arXiv:2301.03381v2 [math.NA] 3 May 2024

考虑欧姆定律的矢量波动方程时空有限元法

Julia I.M. Hauser[1]

[1]Joanneum Research，电信、导航与信号处理研究所，格拉茨，奥地利

julia.hauser@joanneum.at

摘要

处理复杂几何并实现高阶逼近，是时空有限元方法的主要优势。因此，我们希望建立坚实的理论基础，以便据此构造合适的时空方法。本文将时间视为另一个空间方向，这是时空方法的核心思想。首先，我们将简要讨论如何在考虑欧姆定律的情况下，从时空结构中的麦克斯韦方程组推导出矢量波动方程。然后，我们将采用不同的试探空间与检验空间，为矢量波动方程推导时空变分形式。本文有两个主要目标。首先，我们证明由此得到的 Galerkin–Petrov变分形式具有唯一可解性。其次，我们分析该方程在张量积中的离散等价形式，并证明其具有条件稳定性，即满足 CFL 条件。

理解矢量波动方程及相应的时空有限元方法，对于完善现有的麦克斯韦方程组理论至关重要，也为计算更复杂的电磁问题铺平了道路。

1 引言

1.1 矢量波动方程的推导

在讨论矢量波动方程之前，我们先来推导该方程。为此，我们需要仔细考察麦克斯韦方程组，它们用于描述电磁问题，也是经典电磁学的基础。麦克斯韦方程组由一组偏微分方程构成，即

$$\operatorname{curl}_x \ \underline{E} = -\partial_t \underline{B}, \tag{1a}$$

$$\operatorname{curl}_x \ \underline{H} = \partial_t \underline{D} + \underline{j}, \tag{1b}$$

$$\operatorname{div}_x \underline{B} = 0, \tag{1c}$$

$$\operatorname{div}_x \underline{D} = \rho. \tag{1d}$$

在方程（1）中，有四个未知量：电场 $\underline{E}$、磁场 $\underline{H}$、电通量密度 $\underline{D}$ 和磁通量密度 $\underline{B}$。变量 $\underline{j}$ 是给定的电

流密度，而 ρ 是给定的电荷密度。除了麦克斯韦系统（1）之外，我们还使用本构关系（也称为材料定律），将电通量密度 $\underline{D}$ 与电场 $\underline{E}$ 联系起来，并将磁场 $\underline{H}$ 与磁通量密度 $\underline{B}$ 联系起来。在本文中，我们将考虑本构关系

$$\underline{D} = \varepsilon \underline{E}, \tag{2a}$$

$$\underline{H} = \mu \underline{B}, \tag{2b}$$

其中 ε 是介电常数， μ是磁导率，我们将在假设 1 中对其作更详细的定义。

如何求解方程组 (1) 所描述的麦克斯韦系统，在过去一个世纪一直是一个活跃的研究领域。一种可能的解法是转入频域。为此，我们假设方程组 (1) 的解随时间呈波动形式。文献中有多种关于麦克斯韦方程组的介绍。本文不讨论频域建模的背景，仅介绍其中一些相关著作，例如 [33, 19]，以及从数学和数值角度出发的著作 [6, 28]。关于频域计算理论的优秀入门读物可参见 [6, 34]。在过去一个世纪中，时谐麦克斯韦方程常用于散射问题，参见例如 [24]。散射问题的解析解可见 [18]； Colton 和 Kress 在 1983, [13] 中论述了反散射理论以及散射问题中的最优控制。关于反散射问题的入门介绍，可参见 [14]。

求解麦克斯韦方程组 (1) 的另一种方法是时间步进法，例如 [1, 第 12 章2] 及其中的参考文献介绍了这种方法。然而，时间步进法会出现不稳定性。解决这些问题的一种方法是对时间步进法所构造的方程组进行稳定化处理。相关示例可参见 [2, 3, 29] 等文献。然而，由于时间步进法属于有限差分法，因此无法处理复杂几何。

能够处理复杂几何并实现更高阶近似，是时空有限元方法的主要优势。本文将为这类方法奠定所需的理论基础，并探讨由麦克斯韦方程组导出的矢量波动方程的可能性与局限性。将该理论应用于有限元方法时，我们还将研究时间二阶单元。本文旨在为矢量波动方程推导时空变分形式，证明其唯一可解性，并分析其数值性质。

首先，我们将从麦克斯韦方程组推导矢量波动方程。为进行建模，我们假设式（1）中的所有函数都是光滑的，并考虑一个时空域 Q in $\mathbb{R}^4$ ，该区域关于球 B_r 呈星形，且在空间方向上满足利普希茨条件。星形性质意味着，任意 $x \in Q$ 与 B_r 的凸包都包含于 Q中。我们不将时间与空间区别对待，而是改写方程，使得时间偏导数只是时空导数的偏导数，从而将麦克斯韦方程组改写为一个四维方程组。为此，我们采用外微分演算，它能够对斯托克斯定理和高斯定理进行与度量无关的推广。在外微分演算中，我们考虑外微分 d，它将函数导数的概念扩展到更高阶的微分形式。这样，我们便可将麦克斯韦方程组改写为波动方程，并由此确定变分形式中该波动方程的测试空间和试探空间应自然选取哪些函数空间。

因此，让我们使用外微分演算来表述麦克斯韦方程组。关于这一形式体系的详细介绍，例如可参见 [23, 7]。这里我们只给出推导矢量波动方程所需的最重要内容。在此背景下，有两种重要的微分形式，即法拉第二形式 F 和麦克斯韦二形式G。法拉第二形式 F 包含电场 $\underline{E}$ 和磁通量密度 $\underline{B}$，而麦克斯韦二形式包含电通量密度 $\underline{D}$ 和磁场 $\underline{H}$。源项 $\mathcal{J}$ 出现在右端项中，其中包括电流密度 $\underline{j}$ 和电荷密度 ρ。另一方面，我们希望纳入材料定律（2）。为此，我们使用加权霍奇星算子 $\star^{\varepsilon,-\mu^{-1}}$，该算子利用材料定律（2）将法拉第二形式 F 映射为麦克斯韦二形式 G。

将这些定义代入麦克斯韦方程组，并采用与度量无关的表示，可得到以下方程

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\, F &= 0, \\ \mathrm{d}\, G &= \mathcal{J}, \\ G &= \star^{\varepsilon,-\mu^{-1}} F. \end{aligned} \tag{3}$$

推导这些方程时，考虑 [9] or [8, p. 135]. 第三个方程表示材料定律（2），并包含加权霍奇星算子。举例来说，对于采用欧几里得度量的 $\mathbb{R}^4$，ε 是沿 $\star(\mathrm{d}x^{01},\mathrm{d}x^{02},\mathrm{d}x^{03})^T$ 方向的权重，而 $(-\mu^{-1})$ 是沿 $\star(\mathrm{d}x^{23}, \mathrm{d}x^{31}, \mathrm{d}x^{12})^T$方向的权重。

让我们仔细看看（3）中的方程。第二个方程 $\mathrm{d}\ G = \mathcal{J}$包含方程组（1）中的第二个方程（1b）和第四个方程（1d）。第一个方程 $\mathrm{d}\ F = 0$包含方程组（1）中的第一个方程（1a）和第三个方程（1c）。此外，（3）中的第一个方程表明法拉第形式 F 是闭的；由于区域 Q 是星形的，因此可以应用庞加莱引理 [7, 定理 4.1], 。庞加莱引理告诉我们，形式 F 是闭的，因此也是恰当的，即存在一个 1-形式 $\mathcal{A}$，使得 $\mathrm{d}\mathcal{A} = F$.

如果将 $F = \mathrm{d}\mathcal{A}$ 代入方程（3）的第二个方程并结合第三个方程，我们可以推导出以下波型方程

$$\mathrm{d} \star^{\varepsilon,-\mu^{-1}} \mathrm{d}\mathcal{A} = \mathcal{J}. \tag{4}$$

此外，我们还有以下两个关系式

$$\begin{aligned} \underline{E} &= -\partial_t \underline{A} + \nabla_x \underline{A}_0, \\ \underline{B} &= \nabla \times \underline{A}, \end{aligned}$$

其中，A_0 是时间分量，$\underline{A} := (A_1, A_2, A_3)^T$ 是 $\mathcal{A}$ 的空间分量，参见例如 [23, 第 389] 页。注意，如果对 $\mathcal{A}$ 使用零阶微分形式而不是一阶微分形式，则（4）将得到标量波动方程，而方程（4）本身将得到矢量波动方程。因此，就四维中的微分形式而言，标量波动方程与矢量波动方程密切相关。

此外，我们知道 $\mathcal{A}$ 并不唯一。若取一个 0-形式 $\mathcal{A}$，并将 $\mathrm{d}\mathcal{A}$ 加到 $\mathcal{A}$ 上，那么$F = \mathrm{d}\mathcal{A} = \mathrm{d}\mathcal{A} + \mathrm{dd}\,\tilde{\mathcal{A}} = \mathrm{d}(\mathcal{A} + \mathrm{d}\,\tilde{\mathcal{A}})$。考察相应的 L^2 函数空间可知，这相当于将任意一个 $H_0^1(Q)$-函数的时空梯度加到势上，从而得到另一个可行的势。因此，我们需要一种规范来确定势 $\mathcal{A}$。规范有很多种，例如可参见一篇 2001 年探讨规范不变性历史的论文 [25]。

根据所选规范的不同，我们可以从 (4) 推导出不同的方程。为了推导矢量波动方程，我们采用韦尔规范，也称为时间规范， $A_0 = 0$. 接着，我们在欧几里得空间中考虑 (4)，得到

$$\partial_t(\varepsilon(\partial_t \underline{A})) + \operatorname{curl}_x\left(\mu^{-1}\operatorname{curl}_x \underline{A}\right) = \underline{j}, \tag{5a}$$

$$\operatorname{div}_x(\varepsilon(\partial_t \underline{A})) = -\rho. \tag{5b}$$

注意，方程 (5a) 即为矢量波动方程。除了这两个方程之外，我们还假设电荷守恒，因此连续性方程

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}_x \underline{j} = 0 \tag{6}$$

成立。不过，这意味着对 $\underline{A}$ 和 $\underline{j}$ 的正则性作出假设，因为我们关注的是 $\underline{A}$ 关于时间的二阶导数以及 $\underline{j}$的散度。这将在有限元解一节中进一步讨论。不过，连续性方程已包含在式 (5) 两个方程的组合中。另一方面，我们可以将第二个方程 (5b) 改写为关于 $\partial_t \underline{A}$的初始条件。事实上，如果假设$\underline{A}$、 ρ和 $\underline{j}$具有足够的正则性，我们可以对第一个方程 (5a) 取空间散度，并利用连续性方程推导出

$$\partial_t(\operatorname{div}_x(\varepsilon\partial_t \underline{A}(t)) + \rho) = 0.$$

因此，对于所有 $t \in (0, T]$，$\operatorname{div}_x(\varepsilon\partial_t \underline{A}(t))(t) + \rho(t) = \operatorname{div}_x(\varepsilon\partial_t \underline{A}(t))(0) + \rho(0)$。因此，如果 $\partial_t \underline{A}(0)$ 满足

$$\operatorname{div}_x(\varepsilon\partial_t \underline{A}(0)) = -\rho(0)$$

那么，对于所有 $t > 0$，我们都满足 (5b)。

1.2 考虑欧姆定律的矢量波动方程

既然我们已经推导出矢量波动方程，接下来看看欧姆定律。在导电材料中，电磁场本身会感生电流；最简单的情况下，这可以用欧姆定律建模。因此，我们希望将欧姆定律纳入方程，得到

$$\underline{j} = \sigma \underline{E} + \underline{j}_a,$$

其中， σ 是电导率，$\underline{j}_a$ 是外加电流。 $\underline{E}$ 与磁矢势 $\underline{A}$ 之间的关系由 $\underline{E} = -\partial_t \underline{A}$给出。因此，本文考虑如下方程

$$\varepsilon\partial_{tt}\underline{A} + \sigma\partial_t \underline{A} + \operatorname{curl}_x(\mu^{-1}\operatorname{curl}_x \underline{A}) = \underline{j}_a \quad \text{in } Q = (0,T)\times\Omega, \tag{7a}$$

$$\partial_t \underline{A}(0,x) = \underline{\psi}(x) \text{ in } \Omega, \tag{7b}$$

$$\underline{A}(0,x) = \underline{\phi}(x) \text{ in } \Omega, \tag{7c}$$

$$\gamma_{\mathrm{t}}\underline{A} = 0 \quad \text{on } \Sigma = \{0,T\}\times\partial\Omega, \tag{7d}$$

其中， γ_{t} 是 $\underline{A}$在 Ω 上的切向迹。

在陈述本文对（7）中函数的一般假设之前，我们需要定义若干将在全文中使用的函数空间。首先，我们定义

$Q \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$，空间 $L^2(Q;\mathbb{R}^d)$ 为向量值函数v的通常勒贝格空间： $Q \to \mathbb{R}^d$其内积为 $(v, w)_{L^2(\Omega)} := (v, w)_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} := \int_Q (v(x)\ w(x))_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x$ 适用于$v, w \in L^2(Q;\mathbb{R}^d)$，其诱导范数为$\|\cdot\|_{L^2(Q)} := \|\cdot\|_{L^2(Q;\mathbb{R}^d)} := \sqrt{(\cdot,\cdot)_{L^2(Q)}}$。其次，对于 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$，我们定义 $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}) := L^\infty(\Omega)$，即几乎处处有界的可测函数空间，并赋予通常的范数$\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$。第三，我们定义空间 $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d})$， $d \in \mathbb{N}$，它是几乎处处有界的矩阵值可测函数空间，其范数为

$$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} := \|w\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d})} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \sup_{0\neq\xi\in\mathbb{R}^d} \frac{\xi^\top w(x)\xi}{\xi^\top \xi}.$$

最后，我们以同样的方式定义时空函数空间 $L^2(0,T;\ X)$，其内积为 $(v, w)_{L^2(0,T;X)} := \int_0^T (v(t)\ w(t))_X \mathrm{d}t$；并定义 $L^1(0,T;\ L^2(\Omega;\ \mathbb{R}^d))$，其范数为$\|\underline{v}\|_{2,1,Q} := \|\underline{v}\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^d))} := \int_0^T \|v\|_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}t$。此外，我们可以将空间 $H^1(0,T;\ X)$ 定义为以希尔伯特空间 X 为值域的希尔伯特空间 $H^1(0,T)$，详见 [21]。

根据这些定义，对于 $d = 3$，我们将切向迹算子 γ_t 定义为连续映射 γ_t: $H(\mathrm{curl};\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega;\ \mathbb{R}^3)$。切向迹算子是向量值函数 $\gamma_\mathrm{t}\underline{v} = \underline{v}_{|\partial\Omega} \times \underline{n}_x$ 对于 $\underline{v} \in H^1(\Omega)^3$ 的唯一延拓，该函数由旋度算子的格林公式定义。对于 $d = 2$，我们将切向迹算子γ_t: $H(\mathrm{curl};\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 定义为标量函数 $\gamma_\mathrm{t}\underline{v} = \underline{v}_{|\partial\Omega} \cdot \underline{\tau}_x$ 对于$\underline{v} \in H^1(\Omega)^2$, 的唯一延拓，其中 $\underline{\tau}_x$ 是单位切向量，即 $\underline{\tau}_x \cdot \underline{n}_x = 0$。我们将通常的迹算子 γ: $H^1(\Omega\ \mathbb{R}^d) \to H^{1/2}(\partial\Omega;\mathbb{R}^d)$ 定义为 $\gamma\underline{v} := (v)_{|\partial\Omega}$，其中 $d \in \mathbb{N}$，且 $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 是索伯列夫空间 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 的对偶空间。关于切向迹算子 γ_t 的更多细节，请参见 [15, 4, 6]。

关于空间 $H_0(\mathrm{curl};\Omega) := \{\underline{v} \in H(\mathrm{curl};\Omega) \,|\, \gamma_\mathrm{t}\underline{v} = 0\}$ 和$H(\mathrm{div};\Omega)$ 的详细定义，请参阅 [6]。不过，我们先简要说明旋度算子在二维和三维中的不同表现。对于 $d = 2$，我们将充分光滑的向量值函数 $\underline{v}$: $\Omega \to \mathbb{R}^2$（其中 $\underline{v} = (v_1, v_2)^\top$）的旋度定义为标量值旋度算子 $\mathrm{curl}_x\, \underline{v} = \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1$。有时，这个旋度算子也称为 rot。此外，对于充分光滑的标量函数 w: $\Omega \to \mathbb{R}$，我们定义向量值旋度算子 $\mathrm{curl}_x\, w = (\partial_{x_2} w, -\partial_{x_1} w)^\top$.。注意，对于 $d = 2$, 向量值旋度算子是标量值旋度算子的伴随算子。

对于 $d = 3$，充分光滑的向量值函数 $\underline{v}$: $\Omega \to \mathbb{R}^3$（其中$\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top$）的旋度由以下向量值函数给出

$$\mathrm{curl}_x\ \underline{v} = (\partial_{x_2} v_3 - \partial_{x_3} v_2, \partial_{x_3} v_1 - \partial_{x_1} v_3, \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1)^\top.$$

根据这些定义，我们可以写出全文均成立的以下假设。

假设 1. 给定 $d = 2,3$ 和空间区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 以及 $\mathrm{supp}(\sigma) \subset \mathbb{R}^d$, $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$, 使得

- Ω 和 $\Omega_\sigma := \mathrm{supp}(\sigma) \subset \Omega$ 均为 *Lipschitz* 区域,
- 且 $Q = (0,T) \times \Omega$ 是相对于一个球 B的星形区域。

此外，设 σ、 $\underline{j}$、 ε 和 μ 为给定函数，并满足:

- 电导率 $\sigma \in L^\infty(\mathrm{supp}(\sigma);\mathbb{R}^{d\times d})$, $\mathrm{supp}(\sigma) \subset \Omega$, 一致正定，即

$$\sigma_{\min} := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathrm{supp}(\sigma)} \inf_{0\neq\xi\in\mathbb{R}^d} \frac{\xi^\top \sigma(x)\xi}{\xi^\top\xi} > 0.$$

- 外加电流密度 $\underline{j}_a$： $Q \to \mathbb{R}^d$ 满足 $\underline{j}_a \in L^1(0,T;\ L^2(\Omega;\ \mathbb{R}^d))$。

- 介电常数 ε: $\Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ 是对称且有界的，即 $\varepsilon \in L^\infty(\Omega;\ \mathbb{R}^{d\times d})$，并且一致正定，即，

$$\varepsilon_{\min} := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} \inf_{0\neq\xi\in\mathbb{R}^d} \frac{\xi^\top \varepsilon(x)\xi}{\xi^\top\xi} > 0$$

且 $\varepsilon^{\max} := \|\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}$。

- 对于 $d=2$，磁导率 μ: $\Omega \to \mathbb{R}$ 满足 $\mu \in L^\infty(\Omega;\ \mathbb{R})$， $\mu_{最大} := \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}$，并且

$$\mu_{\min} := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} \mu(x) > 0.$$

对于 $d=3$，磁导率 μ: $\Omega \to \mathbb{R}^{3\times3}$ 是对称且有界的，即 $\mu \in L^\infty(\Omega;\ \mathbb{R}^{3\times3})$，$\mu^{\max} := \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}$，并且一致正定，即，

$$\mu_{\min} := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} \inf_{0\neq\xi\in\mathbb{R}^3} \frac{\xi^\top \mu(x)\xi}{\xi^\top\xi} > 0.$$

对于初始数据 $\underline{\phi}$ 和 $\underline{\psi}$，我们假设：

- 初始数据 $\underline{\phi}$: $\Omega \to \mathbb{R}^d$ 满足 $\phi \in H_0$(旋度$_x$; Ω)。

- 初始数据 $\underline{\psi} \in H$(散度$_x$; Ω) 满足 散度$_x(\varepsilon\underline{\psi}) = -\rho(0)$ 在 Ω 中。

既然已陈述假设并介绍了矢量波动方程，下面我们来了解本文其余部分的结构。在本节剩余部分，我们将介绍构建矢量波动方程时空变分形式所需的函数空间，并讨论它们确实是希尔伯特空间，同时介绍可能的基表示。本节末尾，我们将推导变分形式。本文第二节专门证明该变分形式的唯一可解性，并给出解的范数估计。在证明中，我们将采用 Galerkin方法，并使用此前构建的基表示。本文第三节将讨论时空有限元空间和离散化。我们将推导出一个 CFL 条件，并通过示例来说明该 CFL 条件。最后，我们将总结结论并展望未来。

1.3 时空索伯列夫空间

为了推导变分形式，我们需要考虑满足 (4) 的势 $\mathcal{A}$ 所属的适当函数空间。本节将推导这些空间，并展示本文所需的性质。

为了推导函数空间，我们暂且假设 $d=3$，于是 $Q \subset \mathbb{R}^4$。根据磁矢势 $\mathcal{A}$ 的推导，我们知道 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 中的一个 1-形式。对于

1-形式在 $\mathbb{R}^4$ 中的 L^2-希尔伯特复形里对应的函数空间是 $H(\text{旋度 } Q;\mathbb{R}^4)$，例如参见 [36]。空间 $H(\text{旋度 } Q;\mathbb{R}^4)$ 定义为

$$H(\mathrm{Curl}, Q;\mathbb{R}^4) \coloneqq \{\ \underline{u} \in L^2(Q;\mathbb{R}^4) \mid \mathrm{Curl}\ \underline{u} \in L^2(\Omega;\mathbb{K})\ \},$$
$$[\mathrm{Curl}\ \underline{u}]_{ij} \coloneqq \sum_{k,l=1}^{4} \varepsilon_{ijkl}\partial_k u_l,$$

例如，参见 [36], ，其中 $\mathbb{K}$ 是由 4×4 反对称矩阵构成的向量空间。请注意，算子 Curl 同时作用于空间和时间。此外，在推导矢量波动方程时，我们采用韦尔规范（即时间规范），它意味着 $A_0 = 0$，以确保势 $\mathcal{A}$ 唯一。因此，我们关注类型为 $(0, A_1, A_2, A_3)^T$ 且属于 $H(\text{Curl } Q;\mathbb{R}^4)$ 的函数。将算子 Curl 改写为作用于 $A_0 = 0$ 和 $A = (A_0, \underline{A})^T \in H(\text{Curl } Q;\mathbb{R}^4)$，可得条件

$$\underline{A} \in L^2(Q,\mathbb{R}^3), \qquad \mathrm{curl}_x\, \underline{A} \in L^2(Q,\mathbb{R}^3), \quad \text{and} \quad \partial_t \underline{A} \in L^2(Q,\mathbb{R}^3). \tag{8}$$

在定义合适的函数空间之前，我们先简要考察矢量波动方程 (7) 中的系数。对方程 (7) 建立变分形式时，我们将使用加权的 $L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ 内积

$$(\underline{u},\underline{v})_{L^2_\varepsilon(\Omega)} \coloneqq (\varepsilon\underline{u},\underline{v})_{L^2(\Omega)},$$
$$(\underline{u},\underline{v})_{L^2_\mu(\Omega)} \coloneqq \left(\mu^{-1}\underline{u},\underline{v}\right)_{L^2(\Omega)},$$

对于 $\underline{v}, \underline{w} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$，以及 $H_0(\text{curl};\Omega)$ 内积

$$(\underline{u},\underline{v})_{H_{0,\varepsilon,\mu}(\mathrm{curl};\Omega)} \coloneqq (\underline{u},\underline{v})_{L^2_\varepsilon(\Omega)} + (\mathrm{curl}_x\, \underline{v}, \mathrm{curl}_x\, \underline{w})_{L^2_\mu(\Omega)},$$

对于 $\underline{v}, \underline{w} \in H_0(\text{旋度};\Omega)$。注意，由于假设 1，范数 $\|\cdot\|_{L^2_\varepsilon(\Omega)}$ 和 $\|\cdot\|_{H_{0,\varepsilon,\mu}(\text{旋度};\Omega)}$，分别由 $(\cdot,\cdot)_{L^2_\varepsilon(\Omega)}$ 和 $(\cdot,\cdot)_{H_{0,\varepsilon,\mu}(\text{旋度};\Omega)}$诱导，与标准范数 $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ 和 $\|\cdot\|_{H_0(\text{旋度};\Omega)}$等价。

现在，我们来定义从此处开始将要使用的函数空间。结合式 (8) 中的条件，可得以下空间

$$\begin{aligned} H^{\mathrm{curl};1}_{0;0,}(Q) \coloneqq \{\ & \underline{u} \in L^2(Q,\mathbb{R}^d) \mid \partial_t\underline{u} \in L^2_\varepsilon(Q),\ \mathrm{curl}_x\, \underline{u} \in L^2_\mu(Q),\ \underline{u}(0,x) = 0 \text{ for } x \in \Omega, \\ & \gamma_t\underline{u} = 0 \text{ on } \Sigma = (0,T)\times\partial\Omega\ \} \qquad (9) \\ = {} & L^2(0,T;H_0(\mathrm{curl};\Omega)) \cap H^1_{0,}(0,T;L^2(Q,\mathbb{R}^d)), \\ H^{\mathrm{curl};1}_{0;,0}(Q) \coloneqq \{\ & \underline{u} \in L^2(Q,\mathbb{R}^d) \mid \partial_t\underline{u} \in L^2_\varepsilon(Q),\ \mathrm{curl}_x\, \underline{u} \in L^2_\mu(Q),\ \underline{u}(T,x) = 0 \text{ for } x \in \Omega, \\ & \gamma_t\underline{u} = 0 \text{ on } \Sigma\ \} \qquad (10) \\ = {} & L^2(0,T;H_0(\mathrm{curl};\Omega)) \cap H^1_{,0}(0,T;L^2(Q,\mathbb{R}^d)). \end{aligned}$$

下标“0,”和“,0”分别表示零初始条件和零终端条件。在引理 1.2 中，我们将看到它们是定义良好的。

由于 $H^{\mathrm{curl};1}_0{}_{;}(Q)$ 是有界时空迹的核，因此很自然地假设 $H^{\mathrm{curl};1}_0{}_{;}(Q)$ 是希尔伯特空间。我们将简要讨论这一点是否属实，并说明在什么概念下，$C^\infty(Q)$-函数在我们的空间中稠密。最后，我们将考察这一情形下的半范数，它是数值分析中的一个实用工具。那么，我们先证明 $H^{\mathrm{curl};1}_0{}_{;0,}(Q)$ 和 $H^{\mathrm{curl};1}_0{}_{;,0}(Q)$ 是希尔伯特空间。

引理 1.1。设 $d=2,\ 3$。空间 $H^1(0,\ T;\ L^2(\Omega;\ \mathbb{R}^d))$ 与希尔伯特张量积 $H^1(0,\ T)\hat{\otimes}L^2(\Omega;\ \mathbb{R}^d)$ 等距同构，而空间 $L^2(0,\ T;\ H(\text{旋度};\ \Omega))$ 与希尔伯特张量积 $L^2(0,\ T)\hat{\otimes}H(\text{旋度};\ \Omega)$等距同构。

此外，空间 $C^\infty(0,T)\otimes[C^\infty(\Omega)]^d$ 在

$$H^1(0,T)\hat{\otimes}L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) \text{ and } L^2(0,T)\hat{\otimes}H(\mathrm{curl};\Omega)$$

并且 $C^\infty([0,T])\otimes[C_0^\infty(\Omega)]^d$ 在 $L^2(0,T)\hat{\otimes}H_0(\text{旋度};\Omega)$中稠密。

参见 Aubin [11], 定理 12.7.1 和定理 12.6.1。. 第二个结果由 [27, 第 1.6 章.] 得出。这里，$\otimes$ 表示张量积，而 $\hat{\otimes}$ 表示希尔伯特空间的张量积，其中所得空间本身也是一个希尔伯特空间。因此，我们得到 $C^\infty(0,T;\ C^\infty(\Omega)^d)$ 在两个空间 $H^1(0,T;\ L^2(\Omega;\ \mathbb{R}^d))$ 和 $L^2(0,T;\ H(\text{旋度};\ \Omega))$ 中均稠密，因此在交集 $H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;0,}\ (Q)$ 和 $H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;,\ 0}\ (Q)$ 中稠密。

引理 1.2. 空间 $H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;0,}\ (Q)$ 和 $H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;,0}\ (Q)$ 在配备内积后均为希尔伯特空间

$$(\underline{u},\underline{v})_{H^{\mathrm{curl};1}(Q)} := (\underline{u},\underline{v})_{L^2(Q)} + (\partial_t\underline{u},\partial_t\underline{v})_{L^2_\varepsilon(Q)} + (\mathrm{curl}_x\,\underline{u},\mathrm{curl}_x\,\underline{v})_{L^2_\mu(Q)} \tag{11}$$

对所有 $\underline{u},\underline{v}\ \in\ H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;}\ (Q)$，此外，初始和终端条件在$H_0^{\mathrm{curl};1}\ Q_{;}$ ()中定义良好

证明。由于嵌入 $H^1(0,T;\ L^2(\Omega;\ \mathbb{R}^d))\ \subset C([0,T],L^2(\Omega;\ \mathbb{R}^d))$ 是连续的，见 [21,命题 23.23], 可得 $H^1(0,T;\ L^2(\Omega;\ \mathbb{R}^d))\ \subset\ L^2(Q;\ \mathbb{R}^d)$ 连续嵌入，见[21, 命题 23.2], ；又由于 $H_0(\mathrm{curl};\ \Omega)\ \subset\ L^2(Q;\ \mathbb{R}^d)$，$L^2(0,T;\ H_0(\mathrm{curl};\ \Omega))\ \subset\ L^2(Q;\ \mathbb{R}^d)$ 连续嵌入，见 [21, 命题 23.2]。我们知道 $L^2(Q;\mathbb{R}^d)$ 连续嵌入豪斯多夫空间 $\mathcal{M}_0$，见 [22, 定理 I.1.4], ，其中空间 $\mathcal{M}_0$ 由定义在 Q 上且几乎处处有限的所有勒贝格可测函数组成。因此，$(H^1(0,T;\ L^2(\Omega;\ \mathbb{R}^d))\ L^2(0,T;\ H_0(\mathrm{curl};\ \Omega)))$ 是一个相容对；相容对由较大向量空间中的两个线性子空间构成。在这种情况下，两个空间的交仍是较大空间的线性子空间，并且在取两个范数的最大值时构成巴拿赫空间，即 $H^1(0,T;\ L^2(\Omega;\ \mathbb{R}^d))\ \cap L^2(0,T;\ H_0(\mathrm{curl};\ \Omega))$ 是一个巴拿赫空间，其范数为

$$\|\underline{u}\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^d))\cap L^2(0,T;H_0(\mathrm{curl};\Omega))} = \max\{\|\underline{u}\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^d))},\|\underline{u}\|_{L^2(0,T;H_0(\mathrm{curl};\Omega))}\},$$

参见 [22, 定理 III.1.3]。现在，(11) 定义了一个由内积诱导的范数，并且它与上述范数等价。因此 $H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;}\ (Q)$ 是一个希尔伯特空间。
由于嵌入 $H^1(0,T;\ L^2(\Omega;\ \mathbb{R}^d))\ \subset C([0,T],L^2(\Omega;\ \mathbb{R}^d))$ 是连续的，因此对于 $H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;}\ (Q)$，在边界 $\{t=0\}\times\Omega$ 和 $\{t=T\}\times\Omega$ 上可以良好定义且连续地取迹。由于空间 $H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;0,}\ (Q)$ 和 $H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;,0}\ (Q)$ 是这些迹的核，我们可得它们是希尔伯特空间 $H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;}\ (Q)$ 的闭子集。

□

引理 1.3. 对于空间 $H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;0,}\ (Q)$ 和 $H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;,\ 0}\ (Q)$，存在 $c_f>0$ 使得

$$\|\underline{u}\|_{L^2(Q)} \le c_f\|\partial_t\underline{u}\|_{L^2(Q)}$$

对于所有 $\underline{u} \in H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;0,}(Q)$ 或 $\underline{u} \in H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;,\ 0}(Q)$ $d = 2$，3。因此，半范数

$$|u|^2_{H^{\mathrm{curl};1}(Q)} := \|\partial_t \underline{u}\|^2_{L^2_{\underline{\varepsilon}}(Q)} + \|\operatorname{curl}_x \underline{u}\|^2_{L^2_{\underline{\mu}}(Q)},$$

是 $H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;0,}(Q)$和 $H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;,0}(Q)$中的等价范数。

只需利用 $H^1(0,T)$ 中的庞加莱不等式以及范数$\|\cdot\|_{H^1(0,T;X)}$的结构即可证明这一点，更多细节参见例如 [16, 第 4 节。1]

1.3.1 基表示

要在 $H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;}(Q)$ 中推导基表示，我们首先必须说明如何分解H_0(curl; Ω)。 $H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;}(Q)$ 的基表示将在唯一性与可解性主定理的证明中用到。为了更好地理解证明，我们先快速推导这一分解。定义子空间

$$H(\operatorname{div}\epsilon 0;\Omega) := \left\{\underline{f} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) :\ \operatorname{div}_x(\epsilon\underline{f}) = 0\right\} \subset L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$$

赋予加权内积 $(\cdot,\cdot)_{L^2_{\underline{\varepsilon}}(\Omega)}$，而子空间

$$X_{0,\epsilon}(\Omega) := H_0(\operatorname{curl};\Omega) \cap H(\operatorname{div}\epsilon 0;\Omega) \subset H_0(\operatorname{curl};\Omega)$$

配备内积 $(\cdot,\cdot)_{H_{0,\epsilon,\mu}(\mathrm{curl};\Omega)}$。采用这一记号，我们回顾一个关键的分解结果，即 H_0(curl;Ω) 的亥姆霍兹–外尔分解 (12)。

引理 1.4。 假设假设 *1* 成立。则正交分 n

$$H_0(\operatorname{curl};\Omega) = \nabla_x H_0^1(\Omega) \oplus X_{0,\epsilon}(\Omega) \tag{12}$$

解成立，其中正交性分别是相对于$(\cdot,\ \cdot)_{H_{0,\ \epsilon,\ \mu}(\text{旋度};\ \Omega)}$、$(\cdot,\ \cdot)_{H_{0,\ \mu}(\text{旋度};\ \Omega)}$ 以及$(\cdot,\ \cdot)_{L^2_{\underline{\varepsilon}}(\Omega)}$而言的。

证明。 对于 $d = 3$，结果见 [15, 命题 7.4.3]。此外，对于 $d \in \{2,3\}$，这些分解可由相应 de Rham 复形的性质得出，参见例如[17,第 2 节。3], [10, 引理 2.7、引理 3.6、定理 5.5]。 □

引理 1.5。 空间 H_0(旋度；Ω) 具有一个基本系 $\{\underline{\varphi}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$，它在 $L^2_{\underline{\varepsilon}}$(Ω)内积下是正交归一的。此外，$\{\underline{\varphi}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 的构造方式使得对于每个 $k \in \mathbb{N}_0$，都存在一个 $\lambda_k > 0$，使得

$$(\operatorname{curl}_x \underline{\varphi}_k, \operatorname{curl}_x \underline{v})_{L^2_{\underline{\mu}}(\Omega)} = \lambda_k(\underline{\varphi}_k, \underline{v})_{L^2_{\underline{\varepsilon}}(\Omega)}$$

对于所有 $\underline{v} \in X_{0,\underline{\varepsilon}}$(Ω)，对于 $k \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}_0$，存在一个 $\lambda_k > 0$ 和 $\phi_k \in H_0^1$(Ω)，使得 $\underline{\varphi}_k = \nabla_x\phi_k$ 并且

$$(\nabla_x\phi_k, \nabla_x v)_{L^2_{\underline{\varepsilon}}(\Omega)} = \lambda_k(\phi_k, v)_{L^2_{\underline{\varepsilon}}(\Omega)}.$$

对所有 $v \in H_0^1$(Ω)。

证明。 对于 $\nabla H_0^1(\Omega)$，我们通过拉普拉斯特征值问题得到一个正交归一基：求 $(\lambda_k, \phi_k) \in (\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$， $k \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}_0$，使得对所有 $v \in H_0^1(\Omega)$

$$(\nabla_x \phi_k, \nabla_x v)_{L^2_\varepsilon(\Omega)} = \lambda_k (\phi_k, v)_{L^2_\varepsilon(\Omega)} \quad \text{and} \quad \|\nabla_x \phi_k\|_{L^2_\varepsilon(\Omega)} = 1.$$

该特征值问题的解是一列非递减的相关特征值$\lambda_k > 0$，满足 $\lambda_k \to \infty$ 当 $k \to -\infty$时，参见第 4]章第 [35, 节。

接下来，我们研究以下特征值问题：
求$(\lambda_k, \underline{\varphi}_k) \in (\mathbb{R}, X_{0,\varepsilon}(\Omega))$，$k \in \mathbb{N}_0$，使得对所有$\underline{v} \in X_{0,\varepsilon}(\Omega)$

$$(\underline{\varphi}_k, \underline{v})_{H_{0,\varepsilon,\mu}(\mathrm{curl};\Omega)} = (1+\lambda_k)(\underline{\varphi}_k, \underline{v})_{L^2_\varepsilon(\Omega)} \quad \text{and} \quad \left\|\underline{\varphi}_k\right\|_{L^2_\varepsilon(\Omega)} = 1. \tag{13}$$

特征函数集合$\{\underline{\varphi}_k \in X_{0,\varepsilon}(\Omega) : \ k \in \mathbb{N}_0\}$ 构成了 $H(\mathrm{div}\ \varepsilon 0; \Omega)$关于$(\cdot,\cdot)_{L^2_\varepsilon(\Omega)}$的正交归一基。此外，相关特征值的非递减序列$(1+\lambda_k)$满足 $\lambda_k \to \infty$ 当 $k \to \infty$时，参见 [15, 定理 8.2。4]。注意， $\lambda_k > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$。这可以通过估计

$$0 < c_P(\underline{\varphi}_k, \underline{\varphi}_k)_{L^2_\varepsilon(\Omega)} \le (\mathrm{curl}_x\, \underline{\varphi}_k, \mathrm{curl}_x\, \underline{\varphi}_k)_{L^2_\mu(\Omega)} = (\underline{\varphi}_k, \underline{\varphi}_k)_{H_{0,\varepsilon,\mu}(\mathrm{curl};\Omega)} - (\underline{\varphi}_k, \underline{\varphi}_k)_{L^2_\varepsilon(\Omega)} = \lambda_k$$

利用庞加莱–斯捷克洛夫不等式（例如参见 [5, 引理 44.4], ）以及 $\underline{v} = \underline{\varphi}_k$ 的变分公式（13），即可得到所需结果。

此外，根据构造，集合 $\{(1+\lambda_k)^{-1/2}\underline{\varphi}_k \in X_{0,\ \varepsilon}(\Omega) : \ k \in \mathbb{N}_0\}$ 是 $X_{0,\ \varepsilon}(\Omega)$ 关于 $(\cdot,\cdot)_{H_{0,\ \varepsilon,\ \mu}(\text{旋度};\Omega)}$ 的正交归一基，参见（13）；又由于 $X_{0,\ \varepsilon}(\Omega) \subset H(\mathrm{div}\ \varepsilon 0; \Omega)$。此外，我们看到集合 $\{\underline{e}_j \in X_{0,\varepsilon}(\Omega) : \ j \in \mathbb{N}_0\}$ 关于 $(\text{旋度}_x\, \cdot, \text{旋度}_x\, \cdot)_{L^2_\mu(\Omega)}$ 也是正交的，因为根据庞加莱–斯捷克洛夫不等式，它是 $X_{0,\ \varepsilon}(\Omega)$ 上的等价范数，参见 [5, 引理 44.4]。

然后，利用引理 1.4，我们得到 $H_0(\mathrm{curl};\Omega)$ 的所需正交归一基，其集合为$\{\nabla\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}_0} \cup \{(1+\lambda_k)^{-1/2}\underline{\varphi}_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$，且关于 $(\cdot,\cdot)_{H_{0,\varepsilon,\mu}(\mathrm{curl};\Omega)}$正交。 □

现在我们已经知道 $H_0(\mathrm{curl};\Omega)$ 的基本系，可以将 $\underline{w} \in H_0(\mathrm{curl};\Omega)$ 写为

$$\underline{w}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k \underline{\varphi}_k(x), \quad x \in \Omega,$$

其系数为 $w_k = (\underline{w}, \underline{\varphi}_k)_{L^2_\varepsilon(\Omega)}$ $k \in \mathbb{Z}.$。这个基表示在 $H_0(\mathrm{curl};\Omega)$ 中收敛。于是，半范数 $|\cdot|_{H_{0,\mu}(\mathrm{curl};\Omega)}$ 和范数 $\|\cdot\|_{H_{0,\varepsilon,\mu}(\mathrm{curl};\Omega)}$ 可表示为

$$|\underline{w}|^2_{H_{0,\mu}(\mathrm{curl};\Omega)} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\lambda_k}_{>0} |w_k|^2, \quad \|\underline{w}\|^2_{H_{0,\varepsilon,\mu}(\mathrm{curl};\Omega)} = \sum_{k=0}^{\infty} (1+\lambda_k)\,|w_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |w_{-k}|^2. \tag{14}$$

设 $\underline{v} \in H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;}(Q)$。由 [21, 命题 23.23] 可知， $\underline{v}$在 $[0,T]$ 上几乎处处与一个连续映射 $\underline{v}$: $[0,T] \to H_0(\mathrm{curl};\Omega)$ 重合。因此，对于 $t \in [0,T]$，我们可以写为

$$\underline{v}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t)\underline{\varphi}_k, \tag{15}$$

对于某些系数函数 v_k： $[0,T] \to \mathbb{R}$。

1.4 变分形式

为推导出适用于（7）的变分形式，我们将偏微分方程乘以一个检验函数。分别对时间和空间进行分部积分后，得到以下变分形式：

求解 $\underline{A} \in H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;}(Q)$，其中 $\underline{A}(0,.) = \underline{\phi}$，使得

$$-(\varepsilon\partial_t\underline{A},\partial_t\underline{v})_{L^2(Q)} + (\sigma\partial_t\underline{A},\underline{v})_{L^2(Q)} + \left(\mu^{-1}\operatorname{curl}_x\underline{A},\operatorname{curl}_x\underline{v}\right)_{L^2(Q)} \tag{16}$$
$$= \left(\underline{j}_a,\underline{v}\right)_{L^2(Q)} - \left(\varepsilon\underline{\psi},\underline{v}(0,\cdot)\right)_{L^2(\Omega)}$$

对所有 $\underline{v} \in H_{0.0}^{\mathrm{curl};1}{}_{;,}(Q)$ 均成立。

注意，初始条件 $\partial_t\underline{A}(0) = \underline{\psi}$ 以弱意义纳入了变分形式，而其他条件 $\underline{A}(0) = \underline{\phi}$ 和 $\gamma_t\underline{A} = 0$ 则属于试探空间，因此以强意义满足。在式 (16) 中，我们看到了该方程的主要问题：第一项与空间微分算子前的符号不同。因此，由变分形式 (16) 左端定义的双线性形式 (17) 不等价于任何内积。然而，如果 σ 较大，它就会对方程起到稳定化作用。数值分析中也能看到这一现象。

本文将考察双线性形式

$$a_Q(\underline{A},\underline{v}) := -(\varepsilon\partial_t\underline{A},\partial_t\underline{v})_{L^2(Q)} + (\sigma\partial_t\underline{A},\underline{v})_{L^2(Q)} + (\mu^{-1}\operatorname{curl}_x\underline{A},\operatorname{curl}_x\underline{v})_{L^2(Q)}, \tag{17}$$

对于 $\underline{A} \in H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;}(Q)$ 和 $\underline{\phi} \in H_{0.0}^{\mathrm{curl};1}{}_{;,}(Q)$。此外，我们将式（16）的右端项写成线性形式

$$F(\underline{v}) := \left(\underline{j}_a,\underline{v}\right)_{L^2(Q)} - \left(\varepsilon\underline{\psi},\underline{v}(0,\cdot)\right)_{L^2(\Omega)}. \tag{18}$$

2 存在性和唯一性

现在陈述变分形式（16）的主要存在唯一性结果。

定理 2.1。 假设 *1* 成立，则变分形式存在唯一解：

求 $\underline{A} \in H^{\mathrm{cur}\ \ 1}{}_{;\,1\,0;}(Q)$ 其中 $\underline{A}(0,\ 。) = \underline{\phi}$，使得

$$-(\varepsilon\partial_t\underline{A},\partial_t\underline{v})_{L^2(Q)} + (\sigma\partial_t\underline{A},\underline{v})_{L^2(Q)} + \left(\mu^{-1}\operatorname{curl}_x\underline{A},\operatorname{curl}_x\underline{v}\right)_{L^2(Q)} = \left(\underline{j}_a,\underline{v}\right)_{L^2(Q)} - \left(\varepsilon\underline{\psi},\underline{v}(0,\cdot)\right)_{L^2(\Omega)}$$

对于所有 $\underline{v} \in H_{0.0}^{\mathrm{curl};1}{}_{;,}(Q)$。

如果还 满足 $\underline{j}_a \in L^2(Q;\ \mathbb{R}^d)$，则存在正数常数 c_ϕ、 c_ϕ^c、 c_ψ 和 c_f，使得 t

$$|\underline{A}|^2_{H^{\mathrm{curl};1}(Q)} \le c_\phi\|\underline{\phi}\|^2_{L^2_{\tilde{\varepsilon}}(\Omega)} + c_\phi^c T\|\operatorname{curl}_x\underline{\phi}\|^2_{L^2_{\tilde{\mu}}(\Omega)} + c_\psi T\|\underline{\psi}\|^2_{L^2_{\tilde{\varepsilon}}(\Omega)} + c_f\max\{T,T^2\}\|\underline{j}_a\|^2_{L^2_{\tilde{\varepsilon}}(Q)}.$$

为证明该定理，我们将采用Galerkin方法，并将证明分为三个不同的步骤。首先，我们在命题 1 中证明存在性。随后，我们在命题 2 中证明唯一性。最后，我们在命题 3 中推导范数估计，并讨论系数 c_ϕ、 c_ϕ^c、 c_ψ 和 c_f 的依赖关系。

2.1 存在性

我们将首先证明变分形式 (16) 的存在性。为此，我们需要陈述两个将在命题 1 的存在性证明中使用的小结果。

引理 2.2。 设假设 *1* 成立，且 $\underline{u} \in H^2(0,T;\, L^2(\Omega;\, \mathbb{R}^d)) \cap L^2(0,T;\, H_0(\text{旋度};\, \Omega)), d = 2,3$，其中 $\underline{u}|_{t=0} = \underline{\phi}$ 和 $\partial_t \underline{u}|_{t=0} = \underline{\psi}$ 是下式的解

$$(\varepsilon \partial_{tt} \underline{u}(t), \partial_t \underline{u}(t))_{L^2(\Omega)} + \left(\mu^{-1} \operatorname{curl}_x \underline{u}(t), \operatorname{curl}_x \partial_t \underline{u}(t)\right)_{L^2(\Omega)} \leq \left(\underline{j}(t), \partial_t \underline{u}(t)\right)_{L^2(\Omega)}, \tag{19}$$

对每个 $t \in (0,T)$ 和 $\underline{j} \in L^1(0,T;\, L^2(\Omega;\, \mathbb{R}^d))$，均成立。于是

$$z^{1/2}(t) := \left(\int_\Omega \left(|\underline{u}|^2 + |\partial_t \underline{u}|^2 + |\operatorname{curl}_x \underline{u}|^2 \right)(t,x)\, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \leq c_2(T) z^{1/2}(0) + c_3(T) \|\underline{j}\|_{2,1,Q},$$

对所有 $t \in [0,T]$ 均成立。常数 c_2 和 c_3 取决于 $T, \varepsilon_{\min}, (\mu^{\max})^{-1}, \varepsilon^{\max}$ 以及 $(\mu_{\min})^{-1}$。

证明。 遵循 [35, 第 4 章 2] 中的思路，我们可以将标量波动方程的结果推广到矢量波动方程。首先，对 (19) 在区间 $(0,t)$ 上积分，并使用 Fubini 定理和微积分基本定理。然后利用假设 1 进行估计，得到

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left[\varepsilon_{\min} (\partial_t u)^2(t,x) + (\mu^{\max})^{-1} (\operatorname{curl}_x u)^2(t,x) \right] \, dx \leq & \int_\Omega \left[\varepsilon^{\max} (\partial_t u)^2(0,x) + (\mu_{\min})^{-1} (\operatorname{curl}_x u)^2(0,x) \right] \, dx \\ & + 2 \int_0^t \int_\Omega j(s,x) \partial_t u(s,x) \, dx \, ds. \end{aligned}$$

利用 $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ 和柯西-施瓦茨不等式，可得对于 $s > 0$

$$\begin{aligned} \|u(s,.)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \left\| u(0,.) + \int_0^s 1 \cdot \partial_t u(t,.) \, dt \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2\|u(0,.)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2s \|u\|^2_{L^2((0,s)\times\Omega)} + \|\partial_t u\|^2_{L^2((0,s)\times\Omega)} + \|\operatorname{curl}_x u\|^2_{L^2((0,s)\times\Omega)}. \end{aligned}$$

将两个方程相加，可得对于 $z(t) = \|u(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\partial_t u(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\text{旋度}_x u(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)}$ 不等式

$$\min(1, \varepsilon_{\min}, (\mu^{\max})^{-1}) z(t) \leq \max(2, \varepsilon^{\max}, (\mu_{\min})^{-1}) z(0) + 2 \int_0^t \|j\|_{L^2(\Omega)} z^{1/2}(s) \, ds + 2t \int_0^t z(s) \, ds.$$

对所有 $t \in [0,T]$ 均成立。于是我们写作

$$a := \max(2, \varepsilon^{\max}, (\mu_{\min})^{-1}), b := \min(1, \varepsilon_{\min}, (\mu^{\max})^{-1})$$

并定义 $\hat{z}(t) = \max_{0\le\xi\le t} z(\xi)$，得到

$$b\hat{z}(t) \le az(0) + 2\|j\|_{L^{2,1}(Q)}\hat{z}^{1/2}(t) + 2t^2\hat{z}(t). \tag{20}$$

解这个不等式，并注意到 $\hat{z}^{1/2}(t) \ge 0$，可得

$$\hat{z}^{1/2}(t) \le \frac{2\|j\|_{L^{2,1}(Q)} + \sqrt{4\|j\|^2_{L^{2,1}(Q)} + 4(b-2t^2)az(0)}}{2(b-2t^2)}.$$

利用 $\sqrt{a^2+b^2} \le (a+b)$，对于 $a, b \ge 0$，并考虑 $t \le \min(\sqrt{\frac{b}{4}}, T)$，可得

$$\hat{z}^{1/2}(t) \le \frac{2+2}{b}\|j\|_{L^{2,1}(Q)} + \sqrt{\frac{2}{b}}\sqrt{a}z^{1/2}(0)$$

因为 $2(b-2t^2) \ge b$。若 $\sqrt{\frac{b}{4}} < T$，则证明完毕。否则，我们选择 $t_1 = \sqrt{\frac{b}{4}}$ 作为初值，而非 $t = 0$，并重复上述计算，以得到所需结果。

□

推论 2.3. 设假设 *1* 成立。设 $\underline{A} \in H^2(0,T;\, H(\text{旋度};\Omega))$ 满足 $\underline{A}|_{t=0} = \underline{\phi}$，且 $\partial_t\underline{A}|_{t=0} = \underline{\psi}$ 是以下方程的解

$$(\varepsilon\partial_{tt}\underline{A}(t)\ \partial_t\underline{A}(t))_{L^2(\Omega)} + (\sigma\partial_t\underline{A}(t)\ \partial_t\underline{A}(t))_{L^2(\Omega)} + (\mu^{-1}\,\text{旋度}_x\,\underline{A}(t), \text{旋度}_x\,\partial_t\underline{A}(t))_{L^2(\Omega)} = (\underline{j}_a(t)\ \partial_t\underline{A}(t))_{L^2(\Omega)}$$

对于每个 $t \in (0,\ T)$ 以及 $\underline{j}_a \in L^1(0,\ T;\ L^2(\Omega;\ \mathbb{R}^d))$。于是我们推导出

$$z^{1/2}(t) := \left(\int_\Omega \left(|\underline{A}|^2 + |\partial_t\underline{A}|^2 + |\operatorname{curl}_x\underline{A}|^2\right)(t,x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \le c_2(t)z^{1/2}(0) + c_3(t)\|\underline{j}_a\|_{2,1,Q},$$

对于所有 $t \in [0,T]$。常数 c_2 和 c_3 取决于 $\varepsilon_{\min}$、$(\mu^{\max})^{-1}$、$\varepsilon^{\max}$、$(\mu_{\min})^{-1}$ 以及T。

证明。 利用 σ 的半正定性，我们计算得到

$$(\varepsilon\partial_{tt}\underline{A}(t), \partial_t\underline{A}(t))_{L^2(\Omega)} + (\mu^{-1}\operatorname{curl}_x\underline{A}(t), \operatorname{curl}_x\partial_t\underline{A}(t))_{L^2(\Omega)} \le (\underline{j}_a(t), \partial_t\underline{A}(t))_{L^2(\Omega)}.$$

对于每个 $t \in (0,T)$。因此，我们可以使用引理 2.2 证明所需的估计。 □

现在，我们准备证明变分形式 (16) 的解的存在性。

命题 1 (存在性)。 设假设 *1* 成立。则变分形式 (16) 存在一个解。

证明。 由假设 1，考虑 $\Omega_\sigma := \Omega \cap \text{supp}(\sigma)$，它是一个 Lipschitz 区域。本证明的主要思路是将该微分方程拆分为定义在不同区域上的两个方程，即一个区域是电导率 σ 的支集 Ω_σ，另一个是 $\Omega\backslash\Omega_\sigma$。然后将这些解相加，以证明存在性。所得到的解就是该解

在界面 $\partial\Omega_\sigma \setminus \partial\Omega$ 上具有零切向迹的界面问题的解。因此，我们来看看区域 Ω_σ 上得到的方程。

1. 在区域 Ω_σ 上，我们现在采用 Galerkin方法。定义双线性形式

$$a_{\Omega_\sigma}(\underline{A}(t), \underline{\phi}) \coloneqq (\varepsilon \partial_{tt} \underline{A}(t), \underline{\phi})_{L^2(\Omega_\sigma)} + (\sigma \partial_t \underline{A}(t), \underline{\phi})_{L^2(\Omega_\sigma)} + (\mu^{-1} \operatorname{curl}_x \underline{A}(t), \operatorname{curl}_x \underline{\phi})_{L^2(\Omega_\sigma)}, \tag{21}$$

对于 $\underline{\phi} \in H(\operatorname{curl}; \Omega_\sigma)$、 $t \in (0, T)$。我们考虑 $\{\underline{\varphi}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$，即引理 1.5 中针对 $\Omega = \Omega_\sigma$的 $H_0(\operatorname{curl}; \Omega_\sigma)$ 的基本系。令 $N \in \mathbb{N}$。利用基表示 (15)，我们接下来寻求一个

$$\underline{A}^N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k^N(t) \underline{\varphi}_k(x) \tag{22}$$

它满足

$$\begin{aligned} a_{\Omega_\sigma}(\underline{A}^N(t), \underline{\varphi}_l) &= (\underline{j}_a(t), \underline{\varphi}_l)_{L^2(\Omega_\sigma)}, \\ \frac{d}{dt} a_k^N(t) &= (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)_{L^2(\Omega_\sigma)}, \\ a_k^N(0) &= \alpha_k^N, \end{aligned} \tag{23}$$

对所有 $l, k \in \mathbb{Z}_N \coloneqq \{z \in \mathbb{Z} \colon |z| \leq N\}$ 均成立，其中 α_k^N是

$$\underline{\phi}^N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k^N \underline{\varphi}_k(x),$$

且 $\underline{\phi}^N \to \underline{\phi}$属于 $H_0(\operatorname{curl}; \Omega_\sigma)$，其中 $N \to \infty$。我们有 $\underline{A}^N(0, x) = \underline{\phi}^N(x)$，并定义 $f_k \coloneqq (\underline{j}_a, \underline{\varphi}_k)_{L^2(\Omega_\sigma)}$。

由于 σ 在 Ω_σ上是一致正定且有界的，因此所诱导的加权内积 $(\sigma \cdot, \cdot)_{L^2(\Omega_\sigma)}$ 等价于 $(\varepsilon \cdot, \cdot)_{L^2(\Omega_\sigma)}$。因此，存在一个 $\beta_k \in \mathbb{R}_+$使得

$$(\sigma \underline{\varphi}_k, \underline{\varphi}_l)_{L^2(\Omega_\sigma)} = \beta_k \delta_{kl}$$

对于 k、$l \in \mathbb{Z}_N$。这些 β_k有下界 $\sigma_{\min}$。

接下来，我们结合所有结果，得到对于 $t \in (0, T)$ 和 $k = 0, \ldots, N$，有

$$\begin{aligned} a_k''^N(t) + \beta_k a_k'^N(t) + \lambda_k a_k^N(t) &= f_k(t), \\ a_k'^N(0) &= (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)_{L^2(\Omega_\sigma)}, \\ a_k^N(0) &= \alpha_k^N \end{aligned} \tag{24}$$

其中 $\underline{\varphi}_k$是 Ω_σ 中 $\operatorname{curl}_x \mu^{-1} \operatorname{curl}_x$ 的特征函数，并且对于 $k = -N, \ldots, -1$

$$\begin{aligned} a_k''^N(t) + \beta_k a_k'^N(t) &= f_k(t), \\ a_k'^N(0) &= (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)_{L^2(\Omega_\sigma)}, \\ a_k^N(0) &= \alpha_k^N \end{aligned} \tag{25}$$

其中 $\underline{\varphi}_k$ 是旋度$_x$ μ^{-1}旋度$_x$的核的一部分。可以使用常微分方程的标准方法（例如 [32, L. 20、L. 21]）计算解。解为

在 $f_k \in L^1(0,T)$ 上定义良好。因此，对于 $\underline{j}_a \in L^1(0,T;\, L^2(\Omega_\sigma))$，存在一个解$\underline{A}^N \in C^2(0,T;\, H(旋度;\Omega_\sigma))$。若将 (23) 乘以 $c_l'^N(t)$，并对 $l=-N$、.....、N 求和，则利用 (21) 可得

$$a_{\Omega_\sigma}(\underline{A}(t),\partial_t\underline{A}(t)) = (\underline{j}_a(t),\partial_t\underline{A}^N(t))_{L^2(\Omega_\sigma)},$$

对于 $t\in[0,T]$。这满足应用推论 2.3 的条件，由此可得

$$\left(\int_{\Omega_\sigma} \left|\underline{A}^N(t)\right|^2 + \left|\partial_t\underline{A}^N(t)\right|^2 + \left|\operatorname{curl}_x \underline{A}^N(t)\right|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leq c_2(t)(z^N)^{1/2}(0) + c_3(t)\|\underline{j}_a\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega_\sigma))}$$

对于每个 $t\in(0,T)$。根据构造， c_2和 c_3均单调递增，因此分别由 $c_2(T)$ 和 $c_3(T)$ 有界。此外，根据贝塞尔不等式，我们还得到 $[11,\text{定理 }1.7.1]$, 属于 $H(旋度;\Omega_\sigma)$ 和 $L^2(\Omega_\sigma)$

$$z^N(0) = \int_{\Omega_\sigma} \left|\underline{\phi}^N\right|^2 + \left|\underline{\psi}^N\right|^2 + \left|\operatorname{curl}_x \underline{\phi}^N\right|^2 \,\mathrm{d}x \leq c\|\underline{\phi}\|^2_{H(\operatorname{curl};\Omega_\sigma)} + c\|\underline{\psi}\|^2_{L^2(\Omega_\sigma)}$$

我们定义 $Q_\sigma := [0,T]\times\Omega_\sigma$。因此

$$\|\underline{A}^N\|_{H^{\operatorname{curl};1}(Q_\sigma)} \leq c\|\underline{\phi}\|^2_{H(\operatorname{curl};\Omega_\sigma)} + \tilde{c}\|\underline{\psi}\|^2_{L^2(\Omega_\sigma)} + \hat{c}\|j_a\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega_\sigma))} < C,$$

其中 C 与 N无关。

现在，我们希望将存在性转移到时空变分形式 (16)。我们将 $\underline{A}^N(t,x) = \underline{A}_0^N(t,x) + \underline{\phi}^N(x)$ 分解。由于$\|\underline{\phi}^N\|_{H(\operatorname{curl};\Omega_\sigma)}$根据贝塞尔不等式由$\|\phi\|_{H(\operatorname{curl};\Omega_\sigma)}$有界，序列 $(\underline{A}_0^N)_{N\in\mathbb{N}}$ 也有界。空间

$$H^{\operatorname{curl};1}_{0;}(Q_\sigma) = H^1(0,T;L^2(\Omega_\sigma)) \bigcap L^2(0,T;H_0(\operatorname{curl};\Omega_\sigma))$$

是一个希尔伯特空间，见引理 1.2。因此，$(\underline{A}_0^N)_{N\in\mathbb{N}}$ 存在一个弱收敛子列。为方便起见，我们将该子列记为 $\{\underline{A}_0^N\}_N$。于是，存在一个 $\underline{A}_0 \in H_0^{\operatorname{curl};1}{}_{;0,}(Q_\sigma)$，使得

$$\begin{aligned}
\underline{A}_0^N &\rightharpoonup \underline{A}_0 && \text{in } L^2(Q_\sigma),\\
\partial_t\underline{A}_0^N &\rightharpoonup \partial_t\underline{A}_0 && \text{in } L^2(Q_\sigma),\\
\operatorname{curl}_x \underline{A}_0^N &\rightharpoonup \operatorname{curl}_x \underline{A}_0 && \text{in } L^2(Q_\sigma).
\end{aligned}$$

我们构造了 $\underline{A}_0^N$，使得

$$a_{\Omega_\sigma}(\underline{A}_0^N(t),\underline{\varphi}_l) = (\underline{j}_a(t),\underline{\varphi}_l)_{L^2(\Omega_\sigma)} - (\mu^{-1}\operatorname{curl}_x \underline{\phi}^N, \operatorname{curl}_x \underline{\varphi}_l)_{L^2(\Omega_\sigma)}$$

对所有 $l=-N,..,N$, $t\in(0,T)$。令 $M\in\mathbb{N}$。取 $N>M$和 $d_l\in H^1(0,T)$，其中$d_l(T)=0$, $l=-M,\dots,M$。将方程乘以 d_l，并对 $l=-M,\dots,M$ 求和。M此外，对于 $\underline{\eta}(t,x) := \sum_{l=-M} d_l(t)\underline{\varphi}_l(x)$ 和 $t\in(0,T)$，我们得到方程

$$a_{\Omega_\sigma}(\underline{A}_0^N(t),\underline{\eta}) = (\underline{j}_a(t),\underline{\eta})_{L^2(\Omega_\sigma)} - (\mu^{-1}\operatorname{curl}_x \underline{\phi}^N, \operatorname{curl}_x \underline{\eta})_{L^2(\Omega_\sigma)}.$$

在 $(0,T)$ 上积分，并对第一项使用分部积分，可得到双线性形式 (17) 以及

$$a_{Q_\sigma}(\underline{A}_0^N, \underline{\eta}) = (\underline{j}_a, \underline{\eta})_{L^2(Q_\sigma)} - (\varepsilon \partial_t \underline{A}^N|_{t=0}, \underline{\eta}|_{t=0})_{L^2(\Omega_\sigma)} - (\mu^{-1} \operatorname{curl}_x \underline{\phi}^N, \operatorname{curl}_x \underline{\eta})_{L^2(Q_\sigma)}.$$

接下来，我们取极限 $N \to \infty$。由于 $\underline{\eta}$、$\partial_t \underline{\eta}$ 和旋度$_x\, \underline{\eta}$属于 $L^2(Q_\sigma; \mathbb{R}^d)$，由弱收敛可得

$$a_{Q_\sigma}(\underline{A}_0, \underline{\eta}) = (\underline{j}_a, \underline{\eta})_{L^2(Q_\sigma)} - (\varepsilon \underline{\psi}, \underline{\eta}(0,.))_{L^2(\Omega_\sigma)} - (\mu^{-1} \operatorname{curl}_x \underline{\phi}, \operatorname{curl}_x \underline{\eta})_{L^2(Q_\sigma)}.$$

M该方程对所有满足表示形式 $\sum_{l=-M} d_l(t)\underline{\varphi}_l(x)$ 的 η 均成立。令 $\mathcal{M}_M$ 为这类函数构成的空间$_\infty$。对于每个 $M \in \mathbb{N}$，我们都可以重复上述论证。空间 $\bigcup \mathcal{M}_M$ 在 $L^2(0,T; H_0($旋度; $\Omega_\sigma))$ 中$_{M=1}$稠密，因为我们可以用这样的和逼近任意单元，见 [21, 命题 23.2d]。因此，上述方程对每个 $\eta \in H_0^{\operatorname{curl};1}$; , $_0$ (Q_σ) 均成立，所以 $\underline{A}$ 是我们微分方程在 $H_0^{\operatorname{curl};1}$; $_0$, (Q_σ) 中的弱解。

2. 现在考虑空间区域 $\Omega_0 := \Omega \backslash \Omega_\sigma$，以及时空域 $Q_0 := \overline{(0,T)} \times \Omega_0$，其中 σ 为零。我们再次考虑试探形式 (22) 和方程

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \partial_{tt} \underline{A}^N(t), \underline{\varphi}_l)_{L^2(\Omega_0)} + (\mu^{-1} \operatorname{curl}_x \underline{A}^N(t), \operatorname{curl}_x \underline{\varphi}_l)_{L^2(\Omega_0)} &= (\underline{j}_a(t), \underline{\varphi}_l)_{L^2(\Omega_0)}, \\
\frac{d}{dt} a_k^N(t) &= (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)_{L^2(\Omega_\sigma)}, \\
a_k^N(0) &= \alpha_k^N
\end{aligned} \tag{26}$$

对于 $l, k \in \mathbb{Z}_N$。接着，我们沿用之前相同的步骤，并用以下方程替代方程 (24) 和 (25)：

$$\begin{aligned}
a_k''^N(t) + \lambda_k a_k^N(t) &= f_k(t), \\
a_k'^N(0) &= (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)_{L^2(\Omega_0)}, \\
a_k^N(0) &= \alpha_k^N
\end{aligned} \tag{27}$$

对于 $t \in (0,T)$ 和 $\lambda_k > 0$，对于 $k = 0, \ldots, N$，即 $\underline{\varphi}_k$是 Ω_0, 中旋度$_x\, \mu^{-1}$旋度$_x$ 的特征函数；对于 $k = -N, \ldots, -1$， $\lambda_k = 0$，其中 $\underline{\varphi}_k$是 Ω_0 中旋度$_x\, \mu^{-1}$旋度$_x$ 的核的一部分。常微分方程 (27) 对 $f_k \in L^1(0,T)$ 有唯一解，并且可以使用标准方法求解，例如 [32, L. 20, L. 21]。将 (26) 乘以 $c_l'^N(t)$ 并对 $l = -N, \ldots, N$ 求和，根据 (21) 可得

$$(\varepsilon \partial_{tt} \underline{A}^N(t), \underline{A}^N(t))_{L^2(\Omega_0)} + (\mu^{-1} \operatorname{curl}_x \underline{A}^N(t), \operatorname{curl}_x \underline{A}^N(t))_{L^2(\Omega_0)} = (\underline{j}_a(t), \underline{A}^N(t))_{L^2(\Omega_0)}.$$

这满足应用引理 2.2 的条件，由此可得

$$\left(\int_{\Omega_0} \left|\underline{A}^N(t)\right|^2 + \left|\partial_t \underline{A}^N(t)\right|^2 + \left|\operatorname{curl}_x \underline{A}^N(t)\right|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \leq c_2(t)(z^N)^{1/2}(0) + c_3(t) \|\underline{j}_a\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega_0))}$$

对每个 $t \in (0,T)$ 和 $z^N(0) = \|\underline{\phi}^N\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \left\|\underline{\psi}^N\right\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \left\|$旋度$_x\, \underline{\phi}^N\right\|^2_{L^2(\Omega_0)} \leq c\|\underline{\phi}\|^2_{H(\operatorname{curl};\Omega_0)} + c\|\underline{\psi}\|^2_{L^2(\Omega_0)}$。因此，我们有 $(\underline{A}^N)_N$、(旋度$_x\, \underline{A}^N)_N$ 和 $(\partial_t \underline{A}^N)_N$ 在

$L^2(Q)$。按照上述相同的论证过程，我们可以看到，极限 $\underline{A} \in H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;0,}(Q_0)$ 确实是

$$-(\varepsilon\partial_t\underline{A},\partial_t\underline{v})_{L^2(Q_0)}+(\mu^{-1}\operatorname{curl}_x\underline{A}^N,\operatorname{curl}_x\underline{v})_{L^2(Q_0)}=(\underline{j}_a(t),\underline{v})_{L^2(Q_0)}-\left(\varepsilon\underline{\psi},\underline{v}(0,\cdot)\right)_{L^2(\Omega_0}$$

满足 $\underline{A}(0,.)=\underline{\phi}$。将区域 Q_0 和 Q_σ 上的两个解相加，即可得到存在性 .

□

2.2 唯一性

接下来，我们考察变分形式 (16) 的解的唯一性，其中双线性形式为 (17)，右端项为 (18)。

命题 2 (唯一性)。 假设假设 *1* 成立。那么变分形式 (16) 存在唯一解。

证明。 在命题 1 中，我们已经证明了存在性。接下来需要证明的是唯一性。假设存在两个解 $\underline{A}'$ 和 $\underline{A}''$，那么 $\underline{w}:=\underline{A}'-\underline{A}''$ 满足变分形式

$$-(\varepsilon\partial_t\underline{w},\partial_t\underline{v})_{L^2(Q)}+(\sigma\partial_t\underline{w},\underline{v})_{L^2(Q)}+(\mu^{-1}\operatorname{curl}_x\underline{w},\operatorname{curl}_x\underline{v})_{L^2(Q)}=0$$

对于所有 $\underline{v}\in H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;,0}(Q)$。此外，对于 $x\in\Omega$， $\underline{w}(0,x)=0$ 成立。任取 $b\in[0,T]$，并考虑

$$\underline{\eta}(t,x):=\begin{cases}\int_b^t\underline{w}(\tau,x)\,\mathrm{d}\tau, & \text{for } 0\le t\le b,\\ 0, & \text{for } b\le t\le T.\end{cases}$$

于是 $\underline{\eta}\in H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;,0}(Q)$，其中 $\underline{\eta}(t,x)=0$，适用于 $t\ge b$，从而对于 $\underline{v}=\underline{\eta}$，我们得到:

$$-(\varepsilon\partial_t\underline{w},\partial_t\underline{\eta})_{L^2(Q_{(0,b)})}+(\sigma\partial_t\underline{w},\underline{\eta})_{L^2(Q_{(0,b)})}+(\mu^{-1}\operatorname{curl}_x\underline{w},\operatorname{curl}_x\underline{\eta})_{L^2(Q_{(0,b)})}=0,$$

其中 $Q_{(0,b)}$ 是 Q 与半空间 $t<b$的交集。由于对于 $(t,x)\in Q_{(0,b)}$， $\partial_t\underline{\eta}(t,x)=w(t,x)$，我们计算得

$$(\varepsilon\partial_{tt}\underline{\eta},\partial_t\underline{\eta})_{L^2(Q_{(0,b)})}-(\sigma\partial_{tt}\underline{\eta},\underline{\eta})_{L^2(Q_{(0,b)})}-(\mu^{-1}\operatorname{curl}_x\partial_t\underline{\eta},\operatorname{curl}_x\underline{\eta})_{L^2(Q_{(0,b)})}=0.$$

通过分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}-(\sigma\partial_{tt}\underline{\eta},\underline{\eta})_{L^2(Q_{(0,b)})}&=(\sigma\partial_t\underline{\eta},\partial_t\underline{\eta})_{L^2(Q_{(0,b)})}\\&\ge 0,\end{aligned}$$

因为对于 $x\in\Omega$， $\partial_t\underline{\eta}(0,x)=\underline{w}(0,x)=0$ $\underline{\eta}(b,x)=0$ 根据定义成立，且 σ 是半正定的。因此

$$(\varepsilon\partial_{tt}\underline{\eta},\partial_t\underline{\eta})_{L^2(Q_{(0,b)})}-(\mu^{-1}\operatorname{curl}_x\partial_t\underline{\eta},\operatorname{curl}_x\underline{\eta})_{L^2(Q_{(0,b)})}\le 0$$

成立。因此

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{(0,b)}} \partial_t(\varepsilon\partial_t\underline{\eta}\cdot\partial_t\underline{\eta})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{(0,b)}} \partial_t(\mu^{-1}\operatorname{curl}_x\underline{\eta}\cdot\operatorname{curl}_x\underline{\eta})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\le 0.$$

成立，这是因为 ε 和 μ^{-1} 是对称的。根据 $\underline{\eta}$ 的定义，我们计算得 $\underline{\eta}(b,x)=0$，因此对于 $x\in\Omega$，有 $(\operatorname{curl}_x\underline{\eta})(b,x)=0$。此外，对于 $x\in\Omega$，$\partial_t\underline{\eta}(0,x)=\underline{w}(0,x)=0$，由此我们得到

$$\int\limits_{\Omega}(\varepsilon\partial_t\underline{\eta}\cdot\partial_t\underline{\eta})(b,x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\Omega}(\mu^{-1}\operatorname{curl}_x\underline{\eta}\cdot\operatorname{curl}_x\underline{\eta})(0,x)\,\mathrm{d}x\le 0.$$

由此，根据 $\partial_t\underline{\eta}(b,x)=\underline{w}(b,x)$，可推得

$$\int\limits_{\Omega}\underline{w}^2(b,x)\,\mathrm{d}x=0\qquad\text{and}\qquad\int\limits_{\Omega}\left(\int_0^b\operatorname{curl}_x\underline{w}\right)^2(x)\,\mathrm{d}x=0$$

对于任意 $b\in(0,T)$，该结论均成立，因为 $\partial_t\underline{\eta}(t,x)=\underline{w}(t,x)$。由此可推知，$\underline{w}(t,x)$ 几乎处处为零。□

2.3 范数估计

既然我们已知变分形式 (16) 存在唯一解，接下来考察范数估计。本节这一部分中，我们考虑 $\underline{j}_a\in L^2(Q;\mathbb{R}^d)$。我们将推导定理 2.1 的范数估计，并进一步考察系数 c_ϕ、c_ϕ^c、c_ψ 和 c_f 对结果的影响。

引理 2.4。设假设 *1* 成立，$\underline{j}_a\in L^2((0,T)\times\Omega_\sigma;\ \mathbb{R}^d)$，$\{\lambda_k,\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ 为引理 *1.5* 中 $\operatorname{curl}_x\mu^{-1}\operatorname{curl}_x$-算子在 Ω_σ 上的非零特征值与特征函数对，$\alpha_k\in\mathbb{R}$ 且 $\beta_k:=({}^\sigma\underline{\varphi}_k,\ \underline{\varphi}_k)_{L^2(\Omega_\sigma)}>0$ 对 $k\in\mathbb{N}_0$成立。此外，设 a_k 为常微分方程的解

$$\begin{aligned}a_k''(t)+\beta_k a_k'(t)+\lambda_k a_k(t)&=f_k(t),\\ a_k(0)&=\alpha_k,\\ a_k'(0)&=(\underline{\psi},\underline{\varphi}_k)_{L^2(\Omega_\sigma)}\end{aligned}\tag{28}$$

对 $t\in(0,\ T)$成立，且 $f_k(t):=(\underline{j}_a(t)\,\underline{\varphi}_k)_{L^2(\Omega_\sigma)}$。那么存在正数常数 c_α^λ、c_α、c_ψ和c_f，使得

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\int_0^T\lambda_k(a_k)^2(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^T(a_k')^2(t)\,\mathrm{d}t\le\sum_{k\in\mathbb{N}_0}c_\psi(\underline{\psi},\underline{\varphi}_k)^2_{L^2(\Omega_\sigma)}+(c_\alpha^\lambda\lambda_k+c_\alpha)(\alpha_k)^2+c_fT\|f_k\|^2_{L^2(0,T)}.$$

证明。对于这些估计，我们需要考虑三种情况，即 $\beta_k^2-4\lambda_k>0$、$\beta_k^2-4\lambda_k<0$ 和 $\beta_k^2-4\lambda_k=0$。

1. 设 $\beta_k^2 - 4\lambda_k > 0$。我们定义 $\kappa_1 := \frac{-\beta_k+\sqrt{\beta_k^2-4\lambda_k}}{2}$, $\kappa_2 := \frac{-\beta_k-\sqrt{\beta_k^2-4\lambda_k}}{2}$, $\gamma_k = \sqrt{\beta_k^2 - 4\lambda_k}$。则 (28) 的解为

$$\begin{aligned} a_k(t) =& (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)_{L^2(\Omega_\sigma)} \frac{e^{\kappa_1 t} - e^{\kappa_2 t}}{\gamma_k} + \alpha_k \frac{\kappa_1 e^{\kappa_2 t} - \kappa_2 e^{\kappa_1 t}}{\gamma_k} \\ &+ \frac{1}{\gamma_k} \int_0^t (e^{\kappa_1(t-s)} - e^{\kappa_2(t-s)}) f_k(s) \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

我们知道 $\kappa_1, \kappa_2 < 0$，因为 $\beta_k^2 - 4\lambda_k > 0$，因此 $(-\beta_k - \sqrt{\beta_k^2 - 4\lambda_k}) < 0$。此外，我们还得到 $-(\kappa_1 + \kappa_2) = \beta_k$ 以及 $\kappa_1 \kappa_2 = \lambda_k$。利用这些事实并根据 $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$，我们计算得

$$\int_0^T \left(e^{\kappa_1 t} - e^{\kappa_2 t}\right)^2 \, \mathrm{d}t \le \frac{1}{\kappa_1}(e^{2\kappa_1 T} - 1) + \frac{1}{\kappa_2}(e^{2\kappa_2 T} - 1) \le \frac{1}{-\kappa_1} + \frac{1}{-\kappa_2} = \frac{\beta_k}{\lambda_k}.$$

同理，我们估计

$$\int_0^T \left(\kappa_1 e^{\kappa_1 t} - \kappa_2 e^{\kappa_2 t}\right)^2 \, \mathrm{d}t \le \kappa_1(e^{2\kappa_1 T} - 1) + \kappa_2(e^{2\kappa_2 T} - 1) \le \beta_k.$$

利 用它，我们再次根据 $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b$ 计算所需范数的估计 2

$$\begin{aligned} \int_0^T \lambda_k (a_k)^2(t) \, \mathrm{d}t + \int_0^T (a_k{}')^2(t) \, \mathrm{d}t \le & 2(\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)^2_{L^2(\Omega_\sigma)} \frac{4\beta_k}{\beta_k^2 - 4\lambda_k} + 2(\alpha_k)^2 \lambda_k \frac{4\beta_k}{\beta_k^2 - 4\lambda_k} \\ &+ 2\frac{2\beta_k}{\beta_k^2 - 4\lambda_k} T \int_0^T f_k^2(s) \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

根据估计 $\sqrt{2ab} \le (a-b)$，对于 $a, b \le 0$ 和 $a > b$，我们推出 $\frac{1}{(\beta_k^2 - 4\lambda_k)} \le \frac{1}{\sqrt{2b_k 2\sqrt{\lambda_k}}} \le \frac{1}{2b_k\sqrt{\lambda_k}}$。利用这一估计，我们得到

$$\int_0^T \lambda_k (a_k)^2(t) \, \mathrm{d}t + \int_0^T (a_k{}')^2(t) \, \mathrm{d}t \le (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)^2_{L^2(\Omega_\sigma)} \frac{4}{\sqrt{\lambda_0}} + (\alpha_k)^2 \lambda_k \frac{4}{\sqrt{\lambda_0}} + \frac{2}{\sqrt{\lambda_0}} T \|f_k\|^2_{L^2(0,T)}$$

其中，λ_0 是由引理 1.5 得到的 $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ 对 $\Omega = \Omega_\sigma$ 的最小特征值。

2. 令 $\beta_k^2 - 4\lambda_k < 0$ 并定义 $\gamma_k = \sqrt{4\lambda_k - \beta_k^2}$。于是，我们将 (28) 的解写为

$$\begin{aligned} a_k(t) = & \alpha_k e^{-\frac{\beta_k}{2}t} \left(\cos(\gamma_k t) + \frac{\beta_k}{2\gamma_k} \sin(\gamma_k t) \right) + \frac{1}{\gamma_k} (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)_{L^2(\Omega_\sigma)} e^{-\frac{\beta_k}{2}t} \sin(\gamma_k t) \\ &+ \frac{1}{\gamma_k} \int_0^t e^{\frac{\beta_k}{2}(s-t)} \sin(\gamma_k(t-s)) f(s) \, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

注意，参数 $\beta_k = (\sigma\underline{\varphi}_k, \underline{\varphi}_k)_{L^2(\Omega_\sigma)}$ 为正。因此，我们可以估计

$$\int_0^T e^{-\beta_k t}\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{\beta_k}.$$

接下来，我们利用以下事实：$\sin^2(\gamma_k t) \le 1$ 以及 $\cos^2(\gamma_k t) \le 1$。然后再次利用 $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$ 和柯西-施瓦茨不等式，推导出以下估计

$$\int_0^T \lambda_k (a_k)^2(t)\,\mathrm{d}t \le \lambda_k (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)^2_{L^2(\Omega_\sigma)} \frac{4}{\beta_k \gamma_k^2} + 4(\alpha_k)^2 \lambda_k \left(\frac{1}{\beta_k} + \frac{\beta_k}{4\gamma_k^2}\right) + \frac{2\lambda_k}{\beta_k \gamma_k^2} T \int_0^T f_k^2(s)\,\mathrm{d}s.$$

同理，我们估计

$$\begin{aligned}\int_0^T (a_k')^2(t)\,\mathrm{d}t \le (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)^2_{L^2(\Omega_\sigma)} \frac{4}{\beta_k \gamma_k^2} \left(\frac{\beta_k^2}{2} + 2\gamma_k^2\right) + 4(\alpha_k)^2 \frac{1}{\beta_k} \left(\gamma_k^2 + \frac{\beta_k^4}{16\gamma_k^2}\right) \\ + \frac{2}{\beta_k \gamma_k^2} \left(2\frac{\beta_k^2}{4} + 2\gamma_k^2\right) T \int_0^T f_k^2(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

代入 $\gamma_k^2 = 4\lambda_k - \beta_k^2$ 后，得到

$$\begin{aligned}\int_0^T \lambda_k (a_k)^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T (a_k')^2(t)\,\mathrm{d}t \le (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)^2_{L^2(\Omega_\sigma)} \left(\frac{36\lambda_k}{\beta_k(4\lambda_k - \beta_k^2)} + \frac{6\beta_k}{4\lambda_k - \beta_k^2}\right) \\ + 4(\alpha_k)^2 \left(\frac{5\lambda_k}{\beta_k} + \frac{\lambda_k \beta_k}{4(4\lambda_k - \beta_k^2)} + \frac{\beta_k^3}{16(4\lambda_k - \beta_k^2)}\right) \\ + \left(\frac{2\lambda_k}{\beta_k(4\lambda_k - \beta_k^2)} + \frac{\beta_k}{4\lambda_k - \beta_k^2} + \frac{4}{\beta_k}\right) T \int_0^T f_k^2(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

注意，只有当 $\beta_k^2 < 4\lambda_k$ 时，项 $\frac{\lambda_k}{4\lambda_k - \beta_k^2}$ 才会出现。该项有界，因为 β_k 被 $\beta_{\max} := \max_k \beta_k$ 所界，而后者又被 $\sup_{x\in\Omega_\sigma} \sigma(x)$ 所界，但 λ_k 单调递增。因此，最大值将在较小的 k 处取得。

Let 定义 $\beta_{\min} := \min_k \beta_k > 0$。然后我们使用估计 ^{1} $\frac{1}{(\beta_k^2 - 4\lambda_k)} \le \frac{1}{2\beta_k\sqrt{\lambda_k}}$ 来推导

$$\begin{aligned}\int_0^T \lambda_k (a_k)^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T (a_k')^2(t)\,\mathrm{d}t \le (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)^2_{L^2(\Omega_\sigma)} \left(\frac{36\lambda_k}{\beta_{\min}(4\lambda_k - \beta_k^2)} + \frac{3}{\sqrt{\lambda_0}}\right) \\ + 4(\alpha_k)^2 \left(\frac{5\lambda_k}{\beta_{\min}} + \frac{\lambda_k \beta_{\max}}{4(4\lambda_k - \beta_k^2)} + \frac{\beta_{\max}^2}{32\sqrt{\lambda_0}}\right) \\ + \left(\frac{2\lambda_k}{\beta_k(4\lambda_k - \beta_k^2)} + \frac{1}{8\sqrt{\lambda_0}} + \frac{4}{\beta_{\min}}\right) T \|f_k\|^2_{L^2(0,T)}.\end{aligned}$$

3. 现在考虑最后一种情况 $\beta_k^2 - 4\lambda_k = 0$。那么，方程 (28) 的解为

$$a_k(t) = \alpha_k(1 + \frac{\beta_k}{2}t)e^{-\frac{\beta_k}{2}t} + (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)_{L^2(\Omega_\sigma)}te^{-\frac{\beta_k}{2}t} + \int_0^t (t-s)e^{\frac{\beta_k}{2}(s-t)}f(s)\,\mathrm{d}s.$$

根据估计式

$$\int_0^t t^2 e^{-\beta_k t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\beta_k^3}(2 - e^{-\beta_k t}(\beta_k^2 t^2 + 2\beta_k t + 2)) \le \frac{2}{\beta_k^3}$$

然后利用（$a+b$）$^2 \le 2a^2 + 2b^2$ 和柯西-施瓦茨不等式计算可得

$$\int_0^T \lambda_k (a_k)^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T (a_k{}')^2(t)\,\mathrm{d}t \le (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)^2_{L^2(\Omega_\sigma)}\left(\lambda_k\frac{8}{\beta_k^3} + \frac{12}{\beta_k}\right) + 4(\alpha_k)^2\left(\lambda_k\frac{3}{\beta_k} + \frac{1}{2\beta_k}\right) + \left(\frac{2\lambda_k}{\beta_k^3} + \frac{3}{\beta_k}\right)2T\int_0^T f_k^2(s)\,\mathrm{d}s.$$

最后，我们利用 $4\lambda_k = \beta_k^2$ 推导出

$$\int_0^T \lambda_k (a_k)^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T (a_k{}')^2(t)\,\mathrm{d}t \le (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)^2_{L^2(\Omega_\sigma)}\frac{14}{\beta_{\min}} + (\alpha_k)^2\lambda_k\frac{5}{4\beta_{\min}^3} + \frac{14}{\beta_{\min}^3}T\|f_k\|^2_{L^2(0,T)}.$$

将这三种情况相加即可得到所需的估计式。 □

利用上述引理，我们最终可以证明定理 2.1 的最后一个结论。

命题 3。设假设 *1* 成立，$\underline{j}_a \in L^2(Q;\ \mathbb{R}^d)$，且 $\underline{A}$ 是 (16) 的唯一解。则存在正数常数 c_ϕ、c_ϕ^c、c_ψ 和 c_f，使得下列不等式成立

$$|\underline{A}|^2_{H^{\mathrm{curl};1}(Q)} \le c_\phi\|\underline{\phi}\|^2_{L^2_\varepsilon(\Omega)} + c_\phi^c T\|\operatorname{curl}_x \underline{\phi}\|_{L^2_\mu(\Omega)} + c_\psi T\|\underline{\psi}\|^2_{L^2_\varepsilon(\Omega)} + c_f\max\{T, T^2\}\|\underline{j}_a\|^2_{L^2_\varepsilon(Q)}. \tag{29}$$

常数 c_ϕ, c_ϕ^c, c_ψ 和 c_f 取决于 上确界 σ, $\sigma_{\min}^{-1}$, $\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}$ 以及 最大值 $\beta_k^2 - 4\lambda_k < 0 \atop k\in\mathbb{N}_0 (4 - \frac{\beta_k^2}{\lambda_k})^{-1}$，由于 β_k 受 上确界 σ 控制，且 旋度$_x$ μ^{-1} 旋度$_x$的非零特征值 λ_k 随 $k \to \infty$单调递增，因此该量有界。$\beta_k \in \mathbb{R}_+$ 由 σ 定义，使得

$$(\sigma\underline{\varphi}_k, \underline{\varphi}_l)_{L^2(\Omega_\sigma)} = \beta_k\delta_{kl}$$

对于引理 *1.5* 的基本系 $\{\underline{\varphi}_k\}$。

证明。再次将区域 Ω 分为电导率 σ 的支集 $\Omega_\sigma = \Omega \cap \mathrm{supp}(\sigma)$ 及其补集 $\Omega_0 := \Omega\backslash\Omega_\sigma$。首先考察 Ω_σ 和 $Q_\sigma := (0,T) \times \Omega_\sigma$。为证明该不等式，我们考虑式 (16) 的唯一解 $\underline{A}$ 的基表示 (15)

$$\underline{A}(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(t)\underline{\varphi}_k(x),$$

$(t,x) \in Q_\sigma$，其中 $\underline{\varphi}_k$ 是引理 1.5 中 $H(\mathrm{curl};\Omega_\sigma)$ 的基函数。将该表示代入能量范数，得到

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon\partial_t \underline{A},\partial_t \underline{A})_{L^2(Q_\sigma)} + (\mu^{-1}\operatorname{curl}_x \underline{A}, \operatorname{curl}_x \underline{A})_{L^2(Q_\sigma)} \\
&\quad = \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} (\partial_t a_k, \partial_t c_j)_{(0,T)} (\varepsilon\underline{\varphi}_k, \underline{\varphi}_j)_{\Omega_\sigma} + (a_k, c_j)_{(0,T)} (\mu^{-1}\operatorname{curl}_x \underline{\varphi}_k, \operatorname{curl}_x \underline{\varphi}_j)_{\Omega_\sigma} \\
&\quad = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \left\| a_k' \right\|^2_{L^2(0,T)} + \left\| \lambda_k^{1/2} a_k \right\|^2_{L^2(0,T)} + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_0} \left\| a_k' \right\|^2_{L^2(0,T)}.
\end{aligned} \tag{30}$$

在命题 1 的证明中，我们看到，a_k 根据 $k\in\mathbb{N}_0$ 和 $k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_0$ 的情况满足两个常微分方程之一。第一个方程为

$$\begin{aligned}
a_k''(t) + \beta_k a_k'(t) &= f_k(t), \\
a_k'(0) &= (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)_{L^2(\Omega_\sigma)}, \\
a_k(0) &= \alpha_k,
\end{aligned} \tag{31}$$

当 $k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_0$ 时，第二个方程为

$$\begin{aligned}
a_k''(t) + \beta_k a_k'(t) + \lambda_k a_k(t) &= f_k(t), \\
a_k'(0) &= (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)_{L^2(\Omega_\sigma)}, \\
a_k(0) &= \alpha_k,
\end{aligned} \tag{32}$$

对于 $t\in(0,T)$ 和 $k\in\mathbb{N}_0$，其中 $f_k(t) = (\underline{j}_a, \underline{\varphi}_k)_{L^2(\Omega_\sigma)}$ 以及 λ_k 是旋度$_x$ μ^{-1} 旋度$_x$ 算子的非零特征值。

我们先估计 a_k 在 $k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_0$ 的情况下的范数。接着考虑第一个方程 (31)，并计算其解

$$a_k(t) = \alpha_k + \frac{1}{\beta_k}(\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)_{L^2(\Omega_\sigma)}(1 - e^{-\beta_k t}) + \frac{1}{\beta_k}\int_0^t (1 - e^{\beta_k(s-t)}) f_k(s)\,\mathrm{d}s.$$

对于这个解，我们需要估计 a_k' 的 L^2-范数。利用 $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$，由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}
\int_0^T (a_k')^2\,\mathrm{d}t &\le 2(\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)^2_{L^2(\Omega_\sigma)} \int_0^T (e^{-2\beta_k t})\,\mathrm{d}t + 2\int_0^T\int_0^t e^{2\beta_k(s-t)}\,\mathrm{d}s \int_0^t f_k^2(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&\le (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)^2_{L^2(\Omega_\sigma)} \frac{1 - e^{-2\beta_k T}}{\beta_k} + 2\frac{1 - e^{-2\beta_k T}}{2\beta_k} T\|f_k\|^2_{L^2(0,T)} \\
&\le (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)^2_{L^2(\Omega_\sigma)} \frac{1}{\beta_{\min}} + \frac{1}{\beta_{\min}} T\|f_k\|^2_{L^2(0,T)},
\end{aligned} \tag{33}$$

其中 $\beta_{\min} := \min_k \beta_k \ge \sigma_{\min}\varepsilon^{-1}_{\max} > 0$。

其次，我们希望在第二种情形 $k\in\mathbb{N}_0$ 下估计 a_k。在这种情况下，我们可以对第二个方程 (32) 应用引理 2.4。因此得到如下估计：

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \left\| a_k' \right\|^2_{L^2(0,T)} + \left\| \lambda_k^{1/2} a_k \right\|^2_{L^2(0,T)} \le \sum_{k\in\mathbb{N}_0} c_\psi (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)^2_{L^2(\Omega_\sigma)} + (c_\alpha^\lambda \lambda_k + c_\alpha)(\alpha_k)^2 + c_f T\|f_k\|^2_{L^2(0,T)}. \tag{34}$$

由于 $\frac{1}{\beta_{\min}} < c_\psi$ 和 $\frac{1}{\beta_{\min}} < c_f$，我们可以将 (34) 和 (33) 代入 (30)，得到

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\|a_k'\right\|^2_{L^2(0,T)} + \left\|\lambda_k^{1/2} a_k\right\|^2_{L^2(0,T)} \le \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \left(c_\phi^1 + c_\phi^2 \lambda_k\right) \alpha_k^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[c_\psi (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)^2_{L^2(\Omega_\sigma)} + c_f T \|f_k\|^2_{L^2(0,T)}\right]. \tag{35}$$

由于 λ_k 是旋度$_x$ μ^{-1}旋度$_x$算子的特征值，我们希望从右端项中消去 λ_k。考虑 $\underline{\phi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \underline{\varphi}_k$ 和旋度$_x$ $\underline{\phi} = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \alpha_k$ 旋度^x $\underline{\varphi}_k$，我们计算得

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (\alpha_k)^2 &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_k \alpha_l \lambda_k (\varepsilon \underline{\varphi}_k, \underline{\varphi}_l)_{L^2(\Omega_\sigma)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_k \alpha_l (\mu^{-1} \operatorname{curl}_x \underline{\varphi}_k, \operatorname{curl}_x \underline{\varphi}_l)_{L^2(\Omega_\sigma)} \\
&= (\mu^{-1} \operatorname{curl}_x \underline{\phi}, \operatorname{curl}_x \underline{\phi})_{L^2(\Omega_\sigma)}.
\end{aligned}$$

对 $\underline{\phi}$ 和 $\underline{j}_a$ 采用基表示，其中 $f_k = (\underline{j}_a, \underline{\varphi}_k)_{L^2(\Omega_\sigma)}$，分别代入式 (35)，便得到

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon \partial_t \underline{A}, \partial_t \underline{A})_{L^2(Q_\sigma)} + (\mu^{-1} \operatorname{curl}_x \underline{A}, \operatorname{curl}_x \underline{A})_{L^2(Q_\sigma)} \\
&\qquad \le c_\psi \|\underline{\psi}\|^2_{L^2_\varepsilon(\Omega_\sigma)} + c_\phi \|\underline{\phi}\|^2_{L^2_\varepsilon(\Omega_\sigma)} + c_\phi^c \|\operatorname{curl}_x \underline{\phi}\|^2_{L^2_\mu(\Omega_\sigma)} + c_f T \|\underline{j}_a\|^2_{L^2_\varepsilon(Q_\sigma)}.
\end{aligned}$$

对于 $\Omega_0 = \Omega \backslash \Omega_\sigma$ 上的解以及 $\overline{Q_0} := (0,T) \times \Omega_0,$，其中 $\sigma \equiv 0$，我们得到 $k \in \mathbb{Z}$ 满足式 (27) 给出的常微分方程。$\lambda_k = 0$ 的方程 (27) 给出估计

$$\left\|a_k'\right\|^2_{L^2(0,T)} \le T^2 \|f_k\|^2_{L^2(0,T)}.$$

另一方面，若 $\lambda_k > 0$，则方程 (27) 的解为

$$a_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} (\underline{\psi}, \underline{\varphi}_k)_{L^2(\Omega_0)} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) + \alpha_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} (f_k(.), \sin(\sqrt{\lambda_k}(t - .)))_{L^2(0,t)}.$$

为了估计 a_k 和 a_k' 的 $L^2(0,T)$ 范数，我们按照上述相同步骤推导得

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon \partial_t \underline{A}, \partial_t \underline{A})_{L^2(Q_0)} + (\mu^{-1} \operatorname{curl}_x \underline{A}, \operatorname{curl}_x \underline{A})_{L^2(Q_0)} \\
&\qquad \le 4T \|\underline{\psi}\|^2_{L^2_\varepsilon(\Omega_0)} + 4T \|\operatorname{curl}_x \phi\|^2_{L^2_\mu(\Omega_0)} + T^2 \|j_a\|^2_{L^2_\varepsilon(Q_0)}.
\end{aligned} \tag{36}$$

注意，通过估计 $\int \sin^2(\sqrt{\lambda_k} t)\, \mathrm{d}t \le T$ 以及含余弦的相同积分，我们在估计中得到一个 T。加上不等式（36），便得到所需的不等式（29）

$$|\underline{A}|_{H^{\operatorname{curl};1}(Q)} \le \tilde{c}_\psi T \|\underline{\psi}\|^2_{L^2_\varepsilon(\Omega)} + c_\phi \|\underline{\phi}\|^2_{L^2_\varepsilon(\Omega)} + \tilde{c}_\phi^c T \|\operatorname{curl}_x \underline{\phi}\|^2_{L^2_\mu(\Omega)} + c_f \max\{T, T^2\} \|\underline{j}_a\|^2_{L^2_\varepsilon(Q)}.$$

□

注 2.5. 请注意，借助 *Ladyzhenskaya [35, 定理 3.2，第 160]* 页中的工具，可以采用与上述定理相同的技术，将标量波动方程的结果转化为矢量波动方程的结果。更多详情请见 *[20]*。由此可得如下估计：

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon \partial_t \underline{A}, \partial_t \underline{A})_{L^2(Q)} + (\mu^{-1} \operatorname{curl}_x \underline{A}, \operatorname{curl}_x \underline{A})_{L^2(Q)} \\
&\qquad \le 4T \|\underline{\psi}\|^2_{[L^2(\Omega)]^d} + 4T \|\operatorname{curl}_x \underline{\phi}\|^2_{L^2_\mu(\Omega)} + T^2 \|\underline{j}_a\|^2_{[L^2(Q)]^d}.
\end{aligned} \tag{37}$$

对于变分形式的解，求 $\underline{A} \in H_0^{\mathrm{curl};1}$; (Q) ，
满足 $\underline{A}$ (0, .) $= \underline{\phi}$ ，使得

$$-(\varepsilon \partial_t \underline{A}, \partial_t \underline{v})_{L^2(Q)} + (\mu^{-1} \operatorname{curl}_x \underline{A}, \operatorname{curl}_x \underline{v})_{L^2(Q)} = (\underline{j}_a, \underline{v})_{L^2(Q)} - (\varepsilon \underline{\psi}, \underline{v}(0, \cdot))_{L^2(\Omega)}$$

对所有 $\underline{v} \in H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;,0}\,(Q)$。

3 张量积中的时空有限元法

在定理 2.1 中，我们证明了变分形式 (16) 的唯一可解性。现在，我们来考察矢量波动方程变分形式的离散等价形式。首先，定义所用的有限元空间。然后，推导有限元离散，并分析由此得到的线性方程。之后，我们推导出一个 CFL 条件；对于数值算例的稳定计算，该条件似乎确有必要。

3.1 时空有限元空间

在计算任何算例之前，我们先回顾文献 [16]中介绍的矢量波动方程时空离散的主要思想。为便于比较两篇论文的结果，我们将采用类似的术语。与 [16]相比，主要区别在于我们的方程中加入了电导率 σ ，并且我们考虑时间上的二阶元，而不是像 [16]中那样采用一阶元。

For 对于时间离散化，我们将时间区间 $(0, T)$ 划分为 $N_t^2 + 1$ 个点

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N_t^2 - 1} < t_{N_t^2} = T$$

为 N_t^2个子区间 $\tau_\ell = (t_{\ell-1},\ t_\ell) \subset \mathbb{R},\ \ \ell = 1,\ \ldots,\ N_t^2$.定义每个单元的局部网格尺寸 τ_l 为 $h_{t,\ell} = t_\ell - t_{\ell-1},\ \ \ell = 1,\ \ldots,\ N_t^2$，最大网格尺寸 h_t 为: $=$最大值$_{\ell=1,\ldots,N_t^2}\, h_{t,\ell}$.

对于空间离散化，我们将空间区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 划分为 N^x 个单元$\omega_i \subset \mathbb{R}^d$，其中 $i = 1, \ldots, N^x$，并满足

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N^x} \overline{\omega_i} \qquad \text{and} \qquad \omega_i \cap \omega_j = 0 \qquad \text{for } i \neq j.$$

我们将 ω_i中的局部网格尺寸定义为 $h_{x,\ i} := \left(\int_{\omega_i} 1 \mathrm{d}x \right)^{1/d}$, $i = 1, \ldots, N^x$，最大网格尺寸定义为 $h_x :=\ h_{x,\ \max}(\mathcal{T}_\nu^x) :=$ 最大值$_{i=1,\ldots,N^x}\, h_{x,\ i}$ ，最小网格尺寸定义为 $h_{x,\ \min}(\mathcal{T}_\nu^x) :=$最小值$_{i=1,\ldots,N^x}\, h_{x,\ i}$。参数 $\nu \in \mathbb{N}$ 表示细化层级，空间网格是在层级 ν下的集合 $\mathcal{T}^x := \mathcal{T}_\nu^x = \{\omega_i\}_{i=1}^{N^x}$。为简单起见，我们仅考虑 $d = 2$ 中的三角形和 $d = 3$ 中的四面体作为空间单元 $\omega_i \subset \mathbb{R}^d, i = 1, \ldots, N^x$。

假设 2。 我们假设序列 $(\mathcal{T}_\nu^x)_{\nu \in \mathbb{N}}$ 由形状正则、全局拟一致且容许的空间网格 $\mathcal{T}_\nu^x$组成。

By t网格序列 $(\mathcal{T}_\nu^x)_{\nu \in \mathbb{N}}$ 的形状正则性意味着存在一个常数 $c_{\mathrm{F}} > 0$ ，使得 t

$$\forall \nu \in \mathbb{N} : \forall \omega \in \mathcal{T}_\nu^x : \quad \sup_{x,y \in \overline{\omega}} \|x - y\|_2 \leq c_{\mathrm{F}}\, r_\omega, \tag{38}$$

其中， $\|\cdot\|_2$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的欧几里得范数， $r_\omega > 0$ 是可内接于单元 ω 的最大球的半径。根据网格序列 $(\mathcal{T}_\nu^x)_{\nu\in\mathbb{N}}$ 的全局拟一致性，存在一个常数 $c_{\mathrm{G}} \geq 1$ ，使得

$$\forall \nu \in \mathbb{N}\colon \quad \frac{h_{x,\max}(\mathcal{T}_\nu^x)}{h_{x,\min}(\mathcal{T}_\nu^x)} \leq c_{\mathrm{G}}.$$

另一方面，如果对任意两个单元 τ_i、 $\tau_j \in \mathcal{T}_\nu^x$，其交集 $S = \tau_i \cap \tau_j$ 要么为空，要么是同时属于这两个单元且类型相同的单纯形，则该网格是可容许的。

考虑到时间区间和空间区域的离散化，我们现在定义有限元空间。对于时间上的检验空间和试探空间，我们定义分段二次连续函数空间

$$S^2(\mathcal{T}^t) := \left\{ v_{h_t} \in C[0,T] \,|\, \forall \ell \in \{1,\dots,N_t^2\} : v_{h_t|\overline{\tau_\ell}} \in P^2(\overline{\tau_\ell}) \right\} = \operatorname{span}\{\varphi_\ell^2\}_{\ell=0}^{N_t^2}$$

其标准节点基函数为 φ_ℓ^2，满足 $\varphi_\ell^2(t_\kappa) = \delta_{\ell\kappa}$，其中 ℓ、 $\kappa = 0$、……、 N_t^2。空间 $P^p(B)$ 是定义在子集 $B \subset \mathbb{R}$ 上的多项式空间，其全局次数至多为 $p \in \mathbb{N}_0$，而 $\delta_{\ell\kappa}$ 是克罗内克δ。接着，我们引入包含初始和终端条件的子空间

$$\begin{aligned} S_{0,}^2(\mathcal{T}^t) &:= S^2(\mathcal{T}^t) \cap H_{0,}^1(0,T) = \operatorname{span}\{\varphi_\ell^2\}_{\ell=1}^{N_t^2}, \\ S_{,0}^2(\mathcal{T}^t) &:= S^2(\mathcal{T}^t) \cap H_{,0}^1(0,T) = \operatorname{span}\{\varphi_\ell^2\}_{\ell=0}^{N_t^2-1}. \end{aligned}$$

在空间上，我们引入 Nédélec 和 Raviart–Thomas 有限元的向量值有限元空间。对于一个空间单元 $\omega \in \mathcal{T}_\nu^x$，我们定义多项式空间

$$\mathcal{RT}^0(\omega) := \left\{ \underline{v} \in [P^1(\omega)]^d \,|\, \forall \underline{x} \in \omega : v(\underline{x}) = \underline{a} + b\underline{x} \text{ with } \underline{a} \in \mathbb{R}^d, b \in \mathbb{R} \right\}$$

and

$$\mathcal{N}_{\mathrm{I}}^0(\omega) := \left\{ \underline{v} \in [P^1(\omega)]^2 \,|\, \forall (x_1,x_2) \in \omega : v(x_1,x_2) = \underline{a} + b \cdot (-x_2,x_1)^\top \text{ with } \underline{a} \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R} \right\}$$

对于 $d = 2$, 以及

$$\mathcal{N}_{\mathrm{I}}^0(\omega) := \left\{ \underline{v} \in [P^1(\omega)]^3 \,|\, \forall \underline{x} \in \omega : v(\underline{x}) = \underline{a} + \underline{b} \times \underline{x} \text{ with } \underline{a} \in \mathbb{R}^3, \underline{b} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

对于 $d = 3$，请参见 [4, 第 14.1 节和第 15.1] 节，以获取更为详尽的介绍。采用此记号，我们定义最低阶Raviart–Thomas有限元空间和第一类最低阶Nédélec有限元空间

$$\begin{aligned} \mathcal{RT}^0(\mathcal{T}_\nu^x) &:= \left\{ \underline{v}_{h_x} \in H(\mathrm{div};\Omega) \,|\, \forall \omega \in \mathcal{T}_\nu^x : \underline{v}_{h_x|\omega} \in \mathcal{RT}^0(\omega) \right\} = \operatorname{span}\{\underline{\psi}_k^{\mathcal{RT}}\}_{k=1}^{N_x^{\mathcal{RT}}}, \\ \mathcal{N}_{\mathrm{I}}^0(\mathcal{T}_\nu^x) &:= \left\{ \underline{v}_{h_x} \in H(\mathrm{curl};\Omega) \,|\, \forall \omega \in \mathcal{T}_\nu^x : \underline{v}_{h_x|\omega} \in \mathcal{N}_{\mathrm{I}}^0(\omega) \right\}, \end{aligned}$$

有关这些空间的更多详情，请参见 [4, 6] 。此外，我们考虑 $\mathcal{N}_{\mathrm{I}}^0(\mathcal{T}_\nu^x)$ 中切向迹为零的子空间

$$\mathcal{N}_{\mathrm{I},0}^0(\mathcal{T}_\nu^x) := \mathcal{N}_{\mathrm{I}}^0(\mathcal{T}_\nu^x) \cap H_0(\mathrm{curl};\Omega) = \operatorname{span}\{\underline{\psi}_k^{\mathcal{N}}\}_{k=1}^{N_x^{\mathcal{N}}}.$$

我们来看一些形函数的例子：分别是与边相关的 $\mathcal{N}_{\mathrm{I}}^0(\mathcal{T}_\nu^x)$ 和与面相关的 $\mathcal{RT}^0(\mathcal{T}_\nu^x)$。对于一条从点 p_i 到 p_j 的边 e_{ij}，相应的形函数可写作 $\psi_{e_{ij}}^{\mathcal{N}} = \lambda_i\nabla\lambda_j + \lambda_j\nabla\lambda_i$，其中 λ_i 和 λ_j 分别是与 p_i 和 p_j 对应的重心函数。另一方面，对于由三个点 p_i、p_j 和 p_k 构成的面 F_{ijk}，与之相关的最低阶形函数的一个例子可写作
$\psi_{F_{ijk}}^{\mathcal{RT}} = \lambda_i\nabla\lambda_j \times \nabla\lambda_k + \lambda_j\nabla\lambda_k \times \nabla\lambda_i + \lambda_k\nabla\lambda_i \times \nabla\lambda_j$，更多详情请参见 [4, 第 14.1 节、第 15.1] 节。

最后，时间网格 $\mathcal{T}^t = \{\tau_\ell\}_{\ell=1}^{N_t^2}$ 和空间网格 $\mathcal{T}_\nu^x = \{\omega_i\}_{i=1}^{N^x}$ 导出一个分解

$$\overline{Q} = [0,T] \times \overline{\Omega} = \bigcup_{\ell=1}^{N_t^2} \overline{\tau_\ell} \times \bigcup_{i=1}^{N^x} \overline{\omega_i}$$

时空柱体 $Q \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 包含 $N_t^2 \cdot N^x$ 个时空单元。因此，$\mathcal{T}^t \times \mathcal{T}_\nu^x$ 是一个时空张量积网格。对于该时空网格，我们利用 $\hat{\otimes}$ 作为希尔伯特张量积，构造张量积类型的时空有限元空间。这些空间为

$$S_{0,}^2(\mathcal{T}^t)\hat{\otimes}\mathcal{N}_{\mathrm{I},0}^0(\mathcal{T}_\nu^x) \quad \text{and} \quad S_{,0}^2(\mathcal{T}^t)\hat{\otimes}\mathcal{N}_{\mathrm{I},0}^0(\mathcal{T}_\nu^x). \tag{39}$$

于是，任意函数 $\underline{A}_h \in S_{0,}^2(\mathcal{T}^t)\hat{\otimes}\mathcal{N}^{0}{}_{\mathrm{I},0}(\mathcal{T}_\nu^x)$ 均可表示为

$$\underline{A}_h(t,x) = \sum_{\kappa=1}^{N_t^2}\sum_{k=1}^{N_x^{\mathcal{N}}} \mathcal{A}_k^\kappa \varphi_\kappa^2(t)\underline{\psi}_k^{\mathcal{N}}(x) \tag{40}$$

对于 $(t,x) \in \overline{Q}$，其系数为 $\mathcal{A}_k^\kappa \in \mathbb{R}$。此外，对于给定函数 $\underline{f} \in L^2(Q;\mathbb{R}^d)$，我们引入 $L^2(Q)$ 投影 $\Pi^{\mathcal{RT}}{}_{,h}{}^{1}$：$L^2(Q;\mathbb{R}^d) \to S^1(\mathcal{T}^t)\hat{\otimes}\mathcal{RT}^0(\mathcal{T}_\nu^x)$，以求得 $\Pi^{\mathcal{RT}}{}_{,h}{}^{1}\underline{f} \in S^1(\mathcal{T}^t)\hat{\otimes}\mathcal{RT}^0(\mathcal{T}_\nu^x)$，使得

$$(\Pi_h^{\mathcal{RT},1}\underline{f}, \underline{w}_h)_{L^2(Q)} = (\underline{f}, \underline{w}_h)_{L^2(Q)}. \tag{41}$$

对所有 $\underline{w}_h \in S^1(\mathcal{T}^t)\hat{\otimes}\mathcal{RT}^0(\mathcal{T}_\nu^x)$。由于我们需要右端项具有足够的正则性，使得连续性方程 (6) 包含在矢量波动方程中，因此要求右端项 j_a 的散度有定义。因此，我们关注投影 $\Pi^{\mathcal{RT}}{}_{,h}{}^{1}$。另一方面，我们在 [16] 中看到，另一种投影可能产生何种影响，即产生所谓的“伪模态”。

基于这些定义，我们现在可以为变分形式 (16) 构造一个协调有限元方法。我们采用 $S^2(\mathcal{T}^t)\hat{\otimes}\mathcal{N}^{0}{}_{\mathrm{I},\,0}(\mathcal{T}_\nu^x)$ 作为试探空间，并采用 $S^2{}_{,\,0}(\mathcal{T}^t)\hat{\otimes}\mathcal{N}^{0}{}_{\mathrm{I},\,0}(\mathcal{T}_\nu^x)$ 作为检验空间。于是得到离散变分公式：求 $\underline{A}_h \in S^2(\mathcal{T}^t)\hat{\otimes}\mathcal{N}^{0}{}_{\mathrm{I},\,0}(\mathcal{T}_\nu^x)$，其中 $\underline{A}_h(0,x) = \underline{\phi}$，使得

$$\begin{aligned} -(\varepsilon\partial_t\underline{A}_h, \partial_t\underline{v}_h)_{L^2(Q)} + (\sigma\partial_t\underline{A}_h, \underline{v}_h)_{L^2(Q)} + \left(\mu^{-1}\mathrm{curl}_x\underline{A}_h, \mathrm{curl}_x\underline{v}_h\right)_{L^2(Q)} \\ = \left(\Pi_h^{\mathcal{RT},1}\underline{j}_a, \underline{v}_h\right)_{L^2(Q)} - \left(\varepsilon\underline{\psi}, \underline{v}_h(0,.)\right)_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{42}$$

对所有 $\underline{v}_h \in S^2{}_{,0}(\mathcal{T}^t)\hat{\otimes}\mathcal{N}^{0}{}_{\mathrm{I},0}(\mathcal{T}_\nu^x)$。

3.2 有限元离散

接下来，我们按照与 [16] 相同的步骤推导有限元离散，但加入涉及电导率 σ 的附加项。暂且令初始条件 $\underline{\phi}$ 为零。然后将 (40) 代入离散变分公式 (42)。之后，积分分解为空间矩阵和时间矩阵。因此，离散变分公式 (42) 等价于线性系统

$$(-A_{tt} \otimes M_x + A_t \otimes M_x^\sigma + M_t \otimes A_{xx})\underline{\mathcal{A}} = \underline{\mathcal{J}} \tag{43}$$

时间矩阵

$$A_{tt}[\ell,\kappa] = (\partial_t \varphi_\kappa^2, \partial_t \varphi_\ell^2)_{L^2(0,T)}, \quad M_t[\ell,\kappa] = (\varphi_\kappa^2, \varphi_\ell^2)_{L^2(0,T)}, \tag{44a}$$

$$A_t[\ell,\kappa] = (\partial_t \varphi_\kappa^2, \varphi_\ell^2)_{L^2(0,T)} \tag{44b}$$

对应于 $\ell = 0,\dots,N_t^2-1$, $\kappa = 1,\dots,N_t^2$, 以及空间矩阵

$$A_{xx}[l,k] = (\mu^{-1}\operatorname{curl}_x \underline{\psi}_k^{\mathcal{N}}, \operatorname{curl}_x \underline{\psi}_l^{\mathcal{N}})_{L^2(\Omega)}, \quad M_x[l,k] = (\varepsilon\underline{\psi}_k^{\mathcal{N}}, \underline{\psi}_l^{\mathcal{N}})_{L^2(\Omega)}, \tag{45a}$$

$$M_x^\sigma[l,k] = (\sigma\underline{\psi}_k^{\mathcal{N}}, \underline{\psi}_l^{\mathcal{N}})_{L^2(\Omega)} \tag{45b}$$

对应于 $k,l = 1,\dots,N_x^{\mathcal{N}}$.。自由度的排序方式使得式 (40) 中的系数向量写作

$$\underline{A} = (\underline{A}^1, \underline{A}^2, \dots, \underline{A}^{N_t^2})^\top \in \mathbb{R}^{N_t^2 N_x^{\mathcal{N}}} \tag{46}$$

with

$$\underline{A}^\kappa = (\mathcal{A}_1^\kappa, \mathcal{A}_2^\kappa, \dots, \mathcal{A}_{N_x^{\mathcal{N}}}^\kappa)^\top \in \mathbb{R}^{N_x^{\mathcal{N}}} \quad \text{for } \kappa \in \{1,\dots,N_t^2\}.$$

式 (43) 中的右端项同样可表示为

$$\underline{\mathcal{J}} = (\underline{f}^0, \underline{f}^1, \dots, \underline{f}^{N_t^2-1})^\top \in \mathbb{R}^{N_t^2 N_x^{\mathcal{N}}},$$

其中定义

$$\underline{f}^\ell = (f_1^\ell, f_2^\ell, \dots, f_{N_x^{\mathcal{N}}}^\ell)^\top \in \mathbb{R}^{N_x^{\mathcal{N}}}$$

with

$$f_l^\ell = (\Pi_h^{\mathcal{RT},1}\underline{j}, \varphi_\ell^2 \underline{\psi}_l^{\mathcal{N}})_{L^2(Q)} - \varphi_\ell^2(0)\left(\varepsilon\underline{\psi}, \underline{\psi}_l^{\mathcal{N}}\right)_{L^2(\Omega)} \tag{47}$$

对于 $\ell = 0,\dots,N_t^2-1$和 $l = 1,\dots,N_x^{\mathcal{N}}$.

注记 如果初始条件 $\underline{\phi}$ 非零，则我们考虑在˜时间 ϕ 上的连续延拓，该延拓在时间上的所有其他自由度处均为零。因此，对于我们的应用，我们使用表示式 (40) 推导出 $t = 0$

$$\tilde{\phi}_h(0,x) = \sum_{k=1}^{N_x^{\mathcal{N}}} A_k^0 \underline{\psi}_k^{\mathcal{N}}(x) \approx \tilde{\phi}(0,x).$$

然后，按照第 3.1 节中的自由度排序，我们得到方程组

$$(-A_{tt} \otimes M_x + A_t \otimes M_x^\sigma + M_t \otimes A_{xx})\underline{\mathcal{A}} = \underline{\mathcal{J}} - \underline{A}_{Ini}, \tag{48}$$

其中

$$\underline{A}_{Ini} \coloneqq (\underline{A}^0_{Ini}, \dots, \underline{A}^{N_t^2-1}_{Ini}), \quad \underline{A}^\ell_{Ini} \coloneqq (A^\ell_{Ini;1}, \dots, A^\ell_{Ini;N_x^{\mathcal{N}}}),$$

$$A^\ell_{Ini;l} \coloneqq \sum_{k=1}^{N_x^{\mathcal{N}}} (-A_{tt}[\ell,0]M_x[l,k] + A_t[\ell,0]M_x^\sigma[l,k] + M_t[\ell,0]A_{xx}[l,k])A^0_k$$

对于 $\ell = 0, \dots, N_t^2 - 1$ 和 $l = 1, \dots, N_x^{\mathcal{N}}$，其中矩阵定义见 (45)、(44) 以及

$$A_{tt}[\ell,0] \coloneqq (\partial_t\varphi_0^2, \partial_t\varphi_\ell^2)_{L^2(0,T)}, \quad M_t[\ell,0] \coloneqq (\varphi_0^2, \varphi_\ell^2)_{L^2(0,T)},$$

$$A_t[\ell,0] \coloneqq (\partial_t\varphi_0^2, \varphi_\ell^2)_{L^2(0,T)}.$$

3.3 CFL 条件

如果我们针对简单示例求解方程 (43)，会发现结果具有条件稳定性，这表明存在 CFL 条件。为了计算时间方向采用二阶单元时的 CFL 条件，我们使用与 [30] 针对线性元所采用的类似方法。为简化计算，我们假设时间方向采用步长为 h_t 的等距离散。

首先令 $\sigma = 0$。注意，由于 σ 在我们的方程组中起稳定项的作用，因此 $\sigma \equiv 0$ 是最难处理的情况。令 λ_k, $k \in \mathbb{N}_0$ 为引理 1.5 中加权 $L^2_\varepsilon(\Omega)$-范数下旋度μ^{-1}旋度算子的特征值。为分析离散系统的稳定性，我们选取初始数据 $\underline{\phi} = 0$, $\underline{\psi} = 0$ 以及右端项 $\underline{j}_a = 0$。现在，对于 $\underline{A} \in H_0^{\mathrm{curl};1}{}_{;0,}(Q)$，我们考虑第 1.3.1 节中的基函数试探形式，并写作

$$\underline{A}^N = \sum_{k=-N}^{N} \tilde{A}_k(t)\underline{\varphi}_k(x)$$

然后，利用空间算子旋度μ^{-1}旋度的特征值 λ_i 的性质，我们可以将变分形式 (16) 改写为仅在时间域上的变分形式。最终得到以下变分形式组：求 $\tilde{A}_k \in H^1_{0,}(0,T)$，使得

$$-(\partial_t\tilde{A}_k, \partial_t v)_{(0,T)} + \lambda_k(\tilde{A}_k, v)_{(0,T)} = 0 \tag{49}$$

对于所有 $v \in H^{1,}{}_0(0,T)$ 以及所有非零特征值 $\lambda_k > 0$，其中 $k \in \mathbb{N}_0$。另一方面，对于 $k \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}_0$，我们得到如下形式：求 $\tilde{A}_k \in H^1_{0,}(0,T)$，使得

$$(\partial_t\tilde{A}_k, \partial_t v)_{(0,T)} = 0$$

对于所有 $v \in H^{1,}{}_0(0,T)$。这等价于拉普拉斯方程，不会加剧第 ?? 节中观察到的数值不稳定性。

为推导适当的 CFL 条件，我们需要分析 (49) 在离散情形下的稳定性。再次使用试探形式以及检验空间 $S^2_{0,}(\mathcal{T}^t)$ 和 $S^{2,}{}_0(\mathcal{T}^t)$，得到离散形式：

求 $\tilde{A}^h_k \in S^2_{0,}(\mathcal{T}^t)$，使得

$$-(\partial_t\tilde{A}^h_k, \partial_t v_h)_{(0,T)} + \lambda_k(\tilde{A}^h_k, v_h)_{(0,T)} = 0$$

对于所有 $v_h \in S^2{}_{,0}(\mathcal{T}^t)$ 以及所有非零特征值 λ_k, $k \in \mathbb{N}_0$ 均成立。这等价于分析线性系统

$$(-A_{tt} + \lambda_k M_t)\underline{\tilde{A}} = 0 \tag{50}$$

以保证其稳定性。时间矩阵 A_{tt} 和 M_t 定义见式 (44)，解 $\underline{\tilde{A}} = (\tilde{A}_k(t_1) \ldots, \tilde{A}_k(T))^T \in \mathbb{R}^{N_t^2}$ 是基表示 $\tilde{A}_k^h(t) = \sum_{\kappa=1}^{N_t^2} \tilde{A}_k(t_\kappa)\varphi_\kappa^2(t)$ 的系数向量。暂且记 $\lambda = \lambda_k$ 和 $h = h_t$。然后我们计算单元矩阵

$$M_t^e = \frac{h}{30}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_{tt}^e = \frac{1}{3h}\begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

利用单元矩阵组装系统矩阵，可得

$$K_{\text{sys}} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3h} + \frac{\lambda h}{15} & -\frac{1}{3h} - \frac{\lambda h}{30} & & & & & & \\ \frac{-16}{3h} + \frac{8\lambda h}{15} & \frac{8}{3h} + \frac{\lambda h}{15} & & & & & & \\ \frac{8}{3h} + \frac{\lambda h}{15} & -\frac{14}{3h} + \frac{4\lambda h}{15} & \frac{8}{3h} + \frac{\lambda h}{15} & -\frac{1}{3h} - \frac{\lambda h}{30} & & & & \\ & \frac{8}{3h} + \frac{\lambda h}{15} & \frac{-16}{3h} + \frac{8\lambda h}{15} & \frac{8}{3h} + \frac{\lambda h}{15} & & & & \\ & -\frac{1}{3h} - \frac{\lambda h}{30} & \frac{8}{3h} + \frac{\lambda h}{15} & -\frac{14}{3h} + \frac{4\lambda h}{15} & \frac{8}{3h} + \frac{\lambda h}{15} & -\frac{1}{3h} + \frac{\lambda h}{30} & \cdots & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & \frac{8}{3h} + \frac{\lambda h}{15} & \frac{-16}{3h} + \frac{8\lambda h}{15} & \frac{8}{3h} + \frac{\lambda h}{15} & \end{pmatrix}.$$

两边乘以 $3h$ 后，得到以下递推公式

$$\begin{pmatrix} 8 + \frac{\lambda h^2}{5} & -1 - \frac{\lambda h^2}{10} \\ -16 + \frac{8\lambda h^2}{5} & 8 + \frac{\lambda h^2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{2\kappa-1} \\ u_{2\kappa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 - \frac{\lambda h^2}{5} & 14 - \frac{4\lambda h^2}{5} \\ 0 & -8 - \frac{\lambda h^2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{2\kappa-3} \\ u_{2\kappa-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 + \frac{\lambda h^3}{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{2\kappa-5} \\ u_{2\kappa-4} \end{pmatrix}$$

其中 $\kappa = 2, \ldots, N_t^2/2$。注意，$N_t^2/2 \in \mathbb{N}$。该递推公式可理解为一种两步法

$$A\underline{z}_\kappa = B_1 z_{\kappa-1} + B_2 z_{\kappa-2}$$

对于向量 $\underline{z}_\kappa = (u_{2\kappa-1}, u_{2\kappa})^T$，其中

$$A := \begin{pmatrix} 8 + \frac{\lambda h^2}{5} & -1 - \frac{\lambda h^2}{10} \\ -16 + \frac{8\lambda h^2}{5} & 8 + \frac{\lambda h^2}{5} \end{pmatrix},$$

$$B_1 := \begin{pmatrix} -8 - \frac{\lambda h^2}{5} & 14 - \frac{4\lambda h^2}{5} \\ 0 & -8 - \frac{\lambda h^2}{5} \end{pmatrix}, \qquad B_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 + \frac{\lambda h^3}{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

此外，我们可以将两步法改写为以下方程组

$$Y_\kappa = A_{\text{sys}} Y_{\kappa-1} \tag{52}$$

其中有 $Y_\kappa = (u_{2\kappa-3}, u_{2\kappa-2}, u_{2\kappa-1}, u_{2\kappa})^T$ 以及

$$A_{\text{sys}} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ A^{-1}B_2 & A^{-1}B_1 \end{pmatrix}$$

对于 $\kappa = 2$、.....、$N_t^2/2$。接下来，我们在 κ 中通过迭代求解（52），得到公式

$$Y_\kappa = A_{\text{sys}}^{\kappa-1} Y_1$$

对于具有初始值的解 Y_κ

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 7 - \frac{2\lambda h^2}{5} \\ -8 - \frac{\lambda h^2}{5} \end{pmatrix} u_0,$$

˜其中 $u_{-1} = 0$ 且 $u_0 = A_k(0)$。因此，若要使方程组达到零稳定，我们需要 A_{sys} 的特征值实部小于一。通过分析 A_{sys} 的特征值，我们发现其中两个特征值 λ_1^A 和 λ_2^A 为零。其余两个由以下公式给出

$$\lambda_{3,4}^A = \frac{-2a^2 - bd \pm \sqrt{b(2c+d)(4a^2 - 2bc + bd)}}{2(a^2 - bc)}$$

其中

$$a = 8 + \frac{\lambda h^2}{5}, \qquad b = -16 + \frac{8\lambda h^2}{5},$$
$$c = -1 - \frac{\lambda h^2}{10}, \qquad d = 14 - \frac{4\lambda h^2}{5}.$$

λ_3^A 实部的绝对值, 4，即 $|\Re(\lambda_{3,\ 4}^A)|$，当 $\lambda_k h_t^2 \le 60$ 且 $\lambda_k h_t^2 \notin [10, 12]$ 时小于一，其中 $k \in \mathbb{N}_0$。如果我们引入足够大的 $\sigma(x) > 0,\ x \in \Omega$，小的不稳定区域 $\lambda_k h_t^2 \in [10, 12]$ 将消失，剩下的条件为 $\lambda_k h_t^2 \le 60$，其中 $k \in \mathbb{N}_0$。

在计算示例中，我们通常只能观察到稳定性界 $\lambda_k h_t^2 \le 60$。然而，也可能存在满足 $\lambda_k h_t^2 \in [10, 12],\ k \in \mathbb{N}_0$ 的不稳定示例。请注意，当我们使用 $S_h^2(\mathcal{T}^t)$ 进行离散化时，这些估计也可用于标量波动方程，因为该界适用于空间特征值与时间步长之比。

为了在计算示例中应用这些见解，我们需要估计特征值 $\lambda_k, k \in \mathbb{N}_0$。为此，我们使用加权 $L_\varepsilon^2(\Omega)$-范数下旋度$_x \mu^{-1}$旋度$_x$ 算子的逆不等式。对于最低阶 Nédélec 元，我们有如下逆不等式

$$\|\operatorname{curl}_x u_h\|_{L^2(\mathcal{T}^x)}^2 \le c_I h_{\max}^{-2} \|u_h\|_{L^2(\mathcal{T}^x)}^2 \tag{53}$$

对所有 $u_h \in \operatorname{span}\{\phi_E^{\mathcal{N}_0^I}\}_{E \in \mathcal{E}}$，其中

$$c_I := \begin{cases} \frac{18 c_F^2}{\pi} & n = 2, \\ 80 c_F^4 (\frac{9}{16\pi^2})^{2/3} & n = 3, \end{cases}$$
$$h_{\max} := \max_{\omega_l \in \mathcal{T}^x} (|\tau_l|^{-d}).$$

证明时考虑 [20, 引理 A。2]证明方法是在每个单元上计算各个范数，并证明该处的不等式，然后将所有结果相加。为完整起见，我们简要说明常数的来源。常数 c_F 是式（38）中定义的形状正则性常数。此外，系数 $c_I h_{\max}^{-2}$ 来自对下式进行估计： $18^{\lambda_{\max}(J_l J_l^T)\, 2\Delta_l} \quad h_l^{-2}$

对于 $d=2$，以及对于 $d=3$，估计项 $160^{4\lambda_{\max}(\quad J_l J_l^T{}^2)\ ()^2\quad}$，其中 $J_l = \left(\frac{\partial F_{l,i}}{\partial x_j}\hat{}\right.$ $\left.(\hat{}x_j)\right)_{1\le i,\ j,\ \le d}$是变换 F_l 的导数：$\hat{}\omega \to \omega_l$，$\frac{}{3\ 6\Delta_t}$该变换将参考单元 $\hat{}\omega$ 映射到当前单元 ω_l。

现在，我们应用逆不等式，根据引理 1.5 估计特征值 $\lambda_k, k \in \mathbb{N}_0$。将逆不等式 (53) 改写为加权范数形式，得到

$$(\mu^{-1}\operatorname{curl}_x u_h, \operatorname{curl}_x u_h)_{L^2(\mathcal{T}^x)} \le c_I(\mu_{\min}\varepsilon_{\min})^{-1} h_{\max}^{-2}\|u_h\|^2_{L^2_\varepsilon(\mathcal{T}^x)}.$$

于是，我们推导出矢量波动方程的以下 CFL 条件

$$c_I(\mu_{\min}\varepsilon_{\min})^{-1}\ h_x^{-2} \le 10\ h_t^{-2},$$

因此

$$h_t \le \sqrt{\mu_{\min}\varepsilon_{\min}}\sqrt{\frac{10}{c_I}}h_x, \tag{54}$$

其中，h_t 和 h_x 分别是第 3.1 节中的最大时间步长和空间步长。如果 σ 足够大，例如处处满足 $\sigma \ge 1$，我们甚至可以得到 CFL 条件

$$h_t \le \sqrt{\mu_{\min}\varepsilon_{\min}}\sqrt{\frac{60}{c_I}}h_x, \tag{55}$$

我们来看一个关于 $\mu = 1$ 和 $\varepsilon = I$ 的例子。设 $\Omega = (0,1)^2$，并使用由等腰直角三角形构成的形状正则三角剖分，则通过直接估计 $J_l J_l^T$ 的特征值可得 $c_I = 18$，如 [16] 所示。因此，在这种情况下，我们得到 CFL 条件

$$h_t < \sqrt{\frac{60}{18}}h_x \approx 1.825741858\ h_x \tag{56}$$

以及更严格的条件

$$h_t < \sqrt{\frac{10}{18}}h_x \approx 0.74535599\ h_x. \tag{57}$$

请注意，本节中 CFL 条件的计算适用于任意时间多项式次数。多项式次数越高，系统矩阵 A_{sys} 就越大，但最终仍会得到条件稳定性。此外，如果时间步长采用非恒定步长，那么计算中的单元矩阵只需相应改变，得到的条件将取决于最大的时间步长。因此，采用张量积方法时，我们总会得到一个 CFL 条件。

3.4 预期收敛率

我们来看看在满足 CFL 条件时，示例中可能达到的收敛率。我们将分析分为两部分：首先分析时间收敛，然后讨论空间收敛。由于我们考虑的是张量积结构，因此可以将分析分成两部分。本节讨论将采用定理 2.1 的证明中连续解的概念。同样，我们考虑 $\sigma = 0$ 来分析临界情形。

我们来看看时间收敛，并考虑半离散函数

$$\underline{A}_{h_x}(t,x) = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_x} a_k(t)\underline{\psi}_k^{\mathcal{N}}(x).$$

我们将遵循 [30, 第 5] 节中的步骤，并将结果从标量波动方程推广到矢量波动方程。将该试探形式代入矢量波动方程后，我们得到方程组

$$\begin{aligned} M_x\partial_{tt}\underline{a}(t) + A_{xx}\underline{a}(t) &= \underline{f}(t) \qquad \text{in } (0,T), \\ \underline{a}(0) = \partial_t\underline{a}(0) &= 0 \end{aligned}$$

其中 $\underline{a}(t) := (a_1(t), ..., a_{\mathcal{N}_x}(t))^T$， M_x 表示质量矩阵， A_{xx} 表示式 (45) 中的刚度矩阵。右端项 $\underline{f}(t) := (f_1(t), ..., f_{\mathcal{N}_x}(t))$ 定义为 $f_k(t) := (j_a(t,.)\ \underline{\psi}_k^{\mathcal{N}})_{L^2(\Omega)}$，与命题 1 的证明中相同。对于该微分方程，我们得到以下变分形式：求 $\underline{a} \in [H^1_{0,}(0,T)]^{\mathcal{N}_x}$，使得

$$-(M_x\partial_t\underline{a}, \partial_t\underline{W})_{L^2(0,T)} + (A_{xx}\underline{a}, \underline{W})_{L^2(0,T)} = \left(\underline{f}, \underline{W}\right)_{L^2(0,T)} \tag{58}$$

对于所有 $\underline{W} \in [H^1_{0,}(0,T)]^{\mathcal{N}_x}$均成立。接下来，我们应用诸如 [5, 命题 47.6] 的分解。我们对实对称矩阵 A_{xx} 进行特征分解，并对实的正定对称质量矩阵 M_x 进行 Cholesky分解，从而得到以下分解

$$A_{xx} = Q\Lambda Q^T \qquad \text{and} \qquad M_x = LL^T.$$

这里， Q 是一个正交矩阵，其列为 A_{xx} 的特征向量； Λ是一个对角矩阵，其对角元素为 A_{xx} 的特征值。另一方面， L 是一个对角元素为正的实下三角矩阵。接下来，我们考虑

$$\underline{z} := Q^T L^T \underline{a} \in [H^1_{0,}(0,T)]^{\mathcal{N}_x}. \tag{59}$$

如果我们先对方程（58）应用 L^T，再应用 Q^T，便可得到

$$-\langle \partial_t z_j, \partial_t w\rangle_{L^2(0,T)} + \kappa_j \langle z_j, w\rangle_{L^2(0,T)} = \langle g_j, w\rangle_{L^2(0,T)} \tag{60}$$

对所有 $w \in H^1_{,0}(0,T)$以及每个 $j = 1, ..., \mathcal{N}_x$ 均成立，其中z_j是$\underline{z}$的第 j个分量。右端项g_j是向量 $\underline{g} = Q^T L^T \underline{f}$的第 j个分量。到目前为止，我们能够沿用 [30, 第 5]节中的相同步骤。然而，在我们的情形下，还必须考虑 $j < 0$ 对应的 $\kappa_j = 0$。因此，方程（60）表示两种情形：波动方程和泊松方程。接下来，我们来看看每个方程的收敛速率。

如果我们考虑 $\kappa_j = 0$，就来看一下泊松问题

$$-\langle \partial_t z_j, \partial_t w\rangle_{L^2(0,T)} = \langle f, w\rangle_{(0,T)} \qquad \forall w \in H^1_{,0}(0,T).$$

对于这个泊松问题，根据 [5, 定理 32.2、引理 32.11]，我们知道存在 $c_1, c_2 > 0$，使得对所有 $z \in H^s(0,T)$

$$\begin{aligned} \|z_j - z_{h_t,j}\|_{L^2(0,T)} &\le c_1 h_t |z_j|_{H^1(0,T)}, \\ \|z_j - z_{h_t,j}\|_{H^1(0,T)} &\le c_2 h_t^{s-1} |z_j|_{H^s(0,T)}, \end{aligned}$$

对 $\frac{d}{2} < s \leq k+1$，其中 $k \geq 1$ 是拉格朗日有限元的次数。因此，对于一阶单元，$k=2$，L^2-范数中的最高预期收敛速率为二，而H^1-范数中的最高预期收敛速率为一。

另一方面，若 $\kappa_j > 0$，我们可以使用波动方程 [31, 定理 1] 的已有结果。在该定理中，我们将 $f \in [H^1_{,0}(0,T)]'$ 和 $z_j \in H^1_{0,}(0,T)$ 视为下列方程的唯一解

$$-\langle \partial_t z_j, \partial_t w\rangle_{L^2(0,T)} + \kappa_j \langle z_j, w\rangle_{L^2(0,T)} = \langle f, w\rangle_{(0,T)} \quad \forall w \in H^1_{,0}(0,T)$$

满足 $z_j \in H^1_{0,}(0,T) \cap H^s(0,T)$，其中某个 $s \in [1,2]$。那么，Petrov-Galerkin 变分形式的唯一解 $z_{h_t,\ j} \in S^1_{h_t,\ 0,}(0,T)$

$$-\langle \partial_t z_{h_t,j}, \partial_t w_{h_t}\rangle_{L^2(0,T)} + \kappa_j \langle z_{h_t,j}, w_{h_t}\rangle_{L^2(0,T)} = \langle f, w_{h_t}\rangle_{(0,T)} \quad \forall w_{h_t} \in S^1_{h_t,,0}(0,T)$$

满足

$$\|z_j - z_{h_t,j}\|_{L^2(0,T)} \leq c\left(1 + \frac{4}{\pi}T^2\kappa_j\right) h_t^s \|z_j\|_{H^s(0,T)} + \frac{\mu T h_t^2}{6}|z_j|_{H^1(0,T)}$$

其中常数 $c > 0$ 与 κ_j 和 h_t 无关。

接下来，我们考察空间收敛，并回顾第 5 章 [6, 中所述的 Nédélec 元的收敛结果。设 $\tau \in \mathcal{T}_x$。根据满足式 (58) 的 $(a_k(t))_k$ 的构造，并且由于矢量波动方程存在唯一解，我们看到 $\underline{A}_h$ 实际上是 $\underline{A}$ 在 $\mathcal{N}_I(\mathcal{T}_x)$ 中的投影。此外，由 [6, 定理 5.41] 可知

$$\left\|\underline{A}(t,.) - \underline{A}_{h_x}(t,.)\right\|_{L^2(K)} + \left\|\operatorname{curl}(\underline{A}(t,.) - \underline{A}_{h_x}(t,.))\right\|_{L^2(K)} \leq c h_x^s (|\underline{A}(t,.)|_{H^s(K)^3} + |\operatorname{curl}\underline{A}(t,.)|_{H^s(K)^3})$$

对于固定的 $t \in (0,T)$ 和 $k \in \mathcal{T}_x$，若 $\psi_i \in H^s(K)^3$ 且 $1/2 + \delta \leq s \leq k$，其中 k 是 Nédélec 空间的次数。根据 [6, Rmk. 7.30]，我们知道，对于立方体上的线性边元，可以预期所有特征函数 $\underline{\psi}_i$ 都属于 $H^2(\Omega)$，据此我们可以构造 $\underline{A}$。因此，我们可以预期在 $H(\text{旋度})$-半范数下达到一阶收敛。

综合所有结果，我们可以预期在 $L^2(Q)$ 范数下，时间上二阶收敛、空间上一阶收敛。按照与 [31, Thm. 2] 相同的步骤，也可以证明二阶收敛。对于 $H^{1;\mathrm{curl}}(Q)$-半范数，我们可以预期一阶收敛。下一节的数值结果也将展示这一点。

3.5 数值结果

本节将考察数值结果，并应用上述理论结果。我们首先考察 $\sigma = 0$ 的结果，以此作为基准，用来评估其他结果。

为计算线性系统 (43)，我们首先需要组装右端项。式 (41) 中右端项的投影 $\Pi^{\mathcal{RT}}_{h}\ {}^1\underline{j}_a\ j_a$ 通过对积分采用高阶求积公式计算，更多详情见 [16] 。所有空间矩阵和时间矩阵 (45) 均借助有限元库 NGSolve 计算，参见 www.ngsolve.org 和 [26]。最后，使用稀疏直接求解器 UMFPACK 5.7.1[12]求解线性系统 (43)。

3.5.1 对 $\sigma \equiv 0$ 的收敛性检验

我们先来看一些 $\sigma \equiv 0$ 的例子，以考察 CFL 条件。本节的例子考虑区域 $Q = (0, 2) \times (0, 1)^2,$，其中 $T = 2$ 且 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$，以及 $\varepsilon \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\mu \equiv 1$。我们将考虑两个构造解。第一个构造解为

$$\underline{A}_1(t, x_1, x_2) = t^2 x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \tag{61}$$

对于 $(t, x_1, x_2) \in Q$. 函数 $\underline{A}_1$ 具有齐次切向迹 $\gamma_t \underline{A}_1 = 0$ 以及齐次初始条件。将 $\underline{A}_1$ 代入矢量波动方程，可得

$$j_1(t, x_1, x_2) := \begin{pmatrix} 2x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2)x_2 \\ (2x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2)(-x_1) \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} x_1(x_1(5 - 12x_2) + 10x_2 - 4) \\ -x_2(-2x_1(6x_2 - 5) + 5x_2 - 4) \end{pmatrix}.$$

为考察收敛率，我们通过以下公式计算实验收敛阶（EOC）：

$$EOC = \frac{\ln(err_{L-1}) - \ln(err_L)}{\ln(h_{L-1}) - \ln(h_L)},$$

其中，err_L 是第 L 层的 $L^2(Q)$ 误差，或 $H^{\mathrm{curl};1}(Q)$ 半范数下的误差。此外，本节 ?? 的细化过程中采用二分细化，因此 $\ln(h_{L-1}) - \ln(h_L) = \ln(2)$。

为计算表1，我们针对时间上的二阶元和空间上的最低阶 Nédélec 元求解式 (43) 中所述的离散线性系统。由此可见，$\|\cdot\|_{L^2(Q)}$范数下达到二阶收敛，$|\cdot|_{H^{\mathrm{curl};1}(Q)}$半范数下达到一阶收敛。这与时间上采用线性元、并将右端项投影为 $\Pi^{\mathcal{RT}}_{,h}{}^{1}\underline{j}_1$ 时得到的结果相同，见 [16]。

L	h_x	h_t	#自由度	$\|\underline{A} - \underline{A}_h\|_{L^2(Q)}$	EOC	$\|\underline{A} - \underline{A}_h\|_{H^{\mathrm{curl};1}(Q)}$	EOC
0	0.5000	0.5000	80	3.25e-02	-	1.76e-01	-
1	0.2500	0.2500	896	1.27e-02	1.36	1.15e-01	0.62
2	0.1250	0.1250	8192	3.24e-03	1.97	5.90e-02	0.97
3	0.0625	0.0625	69632	7.87e-04	2.04	2.97e-02	0.99
4	0.0312	0.0312	573440	1.92e-04	2.03	1.48e-02	1.00

表1：在均匀加密策略下，针对单位正方形 Ω、$T = 2$ 以及式 (61) 中的解 $\underline{A}_1$，Galerkin–Petrov 有限元法 (42) 的误差表。

接下来，我们想要检验 CFL 条件 (56) 的锐度。为此，我们采用一个更复杂的人工解 $\underline{A}_2$，该解也曾用于 [16]。我们设置 $T = \sqrt{2}$，以检验 [16] 中的例子，其中解

$$\underline{A}_2(t, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -5t^2 x_2(1 - x_2) \\ t^2 x_1(1 - x_1) \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} \sin(\pi x_1)x_2(1 - x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{62}$$

曾用于 $(t, x_1, x_2) \in Q.$。函数 $\underline{A}_2$ 满足齐次边界条件 $\gamma_t \underline{A}_2 = 0$，且具有齐次初始条件。相关的右端项 $\underline{j}_2$ 为

$$\underline{j}_2(t, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -10(t^2 - x_2^2 + x_2) \\ 2(t^2 - x_1^2 + x_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t^3 \sin(\pi x_1) + 6t \sin(\pi x_1) x_2 (1 - x_2) \\ \pi t^3 (1 - 2x_2) \cos(\pi x_1) \end{pmatrix}$$

对于 $(t, x_1, x_2) \in Q$ 和 $\mathrm{div}_x \underline{j}_2 \neq 0$。

表2：Galerkin–Petrov 有限元法 (42) 在 $(0, \sqrt{2}) \times (0, 1)^2$ 上的 $\|\cdot\|_{L^2(Q)}$ 误差，以及式 (62) 中的解 $\underline{A}_2$。

h_x \ h_t	0.2828	0.1414	0.0707	0.0354	0.0177
0.1768	4.19e-02	4.19e-02	4.19e-02	4.19e-02	4.19e-02
0.0884	1.04e-02	1.04e-02	1.04e-02	1.04e-02	1.04e-02
0.0442	2.60e-03	2.08e-02	2.59e-03	2.59e-03	2.59e-03
0.0221	6.59e-04	1.61e-02	1.72e+03	6.47e-04	6.47e-04

表3：Galerkin–Petrov 有限元法 (42) 在 $(0, \sqrt{2}) \times (0, 1)^2$ 上的 $|\cdot|_{H^{\mathrm{curl};1}(Q)}$ 误差，以及 (62) 中的解 $\underline{A}_2$。

h_x \ h_t	0.2828	0.1414	0.0707	0.0354	0.0177
0.1768	6.22e-01	6.22e-01	6.22e-01	6.22e-01	6.22e-01
0.0884	3.09e-01	3.08e-01	3.08e-01	3.08e-01	3.08e-01
0.0442	1.54e-01	2.16e+00	1.54e-01	1.54e-01	1.54e-01
0.0221	7.69e-02	3.13e+00	3.61e+05	7.69e-02	7.69e-02

首先，我们取 $T = \sqrt{2}$，并查看 $L^2(Q)$-范数误差表（表 2）以及 $H^{\mathrm{curl};1}(Q)$-半范数误差表（表 3）。这与论文[16] 中的数值算例相同，该算例展示了时间方向采用分片线性有限元、空间方向采用最低阶 Nédélec 元时 CFL 条件的尖锐性。在论文 [16] 中，我们观察到稳定时 $H^{\mathrm{curl};1}(Q)$-半范数呈一阶收敛，而 $L^2(Q)$-范数呈二阶收敛。我们在表 4 和表 5 的插值误差中也看到了这一现象。其中，表 5 呈一阶收敛，表 4 呈二阶收敛。将这些结果与误差表 2 和 3 中的结果进行比较后，我们发现，在达到稳定性后，$H^{\mathrm{curl};1}(Q)$- 半范数呈一阶收敛，而 $L^2(Q)$-范数呈二阶收敛。

另一方面，观察表 2 和表 3 中结果的稳定性，我们可以清楚地看到 CFL 条件的影响。根据最后一行，我们可以看到第三列中 $h_t/h_x \approx 0.0707/0.0221 \approx 3.1991$ 的结果表明解不收敛。另一方面，第四列中的 $h_t/h_x \approx 0.0354/0.0221 \approx 1.6018$ 满足 CFL 条件，因此实现了收敛。与 [16] 中时间方向采用分片线性元的结果相比，时间方向采用二阶元时总误差更小。另一方面，在固定空间离散的情况下，我们可以看到随着时间网格细化，收敛速度更快。

表 4：$\|\cdot\|_{L^2(Q)}$ 在 $(0,\sqrt{2}) \times (0,1)^2$ 中的插值误差，以及式 (62) 中的解 $\underline{A}_2$。

h_x \ h_t	0.2828	0.1414	0.0707	0.0354	0.0177
0.1768	7.49e-02	7.49e-02	7.49e-02	7.49e-02	7.49e-02
0.0884	1.93e-02	1.93e-02	1.93e-02	1.93e-02	1.93e-02
0.0442	4.84e-03	4.81e-03	4.81e-03	4.81e-03	4.81e-03
0.0221	1.24e-03	1.21e-03	1.20e-03	1.20e-03	1.20e-03

表 5：$|\cdot|_{H^{\mathrm{curl};1}(Q)}$ 在 $(0,\sqrt{2}) \times (0,1)^2$ 中的插值误差，以及式 (62) 中的解 $\underline{A}_2$。

h_x \ h_t	0.2828	0.1414	0.0707	0.0354	0.0177
0.1768	6.49e-01	6.49e-01	6.49e-01	6.49e-01	6.49e-01
0.0884	3.20e-01	3.20e-01	3.20e-01	3.20e-01	3.20e-01
0.0442	1.59e-01	1.59e-01	1.59e-01	1.59e-01	1.59e-01
0.0221	7.95e-02	7.94e-02	7.94e-02	7.94e-02	7.94e-02

为展示 CFL 条件 (56) 的表现，我们考察同一个例子，但将终止时间设为 $T = \sqrt{10.4}$。我们采用与表 2 和表 3 的模拟相同数量的时空单元。将终止时间设为 $T = \sqrt{10.4}$ 后，可以看到时间网格尺寸与空间网格尺寸之比接近第 3.3 节中的 CFL 条件。对于这些取值，在表 6 和表 7 中，例如第三行倒数第二列或最后一行最后一列，可以看到该比值等于

$$\frac{h_t}{h_x} \approx \frac{0.0806}{0.0442} = \frac{0.0403}{0.0221} \approx 1.82352941.$$

该比值低于 CFL 条件 $h_t < 1.825741858\ h_x$. 另一方面，在第三行第三列和第四行第四列中，该比值不满足 CFL 条件

$$\frac{h_t}{h_x} \approx \frac{0.1612}{0.0442} = \frac{0.0806}{0.0221} \approx 3.64705.$$

因此，对于这些情况，我们的结果没有显示出收敛性。

表 6：Galerkin–Petrov 有限元法 (42) 在 $(0,\sqrt{10.4}) \times (0,1)^2$ 中以及 (62) 中的解 $\underline{A}_2$ 的误差 $\|\cdot\|_{L^2(Q)}$。

h_x \ h_t	0.6450	0.3225	0.1612	0.0806	0.0403
0.1768	3.54e-01	3.54e-01	3.54e-01	3.54e-01	3.54e-01
0.0884	8.90e-02	1.04e+00	8.85e-02	8.85e-02	8.85e-02
0.0442	2.29e-02	4.87e-01	1.95e+05	2.21e-02	2.21e-02
0.0221	7.88e-03	1.83e-01	9.99e+05	1.04e+19	5.52e-03

表 7：Galerkin–Petrov 有限元法 (42) 在 $(0,\sqrt{10.4})\times(0,1)^2$ 中的 $|\cdot|_{H^{\mathrm{curl};1}(Q)}$ 误差，以及式 (62) 中的解 $\underline{A}_2$。

h_x \ h_t	0.6450	0.3225	0.1612	0.0806	0.0403
0.1768	4.29e+00	4.28e+00	4.28e+00	4.28e+00	4.28e+00
0.0884	2.15e+00	5.25e+01	2.14e+00	2.14e+00	2.14e+00
0.0442	1.08e+00	4.57e+01	2.00e+07	1.07e+00	1.07e+00
0.0221	5.57e-01	1.66e+01	1.77e+08	1.93e+21	5.36e-01

3.5.2 $\sigma\not\equiv 0$ 的收敛性

最后，我们希望考察在空间区域 Ω 的一个子域上设置 $\sigma\not\equiv 0$ 时的收敛性。为此，我们再次考虑 $Q=(0,2)\times[0,1]^2$，其中 $\varepsilon\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$、$\mu\equiv 1$。我们取式（61）的构造解 $\underline{A}_1$。然而，如图1所示，我们在 conv{(0.5, 0.35)、(0.65, 0.5)、(0.5, 0.65)、(0.35, 0.5)} 上选择 $\sigma=1$，并在其他位置取零。然后，我们计算构造的右端项 $\underline{j}_a=\partial_{tt}\underline{A}_1+\sigma\partial_t\underline{A}_1+\nabla\times\nabla\times\underline{A}_1$。

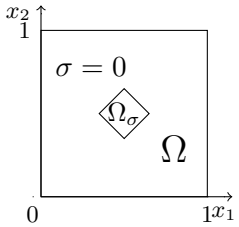


图1：区域 Ω 以及电导率 σ. 的支集 Ω_σ =supp(σ)

当我们求解此例中的 (43) 时，对于时间上的分段二次函数，可以得到表 8 所示的 $L^2(Q)$-范数误差，以及表 9 所示的 $H^{\mathrm{curl};1}(Q)$-半范数误差。在这两个表格（表 9 和表 8）中，我们都可以看到 CFL 条件 (56)、$h_t<1.825741858\ h_x$，正如 $\sigma\equiv 0$ 的情形一样。事实上，在每个表格中，我们都可以看到，在第四列满足 CFL 条件 $h_t/h_x=1.18$ 之后，误差在第二列从 $h_t/h_x=4.7348$ 到第三列 $h_t/h_x=2.3674$ 的最后一行出现了增大，但随后停止。满足 CFL 条件后，我们再次看到 $H^{\mathrm{curl};1}(Q)$-半范数呈线性收敛，但 $L^2(Q)$-范数却没有二阶收敛。不过请注意，更严格的 CFL 条件 (57) 在此处并不适用。

注释 3.1。在 $\varepsilon=\varepsilon_0$, $\mu^{-1}=\mu_0^{-1}$ 的情况下，我们得到 $h_t<\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\frac{60}{18}}h_x\approx 6.09\ 10^{-9}\ h_x$, 因为 $\mu_0=1.256637\ 10^{-6}$ 且 $\varepsilon_0=8.854188\ 10^{-12}$. 。在这种情况下，由于 μ^{-1} 和 σ 至少高出 10^{12} 阶，考虑该问题的应用或许是合理的。我们可以考虑采用非常精细的分辨率，以研究原子尺度上的分辨率；或者，与其求解(42)，不如考虑涡流问题。这将是未来工作的一个主题。

表 8：Galerkin–Petrov 有限元法 (42) 在 $(0,2)\times(0,1)^2$ 中的 $\|\cdot\|_{L^2(Q)}$ 误差，以及 (61) 中的解 $\underline{A}_1$。

h_x \ h_t	0.2500	0.1250	0.0625	0.0312	0.0156
0.2111	1.06e-02	1.06e-02	1.06e-02	1.06e-02	1.06e-02
0.1055	3.72e-03	3.70e-03	3.70e-03	3.70e-03	3.70e-03
0.0528	2.23e-03	1.31e+00	2.14e-03	2.14e-03	2.14e-03
0.0264	1.49e-03	1.77e+01	6.57e+10	1.48e-03	1.48e-03

表 9：Galerkin–Petrov 有限元法 (42) 在 $(0,2)\times(0,1)^2$ 中的 $|\cdot|_{H^{\mathrm{curl};1}(Q)}$ 误差，以及式 (61) 中的解 $\underline{A}_1$。

h_x \ h_t	0.2500	0.1250	0.0625	0.0312	0.0156
0.2111	1.08e-01	1.08e-01	1.08e-01	1.08e-01	1.08e-01
0.1055	5.76e-02	5.47e-02	5.47e-02	5.47e-02	5.47e-02
0.0528	6.48e-02	1.49e+02	2.76e-02	2.76e-02	2.76e-02
0.0264	2.12e-02	3.42e+03	1.49e+13	1.39e-02	1.42e-02

4 结论

本文研究了考虑欧姆定律的矢量波动方程变分形式的唯一可解性。首先，我们考察了试探空间与检验空间，并展示了证明可解性所需的函数空间性质。随后，我们证明了变分公式 (16) 的唯一可解性，其中 $\underline{j}_a \in L^1(0,T;\, L^2(\Omega;\, \mathbb{R}^d))$。对于电磁问题，变分公式 (16) 适用于多种电磁实例，因为它针对欧姆定律和各向异性材料建立。

在证明了唯一可解性之后，我们转而研究张量积中的计算示例。我们在时间方向使用了分段二次试探函数，在空间方向使用了最低阶 Nédélec 元。在这里，与时间方向采用线性试探函数的情况一样，我们发现存在 CFL 条件。我们计算了 CFL 条件并给出了示例。利用第 3.3 节中的推理，还可以为时间方向上的其他高阶元推导出 CFL 条件。因此我们了解到，仅仅提高时间方向有限元的阶数，并不能得到无条件稳定方法。在张量积结构的情况下，对于矢量波动方程的时空离散，我们总是可以预期存在 CFL 条件。一种可能的解决方案是采用修正希尔伯特变换，如 [16] 中所进行的那样。

本研究的结果为处理更复杂的电磁问题奠定了基础。我们探讨了矢量波动方程的主要难点及其影响。这将成为未来研究涡流问题计算及其他应用计算（例如采用非结构时空网格）的起点。

参考文献

[1] Jin, J.《电磁学中的有限元法》，第2版。Wiley-Interscience[John Wiley & Sons]，纽约，2002年。[2] Bai, X., and Rui, H.《Cole–Cole色散介质中麦克斯韦方程组的二阶时空精度格式》。Engineering with Computers 38, 6（2022年），5153–5172。[3] Xie, J., Liang, D., and Zhang, Z.《二维麦克斯韦方程组的能量守恒局部网格细化分裂FDTD格式》。J. Comput. Phys. 425（2021年），论文编号109896，29页。[4] Ern, A., and Guermond, J.-L.《有限元 I——逼近与插值》，应用数学丛书第72卷。Springer，Cham，2021年。[5] Ern, A., and Guermond, J.-L.《有限元 II——Galerkin逼近、椭圆型与混合型偏微分方程》，应用数学丛书第73卷。Springer，Cham，2021年。[6] Monk, P.《麦克斯韦方程组的有限元方法》。Numer. Math. Sci. Comput. 牛津：牛津大学出版社，2003年。[7] Lang, S.《微分流形与黎曼流形》，第3版，数学研究生教材第160卷。Springer-Verlag，纽约，1995年。[8] Post, E. J.《电磁学的形式结构：广义协变性与电磁学》。物理学丛书。Dover Publications，1962年。[9] Stern, A., Tong, Y., Desbrun, M., and Marsden, J. E.《采用变分积分器和离散微分形式的几何计算电动力学》。载于《几何、力学与动力学》，Fields Inst. Commun. 第73卷。Springer，纽约，2015年，第437–475页。[10] Pauly, D., and Schomburg, M.《具有混合边界条件的希尔伯特复形，第1部分：de Rham 复形》。Math. Methods Appl. Sci. 45, 5（2022年），2465–2507。[11] Aubin, J.-P.《应用泛函分析》，第2版。纯粹与应用数学（纽约）。Wiley-Interscience，纽约，2000年。附 Bernard Cornet 和 Jean-Michel Lasry 编写的习题，由 Carole Labrousse 从法文翻译。[12] Davis, T. A.《算法832：UMFPACK V4.3——非对称模式多前沿法》。ACM Trans. Math. Softw. 30, 2（2004年），196–199。[13] Colton, D., and Kress, R.《散射理论中的积分方程方法》。工业与应用数学学会，费城，宾夕法尼亚州，1983年。[14] Colton, D., and Kress, R.《声学与电磁逆散射理论》，应用数学科学第93卷。Springer，Cham， [2019] ©2019年。第4版，见 [MR1183732]。[15] Assous, F., Ciarlet, P., and Labrunie, S.《计算电磁学的数学基础》，应用数学科学第198卷。Springer，Cham，2018年。

[16] Hauser, J. I. 和 Zank, M. 关于麦克斯韦方程组协调时空方法的数值研究。偏微分方程数值方法 *40*，2（2024），e23070。[17] Arnold, D. N.、Falk, R. S. 和 Winther, R. 有限元外微分演算、同调技术及其应用。*Acta Numer. 15* （2006），1–155。[18] Poggio, A. J. 和 Miller, E. K. 第*4*章——三维散射问题的积分方程解法。电气工程国际专著丛书。Pergamon，1973。[19] Landau, L. D.、Pitaevskii, L. P. 和 Lifshitz, E. M. 连续介质电动力学，第2版，第8卷。爱思唯尔，1984。[20] Hauser, J. I. M. 麦克斯韦方程组的时空方法——求解矢量波动方程。博士论文，格拉茨工业大学，2021年。[21] Zeidler, E. 非线性泛函分析及其应用。*II/A*。Springer-Verlag，纽约，1990。线性单调算子，由作者和 Leo F. Boron 从德文译出。[22] Bennett, C. 和 Sharpley, R. 算子插值，纯粹与应用数学第129卷。Academic Press, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1988。[23] Fortney, J. P. 微分形式与流形上的微积分可视化导论。Birkhäuser/Springer，Cham，2018年。[24] Jackson, J. D. 经典电动力学，第3版。John Wiley & Sons, Inc.，纽约-伦敦-悉尼，1998。[25] Jackson, J. D. 和 Okun, L. B. 规范不变性的历史根源。*Rev. ModernPhys. 73*，3（2001），663–680。[26] Schöberl, J. NETGEN：一种基于抽象规则的推进前沿二维/三维网格生成器。*Comput. Vis. Sci. 1*，1（1997），41–52。[27] Weidmann, J. 希尔伯特空间中的线性算子。第*1*部分。数学指南丛书。[数学教科书]。B. G. Teubner，斯图加特，2000。基础。 [基础]。[28] Cessenat, M. 电磁学中的数学方法。WORLD SCIENTIFIC，1996。[29] Crawford, Z. D.、Li, J.、Christlieb, A. 和 Shanker, B. 混合有限元麦克斯韦求解器的无条件稳定时间步进方法。*Progress In Electromag-netics Research C 103* （2020），17–30。[30] Steinbach, O. 和 Zank, M. 初边值问题的强制性时空有限元方法。*Electron. Trans. Numer. Anal. 52* （2020），154–194。[31] Steinbach, O. 和 Zank, M. 波动方程的稳定化时空有限元法。高级有限元方法及其应用：*2017*年第*30*届开姆尼茨有限元研讨会论文选集（2019），341–370。

[32] Tenenbaum, M. 和 Pollard, H. 常微分方程：数学、工程和科学专业学生的基础教材。Dover Publication，1985。[33] Serdyukov, A.、Semchenko, I.、Tretyakov, S. 和 Sihvola, A. 双各向异性材料的电磁学：理论与应用。Electrocomponent 科学专著。Gordon and Breach 科学出版社，2001。[34] Umashankar, K. 工程电磁场导论。WORLD SCI- ENTIFIC，1989。[35] Ladyzhenskaya, O. A. 数理物理边值问题，应用数学科学第49卷 。Springer-Verlag，纽约，1985。[36] Gopalakrishnan, J.、Neumüller, M. 和 Vassilevski, P. S. de Rham 复形的辅助空间预条件子。 *SIAM J. Numer. Anal. 56*, 6（2018年），3196–3218。