröchenig 证明了该猜想对内在局域化框架 [23] 成立。不久之后，该猜想又被证实适用于若干类 ℓ^1-自局域化框架、小波框架、Gabor 框架、平移框架、由再生核构成的框架，以及指数框架/指数函数框架 [2,3,6,29,30,35,39]。猜想 1.1 在其与 Kadison-Singer 猜想 [9,10,12] 被证明等价后，引起了广泛关注。最终，Marcus、Spielman 和 Srivastava 通过解决 Weaver 猜想，在 2013 [5,33,34,37,38] 完全解决了 Feichtinger 猜想。本文提出猜想 1.1 的巴拿赫空间版本，并证明它对有正下界的内在局域化近似 Schauder 框架成立（定理 2.7）。

2. Localized bounded below ASFs are finite unions of ARSs

我们考虑以下最一般的近似 Schauder 框架概念。在全文中， $\mathcal{X}$是一个可分巴拿赫空间，而 $\mathcal{X}^*$ 是其对偶空间。

定义 2.1. *[7, 11, 21]*设 $\mathcal{X}$ 中有一族 $\{\tau_n\}_n$， $\mathcal{X}^*$ 中有一族 $\{f_n\}_n$。若框架 $(\{f_n\}_n, \{\tau_n\}_n)$ 满足以下条件，则称其为 $\mathcal{X}$ 的近似 Schauder 框架（记作 ASF）： 框架

算子

$$S_{f,\tau}:\mathcal{X}\ni x\mapsto S_{f,\tau}x:=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\tau_n\in\mathcal{X}$$

是一个定义良好的有界线性可逆算子。

我们对近似框架序列采用以下“有下界”概念。

定义 2.2. 若 $\{f_n\}_n$、$\{\tau_n\}_n$ 是 $\mathcal{X}$ 的一个近似框架序列，则称其有下界，当且仅当

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}|f_n(\tau_n)|>0.$$

受框架局部化定义的启发，[20, 24], 我们引入以下概念。

定义 2.3. 若 $\{f_n\}_n$、$\{\tau_n\}_n$ 是 $\mathcal{X}$ 的一个近似框架序列，则称其为内在/自局部化的，如果存在 $s>1$ 和 $A>0$，使得

$$|f_n(\tau_m)|\leq\frac{A}{(1+|n-m|)^s},\quad\forall n,m\in\mathbb{N}.$$

文献中存在两种关于 Banach 空间中 Riesz 序列的概念，见 [1, 15] 和 [32]。这里我们定义另一种。

定义 2.4. 若 $\{f_n\}_n$、$\{\tau_n\}_n$ 是 $\mathcal{X}$ 的一个近似 Schauder 框架（ASF），且存在 $\mathbb{N}$ 的一个有限划分 Q_1, ..., Q_N，使得

$$\mathbb{N}=\bigcup_{j=1}^{N}Q_j$$

并且对每个 $1\leq j\leq N$,

$$\inf_{n\in Q_j}\left(|f_n(\tau_n)|-\sum_{m\in Q_j,m\neq n}|f_n(\tau_m)|\right)>0.$$

注意，对于希尔伯特空间，若 $\{f_n\}_n$ 由 $\{\tau_n\}_n$ 确定（Riesz 表示定理），则定义 2.4 等价于 Riesz 序列的定义（见 [23]）；这是由正性所致。现在我们提出以下猜想（其他一些猜想见 [31]）。

猜想 2。 5. 每个有下界的近似 Schauder 框架都可以划分为有限个近似 Riesz 基的并。

现在，我们借助以下结果证明内禀局域化 ASF 的猜想 2.5。

定理 2.6。 *[23]*

(i) 对每个 $s>1$,

$$D_s:=\sup_{x\in\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+|n-x|)^s}<\infty.$$

(ii) 对每个 $s>1$，存在一个 $C_s>0$（其不依赖于 δ），使得

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N},n\neq m}\frac{1}{(1+|n-m|)^s}\leq\frac{C_s}{\delta^s},$$

每当

$$\inf_{n,m\in\mathbb{N},n\neq m}|n-m|\geq\delta.$$

定理 2.7。本征局部化下有界近似 Schauder 框架满足猜想 2.5。

证明。我们的证明深受 [23] 的启发。设 $(\{f_n\}_n, \{\tau_n\}_n)$ 是 $\mathcal{X}$ 的一个内在局部化下有界近似 Schauder 框架。定义

$$C \coloneqq \inf_{n\in\mathbb{N}} |f_n(\tau_n)| > 0.$$

由于 $(\{f_n\}_n, \{\tau_n\}_n)$ 是内在局部化的，存在 $s > 1$ 和 $A > 0$，使得

$$|f_n(\tau_m)| \leq \frac{A}{(1+|n-m|)^s}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

令 C_s 为定理 2.6 中的常数。选取自然数 M，使得

$$\frac{AC_s}{M^s} \leq \frac{C}{2}.$$

现在我们将 $\mathbb{N}$ 划分为 Q_1、.....、Q_N，使得

$$\mathbb{N} \coloneqq \bigcup_{j=1}^{N} Q_j$$

并且对于每个 $1 \leq j \leq N$,

$$\inf_{n,m\in Q_j, n\neq m} |n-m| \geq M.$$

（注意，这种类型的 $\mathbb{N}$ 有无穷多个划分。）令 $1 \leq j \leq N$。然后利用定理 2.6 中的 (ii)

$$\sup_{n\in Q_j} \sum_{m\in Q_j, m\neq n} |f_n(\tau_m)| \leq A \sup_{n\in Q_j} \sum_{m\in Q_j, m\neq n} \frac{1}{(1+|n-m|)^s} \leq A\frac{C_s}{M^s} \leq \frac{C}{2}.$$

因此，对于每个固定的 $1 \leq j \leq N$

$$\begin{aligned}\inf_{n\in Q_j} \left(|f_n(\tau_n)| - \sum_{m\in Q_j, m\neq n} |f_n(\tau_m)| \right) &= \inf_{n\in Q_j} |f_n(\tau_n)| - \sup_{n\in Q_j} \sum_{m\in Q_j, m\neq n} |f_n(\tau_m)| \\ &\geq C - \frac{C}{2} = \frac{C}{2} > 0.\end{aligned}$$

由于 j 是任意的，我们得到该定理。 □

References

[1] Akram Aldroubi、Qiyu Sun 和 Wai-Shing Tang。 L^p的 p-框架与平移不变子空间。 *J. Fourier Anal. Appl.*，7(1):1–21，2001。[2] Radu Balan、Peter G. Casazza、Christopher Heil 和 Zeph Landau。框架的密度、过完备性与局部化。I. 理论。 *J. Fourier Anal. Appl.*，12(2):105–143，2006。[3] Anton Baranov 和 Konstantin Dyakonov。模型子空间中再生核的 Feichtinger 猜想。 *J.Geom. Anal.*，21(2):276–287，2011。[4] John J. Benedetto 和 David F. Walnut。 L^2 及相关空间上的 Gabor 框架。载于 *Wavelets: mathematics andapplications*，Stud. Adv. Math.，第 97–162 页。CRC，博卡拉顿，FL，1994。[5] MarcinBownik。Kadison-Singer问题。载于 *Frames and harmonic analysis*， *Contemp. Math.*第 706 卷，第 63–92 页。Amer. Math. Soc.， [Providence], RI，2018。[6] Marcin Bownik 和 Darrin Speegle。小波框架、Gabor 框架和平移系框架的 Feichtinger 猜想。 *Canad. J. Math.*，58(6):1121–1143，2006。[7] P. G. Casazza、S. J. Dilworth、E. Odell、Th. Schlumprecht 和 A. Zs´ak。巴拿赫空间中框架的系数量化。 *J. Math. Anal. Appl.*，348(1):66–86，2008。

[8] Peter G. Casazza、Ole Christensen、Alexander M. Lindner 和 Roman Vershynin。框架与 Feichtinger 猜想。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，133(4):1025–1033，2005。[9] Peter G. Casazza 和 Dan Edidin。Kadison-Singer问题的等价形式。载于 *Function spaces*，*Contemp. Math.*第 435 卷，第 123–142 页。Amer. Math. Soc.，Providence，RI，2007。[10] Peter G. Casazza、Matthew Fickus、Janet C. Tremain 和 Eric Weber。数学与工程中的 Kadison-Singer问题：详尽论述。载于 *Operator theory*，*operator algebras*，*and applications*，*Contemp.Math.*第 414 卷，第 299–355 页。Amer. Math. Soc.，Providence，RI，2006。[11] Peter G. Casazza、Deguang Han 和 David R. Larson。巴拿赫空间的框架。载于 *The functional and harmonicanalysis of wavelets and frames (San Antonio, TX, 1999)*，*Contemp. Math.*第 247 卷，第 149–182 页。Amer. Math. Soc.，Providence，RI，1999。[12] Peter G. Casazza、Gitta Kutyniok、Darrin Speegle 和 Janet C. Tremain。框架的分解定理与 Feichtinger 猜想。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，136(6):2043–2053，2008。[13] Ole Christensen。框架理论中的六个（七个）问题。载于 *New perspectives on approximation and sampling theory*，Appl. Numer. Harmon. Anal.，第 337–358 页。Birkh¨auser/Springer，Cham，2014。[14]Ole Christensen。 *An introduction to frames and Riesz bases*。Applied and Numerical Harmonic Analysis。Birkh¨auser/Springer，第二版，2016。[15] Ole Christensen 和 Diana T. Stoeva。可分巴拿赫空间中的 p-框架。 *Adv. Comput. Math.*，18(2-4):117–126，2003。[16] R. J. Duffin 和 A. C. Schaeffer。一类非谐 Fourier 级数。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，72:341–366，1952。[17] Hans G. Feichtinger 和 K. Gr¨ochenig。Gabor 框架与分布的时频分析。 *J. Funct. Anal.*，146(2):464–495，1997。[18] Hans G. Feichtinger 和 Thomas Strohmer，编者。 *Gabor analysis and algorithms: Theory and application*。Applied and Numerical Harmonic Analysis。Birkh¨auser Boston, Inc.，Boston，MA，1998。[19] Hans G. Feichtinger 和 Thomas Strohmer，编者。 *Advances in Gabor analysis*。Applied and Numerical Harmonic Analysis。Birkh¨auser Boston, Inc.，Boston，MA，2003。[20] Massimo Fornasier 和 Karlheinz Gr¨ochenig。框架的内在局部化。 *Constr. Approx.*，22(3):395–415，2005。[21] D. Freeman、E. Odell、Th. Schlumprecht 和 A. Zs´ak。 $L_p(\mathbb{R}^d)$的平移系的无条件结构。 *Israel J.Math.*，203(1):189–209，2014。[22] Karlheinz Gr¨ochenig。 *Foundations of time-frequency analysis*。Applied and Numerical Harmonic Analysis。Birkh¨auser Boston, Inc.，Boston，MA，2001。[23] Karlheinz Gr¨ochenig。局部化框架是 Riesz 序列的有限并。 *Adv. Comput. Math.*，18(2-4):149–157，2003。[24] Karlheinz Gr¨ochenig。框架、Banach框架的局部化以及框架算子的可逆性。 *J. Fourier Anal. Appl.*，10(2):105–132，2004。[25] Karlheinz Gr¨ochenig。没有不等式的 Gabor 框架。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(23):文章编号 rnm111，21，2007。[26] Karlheinz Gr¨ochenig。Gabor 框架之谜。 *J. Fourier Anal. Appl.*，20(4):865–895，2014。[27] Karlheinz Gr¨ochenig、Joaquim Ortega-Cerd`a 和 Jos´e Luis Romero。Gabor 系统的变形。 *Adv. Math.*，277:388–425，2015。[28] Christopher Heil。Gabor 框架密度定理的历史与演变。 *J. Fourier Anal. Appl.*，13(2):113–166，2007。[29] Sneh Lata 和 Vern Paulsen。Feichtinger 猜想与再生核希尔伯特空间。 *Indiana Univ. Math.J.*，60(4):1303–1317，2011。[30] Wayne Lawton。指数函数系的 Feichtinger 猜想。 *J. Nonlinear Anal. Optim.*，2(1):131–140，2011。[31]K. Mahesh Krishna。巴拿赫空间的 Feichtinger 猜想、 R_ε-猜想和 Weaver 猜想。 *arXiv.org/2201.00125v1 [math.FA] 1 January*，2022。[32] K. Mahesh Krishna 和 P. Sam Johnson。可分巴拿赫空间中 p-近似Schauder框架的膨胀定理。 *Palest. J. Math.*，11(2):384–394，2022。[33] Adam Marcus 和 Nikhil Srivastava。Kadison-Singer问题的解。载于 *Current developments in mathe-matics 2016*，第 111–143 页。Int. Press，Somerville，MA，2018。[34] Adam W. Marcus、Daniel A. Spielman 和 Nikhil Srivastava。交错族 II：混合特征多项式与 Kadison-Singer问题。 *Ann. of Math. (2)*，182(1):327–350，2015。

[35] Darrin Speegle. 将指数函数框架均匀划分为 Riesz 序列。 *J. Math. Anal. Appl.*, 348(2):739–745, 2008.[36] Diana T. Stoeva. 通过双正交序列刻画 Riesz 基。 *J. Fourier Anal. Appl.*, 26(4):第 67 号论文, 5, 2020.[37] Dan Timotin. Kadison-Singer 问题的解。载于 *Recent advances in operator theory and operator algebras*, 第 117–148 页。CRC出版社, 佛罗里达州博卡拉顿, 2018.[38] Nik Weaver. 差异理论中的 Kadison-Singer 问题。 *Discrete Math.*, 278(1-3):227–239, 2004.
[39] Eric Weber. 铺砌与 Feichtinger猜想的代数方面。载于 *Topics in operator theory. Volume 1.Operators, matrices and analytic functions*, 第 202 卷, *Oper. Theory Adv. Appl.*, 第 569–578 页。Birkh¨auser Verlag, 巴塞尔, 2010。