arXiv:2301.03383v1 [math.AP] 9 Nov 2022

Besov空间中 Euler–Poincar´e 方程解映射的连续性

Min Li[1] *

[1] 江西财经大学数学系，南昌，330032，中国

摘要：通过在傅里叶域进行局部化构造一系列扰动函数，并利用该系统的对称形式，我们证明 Euler-Poincar´e 方程的初值到解映射在 $B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)$ 中处处不一致连续，其中 $s > \max\{1+\frac{d}{2}, \frac{3}{2}\}$ and $(p,r) \in (1,\infty) \times [1,\infty)$。这一结果改进了我们此前的结论：此前我们证明了 Euler-Poincar´e 方程的初值到解映射在原点附近 $B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)$ 的有界子集上不一致连续。

关键词：Euler-Poincar´e 方程；处处不一致连续；Besov空间；数据到解映射。

MSC（2010）：35Q35，35Q51，35L30

1 引言

本文研究 Euler-Poincar´e 方程在 $\mathbb{R}^d$ 中的柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t m + u\cdot\nabla m + \nabla u^T\cdot m + (\mathrm{div} u)m = 0, & (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d, \\ m = (1-\Delta)u, & (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0, & x\in\mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{1.1}$$

方程（1.1）最初由 Holm、Marsden 和 Ratiu 在 [17, 18] 中提出，作为下列 Camassa-Holm 方程的高维推广，用于模拟和分析非线性浅水波：

$$m_t + um_x + 2u_x m = 0,\ m = u - u_{xx}. \tag{CH}$$

事实上，当 $d = 1$ 欧拉-庞加莱´方程与 Camassa-Holm 方程（Camassa–Holm 方程）相同时，欧拉-庞加莱´方程也被研究为这样一个系统：它描述了相对于动能范数的微分同胚群上的测地运动，见 [16]。

*电子邮箱：limin@jxufe.edu.cn

对于 $d=1$，方程（Camassa–Holm 方程）由 Camassa 和 Holm 提出 [5]，作为描述浅水波的双哈密顿模型。最重要的是，Camassa-Holm 方程具有如下形式的峰子解$Ce^{-|x-Ct|}$，这引起了物理学领域的广泛关注，见 [8, 29]。关于 Camassa-Holm 方程的强适定性、弱解以及解析或几何性质，已有大量文献，下面列举其中一些。关于 Camassa-Holm 方程柯西问题的局部适定性与不适定性，见 [9, 12, 13]。强解的爆破现象与整体存在性见 [7, 9–11]。整体弱解与耗散解的存在性见 [3, 4, 30],，更多结果可参见其中的参考文献。

对 Euler-Poincar´é 方程（1.1）的首次严格分析由 Chae 和 Liu 完成 [6],；他们建立了 W^2 中的弱解局部存在性，^{p}（$\mathbb{R}^d$） $p>d$ 并证明了 H^s（$\mathbb{R}^d$） $s>\frac{d}{2}+3$中唯一经典解的局部存在性。Yan 和 Yin [31] 进一步讨论了方程（1.1）在 Besov空间中的解的局部存在性与唯一性。另一方面，Li、Yu 和 Zhai [27] 证明，对于一大类光滑初始数据，方程（1.1）的解会在有限时间内爆破或全局存在，从而解决了 Chae 和 Liu 提出的一个公开问题 [6]。随后，Luo 和 Yin 利用该方程的旋转不变性质，在周期情形下获得了一项新的爆破结果 [25]。关于 Euler-Poincar´é 方程的更多结果，请参见 [25, 32]。

近年来，自 Himonas 等人 [14, 15], 开展相关研究以来，Camassa-Holm 型方程的初值到解映射的连续性逐渐受到许多作者的关注，参见 [21, 23]。大多数非一致连续性结果仅在原点附近的有界集上成立。为克服这一局限，Inci 得到了一系列处处非一致连续性结果，涵盖了许多 Camassa-Holm 型方程 [19, 20]。对于不可压缩欧拉方程，Bourgain 和 Li [2] 利用局部化伽利略变换的思想证明，初值到解映射在 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 中关于 $s\geq 0$处处非一致连续；这一方法将为本文提供启发。

作为适定性理论的一部分，初值到解映射的连续性确实十分重要。事实上，初值到解映射的非一致连续性意味着无法通过压缩映射原理建立局部适定性，因为这会推出解映射具有利普希茨连续性。另一方面，在某些临界空间中，初值到解映射的连续性会先于解的存在性和唯一性遭到破坏，从而导致不适定性 [22]。

以往关于连续性的研究大多聚焦于空间一维的 Camassa-Holm 型方程。对于多维 Euler-Poincar´é 方程（1.1），连续性问题尚未得到深入研究。直到最近，Li 等人 [24] 才证明，方程（1.1）的相应解关于 H^s（$\mathbb{R}^d$） $s>1+\frac{d}{2}$中的初始数据不具有一致连续依赖性。随后，这一非一致连续性结果被推广到 Besov空间$B^s_{p,\ r}$（$\mathbb{R}^d$） $s>\max\{1+\frac{d}{2},\frac{3}{2}\}$ 中 [26]。

值得一提的是，关于（1.1）的非一致连续性结果仅在原点附近的某个有界集上成立。本文将去除有界性限制，并证明 Euler-Poincar´e 方程（1.1）的初值到解映射不一致

连续于任意开子集 $U \subset B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)$ $s > \max\{1+\frac{d}{2}, \frac{3}{2}\}$。从技术上讲，我们的证明基于方程（1.1）的一种对称形式，并采用平移方法构造扰动数据。该方法由 Bourgain 和 Li 提出，用于 [2] 证明不可压缩欧拉方程处处不一致连续。

为简化起见，我们先将方程 (1.1) 转化为输运型系统。根据 Yan [31]，我们可以将 (1.1) 改写为如下非局部形式：

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = Q(u,u) + R(u,u), \tag{1.2}$$

其中

$$\begin{cases} Q(u,v) = -(I-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\Big(\nabla u \nabla v + \nabla u \nabla v^T - \nabla u^T \nabla v - \nabla u(\mathrm{div} v) + \frac{1}{2}(\nabla u : \nabla v)\mathbf{I}\Big), \\ R(u,v) = -(I-\Delta)^{-1}\big(u\ \mathrm{div} v + \nabla u^T v\big). \end{cases} \tag{1.3}$$

现在定义一个对称双线性算子 $\mathcal{T}$ 如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(u,v) &:= \frac{1}{2}\Big(Q(u,v) + Q(v,u) + R(u,v) + R(v,u)\Big) \\ &= -(I-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\big(M(\nabla u, \nabla v)\big) - (I-\Delta)^{-1}\big(N(u, \nabla u; v, \nabla v)\big), \end{aligned} \tag{1.4}$$

这里 M， N 分别是关于 $(\nabla u,\ \nabla v)$ 和 $(u,\ \nabla u;\ v,\ \nabla v)$ 的双线性函数。根据 (1.3)，它们在 u，v 上是对称的。于是，Euler-Poincar´e 方程变为

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u = \mathcal{T}(u,u), & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0, & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{E-P}$$

我们首先回顾 [26] 中建立的非一致连续性结果。

定理 1.1 (有界集上的非一致连续性)。设 $d \geq 2$ 且 $s > 2 + \max\left\{1+\frac{d}{p},\ \frac{3}{2}\right\}$ 其中 $1 \leq p$，$r \leq \infty$。Euler-Poincar´e 方程 (E-P) 的初值到解映射 S_t 在任意有界子集 $O_N = \{u_0 \in B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d) : \|u_0\|_{B^s_{p,r}} \leq N\}$ 到 $\mathcal{C}([0,T]; B^s_{p,r})$ 上都不是一致连续的。更确切地说，存在两列初始数据 $f_n + g_n$，f_n，使得

$$\|f_n\|_{B^s_{p,r}} \lesssim 1 \quad and \quad \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_{B^s_{p,r}} = 0,$$

其中解 $S_t(f_n + g_n)$ $S_t(f_n)$ 满足

$$\liminf_{n\to\infty} \|S_t(f_n+g_n) - S_t(f_n)\|_{B^s_{p,r}} \geq c_0 t, \ \forall t \in [0, T_0],$$

对于某个常数 $c_0 > 0$ 和较短时间 T_0。

本文的主要结果如下定理所示。

定理1.2（处处非一致连续性）。假设 $d \geq 2$，并且

$$s > 2 + \max\left\{1 + \frac{d}{p}, \frac{3}{2}\right\} \quad and \quad (p, r) \in (1, \infty) \times [1, \infty). \tag{1.5}$$

那么，柯西问题（ S_t 的 Euler–Poincar ´é 方程的初值到解映射*E-P*）

$$S_t : B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}([0, T]; B^s_{p,r}), \quad u_0 \mapsto S_t(u_0),$$

在 $B^s_{p,r}$ 到 $\mathcal{C}([0, T]; B^s_{p,r})$ 上处处都不一致连续。更确切地说，对于任意 $u_0 \in B^s_{p,r}$ 和 $N > 0$，存在两个函数序列 $f_n(x)$ $g_n(x)$，使得

$$\|f_n\|_{B^s_{p,r}} \lesssim 2^{-N} \quad and \quad \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_{B^s_{p,r}} = 0,$$

相应的解 $S_t(f_n + g_n)$ $S_t(f_n)$ 满足

$$\liminf_{n\to\infty} \|S_t(u_0 + f_n + g_n) - S_t(u_0 + f_n)\|_{B^s_{p,r}} \geq c_0 t, \ \forall t \in [0, T_0],$$

对于某个常数 $c_0 > 0$ 和较小的时间 T_0。

注 1.1。 与定理 *1.1* 相比，定理 *1.2* 避开了端点 $p = 1$ 和 $p = \infty$，这是因为在对 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 进行梯度估计时，需要用到 Riesz 变换在 $\mathcal{T}$ 上的有界性（见引理 *3.2*），而这只在 $p \in (1, \infty)$ 内成立。

注 1.2。 定理 *1.1* 中建立的不一致连续性仅在原点附近的有界集上成立；在定理 *1.2* 中，我们去除了这些限制，并证明对于任意 u_0 及任意邻域 $U(u_0) \subset B^s_{p,\,r}$ 在 U 上的初值到解映射并非一致连续。从这个意义上说，定理 *1.2* 改进了文献 *[26]* 中的先前结果。

本文其余部分安排如下：第 2 节列出一些记号，并回顾 Littlewood–Paley 理论的基本结果。第 3 节通过建立一些技术引理和命题，给出定理1.2 的证明。

2 Littlewood–Paley 分析

我们首先介绍 Littlewood–Paley 分解、非齐次 Besov 空间及其一些有用性质的相关事实（更多详情请参见 [1] ）。

令 $\mathcal{B} := \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi| \leq 4/3\}$ 且 $\mathcal{C} := \{\xi \in \mathbb{R}^d : 3/4 \leq |\xi| \leq 8/3\}$. 取一个径向、非负的光滑函数 $\chi : \mathbb{R}^d \mapsto [0, 1]$，使其支集包含于 $\mathcal{B}$ 且 $\chi \equiv 1$ 对 $|\xi| \leq 3/4$成立。令 $\varphi(\xi) := \chi(\xi/2) - \chi(\xi)$，则可推出 φ 的支集包含于 $\mathcal{C}$。此外，

$$\chi(\xi) + \sum_{j\geq 0} \varphi(2^{-j}\xi) = 1 \quad \text{for any } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

我们应当强调，事实 $\varphi(\xi) \equiv 1$ 对于 $4/3 \leq |\xi| \leq 3/2$ 将在下文中用到。

对于每个 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$，非齐次二进小块 Δ_j 定义如下

$$\Delta_j u = \begin{cases} 0, & if \quad j \le -2; \\ \chi(D)u = \mathcal{F}^{-1}(\chi \mathcal{F}u), & if \quad j = -1; \\ \varphi(2^{-j}D)u = \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi(2^{-j}\cdot)\mathcal{F}u\big), & if \quad j \ge 0. \end{cases}$$

在非齐次情形下，下面的 Littlewood–Paley 分解是有意义的

$$u = \sum_{j \ge -1} \Delta_j u \quad \text{for any } u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

定义 2.1. labelbesov 设 $s \in \mathbb{R}$ 和 $(p, r) \in [1, \infty]^2$。非齐次 Besov空间$B^s_{p,\ r}(\mathbb{R}^d)$ 定义为

$$B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d) := \Big\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : \ \|f\|_{B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)} < \infty \Big\},$$

其中

$$\|f\|_{B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{j \ge -1} 2^{sjr} \|\Delta_j f\|^r_{L^p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{r}}, & if\ 1 \le r < \infty, \\ \sup\limits_{j \ge -1} 2^{sj} \|\Delta_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, & if\ r = \infty. \end{cases}$$

下文将用到以下伯恩斯坦不等式。

引理 2.1. 设 $\mathcal{B}$ 是一个球，$\mathcal{C}$ 是一个环域。存在常数 $C > 0$，使得对于所有$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$、任意正实数 λ 以及满足 $1 \le p \le q \le \infty$ 的任意函数 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$，我们有

$$\begin{aligned} &\mathrm{supp}\hat{f} \subset \lambda \mathcal{B} \ \Rightarrow \ \|D^k f\|_{L^q} := \sup_{|\alpha| = k} \|\partial^\alpha f\|_{L^q} \le C^{k+1} \lambda^{k + (\frac{d}{p} - \frac{d}{q})} \|f\|_{L^p}, \\ &\mathrm{supp}\hat{f} \subset \lambda \mathcal{C} \ \Rightarrow \ C^{-k-1} \lambda^k \|f\|_{L^p} \le \|\Delta^k f\|_{L^p} \le C^{k+1} \lambda^k \|f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

引理 2.2 (见 [1]). 设 $(s_1,\ s_2,\ p,\ r) \in \mathbb{R}^2 \times [1, \infty]^2$，且 $s_1 < s_2,\quad 0 < \theta < 1$，则有

$$\begin{aligned} \|u\|_{B^{\theta s_1 + (1-\theta)s_2}_{p,r}} \le & \|u\|^\theta_{B^{s_1}_{p,r}} \|u\|^{1-\theta}_{B^{s_2}_{p,r}}, \\ \|u\|_{B^{\theta s_1 + (1-\theta)s_2}_{p,1}} \le & \frac{C}{s_2 - s_1} \Big(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta} \Big) \|u\|^\theta_{B^{s_1}_{p,\infty}} \|u\|^{1-\theta}_{B^{s_2}_{p,\infty}}. \end{aligned}$$

接下来，我们给出一些将在全文中用到的重要乘积估计。

引理 2.3（见 [1]）。对于 $(p, r) \in [1, \infty]^2$和 $s > 0$, $B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ 是一个代数。此外，对于任意 u,$v \in B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$，我们有

$$\|uv\|_{B^s_{p,r}} \le C(\|u\|_{B^s_{p,r}} \|v\|_{L^\infty} + \|v\|_{B^s_{p,r}} \|u\|_{L^\infty}).$$

此外，若 $s > \max\ \big\{1 + \frac{d}{p}, \frac{3}{2}\big\}$，则

$$\|uv\|_{B^{s-2}_{p,r}(\mathbb{R}^d)} \le C \|u\|_{B^{s-2}_{p,r}(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{B^{s-1}_{p,r}(\mathbb{R}^d)}.$$

引理 2.4 (参见 [1,28])。设 $(p,r)\in[1,\infty]^2$ 且 $\sigma\geq-\min\left\{\frac{d}{p},1-\frac{d}{p}\right\}$。假设 $f_0\in B^{\sigma}_{p,\ r}(\mathbb{R}^d)$,$g\in L^1([0,T];B^{\sigma}_{p,\ r}(\mathbb{R}^d))$，且 $\nabla\mathbf{u}\in L^1([0,T];B^{\sigma-1}_{p\ r,\ }(\mathbb{R}^d))$，其中 $\sigma>1+\frac{d}{p}$或 $\sigma=1+\frac{d}{p},r=1$。若 $f\in L^\infty([0,T];B^{\sigma}_{p,\ r}(\mathbb{R}^d))\cap\mathcal{C}([0,T];\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ 满足以下线性输运方程:

$$\partial_t f+\mathbf{u}\cdot\nabla f=g,\quad f|_{t=0}=f_0.$$

1. 存在常数 $C=C(\sigma,p,r)$，使得以下结论成立

$$\|f(t)\|_{B^{\sigma}_{p,r}}\leq e^{CV(t)}\Big(\|f_0\|_{B^{\sigma}_{p,r}}+\int_0^t e^{-CV(\tau)}\|g(\tau)\|_{B^{\sigma}_{p,r}}\mathrm{d}\tau\Big),$$

其中

$$V(t)=\int_0^t\|\nabla\mathbf{u}(\tau)\|_{B^{\sigma-1}_{p,r}}\mathrm{d}\tau\quad if\quad\sigma>1+\frac{d}{p}\quad or\quad\{\sigma=1+\frac{d}{p},\ r=1\}.$$

2. 若 $\sigma>0$，则存在常数 $C=C(\sigma,p,r)$，使得以下结论成立

$$\begin{aligned}\|f(t)\|_{B^{\sigma}_{p,r}}\leq&\|f_0\|_{B^{\sigma}_{p,r}}+\int_0^t\|g(\tau)\|_{B^{\sigma}_{p,r}}\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t\Big(\|f(\tau)\|_{B^{\sigma}_{p,r}}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty}+\|\nabla\mathbf{u}\|_{B^{\sigma-1}_{p,r}}\|\nabla f(\tau)\|_{L^\infty}\Big)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

3 定理的证明

我们首先回顾 Besov空间中柯西问题 (1.1) 的解的局部存在性和唯一性理论 [31], 然后给出一些技术引理和命题。

3.1 准备工作和技术引理

引理 3.1（见 [31]）。假设

$$d\in\mathbb{N}_+,1\leq p,r\leq\infty\ and\ s>\max\{1+\frac{d}{p},\frac{3}{2}\}.\tag{3.1}$$

令 $u_0\in B^{s}_{p,\ r}(\mathbb{R}^d)$，则存在一个时间 $T=T(\|u_0\|_{B^{s}_{p,\ r}(\mathbb{R}^d)})>0$ 使得 (1.1) 在其中存在唯一解

$$\begin{cases}C([0,T];B^{s}_{p,r}(\mathbb{R}^d))\cap C^1([0,T];B^{s-1}_{p,r}(\mathbb{R}^d)),&if\quad r<\infty,\\L^\infty([0,T];B^{s}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d))\cap Lip([0,T];B^{s-1}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)),&if\quad r=\infty.\end{cases}$$

并且映射 $u_0\mapsto u$ 从 $B^{s}_{p,\ r}(\mathbb{R}^d)$ 连续映射到 $C([0,T];B^{s'}_{p\ ,\ r}(\mathbb{R}^d))\cap C^1([0,T];B^{s'-1}_{p\ r,\ }(\mathbb{R}^d))$，对所有 $s'<s$，若 $r=\infty$；否则，若 $s'=s$，则亦然。此外，对所有 $t\in[0,T]$，有

$$\|u(t)\|_{B^{s}_{p,r}(\mathbb{R}^d)}\leq C\|u_0\|_{B^{s}_{p,r}(\mathbb{R}^d)}.$$

引理 3.2. 设 (s,p,r) 满足 (*1.5*)，则对于由 ($\mathcal{T}(f,g)$ 和 (*1.3*) 和 (*1.4*) 定义的对称双线性算子，有

$$\|\mathcal{T}(f,g)\|_{B^{s}_{p,r}}\leq C\|f\|_{B^{s}_{p,r}}\|g\|_{B^{s}_{p,r}}\tag{3.2}$$

若 $0 < p < \infty$，则有

$$\|\mathcal{T}(f,g)\|_{L^p} \le \|\nabla f\|_{L^p}\|g,\nabla g\|_{L^\infty} \tag{3.3}$$

$$\|\mathcal{T}(f,g)\|_{L^p} \le \sum_{0\le|a|,|b|\le 1} \|\partial^a f\partial^b g\|_{L^p} = W_{1,p}(f,g) \tag{3.4}$$

并且，对于梯度 $\nabla\mathcal{T}$，我们有

$$\|\nabla\mathcal{T}(f,g)\|_{L^p} \le \|\nabla f\|_{L^p}\|g,\nabla g\|_{L^\infty} \tag{3.5}$$

$$\|\nabla\mathcal{T}(f,g)\|_{L^p} \le \sum_{0\le|a|,|b|\le 2} \|\partial^a f\partial^b g\|_{L^p} = W_{2,p}(f,g) \tag{3.6}$$

其中，我们将 $W_{m,\ p}(f,g) = \sum_{0\le|a|,|b|\le m} \|\partial^a f\partial^b g\|_{L^p}$ 用多重指标 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_d)$ $|a| = a_1+\cdots+a_d$ 表示，并且 $\partial^a = \frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1}\cdots\partial x_d^{a_d}}$。

证明。由于算子 $(I-\Delta)^{-1}$ 是一个傅里叶 S^{-2}-乘子，容易看出

$$\|\mathcal{T}(f,g)\|_{B^s_{p,r}} \le C\|M(\nabla f,\nabla g)\|_{B^{s-1}_{p,r}} + C\|N(f,\nabla f,g,\nabla g)\|_{B^{s-2}_{p,r}} \le C\|f\|_{B^s_{p,r}}\|g\|_{B^s_{p,r}},$$

这里我们使用了引理 2.3。那么在 L^p 空间中，

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}(f,g)\|_{L^p} &= \|(I-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\big(M(\nabla f,\nabla g)\big) + (I-\Delta)^{-1}\big(N(f,\nabla f,g,\nabla g)\big)\|_{L^p}\\ &\le \|M(\nabla f,\nabla g)\|_{L^p} + \|N(f,\nabla f,g,\nabla g)\|_{L^p}\\ &\le \|\nabla f\|_{L^p}\|\nabla g\|_{L^\infty} + \|\nabla f\|_{L^p}\|g\|_{L^\infty}\\ &\le \|\nabla f\|_{L^p}\|g,\nabla g\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

我们还有

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}(f,g)\|_{L^p} &\le \|M(\nabla f,\nabla g)\|_{L^p} + \|N(f,\nabla f,g,\nabla g)\|_{L^p}\\ &\le \sum_{0\le|a|,|b|\le 1} \|\partial^a f\partial^b g\|_{L^p} = W_{1,p}(f,g)\end{aligned}$$

对于梯度 $\nabla\mathcal{T}$，注意到 $(I-\Delta)^{-1}\partial_i\partial_j = -\Delta(I-\Delta)^{-1}\big((-\Delta)^{-1}\partial_i\partial_j\big) = \big((1-\Delta)^{-1}+1\big)R_iR_j$，且黎兹变换 R_i 在 $L^p\to L^p$，$p\in(1,\infty)$ 中有界，因此我们有

$$\begin{aligned}\|\nabla\mathcal{T}(f,g)\|_{L^p} &= \|\nabla(I-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\big(M(\nabla f,\nabla g)\big) + \nabla(I-\Delta)^{-1}\big(N(f,\nabla f,g,\nabla g)\big)\|_{L^p}\\ &\le \|M(\nabla f,\nabla g)\|_{L^p} + \|N(f,\nabla f,g,\nabla g)\|_{L^p}\\ &\le \|\nabla f\|_{L^p}\|\nabla g\|_{L^\infty} + \|\nabla f\|_{L^p}\|g\|_{L^\infty}\\ &\le \|\nabla f\|_{L^p}\|g,\nabla g\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\|\nabla\mathcal{T}(f,g)\|_{L^p} &\le \|\mathrm{div}M(\nabla f,\nabla g)\|_{L^p} + \|N(f,\nabla f,g,\nabla g)\|_{L^p}\\ &\le \sum_{0\le|a|,|b|\le 2} \|\partial^a f\partial^b g\|_{L^p} = W_{2,p}(f,g)\end{aligned}$$

□

我们需要以下关于差值 $u(t) - v(t)$ 在 Besov空间中的估计。

命题 3.1。 设 $1 \le p, \ r \le \infty$ 且 $s > \max\{1 + \frac{d}{p}, \frac{3}{2}\}$。假设 $u(t)$ $v(t)$ 是具有初始数据 $(u_0, v_0) \in B^s_{p,\ r}(\mathbb{R}^d)$ 的 (*E-P*) 解，则 $\delta(t) := u(t) - v(t)$ 满足

$$\|\delta(t)\|_{B^{s-1}_{p,r}} \le \|\delta_0\|_{B^{s-1}_{p,r}} \exp\left(C \int_0^t \|u(\tau), v(\tau)\|_{B^s_{p,r}} d\tau\right)$$

and

$$\|\delta(t)\|_{B^s_{p,r}} \le \left(\|\delta_0\|_{B^s_{p,r}} + C \int_0^t \|\delta\|_{B^{s-1}_{p,r}} \|\nabla v\|_{B^s_{p,r}} d\tau\right) \exp\left(C \int_0^t \|u(\tau), v(\tau)\|_{B^s_{p,r}} d\tau\right) \tag{3.7}$$

证明。 第一个不等式已在 [31], 中得到证明；接下来证明 (3.7)。由于 $\mathcal{T}$是对称双线性算子，很容易推出 $\delta = u - v$ 满足输运方程

$$\partial_t \delta + u \cdot \nabla \delta = -\delta \cdot \nabla v + \mathcal{T}(\delta, u + v). \tag{3.8}$$

那么，根据引理 2.4和 3.2

$$\begin{aligned}
\|\delta(t)\|_{B^s_{p,r}} \le & \|\delta_0\|_{B^s_{p,r}} + C \int_0^t \left(\|u\|_{B^s_{p,r}} \|\delta\|_{B^s_{p,r}} + \|\delta \cdot \nabla v\|_{B^s_{p,r}} + \|\mathcal{T}(\delta, u + v)\|_{B^s_{p,r}}\right) d\tau \\
\le & \|\delta_0\|_{B^s_{p,r}} + C \int_0^t \left(\|u(\tau), v(\tau)\|_{B^s_{p,r}} \|\delta\|_{B^s_{p,r}} + \|\delta\|_{B^{s-1}_{p,r}} \|\nabla v\|_{B^s_{p,r}}\right) d\tau.
\end{aligned}$$

现在，(3.7) 由格朗沃尔不等式直接得出。 □

命题 3.2。 设 $\widetilde{u}(t)$ $u(t)$ $v(t)$ 分别是初始数据为 $u_0 + v_0$、 u_0、 v_0 的 (*E-P*) 解。在假设 (*1.5*) 下，有

$$\|\widetilde{u} - u - v\|_{B^s_{p,r}} \le C \|u_0, v_0\|^{1-\theta}_{B^{s+1}_{p,\infty}} \exp\left(\|u_0, v_0\|_{B^{s+1}_{p,r}} \theta\right) \left(\int_0^t W_{2,p}(u, v) d\tau\right)^{\theta},$$

其中 $\theta = \frac{1}{s+1}$ 并使用记号 $W_{2,p}(u, v) = \sum \|\partial^a u \partial^b v\|_{L^p} . 0 \le |a|, |b| \le 2$

证明。由于 $\widetilde{u}(t)$ $u(t)$ $v(t)$ 是

$$\begin{cases}
\partial_t \widetilde{u} + \widetilde{u} \cdot \nabla \widetilde{u} = \mathcal{T}(\widetilde{u}, \widetilde{u}), & \widetilde{u}(0) = u_0 + v_0, \\
\partial_t u + u \cdot \nabla u = \mathcal{T}(u, u), & u(0) = u_0, \\
\partial_t v + v \cdot \nabla v = \mathcal{T}(v, v), & v(0) = v_0.
\end{cases}$$

由对称性 由 $\mathcal{T}$ 的 y 和线性性，我们可以推得 $w(t) = \widetilde{u}(t) - u(t) - v(t)$ 满足 s

$$\begin{cases}
\partial_t w + \widetilde{u} \cdot \nabla w = & -w \cdot \nabla (u + v) + \mathcal{T}(w, \widetilde{u} + u + v) \\
& -u \cdot \nabla v - v \cdot \nabla u - 2\mathcal{T}(u, v), \\
w(0) = & 0.
\end{cases} \tag{3.9}$$

根据插值不等式（见引理 2.2 ），我们得到

$$\|w\|_{B^s_{p,r}} \le C\|w\|^{\theta}_{B^0_{p,\infty}}\|w\|^{1-\theta}_{B^{s+1}_{p,\infty}} \le \|u_0, v_0\|^{1-\theta}_{B^{s+1}_{p,\infty}}\|w\|^{\theta}_{L^p} \tag{3.10}$$

证明的其余部分是对 L^p 范数进行估计 w，将（3.9）与$\widetilde{w}^{p-1}$取内积：$=$（$|w_1|^{p-2}w_1$，$|w_2|^{p-2}w_2$，$\cdots$，$|w_d|^{p-2}w_d$），得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|w\|^p_{L^p} =& \sum_{i=1}^{d}\int p^{-1}|w_i|^p(\mathrm{div}\widetilde{u})dx - \sum_{i,j}\int \widetilde{w}_i^{p-1}w_j\partial_j(u_i+v_i)dx \\
&+ \sum_{i=1}^{d}\int \widetilde{w}_i^{p-1}\mathcal{T}_i(w,\widetilde{u}+u+v)dx - \sum_{i=1}^{d}\int \widetilde{w}_i^{p-1}(u\cdot\nabla v_i + v\cdot\nabla u_i + \mathcal{T}_i(u,v)dx \\
\le& \frac{1}{p}\|\mathrm{div}\widetilde{u}\|_{L^\infty}\|w\|^p_{L^p} + C_d(\|\nabla u\|_{L^\infty}+\|\nabla v\|_{L^\infty})\|w\|^p_{L^p} \\
&+ \|w\|^{p-1}_{L^p}\|\mathcal{T}(w,\widetilde{u}+u+v)\|_{L^p} + \|w\|^{p-1}_{L^p}\|u\cdot\nabla v + v\cdot\nabla u + \mathcal{T}(u,v)\|_{L^p}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

利用 $\mathcal{T}$在引理 3.2中的估计，特别地，将（3.3）、（3.4）代入（3.11），可得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|w\|_{L^p} \le& C(\|\mathrm{div}\widetilde{u}\|_{L^\infty}+\|\nabla u\|_{L^\infty}+\|\nabla v\|_{L^\infty})\|w\|_{L^p} \\
&+ C(\|\widetilde{u},\nabla\widetilde{u}\|_{L^\infty}+\|u,\nabla u\|_{L^\infty}+\|v,\nabla v\|_{L^\infty})\|\nabla w\|_{L^p} + W_{2,p}(u,v) \\
\le& \|u_0,v_0\|_{B^s_{p,r}}(\|w\|_{L^p}+\|\nabla w\|_{L^p}) + W_{2,p}(u,v)
\end{aligned}$$

现在，我们应该估计梯度矩阵 ∇w，对（3.9）取梯度，然后写成分量形式 s

$$\begin{aligned}
\partial_t\partial_j w_i =& -\widetilde{u}_k\partial_k\partial_j w_i - \partial_j\widetilde{u}_k\partial_k w_i + \partial_j T_i(w,\widetilde{u}+u+v) \\
&- w_k\partial_k(\partial_j u_i+\partial_j v_i) - \partial_j w_k\partial_k(u_i+v_i) - \partial_j\big(u_k\partial_k v_i - v_k\partial_k u_i - 2\mathcal{T}_i(u,v)\big)
\end{aligned}$$

取 L ^{2}与$\widetilde{w}_i^{p-1}$取内积，$_j$：$=|\partial_j w_i|^{p-2}\partial_j w_i$并对指标 i、j求和，得到 et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\nabla w\|^p_{L^p} =& \sum_{1\le i,j\le d}\int p^{-1}|\partial_j w_i|^p(\mathrm{div}\widetilde{u})dx - \int\nabla\widetilde{w}^{p-1}:(\nabla w\nabla\widetilde{u})dx + \int\nabla\widetilde{w}^{p-1}:\nabla\mathcal{T}(w,\widetilde{u}+u+v)dx \\
&- \int\nabla\widetilde{w}^{p-1}:\big(w\cdot\nabla(\nabla u+\nabla v)\big)dx - \int\nabla\widetilde{w}^{p-1}:\big((\nabla u+\nabla v)\nabla w\big)dx \\
&- \int\nabla\widetilde{w}^{p-1}:\nabla(u\cdot\nabla v + v\cdot\nabla u + 2\mathcal{T}(u,v))dx \\
\le& \frac{1}{p}\|\mathrm{div}\widetilde{u}\|_{L^\infty}\|\nabla w\|^p_{L^p} + C_d\|\nabla\widetilde{u}\|_{L^\infty}\|\nabla w\|^p_{L^p} + \|\nabla w\|^{p-1}_{L^p}\|\nabla\mathcal{T}(w,\widetilde{u}+u+v)\|_{L^p} \\
&+ \|\nabla w\|^{p-1}_{L^p}\|w\|_{L^p}\big(\|\nabla^2 u\|_{L^\infty}+\|\nabla^2 v\|_{L^\infty}\big) + \|\nabla w\|^p_{L^p}\big(\|\nabla u\|_{L^\infty}+\|\nabla v\|_{L^\infty}\big) \\
&+ |\nabla w\|^{p-1}_{L^p}\|\nabla\big(u\cdot\nabla v + v\cdot\nabla u + 2\mathcal{T}(u,v)\big)\|_{L^p}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

其中我们记作 $\nabla\widetilde{w}^{p}$ $^{-1}=(\widetilde{w}_i^{p-1}$，$_j)_{d\times d}$和 A：　B：$=\sum_{i,\ j}a_{i,\ j}b_{i,\ j}$。再次利用命题 3.2对 r

矩阵算子 $\nabla\mathcal{T}$，将式（3.5）、（3.6）代入式（3.12），得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\nabla w\|_{L^p} &\le C(\|\nabla\widetilde{u}\|_{L^\infty}+\|\nabla u\|_{L^\infty}+\|\nabla v\|_{L^\infty})\|\nabla w\|_{L^p}+\|w\|_{L^p}\big(\|\nabla^2 u\|_{L^\infty}+\|\nabla^2 v\|_{L^\infty}\big)\\ &\quad+\|\nabla\mathcal{T}(w,\widetilde{u}+u+v)\|_{L^p}+\|\nabla\big(u\cdot\nabla v+v\cdot\nabla u+2\mathcal{T}(u,v)\big)\|_{L^p}\\ &\le C(\|\widetilde{u},\nabla\widetilde{u}\|_{L^\infty}+\|u,\nabla u\|_{L^\infty}+\|v,\nabla v\|_{L^\infty})\|\nabla w\|_{L^p}\\ &\quad+\big(\|\nabla^2 u\|_{L^\infty}+\|\nabla^2 v\|_{L^\infty}\big)\|w\|_{L^p}+W_{2,p}(u,v)\\ &\le C\|u_0,v_0\|_{B^{s+1}_{p,r}}(\|w\|_{L^p}+\|\nabla w\|_{L^p})+W_{2,p}(u,v)\end{aligned}$$

结合 (3.14) 和 (3.17) 可得

$$\frac{d}{dt}\|w,\nabla w\|_{L^p}\le C\|u_0,v_0\|_{B^{s+1}_{p,r}}(\|w\|_{L^p}+\|\nabla w\|_{L^p})+2W_{2,p}(u,v)$$

由格朗沃尔不等式和 (3.10)，证明得证。 □

注 3.1. 命题 3.1 和 3.2 的证明依赖于 $\mathcal{T}$ 的对称性，尤其是在推导简化方程 (3.8) 和 (3.9) 时。以往关于 Euler-Poincar´e 方程适定性的大多数研究都使用双线性形式 (1.2)，由于缺乏对称性，计算变得复杂。事实上，当 $d=1$ 即 Camassa-Holm 方程采用输运形式$\partial_t u+u\partial_x u=P(u,u)$ 时，$P(u,v)=-\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}\big(uv+\frac{1}{2}(\partial_x u\partial_x v)\big)$ 默认具有对称性。从这个角度看，我们的新形式 (E-P) 是 CH 方程更自然的高维推广。

3.2 扰动数据的构造

为在傅里叶域中进行局部化，我们在频率$\widehat{\ }$空间中引入如下鼓包函数。设 $\phi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ 是一个非负偶函数，满足

$$\widehat{\phi}(\xi)=\begin{cases}1, & \text{if } |\xi|\le\frac{1}{4},\\ 0, & \text{if } |\xi|\ge\frac{1}{2}.\end{cases}$$

并设

$$\begin{cases} f_n=2^{-ns-N}\big(\cos(\frac{17}{12}2^n x_1)\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_d),0,\cdots,0\big)\\ g_n=\big(2^{-n}\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_d),0,\cdots,0\big).\end{cases}\tag{3.13}$$

我们通过添加一个平移变换来定义扰动数据

$$\begin{cases} f_n^m=f_n(x_1-m,x_2,\cdots,x_d)\\ g_n^m=g_n(x_1-m,x_2,\cdots,x_d)\end{cases}\tag{3.14}$$

注意到 $\widehat{f_n^m}$的支集包含于 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d\pm(\frac{17}{12}2^n,0,\cdots,0)$ 中，该支集完全被环域 $C_n=\{\xi\in\mathbb{R}^d$ 覆盖：$\frac{4}{3}2^n\le|\xi|\le\frac{3}{2}2^n\}$.因此，根据 Δ_j的定义，我们知道

$$\Delta_j(f_n)=\begin{cases}f_n^m, & \text{if } j=n,\\ 0, & \text{if } j\ne n.\end{cases}\tag{3.15}$$

根据上述内容以及 Besov空间的定义，我们可以证明对于 $k \in \mathbb{R}$

$$\|f_n^m\|_{B^{s+k}_{p,r}} \le C2^{kn-N} \qquad and \qquad \|g_n^m\|_{B^{s+k}_{p,r}} \to 0 \qquad for\ n \to \infty \tag{3.16}$$

根据前人的工作 [26] 以及系统（E-P）的平移不变性，我们知道，对于相应的解 $S_t(f_n^m + g_n^m)$和 $S_t(f_n^m$，存在一个正常数 c_0和一个较小的时间T_0，使得对任意 $t \in [0, T_0]$,

$$\liminf_{n\to\infty} \|S_t(f_n^m + g_n^m) - S_t(f_n^m)\|_{B^s_{p,r}} \ge c_0 t. \tag{3.17}$$

3.3 定理1.2的证明

粗略地说 ， 我们的定理1.2 的证明基于以下近似 n

$$\begin{aligned} & S_t(u_0 + f_n^m + g_n^m) - S_t(u_0 + f_n^m) && \text{(I)} \\ &= S_t(S_n u_0 + f_n^m + g_n^m) - S_t(S_n u_0 + f_n^m) + \mathcal{E}_n^m && \text{(II)} \\ &= \Big(S_t(S_n u_0) + S_t(f_n^m + g_n^m)\Big) - \Big(S_t(S_n u_0) + S_t(f_n^m)\Big) + \mathcal{E}_{n,m} \\ &= S_t(f_n^m + g_n^m) - S_t(f_n^m) + \mathcal{E}_{n,m}, && \text{(III)} \end{aligned}$$

并带有一些 较小的误差项 $\mathcal{E}_n^m$， $\mathcal{E}_{n,\ m}$。更精确地说，我们将（I）分为三部分 s

$$\begin{aligned} & S_t(u_0 + f_n^m + g_n^m) - S_t(u_0 + f_n^m) = \\ & \underbrace{\Big(S_t(u_0 + f_n^m + g_n^m) - S_t(S_n u_0 + f_n^m + g_n^m)\Big) - \Big(S_t(u_0 + f_n^m) - S_t(S_n u_0 + f_n^m)\Big)}_{\mathcal{E}_n^m} + \\ & \underbrace{\Big(S_t(S_n u_0 + f_n^m + g_n^m) - S_t(S_n u_0) - S_t(f_n^m + g_n^m)\Big) - \Big(S_t(S_n u_0 + f_n^m) - S_t(S_n u_0) - S_t(f_n^m)\Big)}_{\mathcal{E}_{n,m}} \\ & + S_t(f_n^m + g_n^m) - S_t(f_n^m). \end{aligned} \tag{3.18}$$

我们以下述意义证明近似式（III） $\to$ （II） $\to$ （I）。

命题3.3。 设 f_n^m， g_n^m为由（*3.13*）和（*3.14*）定义的扰动数据，则对于任意满足 $u_0 \in B^s_{p,\ r}$ 且 $\|u_0\|_{B^s_{p,\ r}} = \rho$ 的初始数据，误差项 $\mathcal{E}_n^m$， $\mathcal{E}_{n,\ m}$ 在（ *3.18*）中满足

$$\sup_{m,t} \|\mathcal{E}_n^m\|_{B^s_{p,r}} \le C_\rho \|(I - S_n)u_0\|_{B^s_{p,r}}, \tag{3.19}$$

$$\lim_{m\to\infty} \Big(\sup_{0\le t\le T} \|\mathcal{E}_{n,m}\|_{B^s_{p,r}}\Big) = 0 \quad for\ any\ fixed\ n. \tag{3.20}$$

.

证明。我们首先处理（3.19）。根据命题 3.1，利用 $\delta(t) = S_t(u_0 + f_n^m) - S_t(S_n u_0 + f_n^m)$，由于 $\|u_0 + f_n^m\|_{B^s_{p,r}} \approx \|S_n u_0 + f_n^m\|_{B^s_{p,r}}$对于 $m \in \mathbb{R}$和 $n \gg 1$，这些解序列具有共同的

寿命 $T \approx T^*(\|u_0\|_{B^s_{p,r}})$，那么对于任意 $t \in [0,T)$，我们有

$$\begin{aligned}\|\delta(t)\|_{B^s_{p,r}} \leq & \Big(\|(I-S_n)u_0\|_{B^s_{p,r}} + \int_0^t \|\delta(\tau)\|_{B^{s-1}_{p,r}} \|\nabla S_t(S_n u_0 + f_n^m)\|_{B^s_{p,r}} d\tau \Big) \\ & \cdot \exp\Big(\int_0^t \|S_t(u_0+f_n^m), S_t(S_n u_0 + f_n^m)\|_{B^s_{p,r}} d\tau \Big) \\ \leq & \Big(\|(I-S_n)u_0\|_{B^s_{p,r}} + \int_0^t \|\delta(\tau)\|_{B^{s-1}_{p,r}} \|S_n u_0 + f_n^m\|_{B^{s+1}_{p,r}} d\tau \Big) \\ & \cdot \exp\Big(\int_0^t \|u_0 + f_n^m, S_n u_0 + f_n^m\|_{B^s_{p,r}} d\tau \Big) \\ \leq & C_\rho \Big(\|(I-S_n)u_0\|_{B^s_{p,r}} + \int_0^t \|\delta(\tau)\|_{B^{s-1}_{p,r}} \cdot 2^n d\tau \Big) \end{aligned} \tag{3.21}$$

and

$$\begin{aligned}\|\delta(t)\|_{B^{s-1}_{p,r}} \leq & \|(I-S_n)u_0\|_{B^{s-1}_{p,r}} \exp\Big(\int_0^t \|S_t(u_0+f_n^m), S_t(S_n u_0 + f_n^m)\|_{B^s_{p,r}} d\tau \Big) \\ \leq & C_\rho 2^{-n} \|(I-S_n)u_0\|_{B^s_{p,r}} \end{aligned} \tag{3.22}$$

将（3.22）代入（3.21），得

$$\|\delta(t)\|_{B^s_{p,r}} \leq C_\rho \|(I-S_n)u_0\|_{B^s_{p,r}}. \tag{3.23}$$

如（3.23）所示，C_ρ 不依赖于平移参数 m 和 $t \in [0,T]$，于是有

$$\sup_{m,t} \|S_t(u_0+f_n^m) - S_t(S_n u_0 + f_n^m)\|_{B^s_{p,r}} = \sup_{m,t} \|\delta(t)\|_{B^s_{p,r}} \leq C_\rho \|(I-S_n)u_0\|_{B^s_{p,r}}. \tag{3.24}$$

用完全相同的论证，我们可以推出

$$\sup_{m,t} \|S_t(u_0+f_n^m+g_n^m) - S_t(S_n u_0 + f_n^m + g_n^m)\|_{B^s_{p,r}} \leq C_\rho \|(I-S_n)u_0\|_{B^s_{p,r}},$$

结合（3.24），我们完成了（3.19）的证明。

为了推出（3.20），我们应采用命题 3.2，并取 $\widetilde{u}(t) = S_t(S_n u_0 + f_n^m)$ $u(t) = S_t(S_n u_0)$ 以及 $v(t) = S_t(f_n^m)$，并记

$$w = \widetilde{u} - u - v = S_t(S_n u_0 + f_n^m) - S_t(S_n u_0) - S_t(f_n^m).$$

由于 $u_0 \in B^s_{p,r}$ 和 $\|f_n^m\|_{B^s_{p,r}} \approx 1$，容易看出

$$\|S_n u_0, f_n^m\|_{B^{s+1}_{p,r}} \leq C_\rho 2^n, \tag{3.25}$$

with C_ρ 仅依赖于 $\rho := \|u_0\|_{B^s_{p,r}}$, 那么由命题 3.2 可知

$$\|w(t)\|_{B^s_{p,r}} \leq C_\rho 2^n e^{C_\rho 2^n \theta} \Big(\sum_{0 \leq |a|,|b| \leq 2} \int_0^t \|\partial^a S_t(S_n u_0) \partial^b S_t(f_n^m)\|_{L^p} d\tau \Big)^\theta. \tag{3.26}$$

注意，根据定义 $\partial^b S_t(f_n^m) = \partial^b S_t(f_n(x_1 - m, \cdots, x_d)) = \partial^b S_t(f_n)(x_1 - m, \cdots, x_d)$；对于固定的 n 以及任意的 (t,x)，鉴于 $S_t(f_n)$ 是一个在无穷远处衰减的光滑函数，我们有

$$\begin{aligned} & \lim_{m \to \infty} \partial^a S_t(S_n u_0)(x) \partial^b S_t(f_n)(x_1 - m, \cdots, x_d) = 0, \\ & |\partial^a S_t(S_n u_0)(x) \partial^b S_t(f_n)(x_1 - m, \cdots, x_d)| \leq M |\partial^a S_t(S_n u_0)|(\tau, x) \in L^1\big([0,T], L^p(\mathbb{R})\big). \end{aligned}$$

根据勒贝格控制收敛定理，我们有

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T \|\partial^a S_t(S_n u_0)\partial^b S_t(f_n^m)\|_{L^p} d\tau = 0 \tag{3.27}$$

于是，由 (3.26)、(3.27) 可知，对于固定的 n 以及任意 $t\in[0,T]$

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\|w(t)\|_{B^s_{p,r}} = \lim_{m\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\|S_t(S_n u_0+f_n^m)-S_t(S_n u_0)-S_t(f_n^m)\|_{B^s_{p,r}} = 0, \tag{3.28}$$

用同样的论证也可得，对于任意固定的 n 和 $t\in[0,T]$

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\|S_t(S_n u_0+f_n^m+g_n^m)-S_t(S_n u_0)-S_t(f_n^m+g_n^m)\|_{B^s_{p,r}} = 0. \tag{3.29}$$

结合 (3.28) 和 (3.29)，可得 (3.20)。 □

有了 (3.17)、(3.18) 以及命题 3.3 ，我们便可完成定理 1.2的证明。首先，由恒等式 (3.18) 可知，对于任意时刻 $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned}&\|S_t(u_0+f_n^m+g_n^m)-S_t(u_0+f_n^m)\|_{B^s_{p,r}}\\ &\ge \|S_t(f_n^m+g_n^m)-S_t(f_n^m)\|_{B^s_{p,r}} - \sup_{m,t}\|\mathcal{E}_n^m\|_{B^s_{p,r}} - \sup_{0\le t\le T}\|\mathcal{E}_{n,m}\|_{B^s_{p,r}}\end{aligned} \tag{3.30}$$

于是，由命题 3.20中的 (3.3)，对于固定的 n，我们可以找到一个充分大的 m_n 使得

$$\sup_{0\le t\le T}\|\mathcal{E}_{n,m_n}\|_{B^s_{p,r}} \le 2^{-n}.$$

将此结果与命题 3.19中的 (3.3) 结合起来，由 (3.30) 可得

$$\begin{aligned}&\|S_t(u_0+f_n^{m_n}+g_n^{m_n})-S_t(u_0+f_n^{m_n})\|_{B^s_{p,r}}\\ &\ge \|S_t(f_n^{m_n}+g_n^{m_n})-S_t(f_n^{m_n})\|_{B^s_{p,r}} - C_\rho\|(I-S_n)u_0\|_{B^s_{p,r}} - 2^{-n}.\end{aligned} \tag{3.31}$$

当 $u_0\in B^s_{p,\ r}$，这意味着 $\|(I-S_n)u_0\|_{B^s_{p,\ r}}\to 0$ 当 $n\to\infty$。对于较小的 $t\in[0,T_0]$，我们已经有了 (3.17)，由 (3.31) 可得

$$\liminf_{n\to\infty}\|S_t(u_0+f_n^{m_n}+g_n^{m_n})-S_t(u_0+f_n^{m_n})\|_{B^s_{p,r}} \ge c_0 t, \quad \forall t\in[0,T_0]. \tag{3.32}$$

并且初始数据序列满足

$$\lim_{n\to\infty}\|(u_0+f_n^{m_n}+g_n^{m_n})-(u_0+f_n^{m_n})\|_{B^s_{p,r}} = \lim_{n\to\infty}\|g_n^{m_n}\|_{B^s_{p,r}} = 0. \tag{3.33}$$

这就完成了定理 1.2的证明。

致谢。M. Li 得到了江西省教育厅科学技术研究项目（编号：GJJ190284）和江西省自然科学基金（编号：20212BAB211011 和 20212BAB201008）的资助。

参考文献

[1] H. Bahouri、J. Y. Chemin 和 R. Danchin，《傅里叶分析与非线性偏微分方程》，数学科学基础丛书，第343卷，施普林格出版社，柏林、海德堡，2011年。[2] J. Bourgain 和 D. Li，《不可压缩欧拉方程的伽利略变换与非一致连续性》，《数学物理通讯》，372（2019），261–280。[3] A. Bressan 和 A. Constantin，《Camassa-Holm 方程的整体守恒解》，《理性力学与分析档案》，183（2007），215-239。[4] A. Bressan 和 A. Constantin，《Camassa-Holm 方程的整体耗散解》，《分析与应用》，5（2007），1-27。[5] R. Camassa 和 D. D. Holm，《具有尖峰孤子的可积浅水方程》，《物理评论快报》，71（1993），1661-1664。[6] D. Chae 和 J. Liu，《欧拉-庞加莱方程的爆破、零 α 极限与刘维尔型定理》，《数学物理通讯》，314（2012），671-687。[7] A. Constantin，《浅水方程永久波与破碎波的存在性：一种几何方法》，《傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔）》，50（2000），321-362。[8] A. Constantin，《斯托克斯波中的粒子轨迹》，《数学创刊》，166（2006），523-535。[9] A. Constantin 和 J. Escher，《周期拟线性双曲方程的适定性、整体存在性与爆破现象》，《纯粹与应用数学通讯》，51（1998），475-504。[10] A. Constantin 和 J. Escher，《非线性非局部浅水方程的波破碎》，《数学学报》，181（1998），229-243。[11] A. Constantin 和 J. Escher，《浅水方程的整体存在性与爆破》，《比萨高等师范学校科学类年刊》（第4辑），26（1998），303-328。[12] R. Danchin，《关于 Camassa-Holm 方程适定性的一则注记》，《微分方程杂志》，192（2003），429-444。[13] Z. Guo、X. Liu、M. Luc 和 Z. Yin，《Camassa-Holm 方程及相关方程在临界空间中的不适定性》，《微分方程杂志》，266（2019），1698-1707。[14] A. Himonas 和 C. Kenig，《直线上 Camassa–Holm 方程关于初始数据的非一致依赖性》，《微分与积分方程》，22（2009），201–224。

[15] A. Himonas、C. Kenig 和 Misio lek, 《周期性 CH 方程的非一致依赖性》, 《偏微分方程通讯》, 35 (2010), 1145–1162。[16] D. D. Holm 和 M. F. Staley, 《一族演化型偏微分方程中的波结构与非线性平衡》, 《SIAM 应用动力系统杂志》, 2 (2003), 323–380。[17] D. D. Holm、J.E. Marsden 和 T.S. Ratiu, 《理想流体非线性色散的 Euler-Poincar´e 模型》, 《物理评论快报》, 80 (2007), 4173–4177。[18] D. D. Holm、J.E. Marsden 和 T.S. Ratiu, 《Euler-Poincar´e 方程与半直积及其在连续介质理论中的应用》, 《数学进展》, 137 (1998), 1–81。[19] H. Inci, 《关于 Holm-Staley b 族方程的适定性》, 《非线性数学物理杂志》, 23 (2016), 213–233。[20] H. Inci, 《关于双分量 b 族方程的局部适定性》, 《数学月刊》, 197 (2022), 479–492。[21] J. Li、Y. Yu 和 W. Zhu, 《Camassa-Holm 方程在 Besov空间中对初始数据的非一致依赖性》, 《微分方程杂志》, 269 (2020), 8686–8700。[22] J. Li、Y. Yu 和 W. Zhu, 《Camassa-Holm 方程及相关方程在 Besov空间中的不适定性》, 《微分方程杂志》, 306 (2022), 403–417。[23] J. Li、X. Wu、Y. Yu 和 W. Zhu, 《临界 Besov 空间中 Camassa-Holm 方程对初始数据的非一致依赖性》, 《数学流体力学杂志》, 23 (2021), 1422-6928。[24] J. Li、L. Dai 和 W. Zhu, 《Euler-Poincar´e 系统解对初始数据的非一致连续依赖性》, 《数学物理杂志》, 60 (2019), 111510, 9。[25] W. Luo 和 Z. Yin, 《周期性 Euler-Poincar´e 方程的爆破现象、不适定性与峰子解》, 《微分方程杂志》, 268 (2020), 1307–1325。[26] J. Li、W. Deng 和 M. Li, 《Euler-Poincar´e 方程在 Besov空间中的非一致依赖性》, 《非线性分析：现实世界应用》, 63 (2022), 103420。[27] D. Li、X. Yu 和 Z. Zhai, 《关于具有非零色散的 Euler-Poincare 方程》, 《理性力学与分析档案》, 210 (2013), 955-974。[28] J. Li 和 Z. Yin, 《关于 Camassa-Holm 型方程在 Besov空间中的适定性的评述》, 《微分方程杂志》, 261 (2016), 6125-6143。[29] J. F. Toland, 《斯托克斯波》, 《非线性分析拓扑方法》, 7 (1996), 1-48。[30] Z. Xin 和 P. Zhang, 《关于浅水方程的弱解》, 《纯粹与应用数学通讯》, 53 (2000), 1411-1433。

[31] K. Yan 和 Z.Yin, 《Euler-Poincar ´e 方程的初值问题》, 《离散连续动力系统》, 35 (2015), 1327-1358。

[32] Y. Zhao、M. Yang 和 Y. Li, 周期性 Euler-Poincar ´e 方程的非一致依赖性, 《数学分析与应用杂志》461（2018）, 59-73。