arXiv:2301.03417v2 [cs.DM] 2 Oct 2023

有向图重着色 *

N. Bousquet[1], F. Havet[2], N. Nisse[2], L. Picasarri-Arrieta[2], A. Reinald[2,3]

[1] LIRIS、CNRS、里昂第一大学克洛德·贝尔纳大学，里昂，法国 nicolas.bousquet@univ-lyon1.fr

[2] CNRS、蔚蓝海岸大学、I3S、Inria，索菲亚·安提波利斯，法国{frederic.havet,nicolas.nisse,lucas.picasarri-arrieta}@inria.fr

[3] LIRMM、CNRS、蒙彼利埃大学，蒙彼利埃，法国 amadeus.reinald@lirmm.fr

摘要

在本文中，我们将图重着色的若干结果推广到有向图。

给定有向图 D 的两个 k-有向着色，我们证明，判定能否通过每步重新着色一个顶点、并在每一步都保持有向着色，将其中一个变换为另一个是 PSPACE 完全的；即使对于 $k = 2$，以及最大度为 5 的有向图或最大度为 6 的定向平面图，这一结论仍成立。

如果任意一对 k-有向着色之间都存在变换，则称有向图为 k-混合的。我们证明，对于所有 $k \geq \delta^*_{\min}(D) + 2$，每个有向图 D 都是 k-混合的，从而推广了 Dyer等人 的一项结果。我们还证明，对于所有 $k \geq \delta^*_{\max}(\vec{G}) + 1$ 以及所有 $k \geq \delta^*_{\text{avg}}(\vec{G}) + 1$，每个定向图 $\vec{G}$ 都是 k-混合的。这里，$\delta^*_{\min}$、$\delta^*_{\max}$ 和 δ^*_{avg} 分别表示最小退化度、最大退化度和平均退化度。

我们提出如下猜想：对于每个有向图 D，其 D 上的有向图着色图（使用 $k \geq \delta^*_{\min}(D) + 2$ 种颜色）的直径至多为 $O(|V(D)|^2)$。这是 Cereceda 猜想在有向图中的对应版本。我们将支持 Cereceda 猜想的两个结果推广到有向图。首先，我们证明任意有向图 D 上的有向图着色图（使用 $k \geq 2\delta^*_{\min}(D) + 2$ 种颜色）具有线性直径，从而推广了 Bousquet和Perarnau 的一个结果。我们还证明，当 $k \geq \frac{3}{2}(\delta^*_{\min}(D)+1)$ 时，Cereceda 猜想的对应版本成立，这推广了 Bousquet和Heinrich 的一个结果。

限于定向图这一特殊情形，我们证明，任意次三次定向图在使用 $k \geq 2$ 种颜色时，其有向图着色图是连通的，且直径至多为 $2n$。我们猜想，每个非 2-混合定向图的最大平均度至少为 4；我们证明该猜想在 2-可冻结定向图这一特殊情形下成立，为此提供了一些支持。更一般地，我们证明，每个具有 k 可冻结性的定向图若有 n 个顶点，则至少包含 $kn + k(k-2)$ 条弧；并给出一族达到此界的 k 可冻结定向图。在一般情形下，我们证明了一个部分结果：每个非 2-混合定向图的最大平均度至少为 $_{7\ 2}$。

关键词：有向图，定向 图，图重着色，重配置，有向图重新 着色

1 引言

1.1 图重着色

我们用 $[k]$ 表示集合 $\{1, \ldots, k\}$。给定一个图 $G = (V, E)$，G的一个 k-着色是一个函数 $\alpha : V \to [k]$，满足对于每条边 $xy \in E$，$\alpha(x) \neq \alpha(y)$。色数 $\chi(G)$ 是使得 G存在 k-着色的最小 k。对于任意 $k \geq \chi(G)$，G的 k-着色图记为 $\mathcal{C}_k(G)$，它是一个图，其顶点为 G 的 k-着色；若两个 k-着色恰好在一个

*本研究得到 DIGRAPHS ANR-19-CE48-0013 研究资助，并得到法国政府通过 EUR DS4H未来投资项目提供的支持。该项目由法国国家研究署（ANR）管理，项目编号为 ANR-17-EURE-0004。

顶点上不同，则它们相邻。我们将 $\mathcal{C}_k(G)$ 中两个给定着色之间的路径视为一系列重新着色，即由 G 的一个顶点及该顶点的新颜色组成的有序对列表。如果 $\mathcal{C}_k(G)$ 连通，我们称 G 是 k-混合的。给定一个图 G，我们可以询问它在 k 取哪些值时是 k-混合的；若是，最多需要多少步才能从一个着色变为另一个着色，也就是说，$\mathcal{C}_k(G)$ 的直径是多少?

判定一个图是否为 k-混合，在统计物理中有着重要应用，其中着色表示零温下反铁磁波茨模型的状态。上述问题最初由研究人员在研究用于对给定图的 k-着色进行采样的格劳伯动力学时提出。这是一种马尔可夫链，可用于高效地近似计数图的 k-着色，或以近乎均匀的方式对其进行采样；而 k-着色图的连通性，是此类马尔可夫链快速混合的必要条件。在图论中，自 Cereceda、van den Heuvel 和 Johnson 的研究 [7, 8]以来，重新着色研究在过去十五年中迅速发展。关于图重着色的完整综述，请参阅 Bartier 的博士论文 [1]；关于一般的重构问题，请参阅 van Heuvel [11] 和 Nishimura [14] 的综述。

如上所述，重新着色中的一个主要问题是判定给定的图是否为 k-混合。

IS k-MIXING 输入：一个图 G问题：是否为 G k-混合?

注意，IS 2-MIXING 是平凡的，因为只有无边图才是 2-混合。另一方面，Cereceda [7]证明了 IS 3-MIXING 是 coNP-完全的。对于更大的 k值，这个问题的复杂性仍未解决。

一个相关问题是，判断给定图 G 的两个 k-着色是否位于 $\mathcal{C}_k(G)$的同一个连通分支中。形式化地说，我们有以下判定问题:

k-着色路径 输入：一个图 G 以及它的两个 k-着色 α 和 β。 问题：在 $\mathcal{C}_k(G)$中，α 与 β 之间是否存在一条路径?

2-着色路径问题是平凡的，因为在二分图中只有孤立顶点可以重新着色。Cereceda、van den Heuvel 和 Johnson [8] 证明了 3-着色路径问题可在多项式时间内求解。此外，作者还证明了 $\mathcal{C}_k(G)$每个连通分支的直径为 $O(n^2)$。

相比之下，对于每个 $k \geq 4$，Bonsma 和 Cereceda [3] 证明存在一族 $\mathcal{G}_k$ 图，使得对于每个阶为 n 的$G \in \mathcal{G}_k$，都存在两个 k着色，它们在 $\mathcal{C}_k(G)$ 中的距离有限，且关于n是超多项式的。他们还证明，对于所有 $k \geq 4$，即使将图限制为二分图，k-着色路径问题也是 PSPACE 完全的。然而，对于退化图，情况有所不同。图 G 的退化度（记作$\delta^*(G)$）是 G 的任意子图的最小度中的最大值。Bonsma 和 Cereceda [3] 以及 Dyer等人 [9]分别独立地证明了以下结论。

定理 1（Bonsma 和 Cereceda [3]；Dyer等人 [9]）。设 $k \in \mathbb{N}$ 和 G 是一个图。
若 $k \geq \delta^*(G) + 2$，则 G 是 k-混合的。

Cereceda [6] 还猜想了以下结论。

猜想2（Cereceda [6]）。设 $k \in \mathbb{N}$ 和 G 是一个图。
如果 $k \geq \delta^*(G) + 2$，那么 $\mathcal{C}_k(G)$ 的直径至多为 $O(n^2)$。

Cereceda [6] 证明了当 $k \geq 2\delta^*(G) + 1$时该结论成立。Bousquet和Heinrich [4], 最近改进了这一结果，并证明了以下结论。

定理 3（Bousquet和Heinrich [4]）。设 $k \in \mathbb{N}$ 和 G 是一个图。那么 $\mathcal{C}_k(G)$ 的直径至多为:

- Cn^2 如果 $k \geq \frac{3}{2}(\delta^*(G) + 1)$（其中 C 是一个与 k无关的常数），
- $C_\varepsilon n^{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil}$ 若 $k \geq (1+\varepsilon)(\delta^*(G) + 2)$（其中 C_ε 是一个与 k无关的常数），

• $(Cn)^{\delta^*(G)+1}$ 对于任意 $k \geq \delta^*(G)+2$（其中 C 是一个与 k无关的常数）。

Bousquet和Perarnau [5] 还证明了以下结果。

定理 4（Bousquet和Perarnau [5]）。设 [5]和 $k \in \mathbb{N}$ 为一个图。若 $k \geq 2\delta^*(G)+2$，则 $\mathcal{C}_k(G)$的直径至多为$(\delta^*(G)+1)n$。

设 $k \in \mathbb{N}$ 和 G 为一个非 k-混合图。由定理 1 可知， G 包含一个最小度至少为 $k-1$的子图H。因此， G 的最大平均度至少为 $k-1$。此界是紧的，因为由 k 个顶点构成的完全图是$(k-1)$-正则的，且不是 k-混合的。此外，文献 [2] 表明，即使将范围限制在围长任意大的图中，此界仍然是紧的。最初的证明采用了概率方法。在第 4 节中，我们基于 Lazebnik 和 Ustimenko 对正则二部图的显式构造，给出这一结果的一个新的构造性证明 [12]。

1.2 有向图重着色。

设 D 为一个有向图。有向二圈是指同一对顶点之间方向相反的一对弧。没有有向二圈的有向图称为定向图。与图 G 关联的双向有向图记为 $\overleftrightarrow{G}$，它由 G 将每条边替换为一个有向二圈得到。以 k 个顶点为顶点的竞赛图，是对具有 k 个顶点的完全图进行定向所得。具有 k 个顶点的传递竞赛图，是唯一的具有 k 个顶点的无环竞赛图。

1982 年，Neumann-Lara [13] 引入了有向着色和有向色数的概念，它们推广了颜色和色数的概念。 D 的 k-有向着色是一个函数 $\alpha: V(D) \to [k]$，使得对于每个 $i \in [k]$， $\alpha^{-1}(i)$ 在 D 中诱导出一个无环子有向图。 D 的有向色数记作$\vec{\chi}(D)$，是使得 D 存在 k-有向着色的最小 k。图 G 的 k-着色与其关联的双向有向图 $\overleftrightarrow{G}$ 的 k-有向着色之间存在一一对应；特别地，$\chi(G) = \vec{\chi}(\overleftrightarrow{G})$。因此，关于图着色的每个结果都可以视为关于双向有向图有向着色的结果，而研究该结果能否推广到所有有向图是很自然的。

本文研究有向图重着色，这是图重着色的一种推广。对于任意$k \geq \vec{\chi}(D)$， D的 k-有向着色图记为 $\mathcal{D}_k(D)$，其顶点是 D 的 k-有向着色；若两个 k-有向着色仅在一个顶点上不同，则它们在该图中相邻。注意，对于任意双向有向图， $\mathcal{C}_k(G)$ $\mathcal{D}_k\ \overleftrightarrow{G}$ $\overleftrightarrow{G}$ ( )。两个有向着色之间的重新着色序列，是 $\mathcal{D}_k(D)$中连接这两个有向着色的一条路径。若 $\mathcal{D}_k(D)$连通，则有向图 D 是 k-混合的；若 $\mathcal{D}_k(D)$包含一个孤立顶点，则有向图 k是 $\mathcal{D}_k$-可冻结的。在 k-有向着色 α 中，若顶点 v 对于其颜色受阻，即对每个不同于 $\alpha(v)$的颜色 $c \in [k]$，将 v 重新着为 c 会在 α 中产生一个单色有向圈，则称该顶点对于其颜色受阻。若对于 $\mathcal{D}_k(D)$中与 α 处于同一连通分支的任意 k-有向着色 β，均有 v 在 α 中冻结，即$\beta(v) = \alpha(v)$，则称 v 在 α 中冻结。

在第 2 节中，我们考虑 IS k-MIXING 和 k-COLOURING PATH 的有向类比。

有向 IS k-MIXING 输入：一个有向图 D。 问题：是否为 D k-混合?

k-有向图着色路径 输入：一个有向图 D，以及其两个 k-有向着色 α 和 β。 问题： α 和 β 之间在 $\mathcal{D}_k(D)$ 中是否存在路径?

请注意，IS k-MIXING 和 k-DICOLOURING PATH 可视为 DIRECTED ISk-MIXING 和 k-DICOLOURING PATH 在双向有向图上的限制。因此，困难性结果也适用于这些问题。由此可知，对于所有 $k \geq 4$，DIRECTED IS 3-MIXING 是 NP困难，而 k-DICOLOURING PATH 是 PSPACE 完全。我们在第 2 节中通过证明 2-DICOLOURING PATH 是 PSPACE 完全，以及 k-DICOLOURING PATH 在限制到某些有向图类时仍为 PSPACE 完全，强化了这些结果：

定理 5. (i) 对于每个 $k \geq 2$, k-D有向着色 P路径，在最大度为 $2k+1$ 的有向图上，该问题是 PSPACE 完全。

(ii) 对于每个 $k \geq 2$, k-D有向图着色P路径，在定向图上该问题是 PSPACE 完全的。

(iii) 对于每个 $2 \leq k \leq 4$, k-D有向图着色P路径，在最大度为 $2k+2$ 的平面有向图上该问题是 PSPACE 完全的。

(iv) 2-D有向图着色P路径在度至多为 6 的平面定向图上是 PSPACE 完全的 .

在第 3 节中，我们将定理 1、3 和 4 推广到有向图。对于有向图，退化度有几种不同的定义。 D 的最小退化度为 $\delta^*_{\min}(D) = \max\{\min\{\delta^+(H)\ \delta^-(H)\} \mid H$ 的子有向图。它是满足以下条件的最小 k： D 的每个子有向图 H 都含有一个顶点 v，使得 $\min\{d^+_H(v)\ d^-_H(v)\} \leq k$。 D的出退化度为 $\delta^*_{\text{out}}(D) = \max\{\delta^+(H) \mid H\ D\}$的子有向图。它是满足以下条件的最小 k： D 的每个子有向图 H 都满足 $\delta^+(H) \leq k$。 D的最大退化度记为$\delta^*_{\max}(D)$，它是满足以下条件的最小 k： D的每个子有向图 H都含有一个顶点 v，使得 $\max\{d^+_H(v)\ d^-_H(v)\} \leq k$。 D的平均退化度记为 $\delta^*_{\text{avg}}(D)$，它是满足以下条件的最小 k： D 的每个子有向图 H 都含有一个顶点 v，使得 $\frac{1}{2}(d^+_H(v) + d^-_H(v)) \leq k$。（在这种情况下， k可能是半整数。）注意，如果 D是定向图，那么它的平均退化度等于其底层图退化度的一半。

根据定义，我们有 $\delta^*_{\min}(D) \leq \delta^*_{\text{out}}(D) \leq \delta^*_{\max}(D)$ 和 $\delta^*_{\min}(D) \leq \delta^*_{\text{avg}}(D) \leq \delta^*_{\max}(D)$。若 $\overleftrightarrow{G}$ 是双向有向图，则上述所有有向版本的退化度都等于其关联图的退化度：

$$\delta^*(G) = \delta^*_{\min}(\overleftrightarrow{G}) = \delta^*_{\text{out}}(\overleftrightarrow{G}) = \delta^*_{\max}(\overleftrightarrow{G}) = \delta^*_{\text{avg}}(\overleftrightarrow{G}).$$

我们证明以下定理，它将定理 1 推广到最小退化度的情形；由上述不等式，也可推广到出退化度、最大退化度和平均退化度的情形。

定理 6。每个有向图 D 对于每个 $k \geq \delta^*_{\min}(D) + 2$，都是 k-混合的。

对于定向图这一特殊情形，我们将关于最大退化度和平均退化度的 k 下界提高了 1。

定理 7。对于所有 $k \geq \left\lceil \delta^*_{\text{avg}}(\vec{G}) \right\rceil + 1$，每个定向图 $\vec{G}$ 都是 k-混合的。

我们还通过给出 k-出退化的定向图（它们不是 $(k+1)$-混合的）证明，这种改进不适用于出退化度（因而也不适用于最小退化度）（命题 18）。

因此，一个自然的问题是将猜想 2 推广到有向图。

猜想 8. 设 D 是一个有向图，具有 n 个顶点。若 $k \geq \delta^*_{\min}(D) + 2$，则 $\mathcal{D}_k(D)$ 的直径至多为$O(n^2)$。

作为支持这一猜想的证据，我们证明了若干结果。首先，我们证明有向图中定理 4 的对应结论。

定理 9. 设 D 是一个有向图，具有 n 个顶点，且 $k \geq 2\delta^*_{\min}(D) + 2$ 是一个整数。那么，$\mathcal{D}_k(D)$ 的直径至多为 $(\delta^*_{\min}(D) + 1)n$。

我们还推广了定理 3 的第一点。

定理 10. 对于一个具有 n 个顶点的有向图 D，以及 $k \geq \frac{3}{2}(\delta^*_{\min}(D) + 1)$， $\mathcal{D}_k(D)$ 的直径至多为 Cn^2，其中 C 独立于 k。

我们还研究次三次定向图。次立方图是最大度至多为 3 的图。我们证明，这类图的任意定向都是 2-混合的，且其 2-有向着色图具有线性直径。

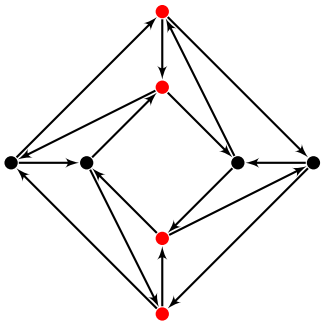

图1：一个具有冻结的2-着色的4-正则有向图的定向。

定理 11. 设 $\vec{G}$ 是一个阶为 n的次三次定向图。那么 $\mathcal{D}_2(\vec{G})$ 是连通的，且直径至多为 $2n$。

这一结果是紧的，因为存在可2-冻结的4-正则图的定向（见图1）。由于任何包含有向二圈的有向图都不是2-混合的，定理 11 直接推出以下结论：

推论12. 有向子立方图 D 是2-混合的，当且仅当 D 是一个定向图。

在第 4 节中，我们将关注非混合图和有向图的密度。首先，我们先考虑无向图。图 G的最大平均度记作 Mad(G)，定义为 $\text{Mad}(G) = \max\left\{\frac{2|E(H)|}{|V(H)|} \mid H \text{图 } G\right\}$的一个非空子图。在无向情形下，可以轻易由定理1推出，任何非 k-混合图 G 都包含一个最小度至少为 $k-1$的子图 H。这个界是紧的，因为顶点数为 k 的完全图是$(k-1)$-正则的，且不是 k-混合的。借助概率论论证，Bonamy、Bousquet和Perarnau [2] 证明，即使对于围长任意大的图，这个界仍然是紧的（回想一下，图的围长是其最短圈的长度）。我们在定理 22 中给出一个能够证明这一事实的构造。

在第二部分中，我们证明定理 22 不能推广到有向图。给定一个有向图 D，D 的最大平均度定义为 $\max\{\frac{2|A(H)|}{|V(H)|} \mid H$ 的非空子有向图。若有向图包含有向环，则其有向围长定义为最短有向环的长度，否则定义为 $+\infty$。特别地，定向图是有向围长至少为 3 的有向图。由定理 6 可知，每个非 k-混合有向图 D 都包含一个子有向图 H，其最小出度和最小入度均至少为 $k-1$。这表明，此类有向图 D 的最大平均度至少为 $2k-2$。该界是紧的，因为含有 k 个顶点的双向完全有向图是 $2k-2$-正则的，并且不是 k-混合的。然而，与无向情形不同，对于有任意大有向围长的有向图，情况并非如此。事实上，对于定向图甚至都不是如此；定向图恰好是有向围长至少为 3 的有向图。我们提出如下猜想：

猜想 13. 任意非 2-混合定向图的最大平均度至少为 4。

我们证明了两个结果，为这一猜想提供了一些支持。首先，利用放电法，我们证明了该猜想对可冻结定向图这一特殊情形成立。

定理 14. 设 $\vec{G} = (V, A)$ 为一个定向图。若 $\vec{G}$ 是 2-可冻结的，则 $|A| \geq 2|V|$。

From 由此结果，我们得到以下关于 k-可冻结定向图密度的下界 .

推论 15. 设 $\vec{G} = (V, A)$ 为一个定向图。若 $\vec{G}$ 是 k-可冻结的，则 $|A| \geq k|V| + k(k-2)$。

我们给出一族达到该界的定向图。其次，我们再次运用放电法，证明一个弱于猜想 13 的命题，其中用 $7/2$ 代替 4。

定理 16. 设 $\vec{G}$ 是一个定向图。如果 $\vec{G}$ 不是 2-混合的，那么 $\text{Mad}(\vec{G}) \geq \frac{7}{2}$。

最后，我们在第 5 节以一些开放问题作结。

2 -有向图着色路径的复杂性

本节中，我们为 k-有向图着色路径证明了一些困难性结果。我们需要一些定义。

给定一个图 G，当且仅当对于任意映射 $\phi: V_G \to \{1,2\}$，从一个定向 $\vec{G}_1$ 到 $\vec{G}_2$ 的重新定向序列，是由 G 的正常定向 Γ_1、.....、Γ_p 组成的序列，其中 $\Gamma_1 = G_1$，$\Gamma_p = G_2$，每个 Γ_i 都是正常的，并且每个 Γ_{i+1} 都可以通过反转一条弧从 Γ_i 得到。通过从量化布尔公式进行归约，已证明以下问题在 [10] 中是 PSPACE 完全的。

平面三次 NCL 输入：一个平面三次图 G，一个映射 $\phi: V \to \{1,2\}$，以及 G的两个正常定向 $\vec{G}_1$ 和 $\vec{G}_2$。 问题：是否存在一条从 G_1 到 G_2 的重新定向序列?

我们将从列表有向图着色版本的困难性结果，推导出有向图着色路径的困难性结果。设 D 为一个有向图。列表赋值 L 是一个函数，为 D的每个顶点 v 关联一个颜色列表。D 的 L-有向着色是指 D 的一种有向着色 α，满足对于每个顶点 v，$v \in L(v)$。k- 列表赋值是指满足对于每个顶点 v，$v \subseteq [k]$ 的列表赋值 L。我们用 $\mathcal{D}(D, L)$ 表示 D的 L-有向着色的重新有向图着色图。我们将满足 $|L(v)| = 1$ 的顶点 v 称为强制顶点。我们考虑以下问题。

k-列表有向图着色路径 输入：有向图 D、一个 k-列表赋值 L，以及 D的两个 L-有向着色 α 和 β。问题：在 $\mathcal{D}(D, L)$ 中，α 与 β 之间是否存在一条路径?

我们先证明以下结果。

定理 17. 有向图上的 2-LIST DICOLOURING PATH 是 PSPACE 完全的 D，即使满足以下条件：

- 强制顶点的度至多为 3，并且，
- 要么所有顶点的度至多为 5；要么，该有向图 D 是平面的，且所有顶点的入度和出度最多为 3。

证明。首先注意，2-列表有向二着色路径确实属于非确定性多项式空间。给定一个有向图 D、它的两个有向着色 α 和 β，以及 D，再给定从 α 到 β的一个重新着色序列，我们可以用多项式空间轻松检查每个有向着色是否合法。由此，根据萨维奇定理 [15]，（该定理断言，多项式空间 = 非确定性多项式空间），可知 k-列表有向二着色路径属于多项式空间。

现在我们将给出一个从平面三次 NCL 出发的多项式归约。

设 G 为一个具有 n 个顶点 x_1、.....、x_n 的平面三次图，并带有映射 $\phi: V(G) \to \{1,2\}$。设 $\vec{G}_1$ 和 $\vec{G}_2$ 为 G的两个适当定向。根据（G，ϕ），我们按如下方式构造有向图 D 和函数 L（示意见图 2）。

- 对于每个顶点 $x_i \in V(G)$，我们按如下方式构造一个顶点构件。

  我们在 V_D 中关联三个顶点 $x_{i,1}$、$x_{i,2}$ 和 $x_{i,3}$，使得这些顶点中的每一个都恰好关联到 G 中一条与 x_i 相接的边，而 G 中的每条边都恰好关联到 D 中的两个顶点。函数L 为这些顶点中的每一个赋予列表 $\{1,2\}$。

  根据 $\phi(x_i) = 1$ 是 1 还是 2，我们以两种方式补全顶点构件。如果 $\phi(x_i) = 1$ 是 1，那么我们创建一个新顶点 z_i，使得 (z_i,$x_{i,1}$、$x_{i,2}$、$x_{i,3}$、z_i) 构成一个有向四环。我们令 $L(z_i) = \{2\}$。

  如果 $\phi(x_i) = 2$，那么我们创建三个新顶点 z_i,1、z_i,2 和 z_i,3，使得 (x_i,1, z_i,1, x_i,2, z_i,2, x_i,3, z_i,3,x_i,1) 是一个有向六环，并添加弧 x_i,1z_i,2，x_i、$_2z_i$,3 和 x_i,3z_i,1。函数 L 将列表 $\{2\}$ 赋给 z_i,1、z_i,2 和 z_i,3。

• 对于每条边 $x_ix_j \in E(G)$，其中 $i < j$，我们创建一个顶点 a_{ij}，并创建有向 3-圈 $(a_{ij}, x_{i,\ r}, x_{j,\ r'}, a_{ij})$，其中 $x_{i,\ r}$ 和 $x_{j,\ r'}$ 是 D 中与边 x_ix_j 对应的顶点。我们设置 $L(a_{i,\ j}) = \{1\}$。这个有向 3-圈是 x_ix_j 的边构件。

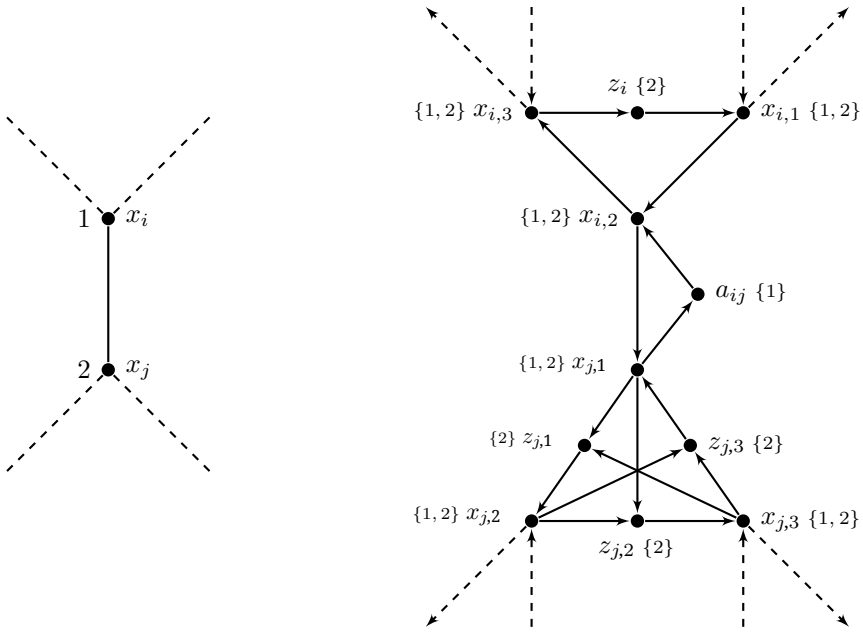

图 2：一个从 (G, ϕ) 构造 (D, L) 的示例，其中 $\phi(x_i) = 1, \phi(x_j) = 2$，且 $i < j$。

注意，有向图 D 的最大度至多为 5，且其强制顶点的度至多为 3。

对于 G的每个正常定向 $\vec{G}$，我们定义与 G相关联的有向着色，即D 的一个特定有向着色，记为$\alpha_{\vec{G}}$，如下所示。

• 强制顶点被赋予其列表中的颜色：顶点 $z_i, z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}$ 着色为 2，顶点a_{ij} 着色为 1。

• 对于每条弧 $x_ix_j \in A(\vec{G})$，我们将 $x_{i,r}$ 着色为 2，将 $x_{j,r'}$ 着色为 1，其中 $x_{i,r}$ 和 $x_{j,r'}$ 是 D 中与 G里的边 x_ix_j 相对应的顶点。

命题 17.1：对于 G 的每个正常定向 $\vec{G}$ 及其对应的有向图 D，以下结论成立 .

(i) $\alpha_{\vec{G}}$ 是 D的一个 L-有向着色。

(ii) 除非 $\vec{G}$中有$d^-_{\vec{G}}(x_i) = \phi(x_i)$，否则将$x_{i,r}$ 的颜色从 1 改为 2，仍可得到 D的一个有效 L-有向着色。

命题的证明。我们只证明第一项；第二项可通过类似的论证得出，注意在这种情况下$d^-_{\vec{G}}(x_i) > \phi(x_i)$。注意，根据定义，$\alpha_{\vec{G}}$满足列表赋值 L施加的着色约束。接下来证明$\alpha_{\vec{G}}$确实是一个 L有向着色。反设$\alpha_{\vec{G}}$中存在一个单色有向圈 C。对于每个边构件，例如对应于 x_ix_j的边构件，顶点x_i、$_r$、x_j、$_{r'}$ 必须着不同的颜色。因此，C 的所有顶点都必须包含在 D的同一个顶点构件中。设顶点 x_i 满足 C 位于 x_i的顶点构件中。如果 $\phi(x_i) = 1$，那么 C 必须是$(z_i, x_i, 1, x_i, 2, x_i, 3, z_i)$，且其所有顶点都应着色为2。这就产生矛盾，因为 $d^-_{\vec{G}}(x_i) \geq 1$ 根据构造意味着x_i、1、x_i、2、x_i、3中至少有一个着色为1。如果 $\phi(x_i) = 2$，那么 C 至少包含两个

位于 $\{x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}\}$ 中的顶点和位于 $\{z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}\}$中的两个顶点。于是， $\{x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}\}$中至少有两个顶点着色为2，因为顶点$z_{i,\ j}$着色如此。这就产生矛盾，因为 $d^-_{\vec{G}}(x_i) \geq 2$ 根据构造意味着$x_{i,\ 1}$、$x_{i,\ 2}$、$x_{i,\ 3}$ 中至少有两个顶点着色为1。◊

令 $\alpha_1 = \alpha_{\vec{G}_1}$ 和 $\alpha_2 = \alpha_{\vec{G}_2}$ 分别为由两个正常定向 $\vec{G}_1$、$\vec{G}_2$ 得到的有向着色。现在我们将证明：在 G 中存在从 G_1 到 G_2 的重新定向序列，当且仅当在 D 中存在从 α_1 到 α_2 的重新着色序列。

首先假设存在一个从 G_1 到 G_2 的重新定向序列 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$，我们来说明如何构造相应的重新着色序列。考虑重新定向序列中的任意一步 s：例如，当 Γ_s 通过将弧 x_ix_j 反向为 x_jx_i 而变为 Γ_{s+1} 时，我们将展示一条在 $\mathcal{D}(D, L)$ 中从 $^{\alpha}\vec{\Gamma}_s$ 到 $^{\alpha}\vec{\Gamma}_{s+1}$ 的路径。考虑 D 中与边 x_ix_j 对应的顶点 $x_{i,r}$、$x_{j,r'}$，它们在 $^{\alpha}\vec{\Gamma}_s$ 中分别着色为 2 和 1。我们首先将 $x_{j,r'}$ 的颜色从 1 改为 2。由于 $a_{i,j}$ 被迫着色为 1，此时边构件不是单色的。此外，由于步骤 s 将弧 x_ix_j 重新定向后仍然得到一个正常定向，因此 $d^-_{\vec{\Gamma}_s}(x_j) = d^-_{\vec{\Gamma}_{s+1}}(x_j) + 1 \geq \phi(x_j) + 1$。根据断言 17.1 (ii)，所得着色是一个 L-有向着色。接着，我们将 $x_{i,r}$ 的颜色从 2 改为 1，得到有向着色 $^{\alpha}\vec{\Gamma}_{s+1}$。将上述过程对步骤 $s = 1$ 至 $s = p$ 得到的重新着色序列依次连接起来，即可得到一个从 α_1 到 α_2 的重新着色序列。

反过来，假设存在一个重新着色序列 $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$，从 α_1 到 α_2。注意，在该序列的某一步中，D 中可能被重新着色的顶点只有那些定义为 $x_{i,k}$ 的顶点（对应于 $i \in [n]$ 和 $k \in [3]$），因为其他顶点的颜色都是强制确定的。现在，在重新着色的任意一步 s 中，对于 G的每条边 x_ix_j，对应的两个顶点至多有一个着成颜色 1，因为 a_{ij} 被强制着成颜色 1。因此，我们可以如下定义 G 的一个定向 $\vec{\Gamma}_s$。若对应于边 x_ix_j的边构件的顶点 $x_{i,r}, x_{j,r'} \in V(D)$ 在 γ_s中颜色不相同，则定向 Γ_s 将 x_ix_j 设为从着成颜色 2 的顶点指向着成颜色 1 的顶点。否则，在 γ_s 中两个顶点都着成颜色 2，我们就保留由 Γ_{s-1}给出的对应边的定向 $\vec{}$。在第一个和最后一个有向着色 α_1 和 α_2 中，对于每条边 x_ix_j，对应的顶点 $x_{i,k}$ 和 $x_{j,k'}$ 颜色都不同。因此，$\Gamma_1 = G_1$ 和 $\Gamma_p = G_2$。于是，$\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$ 是 G 从 G_1 到 G_2 的一系列定向，其中 Γ_{s+1} 要么是通过反转 Γ_s 中的一条弧得到的（当$x_{i,k}$ 之一被重新着成颜色 1，且其边构件包含$x_{i,k}$ 的边 x_ix_j 原先未指向 x_i时），要么在其他情况下与之相同（尤其是当$x_{i,k}$ 之一被重新着成颜色 2 时）。此外，在每一步 s，$\vec{\Gamma}_s$ 都是 G的正常定向。事实上，若 $\phi(x_i) = 1$（分别地，$\phi(x_i) = 2$），则 $\{x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}\}$ 中至少有一个顶点（分别地，两个顶点）着成颜色 1，因此 x_i 在 Γ_s中的入度至少为 1（分别地，至少为 2）。因此，从 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$ 中取出省略常数步骤后的子序列，即得到一个从 G_1 到 G_2的重新定向序列。

由于平面三次 NCL 是 PSPACE 完全的，此时我们的归约已经得出了 2-列表有向二着色路径的 PSPACE 完全性。根据构造，强制顶点 $z_{j,\ k}$ 和 a_{ij} 的度至多为 3，其他所有顶点的度至多为 5。至此，结果中第一种情形的证明完成。

现在，由于输入实例本身已经是平面的，要证明平面有向图上的 2-列表有向二着色路径是 PSPACE 完全的，只需使用平面顶点构件和边构件。在我们当前的归约中，唯一非平面的构件是对应于满足 $G(x_i) = 2$ 的 $x_i \in V$ 的顶点构件。现在，我们考虑相同的归约，并将满足 $x_i = 2$ 的顶点所对应的顶点构件替换为平面构件。对于这些顶点，平面顶点构件定义在相同的顶点集合上，即 $\{x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}, z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}\}$，但其有向 3-圈的弧为 ($z_i$,1, x_i,1, x_i,2, z_i,1)、(z_i,3, x_i,1, x_i,3, z_i,3) 和 (z_i, 2, x_i,3, x_i,2, z_i,2)，如图3所示。此替换构造出一个平面有向图，其中所有强制顶点的度仍至多为 3，且所有顶点的最大入度和出度均至多为 3。证明至此完成。

□

已知在无向情形下，对于任意 $k \geq 4$，问题 k-颜色 PATH 都是 PSPACE 完全的 [3]。借助定理 17，我们证明，对于任意 $k \geq 2$ 种颜色，该结论在有向图和定向图中对其有向着色对应问题同样成立。

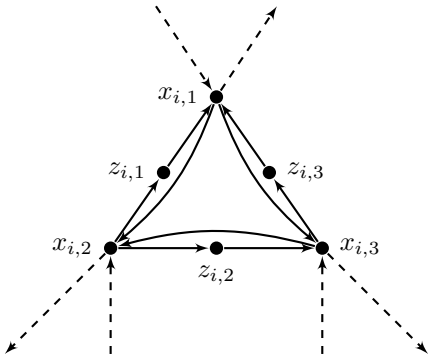

图3：当 $\phi(x_i) = 2$ 时的平面顶点构件

定理 5. (i) 对于任意 $k \geq 2$， k-有向着色路径 在最大度为 $2k+1$ 的有向图上是 PSPACE 完全的。

(ii) 对于每个 $k \geq 2$, k-有向图着色路径，在定向图上是 PSPACE 完全的。

(iii) 对于每个 $2 \leq k \leq 4$, k-有向图着色路径，在最大度为 $2k+2$ 的平面有向图上是 PSPACE 完全的。

(iv) 2-有向图着色路径在度至多为 6 的平面定向图上是 PSPACE 完全的 .

证明。(*i*) 我们将问题从这样的 2-列表有向二着色路径实例归约而来：强制顶点的度至多为 3，且图的最大度为 5。根据定理 17，该问题是 PSPACE 完全的。设 $(D, L, \alpha_1, \alpha_2)$ 是该问题的一个实例，我们按如下方式为 k-有向图着色路径构造一个实例 $(D', \alpha_1', \alpha_2')$。

我们从 $D' = D$ 开始构造 D'。然后，对于每个顶点 $v \in V(D)$，令 $\overleftrightarrow{K}_k^v$ 是顶点集为 $\{z_i^v \mid i \in [k]\}$ 的双向完全图。随后，我们在 v 与每个满足 $i \notin L(v)$ 的 z_i^v 之间添加一个有向二圈。我们通过如下方式将有向着色 α_1 和 α_2 扩展为 D' 上的有向着色 α_1' 和 α_2'。将 D' 中原本属于 D 的所有顶点着成相同颜色，并令所有 $v \in V(D)$ 以及所有 $i \in [k]$ 的 z_i^v 均着成颜色 i。注意，在任何 k-有向着色中，构件 $\overleftrightarrow{K}_k^v$ 的所有顶点随后都会被冻结，这使我们能够在 D' 中模拟 D 上的列表有向着色约束。从 α_1 到 α_2 的 L-有向着色路径，恰好就是 D' 中从 α_1' 到 α_2' 的有向着色路径在 D 的顶点上的限制，从而使这两个实例等价。

现在我们将证明，D' 中顶点 u 的最大度为 $2k+1$。若 u 属于某个构件 $\overleftrightarrow{K}_k^v$，则其度至多为 $2(k-1)+2 = 2k$。注意，当 $u \in V(D)$ 时，u 在 D 中的度为 2 、 3 或 5，而我们的归约恰好添加了 $2(k-|L(u)|)$ 条与 u 相接的弧。若 $|L(u)| = 2$，则可得 $d_{D'}(u) \leq 5+2k-4 = 2k+1$。若 $|L(u)| = 1$，根据构造可知 $d_D(u) \leq 3$，从而得到 $d_{D'}(u) \leq 3+2k-2 = 2k+1$。这证明了 D' 的最大度至多为 $2k+1$，从而完成 (*i*) 的证明。

(*ii*) 我们将 k-有向着色路径归约为限制在定向图上的 k-有向着色路径。设 (D, α_1, α_2) 是 k-有向着色路径的一个实例，我们将构造一个等价的实例 $(\vec{G}, \alpha_1', \alpha_2')$，其中 G 是一个定向图。取 H 为一个有向色数恰好为 k 的任意定向图。我们通过按如下方式替换 D 中的有向二圈，由 D 构造 $\vec{G}$。对于 D 的每个有向二圈 $[u, v]$，创建一个 $\vec{H}_{uv}$ 的副本 $\vec{H}$，然后将 $[u, v]$ 替换为一条从 u 到 v 的单弧，并添加从 v 到 $\vec{H}_{uv}$ 以及从 $\vec{H}_{uv}$ 到 u 的所有弧。根据构造，G 是一个定向图。

在下文中，我们将展示如何将任意 k-有向着色 α 的 D 转换为 $\vec{G}$ 的一个 k-有向着色 α'，反之亦然。给定 D 的一个 k-有向着色 α，我们通过将每个 $\vec{H}$ 的副本 $\vec{H}_{uv}$ 着成 ξ，并在 $V(D)$ 上保留与 α 相同的颜色，来定义 $\vec{G}$ 的 α'。$(\vec{G}, \alpha')$ 中的任何单色有向圈都必须包含某个 $\vec{H}_{uv}$ 中的一个顶点，否则它就会是 D 的子有向图，并且已经

在(D,α)中是单色的。由于$\vec{H}$的ξ是一个有向着色，该圈必须同时包含u和v，但这样一来，若u和v着成相同颜色，就会在(D,α)中形成一个单色有向二边圈，因此α'确实是$\vec{G}$的一个k有向着色。反过来，给定$\vec{G}$的任意k有向着色α'，我们将V上α'的限制定义为D的$\alpha(D)$。同样，如果(D,α)中含有一个单色有向圈，那么该圈上任何一个不在$\vec{G}$中的弧(u,v)，都可以用(u,w,v)替换，其中$w \in \vec{H}_{uv}$取为一个与u和v颜色相同的顶点（因为$\chi(\vec{H}) = k$）。这样便会在$(\vec{G},\alpha')$中形成一个单色有向圈，因此α必定是D的一个k有向着色。

现在，我们定义通过上述变换由α_1、α_2得到的$\vec{G}$上的k-有向着色α'_1、α'_2，并令我们的输出实例为（$\vec{G}$、α'_1、α'_2）。如果在D中存在从α_1到α_2的重新着色序列，我们就在$\vec{G}$中执行相同的重新着色步骤，从α'_1开始并得到α'_2。由于我们只对$V(D)$的顶点重新着色，上一段表明该序列是有效的。反之，如果存在从α'_1到α'_2的重新着色序列，则其在$V(D)$上的限制（省略对子图$\vec{H}_{uv}$中顶点的重新着色）给出了一个从α_1到α_2、位于D中的有效序列。由此即证明了这些实例的等价性，并证明了(ii)。

(iii)我们将从 2-列表有向二着色路径进行归约，其中D是平面的，强制顶点的度至多为 3，且D的入度和出度至多为 3。根据定理 17，该问题是 PSPACE 完全的。设（D、L、α_1、α_2）是该问题的一个实例。我们采用(i)证明中的相同归约，确保$\overleftrightarrow{K}^v_k$以一种使$v$的（至多 3 种）禁用颜色位于其外部面的方式嵌入并着色。这样，我们便能保留D'的平面表示，且其最大度为$2k+2$。这就证明了（iii）。

(iv) 与 (iii) 中一样，我们从 2-列表有向二着色路径进行归约，其中D是平面的，强制顶点的度至多为 3，且每个顶点的入度和出度都至多为 3。由于我们考虑的是 2-有向着色，列表大小为 2 的顶点无需借助构件来模拟禁用颜色。与情形 (iii) 的主要区别在于，我们无法使用双向完全图$\vec{K}^v_2$来冻结列表大小为 1 的顶点v。为解决这一问题，我们使用图4所示的构件，其中所有顶点的颜色都被冻结。因此，只需在每个列表大小为 1 的顶点上附加这样的构件，即形如$z_{i,r}$或$a_{i,j}$的顶点。具体做法是创建一个有向三角形，使其包含该顶点和构件中两个颜色相反的顶点，如图所示。

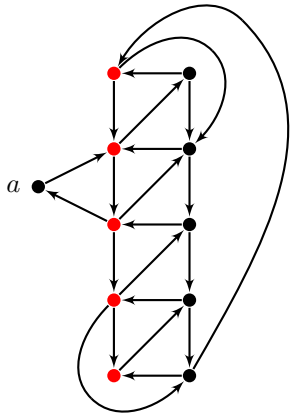

图4：如何在具有两种颜色的平面定向图中固定顶点a。

□

3 有向图着色图的连通性与直径

3.1 连通性

我们首先给出关于颜色最小数量的一些简单界限，并考察退化性变体，以确保有向图或定向图是 k-混合的。Bonsma 和 Cereceda [3] 以及 Dyer 等人 [9]分别独立证明，任意（非定向）图 G 对每个 $k \geq \delta^*(G)+2$ 都是 k-混合的。我们在此回顾的定理 6 将这一结果推广到了有向图。

定理 6. 每个有向图 D 对于每个 $k \geq \delta^*_{\min}(D) + 2$，都是 k-混合的。

证明。该证明改编自无向图的 [9] 证明。我们通过对 D 的顶点数作归纳来证明这一结论；对于只有一个顶点的有向图，结论显然成立。设 D 是一个至少有两个顶点的有向图，$k \geq \delta^*_{\min}(D) + 2$ 是一个整数，且 α、β 是 D 的两个 k- 有向着色。设 v 是一个顶点，使得 $\min\{d^+(v)\ d^-(v)\} \leq \delta^*_{\min}(D)$，并令 $D' = D - v$。根据归纳假设，D' 是 k-混合的。设 α'、β' 分别是由 α、β 诱导的 D' 的k-有向着色（即，对于每个 $v \in V(D')$，$\alpha'(v) = \alpha(v)$ 且 $\beta'(v) = \beta(v)$）。由于 D' 是 k-混合的，存在一个重新着色序列 $\alpha' = \gamma_0$，...，$\gamma_\ell = \beta'$，从 α' 到 β'，使得对于 $i \in [1, \ell]$，γ_{i-1} 与 γ_i 在 $\vec{G}'$ 中恰有一个顶点的颜色不同。我们将该顶点记为 v_i，并将 $\gamma_i(v_i)$ 记为 c_i。

让我们证明，可以将从 D' 出发的重新着色序列转化为针对 D 的重新着色序列。从 α 出发，只要这些步骤能产生 D 的有向着色，我们就执行与 $\gamma_0, \ldots, \gamma_\ell$ 中相同的步骤。如果序列中的某一步 i 无法将顶点 v_i 在 D 中重新着色为 c_i，那一定是因为 v 当前着色为 c_i，而将 v_i 重新着色为 c_i 会生成一个同时包含两者的单色有向圈。假设 v 至多有 $k-2$ 个出邻点（否则，v 至多有 $k-2$ 个入邻点，情形对称）。现在，我们可以选择一个不同于 c_i、且不同于 v 的出邻点所着颜色的颜色 c。然后，将 v 重新着色为 c，这样便能将 v_i 重新着色为 c_i，并继续该序列。 □

定理 7. 对所有 $k \geq \left\lceil \delta^*_{\text{avg}}(\vec{G}) \right\rceil + 1$，每个定向图 $\vec{G}$ 都是 k-混合的。

证明。我们对 G 的顶点数进行归纳；对于只有一个顶点的定向图，该结论显然成立。现在考虑一个至少有两个顶点的定向图 $\vec{G}$，以及 $k \geq \left\lceil \delta^*_{\text{avg}}(\vec{G}) \right\rceil + 1$。令 v 为满足 $d^+(v) + d^-(v) \leq 2\delta^*_{\text{avg}}(\vec{G})$ 的顶点。根据方向对偶性，不妨设 $d^+(v) \leq d^-(v)$，于是根据假设 $d^+(v) \leq k-1$。令 $\vec{G}' = \vec{G} - v$。于是，$\delta^*_{\text{avg}}(\vec{G}') \leq \delta^*_{\text{avg}}(\vec{G})$，归纳假设表明 $\vec{G}'$ 是 k-混合的。

令 α 和 β 为 $\vec{G}$ 的两个 k-有向着色，并令 α'、β' 为由 α、β 诱导的 $\vec{G}'$ 的 k-有向着色。由于 $\vec{G}'$ 是 k-混合的，存在一列 $\vec{G}'$ 的 k-有向着色 $\alpha' = \gamma_0, \ldots, \gamma_\ell = \beta'$，使得对于 $i \in [1, \ell]$，γ_{i-1} 和 γ_i 恰好在 $\vec{G}'$ 的一个顶点的颜色上有所不同。我们将该顶点记为 v_i。现在我们考虑从 α 开始，执行相同的重新着色步骤来重新着色 G。如果对于某个 i，无法将 v_i 重新着色为 c_i，这必定是因为 v 当前被着色为 c_i，而将 v_i 重新着色为 c_i 会产生一个单色有向圈。注意，这样的圈必然包含 v，因为 γ_i 是 G' 的有向着色。

- 如果 $d^+(v) \leq k-2$，那么可以将 v重新着色为 c，这是一种不同于 c_i且未出现在 $N^+[v]$上的颜色，从而可以将 v_i重新着色为 c_i，并继续执行该序列。
- 否则，$d^+(v) = k-1$。于是，由于 $k \geq \left\lceil \delta^{*\text{平均值}}(\vec{G}) \right\rceil + 1$，可得 $d^-(v) \leq k-1$，进而有 $d^-(v) = k-1$（因为 $d^+(v) \leq d^-(v)$）。由于 $\vec{G}$ 是一个定向图，且将 v_i 重新着色为 c_i 会产生一个单色有向圈，因此 v 至少有一个着成 c_i色的邻点。取 w 为其中一个邻点。那么，若 $w \in N^+(v)$（分别地，若 $w \in N^-(v)$），我们可以将 v重新着成一个未出现在 $N^+(v)$（分别地，$N^-(v)$）中的颜色，再将 v_i 重新着成 c_i 色，并继续这个序列。

□

注意，由于 $\delta^*_{\max}(\vec{G})$ 是整数，且 $\delta^*_{\max}(\vec{G}) \geq \delta^*_{\text{avg}}(\vec{G})$，因此 $\delta^*_{\max}(\vec{G}) \geq \left\lceil \delta^*_{\text{avg}}(\vec{G}) \right\rceil$。因此，对于所有满足 $k \geq \delta^*_{\max}(\vec{G}) + 1$ 的情况，每个定向图 $\vec{G}$ 都是 k-混合的。于是，一个自然的问题是，这个结果能否推广到 δ^*_{out}：对于所有满足 $k \geq \delta^*_{\text{out}}(\vec{G}) + 1$ 的情况，每个定向图 $\vec{G}$ k 都是混合的吗？有向图不满足这一结论，双向团就是一个反例；以下结果也对定向图给出了否定答案。

命题 18. 对每个正整数 k，都存在不是 $(k+1)$-混合的 k-出退化定向图。

证明。令 B_0 为只有一个顶点的定向图。对于 $k \geq 1$，我们按如下方式由 B_{k-1} 构造 B_k：取 $\vec{B}_{k-1}$ 的两个不相交副本 $\vec{B}^1_{k-1}$ 和 $\vec{B}^2_{k-1}$，以及一个顶点 r；添加从 r 到 $\vec{B}^1_{k-1}$的所有弧、从 $\vec{B}^1_{k-1}$到 $\vec{B}^2_{k-1}$ 的所有弧，以及从 $\vec{B}^2_{k-1}$ 到 r的所有弧。

断言 18.1： $\vec{B}_k$ 是 k-出退化的，且 $\vec{\chi}(\vec{B}_k) = k+1$。

断言的证明。我们对 k 使用归纳法证明该命题；当 $k = 0$时，结论显然成立。现在假设 $k \geq 1$，并考察 $\vec{B}_k$。根据归纳假设，分别在$\vec{B}^1_{k-1}$ 和 $\vec{B}^2_{k-1}$上存在两个 $(k-1)$-出退化排序 σ_1 和 σ_2。在 $\vec{B}_k$中，$V(\vec{B}^2_{k-1})$的每个顶点在 $V \setminus V(\vec{B}^2_{k-1})$中恰有一个出邻点，即 r。于是，我们可以按照 σ_2依次删除 $\vec{B}^2_{k-1}$ 中的顶点，使得每一步被删除顶点的出度至多为 k。在剩余图中，$V(\vec{B}^1_{k-1})$中顶点的所有出邻点都属于 $V(\vec{B}^1_{k-1})$，因此可以按照 σ_1依次删除出度为 $k-1$ 的顶点。结合这些事实，$\sigma_2 \cdot \sigma_1 \cdot (r)$给出了 $\vec{B}_k$的一个 k-出退化排序。因此，$\vec{B}_k$ 是 k-出退化的。

图 $\vec{B}_k$ 确实是（$k+1$）-可定向染色的，因为任何满足以下限制的有向着色 B^1_{k-1} 和$\vec{B}^2_{k-1}$ 是一个 k-有向着色，且 r 用颜色 $k+1$ 着色，便构成 $\vec{B}_k$的一个（$k+1$）-有向着色。现在，反设 $\vec{B}_k$ 存在一个 k-有向着色 α。令 $c = \alpha(r)$。由归纳法，$\vec{\chi}(\vec{B}_{k-1}) = k$，因此存在一个 $\vec{B}^1_{k-1}$ 的顶点x_1 和一个 $\vec{B}^2_{k-1}$ 的顶点 x_2，使得 $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = c$。但此时（$r$，$x_1$，$x_2$，$r$）构成一个单色有向圈，矛盾。因此 $\vec{\chi}(\vec{B}_k) = k+1$。◊

设 k 为一个正整数。设 G_k 为从具有 $k+1$ 个顶点的传递竞赛图 TT_{k+1}得到的定向图：对 TT_{k+1}的每条弧 xy，添加一个 $\vec{B}_k$的副本 $\vec{B}^{xy}_k$，并添加从 y 到 $\vec{B}^{xy}_k$ 以及从 $\vec{B}^{xy}_k$ 到 x的所有弧。我们来证明，$\vec{G}_k$ 是 k- 出退化的，且不是（$k+1$）- 混合的。

令（$t_1, \ldots, t_{k+1}$）为 TT_{k+1} 的无环序（使得不存在满足 $i > j$的弧 $t_i t_j$），并令$\sigma_{i,j}$为 $\vec{B}^{t_i t_j}_k$ 的一个 k-出退化序，对所有 $1 \leq i < j \leq k+1$均成立。我们按如下方式组合这些排序，构造出$\vec{G}_k$ 的一个 k-出退化序：$(t_1) \cdot \sigma_{1,2} \cdot \sigma_{1,3} \cdot \cdots \cdot \sigma_{1,k+1} \cdot (t_2) \cdot \sigma_{2,3} \cdot \sigma_{2,4} \cdot \cdots \cdot \sigma_{2,k+1} \cdot (t_3) \cdot \cdots \cdot (t_k) \cdot \sigma_{k,k+1} \cdot (t_{k+1})$。因此，$\vec{G}_k$ 是 k-出退化的。

我们证明，$\vec{G}_k$ 的每个（$k+1$）-有向着色 α 都满足：每个顶点 $v \in V(TT_{k+1})$ 都是冻结的。由于将颜色置换应用于 α 所得到的任何 α' 也都是（$k+1$）-有向着色，因此上述结论意味着无法从 α 到达 α'，并且 $\vec{G}_k$ 不是（$k+1$）-混合的。考虑 $v \in V(TT_{k+1})$，并假设存在一个从 α 开始、重新着色 v的重新着色序列。设 β 为该序列中 v 被重新着色之前$\vec{G}_k$ 的有向着色，β' 为重新着色 v之后的有向着色。只需注意，对于任意 $w \in V(TT_{k+1}) \setminus v$，都有 $\beta(v) \neq \beta(w)$。事实上，由于 $\vec{\chi}(B_{vw}) = k+1$，存在某个 $z \in V(B_{vw})$ 被着为 $\beta(v)$，而根据构造，$\beta(v) = \beta(w)$ 会在顶点v、w、z上形成一个单色有向圈。接着，由于 β' 是通过重新着色 v从 β 得到的，因此存在某个 $w \in V(TT_{k+1})$，其颜色与 β'中的 v 相同；同样的论证便会导出矛盾。

□

3.2 直径

本节将证明定理 9、10 和 11。

定理 11. 设 $\vec{G}$ 是一个阶为 n 的次三次定向图。那么 $\mathcal{D}_2(\vec{G})$ 是连通的，且直径至多为 $2n$。

证明。设 $\vec{G}$的任意两个 2-有向着色为 α和 β。令 $x = \mathrm{diff}(\alpha,\beta) = |\{v \in V(\vec{G}) \mid \alpha(v) \neq \beta(v)\}|$。对 $x \geq 0$应用归纳法，证明在 $\mathcal{D}_2(\vec{G})$中，存在一条从 α到 β、长度至多为 $2x$ 的路径。显然，当 $x = 0$（即 $\alpha = \beta$）时结论成立。假设 $x > 0$，且结论对每个 $x' < x$都成立。

令 $v \in V(\vec{G})$使得 $\alpha(v) \neq \beta(v) = 2$（除颜色互换外存在）。如果可以直接用颜色 2 重新着色 v，那么我们就用颜色 2 重新着色 v，得到一个新的 2-有向着色 α'，使得 $\mathrm{diff}(\alpha',\beta) = x - 1$。于是，根据归纳法，结论成立。

因此，v 不能直接重新着成颜色 2；也就是说，存在一个包含 v 的有向环 C，使得对每个 $w \in V(C)$，都有 $\alpha(w) = 2$（$\setminus \{v\}$）。此外，必须存在一个顶点 $u \in V(C) \setminus \{v\}$，使得$\beta(u) = 1$。

如果 u 不是 v的邻点，那么 u 在 α中有两个邻点（即 C 中的顶点）着成了颜色 2。因此，可以将 u 重新着成颜色 1（这不会产生由着成颜色 1 的顶点构成的有向环，因为 u 在 G 中的度至多为 3），从而得到一个新的 2-有向着色 α'，使得 $\mathrm{diff}(\alpha',\beta) = x - 1$。由归纳法，结论成立。因此，$u$ 是 C 中 v 的邻点。

同样，我们可以假设 u 不能直接重新着成颜色 1（否则由归纳法，结论成立），因此存在一个有向环 C'，使得对每个 $w \in V(C')$，都有 $\alpha(w) = 1 \setminus \{u\}$。由于 u 和 v 在 $\vec{G}$ 中的度至多为 3，并且考虑到 C 和 C' 中顶点的 α-颜色，故 $V(C') \cap V(C) = \{v,u\}$。令 h 为 $V(C') \setminus \{u,v\}$ 中与 u 在 C' 中相邻的顶点。由于 $\vec{G}$ 是次三次图，且 h 属于 C'，h 不可能位于任何有向环 C'' 中，使得 C'' 中除 h 之外的所有顶点都由 α着成颜色 2。因此，可以将 h 重新着成颜色 2。在所得的有向着色中，根据 h的选取，u 的入邻域或出邻域（取决于 uv的定向）着成了颜色 2。因此，可以将 u 重新着成颜色 1，接着将 v 重新着成颜色 2，再将 h 重新着成颜色 1，从而得到一个新的 2-有向着色 α'，使得 $\mathrm{diff}(\alpha',\beta) = x - 2$，由归纳法，结论成立。 □

定理 9。设 D 是一个有 n 个顶点的有向图，且 $k \geq 2\delta^*_{\min}(D) + 2$ 是一个整数。那么，$\mathcal{D}_k(D)$ 的直径至多为 $(\delta^*_{\min}(D) + 1)n$。

证明。该证明与 Bousquet和Perarnau [5] 对无向图的证明非常相似。设 α 和 β 是两个 k-有向着色。下面通过对顶点数归纳，证明存在一个从 α 到 β 的重新着色序列，使得每个顶点至多被重新着色 $\delta^*_{\min}(D) + 1$ 次。

若 $n = 1$，结论显然成立。设 D 是一个有 $n + 1$ 个顶点的有向图，并设 u 是一个顶点，使得 $\min\{d^+(u)\ d^-(u)\} \leq \delta^*_{\min}(D)$，且令 $D' = D - u$。根据方向对偶性，不妨设 $d^+(u) \leq \delta^*_{\min}(D)$。记 α' 和 β' 为由 α 和 β 诱导的 D' 的有向着色。根据归纳假设，且由于 $\delta^*_{\min}(D') \leq \delta^*_{\min}(D)$，存在一个从 α' 到 β' 的重新着色序列，使得每个顶点至多被重新着色 $\delta^*_{\min}(D) + 1$ 次。现在，我们对 D 执行相同的重新着色步骤，从 α开始。如果在某一步 i，无法将 v_i 重新着色为 c_i，那必定是因为 u 当前着成了 c_i，而将 v_i 重新着色为 c_i 会产生一个单色有向圈 C。由于 u 至多有 $\delta^*_{\min}(D)$ 个出邻点，且 $k \geq 2\delta^*_{\min}(D) + 2$，因此至少有 $\delta^*_{\min}(D) + 2$ 种颜色没有出现在 u 的出邻域中。我们从这些颜色中选取 c，使得 c 不会出现在 $N^+(u)$ 接下来的 $\delta^*_{\min}(D) + 1$ 次重新着色中，并将 u 重新着色为 c。注意，c 与 c_i 不同，因为要么 $v_i \in N^+(u)$ 且 c_i 出现在 $N^+(u)$ 的下一次重新着色中，要么 u 在 C 中的出邻点当前着成了 c_i。

由于 u至多有 $\delta^*_{\min}(D)$ 个出邻点，并且 D'中的每个顶点至多重新着色 $\delta^*_{\min}(D)+1$次，因此在这个重新着色序列中，u 的出邻点至多发生 $\delta^*_{\min}(D)(\delta^*_{\min}(D) + 1)$ 次重新着色。因此，在这个新的重新着色序列中，u 至多重新着色 $\delta^*_{\min}(D)$ 次。最后，我们必须将 u 设为其在 β中的颜色。这样做时，u 至多重新着色 $\delta^*_{\min}(D) + 1$ 次。证明至此完成。 □

本部分接下来的目标是证明以下定理，它将 Bousquet 和 Heinrich [4] 的一个结果推广到有向图。

定理 10。对于一个有 n 个顶点的有向图 D，以及 $k \geq \frac{3}{2}(\delta^*_{\min}(D) + 1)$，$\mathcal{D}_k(D)$ 的直径至多为 Cn^2，其中 C 独立于 k。

给定一个无向图 $G=(V,E)$，若存在一个排序 $v_1,\ldots,v_n$，使得对于每个 $i\in[n]$，L 都是 a-可行的列表赋值，且$V,|L(v_i)|\geq|N(v_i)\cap\{v_{i+1},\ldots,v_n\}|+1+a$。Bousquet和Heinrich证明了以下结果，该结果作为定理 6 的第一项和第二项出现在 [4] 中：

定理 19（Bousquet 和 Heinrich [4]）。设 G 是一个图，且 $a\in\mathbb{N}$。设 L 是一个 a-可行列表赋值，k 是颜色总数。那么，$\mathcal{C}(G,L)$ 的直径至多为：

(i) 若 $k\leq 2a$，则为 kn，

(ii) 若 $k\leq 3a$，则为 Cn^2（其中 C 是一个与 k、a无关的常数）。

对于图 G 及其顶点集 G上的列表赋值 L，若一个 L-着色 α 满足：对每个顶点 $v\in V(G)$，$\alpha(v)$ 不属于 S，则称该着色避开颜色集合 S。为了证明定理 10，我们由定理 19 推出以下引理：

引理 20。设 $G=(V,E)$ 是一个有 n 个顶点的无向图，$k\in\mathbb{N}$ 是颜色总数，L 是一个 $\lceil\frac{k}{3}\rceil$-可行列表赋值，α 是 G的一个 L-着色，且避开由 $\lceil\frac{k}{3}\rceil$ 种颜色组成的集合 S。那么，对于任意由$\lceil\frac{k}{3}\rceil$ 种颜色组成的集合 S'，存在一个 L-着色 β，它是 G的着色并避开 S'；此外，存在一个从 α 到 β、长度至多为$\frac{4k+12}{3}n$的重新着色序列。

证明　　引理 20 的证明来自 [4] 中引理 8 的证明。为完整起见，我们给出该证明　　.
证明。令 S' 为任意一个 $\lceil\frac{k}{3}\rceil$ 颜色集合。

我们从使用 α 进行 G 着色开始。令 $(v_1,\ldots,v_n)$ 为 G 的退化排序。我们依次考察从 v_n 到 v_1 的每个顶点。对于每个顶点，如果可能，我们就用 S 中的一种颜色为其重新着色。我们将所得的 L-着色记为 η。这一过程少于 n 步即可完成。注意，对于每种颜色 $c\in S$ 以及 G 中的每个顶点 v_i，以下情况至少有一种成立：

- $\eta(v_i)\in S$,
- v_i 在 $\{v_{i+1},\ldots,v_n\}$ 中有一个邻点被着色为 c，或
- $c\notin L(v_i)$。

令 H 为由 G 中颜色不属于 S 的顶点所诱导的子图，其中这些顶点在 η 中的颜色不属于 S。我们对每个 $v\in V(H)$ 定义 L_H：$L_H(v)=L(v)\setminus S$。利用前面的观察可得，对于 H 中的每个顶点 v_i，v_i 在 $\{v_{i+1},\ldots,v_n\}\setminus V(H)$ 中至少有 $|L(v_i)$ 个邻点 $\cap S|$。这意味着 L_H 是 H 的一个$\lceil\frac{k}{3}\rceil$-可行列表赋值，其颜色总数至多为 $k-|S|\leq\frac{2k}{3}$。根据定理 19 (i)，$\mathcal{C}(H,L_H)$ 的直径至多为 $\frac{2k}{3}n$。注意，从 η_H（即在 H 上诱导的着色 η）开始，对 H（对 L_H 有效）的每次重新着色，都会给出从 η 开始对 G 的一次有效重新着色。

考虑如下关于颜色的偏好顺序：先任意排列 $[k]\setminus(S\cup S')$，接着排列 $S'\setminus S$，最后排列来自 S的颜色。令 γ 为通过按照此偏好顺序，从 v_n到 v_1 贪心地为G着色而得到的 G 的 L-着色。由于 L 是 $\lceil\frac{k}{3}\rceil$-可行的，且 $|S|=\lceil\frac{k}{3}\rceil$，没有顶点在 γ中被着成 S 中的颜色。这意味着 γ_H（即 H上诱导的着色 γ）是H的 L_H-着色。因此，存在一个从 η_H 到 γ_H 的重新着色序列，长度至多为 $\frac{2k}{3}n$ 步。这给出了 G中的一个重新着色序列。随后，我们可以在至多 n 步内，将 $G-H$ 中的顶点重新着成它们在 γ 中的目标颜色。这表明，在 G中，存在一个从 α 到 γ 的重新着色序列，长度至多为 $n+\frac{2k}{3}n+n=\frac{2k+6}{3}n$。

现在注意，对于每种颜色 $c\in R=[k]\setminus(S\cup S')$ 和 G 中的每个顶点 v_i，以下条件至少有一个成立：

- $\gamma(v_i)\in R$,
- v_i 有一个着成 c 的邻点，或者
- $c\notin L(v_i)$

令 Γ 为 G 中由所有使用 γ 的 S' 中某种颜色着色的顶点所诱导的子图。注意， Γ 也是由所有使用 γ 的 ($S \cup S'$) 中某种颜色着色的顶点所诱导的子图，因为没有顶点使用 γ 中的颜色着色。令 L_Γ 为由以下规则定义的列表赋值：对所有 $v \in V$， $L_\Gamma(v) = L(v) \cap (S \cup S')$。根据前述观察， L_Γ 是 $\lceil \frac{k}{3} \rceil$-可行的，且颜色总数为 $|S \cup S'| \leq 2\lceil \frac{k}{3} \rceil$。因此，根据定理 19 (i)， $\mathcal{C}(\Gamma, L_\Gamma)$ 的直径至多为 $2\lceil \frac{k}{3} \rceil n$。令 β_Γ 为 Γ 的一个 L_Γ-着色，它避开 S' 的颜色（这样的着色存在，因为 $|S'| = \lceil \frac{k}{3} \rceil$ 且 L_Γ 是 $\lceil \frac{k}{3} \rceil$-可行的），并令 γ_Γ 为 Γ 上诱导的着色 γ。

存在一个长度至多为 $2\lceil \frac{k}{3} \rceil n$ 的重新着色序列，将 γ_Γ 变为 β_Γ。这可以扩展为 G 中的一个重新着色序列，将 γ 变为 β，其中 β 不使用 S' 的任何颜色。

从 α 到达 β 所需的总步数至多为 $\frac{2k+6}{3}n + 2\lceil \frac{k}{3} \rceil n$，而这又不超过 $\frac{4k+12}{3}n$。由此即可得到所需结论。 □

现在我们可以证明定理 10。

定理 10 的证明。设 $D = (V, A)$ 是一个有 n 个顶点且 $k \geq \frac{3}{2}(\delta^*_{\min}(D) + 1)$ 的有向图。令 $(v_1, \ldots, v_n)$ 为 D 的最小退化序，也就是说，这是一个排序，使得对于每个 $i \in [n]$， v_i 在 $\{v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ 中至多有 $\delta^*_{\min}(D)$ 个出邻点，或者至多有 $\delta^*_{\min}(D)$ 个入邻点。

我们定义 B 如下：对于每个 $i \in [n]$，如果 v_i 在 $\{v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ 中至多有 $\delta^*_{\min}(D)$ 个出邻点，则将 A 中从 v_i 到 $\{v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ 的所有弧添加到 B 中。否则，将 A 中从 $\{v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ 到 v_i 的所有弧添加到 B 中。注意，两个有向图 (V, B) 和 $(V, A \setminus B)$ 都是无环的。

令 H 为 (V, B)，令 G 为 H 的底层图。注意，由于 $(V, A \setminus B)$ 是无环的， G 的每个着色都是 D 的有向着色，但 D 的有向着色不一定是 G 的着色。

根据构造， G 的退化度至多为 $\delta^*_{\min}(D)$。利用定理 3，我们得到，对于某个与 k 无关的常数 C_0， $\mathcal{C}_k(G)$ 的直径至多为 $C_0 n^2$。

对所有 $i \in [n]$，令 $\delta^* = \delta^*_{\min}(D) \geq \delta^*(G)$、 $X_i = \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ 和 $H_i = G - X_i$。

令 α 为 D 的任意有向着色。令 L_i 为 H_i 的列表赋值，定义如下：

$$L_i(v_j) = [k] \setminus \{\alpha(v) \mid v \in N_G(v_j) \cap X_i\} \text{ for all } j \in [i].$$

由于 k（颜色总数）至少为 $3\,2(\delta^* + 1)$，因此对于每个 $j \in [i]$，都有：

$$\begin{aligned} |L_i(v_j)| &\geq k - |N_G(v_j) \cap X_i| \\ &\geq \frac{k}{3} + \frac{2}{3}\frac{3}{2}(\delta^* + 1) - |N_G(v_j) \cap X_i| \\ &\geq |N_G(v_j) \cap \{v_{j+1}, \ldots, v_i\}| + 1 + \frac{k}{3} \end{aligned}$$

因此，由于 $|L_i(v_j)|$ 是整数， L_i 是 H_i 的 $\lceil \frac{k}{3} \rceil$-可行列表赋值。

注 13。令 γ 为 D 的一个有向着色，并且对于某个 i， γ 在 $\{v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ 上与 α 一致，且 γ_{H_i} 是 H_i 的一个 L_i-着色。那么，任何从 γ_{H_i} 出发、在 H_i 上且对 L_i 有效的重新着色序列，都是 D 中有效的重新着色序列。假设情况并非如此，并且在某一步，我们得到 H_i 的一个 L_i-着色 ζ，但 ζ_D 包含一个单色有向环 C；当 v 属于 H_i 时， $\zeta_D(v) = \zeta(v)$，否则 $\zeta_D(v) = \gamma(v)$。令 v_j 为 C 中使 j 最小的顶点。该顶点 v_j 有一个颜色为 $\zeta_D(v_j)$ 的入邻点 v_{j_1} 和一个颜色为 $\zeta_D(v_j)$ 的出邻点 v_{j_2}，使得 $j_1, j_2 \geq j$。我们知道， $v_{j_1}v_j$ 或 $v_jv_{j_2}$ 属于 G。不失一般性，假设 $v_{j_1}v_j$ 属于 G。那么，要么 $j_1 \leq i$，此时 $v_{j_1}v_j$ 是 H_i 中的一条单色边；要么 $j_1 \geq i + 1$，但此时 $\zeta(v_{j_1}) = \alpha(v_{j_1})$ 不属于 $L_i(v_j)$。两种情况下都会得到矛盾。

命题 10.1：设 γ_i 是 D 的一种有向着色，它在 H_i 上诱导出一种 L_i 着色，且在 H_i 中至少避开 $\lceil \frac{k}{3} \rceil$ 种颜色。从 γ_i 出发，存在一个长度至多为 $\frac{8k+24}{3}n + \lceil \frac{k}{3} \rceil$ 的重新着色序列，可得到一种有向着色 $\gamma_{i+\lceil \frac{k}{3} \rceil}$，它在 $H_{i+\lceil \frac{k}{3} \rceil}$ 上诱导出一种 $L_{i+\lceil \frac{k}{3} \rceil}$ 着色，且在 $H_{i+\lceil \frac{k}{3} \rceil}$ 中至少避开 $\lceil \frac{k}{3} \rceil$ 种颜色。

命题的证明。设 S 是一个大小恰为 $\lceil \frac{k}{3} \rceil$、被 γ_i 在 H_i 上避开的颜色集合。对于每个属于 $\{v_{i+1}, \ldots, v_{i+\lceil \frac{k}{3} \rceil}\}$ 的顶点 v_j，我们选择一种颜色 c_j，使得以下各项均成立：

- c_j 属于 $L_j(v_j)$,
- c_j 不属于 $\{\alpha(u) \mid u \in N_G(v_j) \cap \{v_{j+1}, \ldots, v_n\}\}$,
- 对于每个 $\ell \in \{i+1, \ldots, j-1\}$, c_ℓ 都不同于 c_j。

注意，这是可能的，因为 $L_j(v_j)$ 是 $\lceil \frac{k}{3} \rceil$-可行的。现在令 S' 为 $\{c_{i+1}, \ldots, c_{i+\lceil \frac{k}{3} \rceil}\}$。注意到$|S'| = \lceil \frac{k}{3} \rceil$。由引理 20，在 H_i中，存在一个长度至多为 $\frac{4k+12}{3}n$的重新着色序列，对 L_i有效，它将 γ_i 变为某个避开 S' 的 γ_i'。根据注 13，此重新着色序列可扩展为 D 中的一个重新着色序列。在得到的有向着色中，由于 γ_i' 在 H_i上避开了 S'，我们可以对所有 $i+1 \le j \le i + \lceil \frac{k}{3} \rceil$依次用 c_j 重新着色 v_j。根据 c_j的选择，这不会产生任何单色有向圈。令 η_i为 D所得的~有向着色。现在我们按如下方式定义 H_i 的一个列表赋值 L_i：

$$\tilde{L}_i(v_j) = [k] \setminus \{\eta_i(v) \mid v \in N(v_j) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\})\}$$

沿用我们对 L_i 所用的相同论证，可得 $\tilde{L}_i$ 对 H_i 是$\lceil \frac{k}{3} \rceil$-可行的。注意， η_i 是 H_i 的一种 $\tilde{L}_i$-着色，且避开了 S'。令 S'' 为一个与 S' 不相交的 $\lceil \frac{k}{3} \rceil$ 色集合。由引理 20，在 H_i 中存在一个（对 $\tilde{L}_i$ 有效的）重新着色序列，其长度至多为 $\frac{4k+12}{3}n$，可将 η_i 变为某个避开 S'' 的 η_i'。该重新着色序列可直接扩展为 D 中的一个重新着色序列。由于 S' 与 S'' 不相交，所得有向着色是 $H_{i+\lceil \frac{k}{3} \rceil}$ 的一种 $L_{i+\lceil \frac{k}{3} \rceil}$-着色，且至少避开了 $H_{i+\lceil \frac{k}{3} \rceil}$中的 $\lceil \frac{k}{3} \rceil$ 种颜色。因此，我们得到一个重新着色序列，可在至多 $\frac{8k+24}{3}n + \lceil \frac{k}{3} \rceil$ 步内将 γ_i 变为所需的 $\gamma_{i+\lceil \frac{k}{3} \rceil}$。这证明了命题 10.1。◊

注意到，$\gamma_{\lceil \frac{k}{3} \rceil}$可以在少于 n步内从 α到达：对于所有$j \in [\lceil \frac{k}{3} \rceil]$，选取一个颜色 c_j，使得以下各项均成立：

- c_j 属于 $L_j(v_j)$,
- c_j 不属于 $\{\alpha(u) \mid u \in N_G(v_j) \cap \{v_{j+1}, \ldots, v_n\}\}$,

对于每个 $\ell \in [j-1]$, c_ℓ 都不同于 c_j。

现在，我们可以依次将 $v_1, \ldots, v_{\lceil \frac{k}{3} \rceil}$ 重新着色为它们在 $\{c_1, \ldots, c_{\lceil \frac{k}{3} \rceil}\}$中对应的颜色。然后，迭代应用命题 10.1，至多 $\left\lfloor \frac{n}{\lceil \frac{k}{3} \rceil} \right\rfloor \le \frac{3n}{k}$次，即可得到一条长度至多为$n + \frac{3n}{k}\left(\frac{8k+24}{3}n + \lceil \frac{k}{3} \rceil\right)$的重新着色序列，从 α到 D的一个有向着色，它同时也是 G的一个着色。注意，存在一个常数 C_1，使得 $n + \frac{3n}{k}\left(\frac{8k+24}{3}n + \lceil \frac{k}{3} \rceil\right) \le C_1 n^2$。

设 α 和 β 是 k的两个有向着色。如上所证，从 α （分别为 β）到 D 的一个有向着色 α'（分别为 β'），其长度至多为 $C_1 n^2$ 的重新着色序列，同时也是 G 的一个着色。由于 $\mathcal{C}_k(G)$ 的直径至多为 $C_0 n^2$，存在一条从 α' 到 β' 的 G 重新着色序列，其长度至多为 $C_0 n^2$；这也是 D 的重新着色序列（因为 G 的每个着色都是 D 的有向着色）。这三条序列的并构成一条从 α 到 β 的重新着色序列，其长度至多为 $(2C_1 + C_0)n^2$。 □

4 非 2-混合定向图的密度

4.1 非 k-混合无向图的密度

设 $k \in \mathbb{N}$。正如引言中所述，每个非 k-混合图的最大平均度至少为$k-1$。这个界是紧的，因为含有 k 个顶点的完全图是$(k-1)$-正则的，且不是 k-混合的。此外， [2] 中证明了，即使将范围限制在围长任意大的图上，这个界仍然是紧的。最初的证明使用了概率方法。本节中，我们基于 Lazebnik 和 Ustimenko 在 [12] 中给出的正则二部图显式构造，为这一结果提供一个新的构造性证明。

定理 22（Bonamy、Bousquet 和 Perarnau， [2]）。对于任意 k、$\ell \in \mathbb{N}^*$，存在一个$(k-1)$-正则的 k-可冻结图$G_{k,\ell}$其围长至少为 ℓ。

我们首先给出以下注释，后续证明定理 22 时将用到：

注 23. 设 $k \in \mathbb{N}^*$, G 是一个 $(k-1)$-正则的 k-可冻结图，且 α 是 G 的一个冻结 k-着色，那么 α 的所有颜色类大小相同。这是因为，对于 G 中的每个顶点 v， $N[v]$ 都会使用 α 中的所有颜色。因此，给定两种颜色 i、$j \in [k]$， G 中着 i 的顶点与着 j 的顶点之间必定存在完美匹配。特别地，这意味着着 i 的顶点数与着 j 的顶点数相同。

定理 22 的证明。固定 $\ell \in \mathbb{N}$。我们对 k 使用归纳法证明该命题；当 $k=1$ 时结论显然成立。设 $k>1$，并假设存在一个围长至少为 ℓ 的 $(k-2)$-正则 $(k-1)$-可冻结图 $G_{k-1,\ell}$。设 α 是 $G_{k-1,\ell}$ 的一个冻结 k-着色。

我们用 n 表示 $G_{k-1,\ell}$ 的顶点数。考虑一个围长至少为 ℓ 的 n-正则二分图 H（Lazebnik 和 Ustimenko [12] 的构造表明这样的图存在）。由于 H 是二分图，我们可以用恰好 n 种颜色为 H 的边着色，使得任意两条相邻边颜色不同。根据注 23， α 的所有颜色类大小相同。因此，存在 $V(G_{k-1,\ell})$ 的一个排序 $(v_1, \dots, v_n)$，使得对于每个 $i \in [n-k+1]$，顶点 $v_i, \dots, v_{i+k-1}$ 在 α 中颜色各不相同。

我们用 (A, B) 表示 H 的二部划分。令 $G_{k,\ell}$ 为由 H 按如下方式得到的图 .

- 对于每个 $a \in A$，将 a 替换为 $G_{k-1,\ell}$ 的一个副本 G^a，并将 v_i^a（对应于 G^a 中的 v_i 的顶点）连接到与 a 相 incident、颜色为 i 的边上。
- 对于每个 $b \in B$，将 b 替换为一个大小为 $\frac{n}{k}$ 的独立集 $I^b = \{x_1^b, \dots, x_{\frac{n}{k}}^b\}$（根据注 23， $\frac{n}{k}$ 是一个整数）。将 x_i^b 连接到与 b 关联、颜色为 $\{k(i-1)+1$、.....、$ki\}$ 的那些边上。

注意，$G_{k,\ell}$ 是 k正则的： G^a 中的每个顶点都与其在 G^a 中的 $k-1$ 个邻点相邻，并且恰好与某个 I^b中的一个邻点相邻；根据构造， I^b 中的每个顶点恰有 k 个邻点。此外，$G_{k,\ell}$ 的围长至少为 ℓ。确实，反设它包含一个长度至多为 $\ell-1$的圈 C，这就导致矛盾。那么 C 不可能包含 H的一条边，否则，收缩 G^a 的每个副本，就会将 C 变成 H中长度至多为 $\ell-1$ 的一个圈。因此， C 必包含在某个 G^a中，而它是 $G_{k-1,\ell}$的一个副本。这是不可能的，因为 $G_{k-1,\ell}$ 的围长至少为 ℓ。

令 β 为 G_k 中的 0-着色，ℓ，使得 β 在每个 G^a 上的限制都对应于 α，并且对所有 $b \in B$ 和 $i \in [n/k]$，都有 $\beta(x_i^b) = k+1$。令 v 为 G 的一个顶点。若 v 属于某个 G^a，那么由于 α 在 G_{k-1} 中是冻结的，ℓ，$N_{G^a}[v]$ 包含 $[k]$ 的所有颜色。此外，根据构造， v 在某个以 $k+1$ 着色的 I^b 中有一个邻点。若 v 属于某个 I^b，那么 v 着色为 $k+1$，且根据构造，它在每个颜色类中恰有一个邻点。两种情形下，均有 $N[v] = [k+1]$。因此，没有顶点可以重新着色，所以 β 是 G_k 中的一个冻结着色，ℓ。 □

4.2 非 2-混合与 2-可冻结定向图的密度

设 $k \in \mathbb{N}$ 和 D 是一个非 k-混合的有向图。正如引言中所述，定理 6 蕴含 Mad(D) $\geq 2k-2$。这个界是紧的，因为具有 k 个顶点的双向完全有向图是 $(2k-2)$-正则的，且不是 k-混合的。然而，与无向情形不同，该结果无法推广到有向围长更大的有向图，即使对于 $k=2$ 也不行。尽管上述不等式表明，每个非 2-混合有向图的最大平均度至少为 2，但我们猜想，每个非 2-混合定向图的最大平均度至少为 4。

猜想24. 任意非2-混合定向图的最大平均度至少为4。

注 25. 若该猜想成立，则结论将是紧的，因为存在最大平均度为 4 的 2-冻结定向图。例如，考虑由两个不交的有向路径（$u_1, \dots, u_n$）和（$v_1, \dots, v_n$）的不交并添加弧集合 $\{u_i v_i \mid i \in [n]\} \cup \{v_{i+1} u_i \mid i \in$得到的定向图 F_n

$[n-1]\} \cup \{v_1u_2, u_nv_1, v_{n-1}u_n\}$（示意图见图5）。令 α 为 $\vec{F}_n$ 的 2-有向着色，其中所有 u_i 均着色为 1，所有 v_i 均着色为 2。容易验证，Mad($\vec{F}_n$) $= 4$ 且 α 是 F_n的冻结的 2-有向着色。

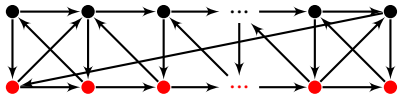

图5：2-可冻结有向图 F_n 及其冻结的2-有向着色。

现在我们证明两个支持猜想 24 的结果。首先，我们证明在更强的假设—— G 是2-可冻结的——成立时，猜想 24 成立。

定理 14. 设 $\vec{G} = (V, A)$ 为一个定向图。若 $\vec{G}$ 是2-可冻结的，则 $|A| \geq 2|V|$。

证明. 设 $\vec{G} = (V, A)$ 为一个2-可冻结有向图，且 α 是 $\vec{G}$ 的一个冻结的2-有向着色。对于顶点 $v \in V$，我们称顶点 $u \in V$ 对 v（在有向着色 α中）起阻挡作用，若满足以下任一条件：

- u 是 v, $\alpha(u) \neq \alpha(v)$ 的出邻点，并且存在一条有向路径 $(u, ..., x, v)$，使得 $(u, ..., x)$ 为单色；或者
- u 是 v的入邻点，$\alpha(u) \neq \alpha(v)$，并且存在一条有向路径$(x, ..., u, v)$，使得$(x, ..., u)$是单色的。

我们将使用放电论证。我们将每个顶点 v 的初始电荷设为 $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$。注意到 $d(v) \geq 2$，否则 v 可以在 α中重新着色。接下来我们使用如下放电规则。

（R）每个顶点从其每个阻挡邻点处获得 1。

令 $f(v)$ 为每个顶点 v的最终电荷。我们来证明，对于每个 $v \in V$，$f(v) \geq 4$。

令 $v \in V$。不失一般性，假设 $\alpha(v) = 1$。由于 α 被冻结，v 至少有一个出邻点 v^+ 和一个被着色为 2 的入邻点 v^- 对其构成阻挡，因此根据（R）向 v 发送 1。现在考察 v 向其他顶点发送的电荷。令 w 为 v 发送电荷的一个顶点。顶点v 阻挡 w，因此 $\alpha(w) = 2$。此外，如果 w 是 v的出邻点（分别为入邻点），那么 v 有一个被着色为 1 的入邻点（分别为出邻点）。我们处于以下情形之一。

- 如果 v 不发送任何电荷，那么 $f(v) \geq d(v) + 2 \geq 4$。
- 如果 v 只向部分出邻点发送电荷，那么它不会向入邻点发送电荷。由于 v 至少有两个入邻点（一个阻挡 v，另一个着色为 1），因此 $f(v) \geq d(v) + 2 - (d(v) - 2) \geq 4$。
- 如果 v 只向部分入邻点发送电荷，则与上面情形对称，$f(v) \geq 4$。
- 如果 v 只向出邻点和入邻点发送电荷，那么它既有一个着色为 1 且未向其发送电荷的入邻点，也有一个着色为 1 且未向其发送电荷的出邻点。因此 $f(v) \geq d(v) + 2 - (d(v) - 2) \geq 4$。

在所有情形中，我们都有 $f(v) \geq 4$。因此，$2|A| = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V} f(v) \geq 4|V|$。 □

我们可以推出定理 14 给出的以下关于 k-可冻结定向图密度的下界 .

推论 15。设 $\vec{G} = (V, A)$ 是一个定向图。若 $\vec{G}$ 是 k 可冻结的，则 $|A| \geq k|V| + k(k-2)$。

证明。反设存在一个 k 可冻结的定向图 $\vec{G}=(V,A)$，使得 $|A|<k|V|+k(k-2)$。不失一般性，我们可以取在所有此类图中弧数最少的 $\vec{G}$。设 α 是 $\vec{G}$ 的一个冻结 k 有向着色。对于每个 i、$j\in[k]$，令 $\vec{G}_i$ 为 $\vec{G}$ 的由在 α 中着色为 i 的 $\vec{}$ $\vec{}$ 个顶点所诱导的子有向图，并令 $G_{i,j}$ 为 G 的由在 α 中着色为 i 或 j 的顶点所诱导的子有向图。我们设 $n_i=|V(\vec{G}_i)|$、$m_i=|A(\vec{G}_i)|$ 以及 $m_{i,j}=|A(\vec{G}_{i,j})|$。

我们首先证明，对于任意 $i\in[k],m_i\le n_i-1$。反设不然。那么，由于 $\vec{G}_i$ 是无环的，它存在一个无环序（$x_1,\ldots,x_{n_i}$）。现在考虑具有相同有向着色 α 的 $\vec{G}'=(\vec{G}\setminus A(\vec{G}_i))\cup\{x_jx_{j+1}\mid j\in[n_i-1]\}$。显然，$|A(\vec{G}')|<|A(\vec{G})|$。设 v 是 $\vec{G}'$ 的一个顶点。若 $v\in V(\vec{G}_i)$，则 x 在 $(\vec{G}',\alpha)$ 中仍然受阻，因为它在 $(\vec{G},\alpha)$ 中受阻。现在，假设 $v\notin V(\vec{G}_i)$。对于任何不同于 i 和 $\alpha(v)$ 的颜色 j，都不可能用 j 给 v 重新着色，因为在 G 中这本来就不可能。现在，在 G 中，不可能将 v 重新着色为 i，因此 $\vec{}$ 在 G_i 中存在一条有向路径，其起始顶点 x_k 是 v 的出邻点，终止顶点 x_ℓ 是 v 的入邻点。由于（$x_1,\ldots,x_{n_i}$）是 $\vec{G}_i$ 的一个无环序，我们有 $k\le\ell$。因此，（$x_k,\ldots,x_\ell$）是 $\vec{G}'$ 中的一条有向路径。于是，v 在 $(\vec{G}',\alpha)$ 中无法重新着色为 i，也就是说，它在 $(\vec{G}',\alpha)$ 中同样受阻。由于 $(\vec{G}',\alpha)$ 中的所有顶点都受阻，α 是 $\vec{G}'$ 的一个冻结 k 有向着色，这与 $\vec{G}$ 的极小性矛盾。

现在我们通过对$S=\sum_{1\le i<j\le k}m_{i,\,j}$进行界定来证明该结果。首先，由于 α 在$\vec{G}_{i,\,j}$上诱导出一种 2-冻结的双色染色，根据定理 14，对任意 $1\le i<j\le k$，都有$m_{i,\,j}\ge 2(n_i+n_j)$。因此，

$$S=\sum_{1\le i<j\le k}m(\vec{G}_{i,j})\ge 2\sum_{1\le i<j\le k}(n_i+n_j)=2n(k-1)\,.$$

接下来，注意到 $S=|A(\vec{G})|+\sum_{i=1}^{k}(k-2)m_i$，因为 D 的每条单色弧在 S中恰好计数了（$k-1$）次，而其他每条弧仅计数一次。因此

$$\begin{aligned}S&=|A(\vec{G})|+(k-2)\sum_{i=1}^{k}m_i\\&<kn+k(k-2)+(k-2)\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\\&=2n(k-1)\,.\end{aligned}$$

Put将两个不等式放在一起，我们得到 $2n(k-1)\le S<2n(k-1)$，这与结论矛盾 n. □

$\vec{}$注 26。推论 15 中的界是紧的：我们可以将注 25 中定义的 F_n 的构造扩展到k-可冻结定向图 $\vec{F}_n^k$，使其恰有 $k|V(\vec{F}_n^k)|+k(k-2)$ 条弧。定向图 $\vec{F}_n^k$按如下方式构造。我们从 k 条两两不相交、长度为 n的有向路径 P_1、.....、P_k 开始。对每个 $j\in[k]$，令 $P_s=(v_1^j,\ldots..,v_n^j)$。对每一对 $1\le j<\ell\le k$，我们添加弧集合 $\{v_i^jv_i^\ell\mid i\in[n]\}\cup\{v_{i+1}^\ell v_i^j\mid i\in[n-1]\}\cup\{v_1^\ell v_2^j,v_n^jv_1^\ell,v_{n-1}^\ell v_n^j\}$，使得由 $V(P_j)\cup V(P_\ell)$ 诱导的子有向图同构于 $\vec{F}_n$。根据构造，$|A(\vec{F}_n^k)|=k|V(\vec{F}_n^k)|+k(k-2)$。

令 α_k 为 $\vec{F}_n^k$ 的有向着色，其中对所有 $j\in[k]$，都将 P_j 的顶点着为颜色 j。由于 $V(P_j)\cup V(P_\ell)$ $\vec{}$ 同构于 F_n，因此 P_j 的每个顶点都不能重新着为 ℓ（反之亦然）。所以，α_k 是 $\vec{F}_n^k$ 的一个冻结 k 有向着色。

定理 16. 设 $\vec{G}$ 为一个定向图。若 $\vec{G}$ 不是 2-混合，则 $\mathrm{Mad}(\vec{G})\ge\frac{7}{2}$。

证明。设 $\vec{G}=(V,A)$ 是一个非 2-混合的定向图，并令 $\vec{G}$ 在满足此性质的图中极小（每个真诱导子有向图 $\vec{H}$ of $\vec{G}$ 都是 2-混合的）。为导出矛盾，假设$|A|<\frac{7}{4}|V|$.$\vec{}$ 设 α 和 β 是 G 的两个 2-有向着色，使得不存在从 α 到 β 的重新着色序列。我们将首先证明 G 的一些结构性质，然后利用放电策略证明$|A|\ge\frac{7}{4}|V|$。

断言 16.1： $\vec{G}$既没有源点，也没有汇点。

$\vec{}$断言的证明。假设 G 包含一个顶点 s，它是源点或汇点。根据 G 的极小性，我们知道 $\vec{G'} = \vec{G} - s$ 是 2-混合的。特别地，存在一个重新着色序列 $\gamma'_0, \ldots, \gamma'_r$，其中 γ'_0 和 γ'_r 分别是 α 和 β 在 $\vec{G'}$ 上的限制。

对于所有 $i \in [r]$，令 γ_i 由 $\gamma_i(s) = \alpha(s)$ 和 $\gamma_i(v) = \gamma'_i(v)$ 对所有 $v \neq s$ 定义。由于 s 要么是源点，要么是汇点，因此 γ_i 是 $\vec{G}$ 的 2-有向着色。若 $\beta(s) = \alpha(s)$，则 $\beta = \gamma_r$，因此 γ_0、...、γ_r 是从 α 到 β 的重新着色序列，产生矛盾。因此 $\beta(s) \neq \alpha(s)$。然后令 $\gamma_{r+1} = \beta$，我们有 γ_0、...、γ_r、γ_{r+1} 是从 α 到 β 的重新着色序列，产生矛盾。◊

断言 16.2： $\delta(\vec{G}) = 3$。

断言的证明。首先注意，如果 $\delta(\vec{G}) \geq 4$，那么 $|A| \geq 2|V|$，这与我们关于 $|A| < \frac{7}{4}|V|$ 的假设相矛盾。因此 $\delta(\vec{G}) \leq 3$。

现在假设 $\vec{G}$ 包含一个顶点 u，使得 $d(u) \leq 2$。由断言 16.1可知，$d^+(u) = d^-(u) = 1$。令 $\vec{G'}$ 为 $\vec{G} - u$。由 $\vec{G}$的极小性可知，$\vec{G'}$ 是 2-混合的。令 $\gamma'_0, \ldots, \gamma'_r$ 为 $\vec{G'}$ 中的一个重新着色序列，其中 γ'_0 和 γ'_r 分别是 α 和 β 在 $\vec{G'}$上的限制。为导出矛盾，我们展示一个从 α 到 β的重新着色序列。为此，对于任意 $i \in \{0, 1, \ldots, r\}$，我们证明存在 $\vec{G}$ 的一个 2-有向着色 γ_i，使得 γ'_i 是 γ_i 在 $\vec{G'}$上的限制，并且存在一个从α 到 γ_i的重新着色序列。

对于 $i = 0$，取 $\gamma_0 = \alpha$时结论显然成立。现在假设 γ_{i-1} 存在，并且存在一个重新着色序列，可从 α 到达 γ_{i-1}。令 x_i 为满足 $\gamma'_{i-1}(x_i) \neq \gamma'_i(x_i)$ 的顶点。考虑在 γ_{i-1}中将 x_i 重新着为相反颜色。若此举没有产生单色有向圈，则令 γ_i 为所得的有向着色。否则，此举会产生一个包含 u 及其两个邻点 u^- 和 u^+的单色有向圈。由于在 γ'_{i-1}中，x_i 的颜色与 $\{u^-, u^+\}$中至少一个的颜色不同，我们可以先将 u 重新着色，再将 x_i 重新着色，从而得到所需的 γ_i。此过程结束时，我们得到一个从 α 到一个 2-有向着色 γ_r 的重新着色序列，该着色在 $V(\vec{G'})$上与 β 一致。如有必要，我们随后可以将 u 重新着色，从而得到一个从 α 到 β的重新着色序列，由此导出矛盾，并得到 $\delta(\vec{G}) = 3$。◊

对于每个正整数 i，在$\vec{G}$中，i-顶点（分别为 $\geq i$-顶点）是度为 i （分别为至少 i）的顶点，而 $\vec{G}$ 中的 i-顶点集记为 V_i。令 u 为一个3度顶点。由断言 16.1，要么 $d^-(u) = 1$，要么$d^+(u) = 1$。于是，若 $d^-(u) = 1$，则 u 的孤立邻点是它唯一的入邻点；若 $d^+(u) = 1$，则是它唯一的出邻点。注意，在任意有向着色中，用不同于其孤立邻点所用颜色的颜色对 u 重新着色，会得到另一种有向着色，因为任何包含 u 的有向环都必定包含它的孤立邻点。在本证明余下部分中，我们将多次使用这一论证。

断言 16.3：设 u 为一个3度顶点，v 为其孤立邻点。存在两个2-有向着色 ϕ 和 ψ，它们在 $V(\vec{G}) \setminus \{u, v\}$ 上相同，并且不存在从 ϕ 到 ψ的重新着色序列。

断言的证明。反设，对于任意一对在 $V(\vec{G}) \setminus \{u, v\}$ 上一致的 2-有向着色 ϕ、ψ，都存在一条从 ϕ 到 ψ 的重新着色序列。设 $\vec{G'} = \vec{G} - u$，并令 α'、β' 分别为初始有向着色 α、β 在 $\vec{G'}$ 上的限制。由 $\vec{G}$ 的极小性，$\vec{G'}$ 中存在一条重新着色序列 $\alpha' = \gamma'_0$、.....、$\gamma'_r = \beta'$。为导出矛盾，我们将把后者扩展为一条从 α 到 β 的重新着色序列。与断言 16.2 中一样，对于从 $i = 0$ 到 r 的情形，我们归纳地证明存在 $\vec{G}$ 的一个 2- 有向着色 γ_i，使得 γ_i 在 $\vec{G'}$ 上的限制为 γ'_i，并且存在一条从 α 到 γ_i 的重新着色序列。

对于 $i = 0$，结论在 $\gamma_0 = \alpha$ 时显然成立。现在假设 γ_{i-1} 存在，并令 $x_i \in V(\vec{G'})$ 为第 i 步重新着色的顶点，其中 $\gamma'_{i-1}(x_i) \neq \gamma'_i(x_i)$。不失一般性，我们假设 $\gamma'_i(x_i) = 1$。我们尝试在 γ_{i-1} 中将 x_i 重新着色为颜色 1。若此举没有产生单色有向圈，则得到所需的 γ_i。若产生了单色有向圈，由于 γ'_i 是 $\vec{G'}$ 的有向着色，任何因此产生的单色有向圈都必须同时包含 u 及其孤立邻点 v。这意味着 $\gamma_{i-1}(u) = 1$。根据 γ_{i-1} 中 v 的颜色，我们分两种情形讨论。

- 若 $\gamma_{i-1}(v) = 1$，则 $\gamma_{i-1}(v) \neq \gamma_{i-1}(x_i) = 2$，这意味着 x_i 和 v 不同。在这种情形下，我们可以先将 u 重新着色，再将 x_i 重新着色，从而由 γ_{i-1}得到所需的 γ_i；再结合通过归纳法得到的从 α 到 γ_{i-1} 的序列，即可得到从 α 到 γ_i的重新着色序列。
- 否则，$\gamma_{i-1}(v) = 2$ 并且由于重新着色 x_i 会产生一个同时包含 $\vec{u}$和 v的单色有向圈，因此必定是因为 $x_i = v$。现在，令 γ_i 为由 γ_{i-1} 交换 u 和 v 的颜色后得到的 G 的一个 2-有向着色（即 $\gamma_i(u) = 2$ 和 $\gamma_i(v) = 1$）。注意，γ_i 是一个 2-有向着色，因为 γ'_i是，v是 u的孤立邻点，且 $\gamma_i(u) \neq \gamma_i(v)$。由于 γ_i和 γ_{i-1}在 $V(\vec{G})\setminus\{u,v\}$上一致，我们的假设推出存在一个从 γ_{i-1} 到 γ_i的重新着色序列。接着，由归纳假设可得一个从α 到 γ_{i-1}的序列；它与上面的序列结合后，得到一个从 α 到 γ_i的序列。

因此，根据归纳法，我们得到一个从 α到一个在 $V(\vec{G'})$上与 β一致的 2-有向着色 γ_r的重新着色序列。接着，要么 $\gamma_r = \beta$，要么我们可以在 γ_r中重新着色 u，从而得到 β；无论哪种情况，都会产生一个从 α 到 β的重新着色序列，这就构成矛盾。◊

断言 16.4：设 u 是一个 3度顶点，v 是它唯一的邻点。那么 $d^+(v) \geq 2$，且 $d^-(v) \geq 2$。

断言的证明。根据方向对偶，不失一般性，我们可以假设 $d^+(u) = 1$，使得 uv 是 $\vec{G}$ 的一条弧 .

设 ϕ 和 ψ 是由断言 16.3 给出的 $\vec{G}$ 的两个 2-有向着色。也就是说，这两个有向着色在 $V(\vec{G}) \setminus \{u,v\}$ 上一致，并且不存在从 ϕ 到 ψ 的重新着色序列。不失一般性，我们假设 $\phi(u)$ =1。注意，ϕ 和 ψ 在顶点 u、v 上都必须不同，否则 ϕ、ψ 就会给出从ϕ 到 ψ 的平凡序列。此外，不能在 ϕ 中重新着色 u，否则我们可以依次重新着色 u 和 v，从而得到 ϕ 和 ψ 之间的重新着色序列。综上可知，$\psi(u) = \phi(v) = 2$，且 $\phi(u) = \psi(v) = 1$。最后，从 v 到 u 必须存在两条路径：在 ϕ 和 ψ 中，其中一条路径的内部顶点都着色为 1，另一条路径的内部顶点都着色为 2（见图 6）。否则，v或 u 分别可以在 ϕ 或 ψ 中重新着色，从而得到一个 2-有向着色，使 u 和 v 颜色相同，进而如上所述导出矛盾。这表明 $d^+(v) \geq 2$。

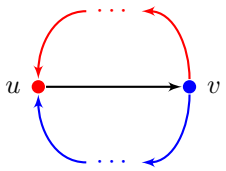

图 6：有向着色 ϕ中的一个3度顶点 u及其孤立邻点v。我们无法通过重新着色序列，从该着色到达交换 u 和 v 颜色后的有向着色ψ。着色为 1 的顶点以红色显示，着色为 2 的顶点以蓝色显示。

现在，为了导出矛盾，假设 $d^-(v) = 1$，并回顾 α、β 是证明 G 为非混合的两个 2-有向着色。除非在 α 或 β 中 u 或 v 的两个顶点着以相同颜色，否则可通过重新着色；因此不妨设 $\alpha(u) \neq \alpha(v)$，且 $\beta(u) \neq \beta(v)$。不失一般性，假设 $\beta(u) = 1$（这意味着 $\beta(v) = 2$）。我们首先证明，可以进一步假设 $\alpha(u) = 1$（因此 $\alpha(v) = 2$）。为此，若 $\alpha(u) = 2$，我们将从 α 构造一个重新着色序列，得到另一个 2- 有向着色 $\tilde{\alpha}$，使得 $\tilde{\alpha}(u) = 1$。设 t_1和 t_2 为 u的两个入邻点。若在 α中 t_1 和 t_2 着以相同颜色，则当 $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = 2$时，我们可以先给 u重新着色，再给 v 重新着色；或者当 $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = 1$时，先给 v 重新着色，再给 u 重新着色，从而得到所需的 $\tilde{\alpha}$。因此可假设 $\alpha(t_1) = 1$ 且 $\alpha(t_2) = 2$。令 $\vec{G'} = \vec{G} - \{u,v\}$ 和 α' 为将 α 限制到 $\vec{G'}$ 所得到的结果。给定 $\vec{G}$ 的一个 2-有向着色 ζ，定义其镜像 $\bar{\zeta}$ 为 $\vec{G}$ 的 2-有向着色，使得对于所有 $x \in V(\vec{G})$，都有 $\zeta(x) \neq \bar{\zeta}(x)$。根据 $\vec{G}$ 的极小性，存在一个重新着色序列，将 α' 变为其在 $\vec{G'}$ 中的镜像 $\bar{\alpha'}$。由于所有顶点的颜色都发生了交换，因此序列中某一时刻必定存在一个 2-有向着色 γ'，使得 $\gamma'(t_1) = \gamma'(t_2)$（例如，在 t_1 或 t_2 第一次被重新着色时）。我们将从 α' 到 γ' 的序列扩展为一个重新着色

$\vec{}$ 在 G 中从 α 到 γ 的序列，其中 u 和 v 在两个有向着色中始终分别着以 2 和 1。这是可能的，因为 v （分别地， u）是 u （分别地， v）的孤立邻点。现在，由于 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$，我们可以在 γ 中按照上述方式交换 u 和 v 的颜色，从而得到所需的 $\tilde{\alpha}$。

由于 α 可以通过一个重新着色序列从 $\tilde{\alpha}$ 得到，我们可以将 α 重新定义为 $\tilde{\alpha}$。现在，$\alpha(u) = \beta(u) = 1$，且 $\alpha(v) = \beta(v) = 2$，我们断言存在一个从 α 到 β的重新着色序列。事实上，设 α' 和 β' 分别为 α 和 β 在 $\vec{G}'$上的限制。根据 $\vec{G}$的极小性，存在一个从 α' 到 β'的重新着色序列。固定 u 和 v 的颜色分别为 1 和 2，即可将该序列扩展到 $\vec{G}$。这就导出了矛盾，并得到 $d^-(v) \geq 2$。$\Diamond$

断言 16.5：设 u 是一个3度顶点，使得 $|N(u) \cap V_3| = 2$，且 v 是它的孤立邻点，则：

(i) $d(v) \geq 5$，并且

(ii) 只有当 v 与两个（≥ 4）-顶点相邻时，才有 $d(v) = 5$。

断言的证明。根据方向对偶，不妨设 $d^+(u) = 1$。设 t_1 和 t_2 是 u的入邻点。由断言 16.4，得 $d(v) \geq 4$，因此 $N(u) \cap V_3 = \{t_1, t_2\}$。设 ϕ 和 ψ 是断言 16.3 给出的两个 2-有向着色。

由于 t_1 和 t_2 是 3 度顶点，由断言 16.4 可得 $d^-(t_1) = d^-(t_2) = 1$，因为 u 不可能是它们的孤立邻点。由断言 16.3，在 ϕ中， u 和 v 都无法重新着色。因此，对每个 $j \in [2]$，都存在一条有向 (v, u)-路径 P_j，其内部顶点均着色为 j。特别地，由于 $\{t_1, t_2\}$ 中的一个属于 P_1，另一个属于 P_2，我们有 $\phi(t_1) \neq \phi(t_2)$。不失一般性，不妨设 u和 t_1 都着色为 1，且 v 和 t_2 都着色为 2。

（i）。我们首先证明 t_1 在 ϕ中受阻。为此，考虑依次重新着色t_1、 v、 u，然后再次重新着色 t_1 的序列。若该序列不是从 ϕ 到 ψ的重新着色序列（这将与我们的假设矛盾），那么必定有某一步产生了单色有向圈。假设 t_1 可重新着色，也就是说，序列的第一步不会产生单色有向圈。此时，由于 t_1和 t_2 都着色为 2， v 也可以重新着色。事实上，若将 v 设为颜色 1 后产生任何单色有向圈，那么该圈原本就已是 ψ中的单色有向圈。接着， u 与其孤立邻点 v着色相同，因此可以将 u 的颜色设为 2，再重新着色 t_1，从而得到 ψ。因此， t_1 在 ϕ中受阻。于是必有 $P_1 =$（v、 t_1、 u），否则 t_1 唯一的入邻点将着色为 1，且存在一条有向（t_1、 v）路径 P_3，其内部顶点着色为 2。特别地， t_1中不同于 u 的出邻点着色为 2。

现在考虑 t_2。 P_2 的存在确保了 t_2 唯一的入邻点被着色为 2，因此 t_2 在 ϕ中未受阻，可以着色为 2。于是我们将 t_2 重新着色为 1，接着由于其入邻域被着色为 1，便可将 u 重新着色为 2。在所得的有向着色 ξ中，若 v 可重新着色，那么我们就可以依次将 v 重新着色为 1，再将 t_2 重新着色为 2。这就得到了一条连接 ϕ 与ψ的重新着色序列，产生矛盾。因此，在 ξ中重新着色 v必定会产生一个单色有向圈。由于 ξ在 V（G）$\setminus \{v, t_2\}$上与 ψ 一致，这意味着 $P_2 =$（v， t_2， u），且在 $\vec{G} - u$ 中存在一条有向 (t_2, v)-路径 P_4，其内部顶点被着色为 1（在 ψ和 ψ中均如此）。

存在　存在 P_1、 P_2、 P_3和 P_4 确保 $d(v) \geq 5$（见图 7），从而完成了（的证明， i).

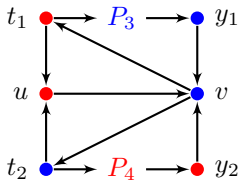

图 7：有向着色 ϕ 中的一个 3度顶点 u 及其孤立邻点 v。我们无法通过重新着色序列，从该有向着色到达交换 u 和 v 颜色后的有向着色 ψ。着色为 1 的顶点以红色表示，着色为 2 的顶点以蓝色表示。顶点 t_1 必定受阻，因此存在单色路径 P_3 和弧 vt_1。重新着色 t_2 后，顶点 v 必定受阻，因此有 P_4 和弧 vt_2。

(ii) 假设 $d(v) = 5$。令 y_1（分别为 y_2）表示 v 在 P_3（分别为 P_4）中的入邻点。另回顾一下，不失一般性，我们可以取 $\phi(u) = 1$ 且 $\phi(v) = 2$。我们将证明 y_1 和 y_2 在 G中的度均至少为$\vec{4}$。

- 反设 $d(y_1) = 3$。如果 y_1 在 P_3 上的入邻点着色为 2，那么我们可以将 y_1 重新着色为 1，而不产生着色为 1 的单色有向环。否则，该入邻点必定是 t_1；由于其孤立邻点 v 着色为 2，我们同样可以重新着色 y_1，而不产生单色有向环。将 y_1重新着色后，v 的整个入邻域现在都着色为 1。由于 v 是 t_1 的孤立邻点，我们可以将 t_1 设为颜色 2，而不产生任何单色有向环。接着，我们可以依次将 v 重新着色为 1，因为它的出邻点都着色为 2；然后将 u重新着色为 2，因为它的孤立出邻点 v 现在着色为 1。现在，如果重新着色 y_1 产生了单色有向环 C，该环既不包含 u，也不包含 t_1，因为它们都着色为 2，而 v着色为 1。于是，C必定已是 ϕ中的一个单色有向环，这就产生了矛盾。因此，我们可以重新着色 y_1，最后将 t_1 重新着色，从而得到一个从 ϕ 到 ψ的重新着色序列，矛盾。

- 反设 $d(y_2) = 3$，以导出矛盾。我们先将 t_2 重新着色为颜色 1，再将 u 重新着色为颜色 2。现在可以将 y_2 重新着色为颜色 2，因为 $d(y_2) = 3$，P_4 中 y_2 的入邻点着为颜色 1，且 v 的出邻域着为颜色 1。接着，我们可以将 v 重新着色为颜色 1，因为它的入邻域着为颜色 2。然后，我们可以将 t_2 重新着色为颜色 2，因为它的入邻点 v 着为颜色 1；最后，我们可以重新着色 y_2，从而得到一个从 ϕ 到 ψ的重新着色序列，矛盾由此得证。

◊

从现在起，对于每个 (≥ 4)-顶点 v，令 S_v 为满足以下条件的 3 度顶点 x 构成的集合：v 是 x的孤立邻点。

命题 16.6：设 v 是一个 (≥ 4)-顶点，则 $|S_v| \leq d(v) - 2$。

断言的证明。反设 $|S_v| \geq d(v) - 1$。若 $|S_v| = d(v) - 1$，令 w 为 v 的唯一一个不属于 S_v 的邻点。根据方向对偶，不失一般性，我们可以假设 w 是 v 的出邻点。若 $|S_v| = d(v)$，令 w 为 v 的任意一个出邻点。

我们将找到从 α 到 β 的一个重新着色序列。不失一般性，我们可以假设 $\beta(v) = 1$。我们首先找到从 α 到一个 2-有向着色 $\tilde{\alpha}$ 的重新着色序列，使得 $\tilde{\alpha}(v) = 1$。若 $\alpha(v) = 1$，则无需进行任何操作。现在假设 $\alpha(v) = 2$。根据 w 的颜色，我们分两种情形讨论。

- 若 $\alpha(w) = 1 \neq \alpha(v)$，则我们可以将 $N^+(v)$ 中的每个顶点都设为颜色 1，而不会产生任何单色有向环。接下来，我们可以将 $N^-(v)$ 中的每个顶点都设为颜色 2。最后，我们将 v 重新着色为 1。

- 若 $\alpha(w) = 2 = \alpha(v)$，则我们将 $N^-(v)$ 中的每个顶点设为颜色 1。接着将 $N^+(v)$ 中的每个顶点设为颜色 2。最后，我们可以将 v 重新着色为 1。

现在我们得到一个 2-有向着色 $\tilde{\alpha}$，使得 $\tilde{\alpha}(v) = \beta(v) = 1$。首先，将 S_v 中的每个顶点设为颜色 2。然后考虑 $\vec{G}' = \vec{G} - (\{v\} \cup S_v)$。根据 $\vec{G}$ 的极小性，存在一个从 $\tilde{\alpha}'$ 到 β' 的重新着色序列，即 $\tilde{\alpha}$ 和 β 在 $\vec{G}'$ 上的限制。由于 v 着色为 1，且 S_v 中的每个顶点都着色为 2，该序列可直接扩展到 $\vec{G}$。最后，我们只需将每个顶点 $x \in S_v$ 设为颜色 $\beta(x)$。此操作不会产生任何单色有向圈，因为这样的圈 C 应着色为 1（因为我们只将 S_v 中的一些顶点重新着色为 1）。但是，C 中的每个顶点在 β 中也都着色为 1，这就产生了矛盾。

最终，我们得到一个从 $\tilde{\alpha}$ 到 β 的重新着色序列。由于我们已在上文描述了一个从 α 到 $\tilde{\alpha}$ 的重新着色序列，因此存在一个从 α 到 β 的重新着色序列，这就产生了矛盾。◊

断言 16.7：设 v 是一个 4-度顶点。若 $|S_v| = 0$，则 $|N(v) \cap V_3| \leq 2$。

断言的证明。反设 $|S_v| = 0$ 且 $|N(v) \cap V_3| \geq 3$，从而得到矛盾。我们考虑 $\vec{G}' = \vec{G} - (\{v\} \cup (N(v) \cap V_3))$。由 $\vec{G}$ 的极小性，存在一个重新着色序列 $\gamma'_0, \ldots, \gamma'_r$，其中 γ'_0 和 γ'_r 分别是 α 和 β 在 $\vec{G}'$ 上的限制。为得到矛盾，我们如下给出 $\vec{G}$ 中一个从 $\alpha = \gamma_0$ 到 $\beta = \gamma_r$ 的重新着色序列。对于从 $i = 1$ 到 r，我们证明存在一个 $\vec{G}$ 的 2-有向着色 γ_i，使得 γ'_i 是 γ_i 在 $\vec{G}'$ 上的限制，并且存在一个从 γ_{i-1} 到 γ_i 的重新着色序列。将这些序列连接起来，便得到所需的 α 与 β 之间的序列。

假设对于任意 $i \geq 1$，我们都定义了一个有向着色 γ_{i-1}，使得 γ'_{i-1} 是 γ_{i-1} 在$\vec{G}'$上的限制。现在，我们来展示从 γ_{i-1} 到某个 γ_i 的重新着色序列，使得 γ'_i 是 γ_i 在 $\vec{G}'$上的限制。在γ_{i-1}中，我们首先将 $N(v) \cap V_3$ 中的每个顶点重新着色为与其孤立邻点颜色不同的颜色，从而得到一个新的 2-有向着色 $\tilde{\gamma}_{i-1}$（可能与 γ_{i-1}相同）。注意，γ'_{i-1} 仍然是 $\tilde{\gamma}_{i-1}$ 在 $\vec{G}'$上的限制。设 x_i 为在 γ'_{i-1} 与 γ'_i之间被重新着色的顶点。

如果在当前对 G 的有向着色 $\tilde{\gamma}_{i-1}$ 中重新为 x_i 着色不会产生单色有向圈，我们就令 γ_i为得到的有向着色。于是，我们定义了一个从 γ_{i-1} 到 $\tilde{\gamma}_{i-1}$ 再到 γ_i的序列，从而满足所需性质。如果在 $\tilde{\gamma}_{i-1}$ 中重新为 x_i 着色确实产生了单色有向圈，那么该圈必须至少包含一个 $\{v\} \cup (N(v) \cap V_3)$中的顶点。此外，该圈必定包含一个与 v相邻的 3度顶点 x，因为若该圈包含 v，就必须也包含它的两个邻点；根据假设，其中至多一个不是 3度顶点。由于在 $\tilde{\gamma}_{i-1}$中，x 的颜色与其孤立邻点不同，x_i 必定是 x的孤立邻点。不失一般性，我们可以假设 x 是 v的出邻点。由于 $N(v)$中的所有 3度顶点，也就是 $N(v)$中除至多一个顶点以外的所有顶点，现在都被着色为与其孤立邻点颜色不同的颜色，因此我们可以重新为 v 着色，而不会产生单色有向圈。因此，经过这次重新着色后，我们可以假设 x 的两个入邻点颜色相同。若此颜色与 x相同，则我们可以重新为 x 着色，再重新为 x_i着色；否则，我们可以直接重新为 x_i着色。在这两种情形下，我们都令 γ_i 为得到的有向着色，它是通过从 γ_{i-1}开始的重新着色序列得到的。

将序列 $\gamma_{i-1}, \ldots, \gamma_i$ 按 $i \in [r]$ 拼接，得到一个从 α到有向着色 γ_r的序列；该有向着色在 $V(\vec{G}')$ 上与 β一致。为将其扩展为通往 β的重新着色序列，在 γ_r 中，我们首先将 $N(v)$ 的每个顶点 $\cap V_3$ 重新着色为与其孤立邻点不同的颜色。然后，如有必要，我们可以将 v 重新着色为 $\beta(v)$，且不会产生任何单色有向圈。最后，我们按任意顺序将 v 的邻点中需要重新着色的顶点，重新着为它们在 β 中的颜色。若将其中某个顶点（比如 y）重新着色会产生单色有向圈 C，由于 β 是一个 2-有向着色，C 必定同时包含y 和 v 的一个邻点，且该邻点的颜色与其在 β中的颜色不同。然而，这些邻点只能是我们此时尚未重新着色的其他 3 度顶点，因此它们的颜色与各自的孤立邻点不同，故不可能属于单色有向圈。因此，我们得到一个从 α 到 β的重新着色序列，从而导出矛盾。◊

断言16.8：设 v 是一个4-度顶点。若 $|S_v| = 1$，则 $|N(v) \cap V_3| \leq 2$。

断言的证明。反设 $|S_v| = 1$ 和 $|N(v) \cap V_3| \geq 3$，并令 u 为 S_v中唯一的顶点。根据方向对偶，不妨设 u 是 v的入邻点。注意，根据断言 16.4，$d^-(v) = d^+(v) = 2$。这意味着 v 在 V_3中至少有一个出邻点 x，并且 $d^+(x) = 1$，因为

$S_v = \{u\}$。

根据断言 16.3，存在两个对 $\vec{G}$ 的 2-有向着色 ϕ 和 ψ，它们在 $V(\vec{G}) \setminus \{u, v\}$ 上相同，而且不存在从 ϕ 到 ψ的重新着色序列。在这种情形下，$\phi(u) \neq \phi(v)$，并且在 ϕ中 u 和 v 都受阻；否则，我们可以依次对它们重新着色，从而得到 ψ。不失一般性，设 $\phi(u) = 1$ 且$\phi(v) = 2$。对于每个 $j \in [2]$，存在一条 (v, u)-路径 P_j，其内部顶点在 ϕ中都着为 j。现在，我们根据 x 属于 P_1 还是 P_2，分两种情形讨论。

- 首先假设 x 是 P_1中 v 的出邻点。那么，由于 x 唯一的出邻点着为 1，因此可以对其重新着色。重新着色 x后，v 的每个出邻点都着为 2，因此我们可以依次将 v 重新着色为 1，将 u 重新着色为 2。最后，我们可以将 x 重新着色为 1，因为这会直接得到有向着色 ψ，从而产生一条从 ϕ 到 ψ的重新着色序列，矛盾。

- 现在假设 x 是 P_2中 v 的出邻点。那么，可以给 x 重新着色，因为它唯一的出邻点要么被着成颜色2，要么就是 u（而 u唯一的出邻点被着成颜色2）。重新着色x后，v的每个出邻点都具有颜色1，因此我们可以将 u重新着色为颜色2。现在，将 v重新着色为颜色1不会产生任何单色有向圈。事实上，这样的圈 C 必然包含x，否则 C 在 ψ中就已经是单色的，并且被着成颜色1。注意，x 只有一个出邻点，它必然被着成颜色2，因为它要么在 P_2内部，要么就是 u，而后者现在被着成颜色2。最后，我们可以重新着色 x，从而得到一条从 ϕ 到 ψ的重新着色序列，矛盾。

◊

断言16.9：设 v是一个满足 $|S_v| = 2$的4-度顶点。令 $S_v = \{u_1, u_2\}$ 和 $N(v) \setminus S_v = \{w_1, w_2\}$。则以下各项均成立：

(i) v 在 S_v中恰有一个入邻点和一个出邻点；

(ii) v 在 $\{w_1, w_2\}$中恰有一个入邻点和一个出邻点；

(iii) $\vec{G}$ 有一个2-有向着色 γ，使得 $\gamma(u_1) = \gamma(u_2) = 1, \gamma(v) = \gamma(w_1) = \gamma(w_2) = 2$，并且不存在从 γ 出发的重新着色序列，能够重新着色 $N[v]$中的至少一个顶点；

(iv) $d(w_1) \geq 4$ 和 $d(w_2) \geq 4$。

断言的证明。图8展示了这样一个4-度顶点 v 以 γ着色时的邻域。

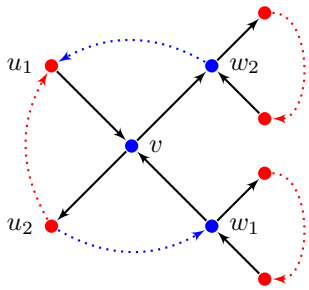

图8：一个4-度顶点 v 及其邻域，其中 $|S_v| = 2$ 以断言16.9中定义的特定有向着色 γ 着色。着色为1的顶点用红色表示，着色为2的顶点用蓝色表示。着色的点线路径之所以存在，是因为 $N[v]$ 中没有顶点在 γ中可重新着色。

(*i*) 根据断言 16.4，我们有 $d^+(v) = d^-(v) = 2$。假设 (*i*) 不成立，并且不失一般性地假设 u_1 和 u_2 都是 v的入邻点，因此 w_1 和 w_2 都是 v的出邻点。为了

导出矛盾，我们展示一条从 α 到 β的红色重着色序列。不失一般性，我们假设$\beta(v) = 1$。

从 α开始，我们先说明如何得到一个有向着色，使 v 着色为 1。若 $\alpha(v) = 1$，则无需处理。若 $\alpha(v) = 2$，我们根据 $\alpha(w_1)$ 和 $\alpha(w_2)$ 的颜色区分三种情形：

- 若 $\alpha(w_1) = \alpha(w_2) = 2 = \alpha(v)$，则可以直接重新着色 v。
- 若 $\alpha(w_1) = \alpha(w_2) = 1 \neq \alpha(v)$，则可以将 u_1 和 u_2 都设为 2，然后将 v 重新着色为 1。
- 否则，$\alpha(w_1) \neq \alpha(w_2)$。由于 $\alpha(v) = 2$，我们先将 u_1 和 u_2 设为颜色 1，并将得到的 2-有向着色记为 $\hat{}\alpha$。接着，考虑 $\vec{G}' = \vec{G} - \{v, u_1, u_2\}$，并令 $\hat{}\alpha'$ 为 $\hat{}\alpha$ 在 $\vec{G}'$ 上的限制。由 $\vec{G}$ 的极小性，$\vec{G}'$ 是 2-混合的。特别地，存在一条从 $\hat{}\alpha'$ 到其镜像的重新着色序列。在此序列中，由于我们最初设置了 $\hat{}\alpha'(w_1) \neq \hat{}\alpha'(w_2)$，因此存在 $\vec{G}'$ 的一个 2-有向着色 $\breve{\alpha}'$，使得 $\breve{\alpha}'(w_1) = \breve{\alpha}'(w_2)$。在 $\vec{G}'$ 中，从 $\hat{}\alpha'$ 到 $\breve{\alpha}'$ 的重新着色序列可直接扩展为一条从 $\hat{}\alpha$ 到 G 中某个 2-有向着色 $\breve{\alpha}$ 的重新着色序列。事实上，在 $\hat{}\alpha$ 中，u_1 和 u_2 的颜色都与其孤立邻点 v 不同，且 v 没有其他入邻点，因此在 $\hat{}\alpha$ 中应用相同的序列不会产生任何单色有向圈。经过这次重新着色，我们得到有向着色 $\breve{\alpha}$，使得 $\breve{\alpha}(w_1) = \breve{\alpha}(w_2)$，从而可以应用前两项之一，将 v 重新着色为 1。

我们已经证明，存在一个从 α 到 2-有向着色 α^* 的（可能为空的）重新着色序列，使得 $\alpha^*(v) = \beta(v) = 1$。现在我们从 α^* 开始，将 u_1 和 u_2 都设为 2，并将所得的 2-有向着色命名为 $\tilde{\alpha}$。考虑 $\vec{G}' = \vec{G} - \{v, u_1, u_2\}$ 和 $\tilde{\alpha}'$，它们分别是 $\tilde{\alpha}$ 和 β 在 $\vec{G}'$ 上的限制。根据 $\vec{G}$ 的极小性，在 $\vec{G}'$ 中存在一个从 $\tilde{\alpha}'$ 到 β' 的重新着色序列。保持 $\tilde{\alpha}$ 在 v、u_1、u_2 上的颜色不变，这个重新着色序列便可立即扩展到 $\vec{G}$；最后我们可能只需要改变 u_1 和 u_2 的颜色。因此存在一个从 α 到 β 的重新着色序列，这就导致矛盾。这证明了（i）。

由断言 16.4，(*ii*) 可直接由 (*i*) 得出。

(*iii*) 根据 (*i*) 和 (*ii*)，不失一般性，设 u_1 和 w_1 是 v 的入邻点，且 u_2 和 w_2 是 v 的出邻点。反设 (*iii*) 不成立，即：

(⋆) 对于 $\vec{G}$ 的任意 2-有向着色 ξ，满足 $\xi(u_1) = \xi(u_2)$ 且 $\xi(v) = \xi(w_1) = \xi(w_2)$，其中 $\xi(v) \neq \xi(u_1)$，存在一个从 ξ 到 2-有向着色 ξ' 的重新着色序列，使得对于 $N[v]$ 中至少一个顶点 x，
$$\xi(x) \neq \xi'(x).$$

基于此，我们将证明存在一个从 α 到 β 的重新着色序列，这将导致矛盾，并表明 γ 的存在。

首先，我们证明存在一个从 α 到某个有向着色 $\tilde{\alpha}$ 的重新着色序列，其中 $\tilde{\alpha}(w_1) \neq \tilde{\alpha}(w_2)$。不失一般性，设 $\alpha(v) = 1$。若 $\alpha(w_1) \neq \alpha(w_2)$，则令 $\tilde{\alpha} = \alpha$；否则，$\alpha(w_1) = \alpha(w_2)$，并根据 $\alpha(w_1)$ 的颜色区分两种情形。

- 假设 $\alpha(w_1) = \alpha(w_2) = 2 \neq \alpha(v)$. 从 α开始，我们先将 u_1 和 u_2 都设为 2。然后考虑 $\vec{G}' = \vec{G} - \{u_1, u_2, v\}$；由 $\vec{G}$的极小性可知，它必定是 2-混合的。特别地，在 $\vec{G}'$ 中存在一个从 α'（即 α 在 $\vec{G}'$上的限制）到其镜像 $\overline{\alpha'}$的重新着色序列。沿着该序列，我们令 $\tilde{\alpha}'$ 为第一个使 w_1 和 w_2 着色不同的有向着色。$\vec{G}'$ 中从 α' 到 $\tilde{\alpha}'$ 的重新着色序列可直接扩展为 $\vec{G}$中从 α 到 $\tilde{\alpha}$ 的重新着色序列。事实上，在整个序列中，我们保持 v着色为 1，u_1 和 u_2 着色为 2；这不会产生任何单色有向圈，因为直到到达 $\tilde{\alpha}$之前，v 都没有着色为 1 的邻点，而到达 $\tilde{\alpha}$时它恰好有一个。
- 假设 $\alpha(w_1) = \alpha(w_2) = 1 = \alpha(v)$。从 α开始，我们先将 u_1 和 u_2 都设为 2。现在根据（⋆），存在一条从 α 到某个 2-有向着色 $\hat{}\alpha$ 的重新着色序列，其中 $N[v]$ 中的一个顶点 x 颜色不同。若 x 是 w_1 或 w_2，则结论成立。若 x 是 v，则由前一种情况可得结论。最后，若 x是 u_1 或 u_2，则 v 有三个颜色为 1 的邻点，因此可以将 v 重新着色为 2，再由前一种情况可得结论（交换颜色 1 和 2 的角色）。

˜同样的证明也适用于 β，从而得到一条从 β 到某个 2-有向着色 β 的重新着色序列，使得
˜ ˜ ˜$\beta(w_1) \neq \beta(w_2)$。现在只需给出一条从 $\tilde{\alpha}$ 到 β的重新着色序列。

考虑 $\vec{G}' = \vec{G} - \{v, u_1, u_2\}$，根据 $\vec{G}$ 的极小性，它是 2-混合的，从而得到一个重新着色序列 $\tilde{\alpha}' = \eta'_0$，……，$\eta'_r = \tilde{\beta}'$，其中 $\tilde{\alpha}'$ 和 $\tilde{\beta}'$ 分别是 $\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\beta}$ 在 $\vec{G}'$ 上的限制。我们将把这个重新着色序列延伸至 $\vec{G}$。为此，对于 $i = 1$ 至 r，我们证明存在一个 2-有向着色 η_i，使得 η'_i 是 η_i 在 $\vec{G}'$ 上的限制，并且存在从 η_{i-1} 到 η_i 的重新着色序列。为确保延伸该序列不会产生任何单色有向圈，我们将保持如下性质：在每个 η_i 中，$\{v, w_1, w_2\}$ 都不是单色的。

我们首先将 η_0 设为 $\tilde{\alpha}$。由于 $\tilde{\alpha}(w_1) \neq \tilde{\alpha}(w_2)$，$\{v, w_1, w_2\}$ 在 η_0 中不是单色的。现在假设 η_{i-1} 存在，并定义 η_i。令 x_i 为从 η'_{i-1} 重新着色为 η'_i 的顶点。不失一般性地，设 v 在 η_{i-1} 中着色为 1。我们可以假设 $\eta_{i-1}(u_1) = \eta_{i-1}(u_2) = 2$，否则我们可以对它们重新着色。于是，如果对 x_i 重新着色不会破坏 $\{v, w_1, w_2\}$ 非单色这一不变量，我们就可以在不产生任何单色有向圈的情况下对 x_i 重新着色，并得到所需的 η_i。事实上，所得的单色有向圈不可能包含 u_1 或 u_2，因此必然包含 v，从而同时包含 w_1 和 w_2，而后两者的颜色不同。如果对 x_i 重新着色会破坏该不变量，则 x_i 必属于 $\{w_1, w_2\}$。于是设 $x_i = w_1$，且对 w_1 重新着色会破坏该不变量。这意味着 w_2 当前着色为 1，而 w_1 将从颜色 2 重新着色为颜色 1。在这种情况下，v 的所有入邻点都着色为 2，因此我们可以先对 u_2 重新着色，而不会产生任何单色有向圈。现在，v 的所有出邻点都着色为 1，于是可以将 v 设为颜色 2。最后，我们可以将 w_1 重新着色为颜色 1，从而得到所需的η_i，它延伸了 η'_i 并保持了该不变量。当被重新着色的顶点 x_i 是 w_2 时，论证对称成立。

将针对 $i \in [1, r]$ 得到的序列 η_{i-1}, ..., η_i 依次连接起来，我们便得到一个从 $\tilde{\alpha}$ 到 2-有向着色 β^* 的重新着色序列；该着色在 V 上与 $\tilde{\beta}$ 一致（$\vec{G}'$）。此外，$\{v, w_1, w_2\}$ 在 β^* 中不是单色的。我们现在转而展示一个从 β^* 到 β 的重新着色序列。不失一般性，设 $\beta^*(v) = 1$。我们可以先将 u_1 和 u_2 设为颜色 2，因为 v 是它们的孤立邻点。我们将说明，如何在需要时将 v 重新着色为颜色 2，同时不改变 V（$\vec{G}'$）的颜色。注意，$\tilde{\beta}$ 是一个有向着色，因此重新着色 v 后产生的任何单色有向环都必须经过 u_1 或 u_2。根据 $\beta(w_1)$ 的颜色，我们分为两种情形 ˜。

- 如果 ˜$\beta(w_1) = 1$，根据对 β 的假设，我们知道 $\beta(w_2) = 2$。现在，v 的所有出邻点都着色为 2，因此我们可以先将 u_1 重新着色为 1。然后，v 的所有入邻点都着色为 1，因此我们可以将 v 设置为颜色 2。˜ ˜

- 如果 $\beta(w_1) = 2$，根据假设我们知道 $\beta(w_2) = 1$。对称地，v 的所有入邻点都着色为 2，因此我们可以将 u_2 重新着色为 1。然后，v 的所有出邻点都着色为 1，因此我们可以将 v 重新着色为 2。

最后，如有必要，我们可以重新着色 u_1 和 u_2。为此，我们可以先将 u_1 和 u_2 设置为与 $\beta(v)$不同的颜色
˜ ˜。然后，如果只需重新着色 u_1、u_2 中的一个，由于 β 是一个有向着色，这可以完成。如果两者都需要重新着色，也可以按任意顺序完成，因为由此产生的任何单色有向圈˜ ˜也会存在于 β中。这样就得到一个从 $\tilde{\alpha}$ 到 β的重新着色序列；该序列与从 α 到 $\tilde{\alpha}$ 以及从 β 到 β 的重新着色˜序列结合起来，得到一个从 α 到 β的重新着色序列，这与矛盾相悖。由此证明了 (iii)。

(iv) 这是 (iii) 的推论。考虑由 (iii) 给出的有向着色 γ，其中 $\gamma(u_1) = \gamma(u_2) = 1$，且 $\gamma(v) = \gamma(w_1) = \gamma(w_2) = 2$。在 γ 中，u_2 不能重新着色为 2，因此存在一条 (u_2, w_1)-路径，其内部顶点着色为 2。若 $d(w_1) = 3$，则 w_1 可以重新着色为 1，因为它的出邻点 v 着色为 2，且它的一个入邻点要么着色为 2，要么是 u_2，而 u_2 唯一的入邻点 v 着色为 2。这与 (iii) 矛盾，因此 $d(w_1) \geq 4$。对称地可证 $d(w_2) \geq 4$，从而证明了 (iv)。◊

断言16.10：如果 v 是一个 4-度顶点，那么 $|N(v) \cap V_3| \leq 2$。

断言的证明。这直接由命题 16.6、16.7、16.8 和 16.9 得出。 ◊

现在我们将使用放电法。每个顶点的初始电荷为 $d(x)$，并应用以下规则：

(R1) 每个满足 x 这样的顶点（$d(x) = 3$ 且 $|N(x) \cap V_3| \geq 2$）从其孤立邻点处获得 $\frac{1}{2}$ 电荷。

(R2) 每个满足 x 这样的顶点（$d(x) = 3$ 且 $|N(x) \cap V_3| \leq 1$）从其每个（≥ 4）-邻点处获得 $\frac{1}{4}$。

现在我们证明，$\vec{G}$ 中顶点 x 的最终电荷 $w^*(x)$ 至少为 $\frac{7}{2}$，从而说明 $|A| \geq \frac{7}{4}|V|$，这与假设 $|A| < \frac{7}{4}|V|$ 矛盾。

- 假设 $d(x) = 3$ 且 $|N(u) \cap V_3| \geq 2$，则 x 根据 (R1) 获得 $\frac{1}{2}$。因此 $w^*(x) = d(x) + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$。
- 假设 $d(x) = 3$ $|N(u) \cap V_3| \leq 1$ x $\frac{1}{4}$ 2 $w^*(x) \geq$ ( ) 和 ( )，那么至少两次通过 (R) 收到。因此 ( ) ( ) $+ \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$。
- 假设 $d(x) = 4$。根据断言 16.5，x 不会通过 (R1) 转移任何电荷；根据断言 16.10，它通过 (R2) 至多转移两次 $\frac{1}{4}$。因此 $w^*(x) \geq d(x) - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{2}$。
- 假设 $d(x) = 5$。如果 x 至少一次通过 (R1) 转移 $\frac{1}{2}$ 电荷，那么根据断言 16.5，x 至少有两个邻点没有从 x 收到任何电荷。因此 $w^*(x) \geq d(x) - 3 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$。如果 x x x × $\frac{1}{4} = \frac{15}{4} > \frac{7}{2}$ 不通过 (R1) 转移电荷，那么它向每个邻点至多转移 $\frac{1}{4}$。因此 $w^*($ $) \geq d($ $) - d($ $)$。
- 最后，假设 $d(x) \geq 6$。根据命题 16.6，x 通过 (R1) 将其邻点中至多 $d(x) - 2$ 个染成 $\frac{1}{2}$。因此 $w^*(x) \geq d(x) - \frac{1}{2}(d(x) - 2) - 2 \times \frac{1}{4} = d($ x $+ \frac{1}{2} \geq \frac{7}{2})$。

至此，定理 16 的证明完成。 □

5 后续研究

在这篇首篇论文中，我们首次取得了关于有向图重着色的结果。这显然只是冰山一角，也引出了许多尚未解决的问题。接下来，我们将详细介绍其中几个。

在第 2 节中，我们证明了对于所有 $k \geq 2$，k-有向图着色路径都是 PSPACE 完全的。但我们没有证明关于 DIRECTED IS k-MIXING 的任何复杂性结果。

问题 17. DIRECTED IS k-MIXING 的复杂性如何?

我们认为，对于所有 $k \geq 2$，这是 PSPACE 困难的。要确定 DIRECTED IS k-MIXING 的复杂性，确定 2-有向二着色路径的以下特例的复杂性或许会有所帮助。（回顾一下，2-有向着色 α of D 的镜像，是满足以下条件的 2-有向着色 $\bar{\alpha}$ of D：对于所有 $v \in V(D)$，$\alpha(v) \neq \bar{\alpha}(v)$。）

镜像可达性 输入：有向图 D 的一个 2-有向着色 α。 问题：在 $\mathcal{D}_2(D)$ 中，α 与其镜像 $\bar{\alpha}$ 之间是否存在一条路径?

问题 18。镜像可达性的复杂性是什么?

一类特殊的非 k-混合有向图是 k-可冻结有向图。因此，研究以下问题的复杂性会很有意思。

有向图是否可 k-冻结
输入：一个可 k-有向着色的有向图 D。
问题：是否可 D k-冻结?

请注意，判定一个有向图是否为 k-可冻结是 NP 完全的，因为对于所有 $k \geq 2$，我们都可以轻易地从 k-有向可染色问题归约得到。事实上，对于一个有向图 D，令 D' 为在 D 的每个顶点 $v \in V(D)$ 上添加一个包含 v 和 $k-1$ 个新顶点的完全双向图 K_k^v 后得到的有向图。显然，D' 是 k-有向可染色的，当且仅当 D 是 k-有向可染色的；而且，D' 的每个 k-有向着色（如果存在）都必然是冻结的，因为其中存在完全双向图。因此，D' 是 k-可冻结的，当且仅当 D 是 k-有向可染色的。

一个相关问题是：判定给定有向图 D 的一次 k-有向着色 α 中，某个顶点是否冻结。回顾一下，若对于 $\mathcal{D}_k(D)$ 中 α 的同一连通分支内的任意 k-有向着色 β，都有 $\beta(v) = \alpha(v)$，则顶点 v 在 α 中是冻结的。

k-冻结顶点 输入：一个有向图 D、D 的一次 k-有向着色 α，
以及 D 的一个顶点 v。问题：v 在 α 中是否冻结?

2-冻结顶点问题是 PSPACE 完全的。这一结论源自 [10] 中的以下结果：给定一个三次图 G、一个映射 $\phi: V(G) \to \{1,2\}$、G 的一个正常定向 $\vec{G}$，以及 G 的一条边 xy，判定是否存在一个从 G 出发、反转 xy 的重新定向序列，是 PSPACE 完全的。因此，用于定理 5 的同一归约也可证明 2-冻结顶点问题是 PSPACE 完全的。

因此很容易得出，对于任意 $k \geq 2$，k-冻结顶点都是 PSPACE 完全的。事实上，考虑一个（非无环）有向图 D_2 和它的一个 2-有向着色 α_2。令 D_k 为由 D_2 与一个含有 $k-2$ 个顶点 $y_1, \ldots, y_{k-2}$ 的双向完全图 $\overleftrightarrow{K}_{k-2}$ 作不交并，并在 D_2 的任意顶点与 $\overleftrightarrow{K}_{k-2}$ 的任意顶点之间添加一个有向二圈后得到的有向图。令 α_k 为 D_k 的 k-有向着色，其定义为：对于所有 $v \in V$，$(D_2)\, v(v) = \alpha_2(\alpha_k)$；而对于每个 $i \in [k-2]$，$(y_i) = i+2$ α_k。容易验证，$V(D_2)$ 中的顶点 v 在 α_2 中被冻结，当且仅当它在 α_k 中被冻结。

对于上述已证明或猜想为 PSPACE 完全的每个问题，自然有必要确定该问题仍保持 PSPACE 完全性的最小有向图类。例如，在定理 5 中，我们证明了对于 (ii) 中的定向图，以及最大度至多为 6 的平面定向图（见 (iv)），该问题仍然是 PSPACE 完全的。这引出了以下问题。

问题19。（a）对于最大度至多为 D_k（分别为 D_k^*）的定向图（分别为平面定向图），使得 k-有向图着色路径仍为 PSPACE 完全的最小 D_k（分别为 D_k^*）是什么?

（b）对于任意固定的 g，k-有向图着色路径是否仍对不含长度小于 g 的有向环的有向图保持 PSPACE 完全?

关于问题19（a），定理 5 和定理 11 表明 $D_2 \in \{4,5\}$。因此，首先需要研究以下问题。

问题20. 将 2-有向二着色路径限制在最大度至多为4的有向图上，其复杂性如何?

另一方面，确定哪些最大的有向图类能够使 k-有向图着色路径在多项式时间内求解，也很值得研究。例如，推论12表明，针对次立方有向图，DI-RECTED IS 2-MIXING 是多项式时间可解的。这引出了以下问题。

问题 21. (a) 对于最大度不超过 M_k 的有向图，DIRECTED IS k-MIXING 在多项式时间内可解时，M_k 的最大值是多少?

(b) 对于最大度不超过 M_k^* 的有向图，DIRECTED IS k-FREEZABLE 在多项式时间内可解时， M_k^* 的最大值是多少?

解决问题 21 (a) 的第一步，可以是确定定理 11 是否适用于最大度为 k、且 k 为任意奇数的有向图。

问题 22. 设 $k = 2\ell + 1$ 为奇正整数。每个最大度为 k 的定向图都是 $(\ell + 1)$-混合的吗?

推论 15 直接表明，平面定向图不是 3-可冻结的。因此，自然会问平面定向图是否总是 3-混合的。

问题23. 每个平面定向图都是 3-混合的吗?

在第 3 节和第 4 节中，我们建立了有向图成为 k-混合图的若干条件，有时还给出了直径的一些界。因此，自然会问直径的界是否紧确。例如，定理 6 指出，每个 $(k-2)$-最小退化有向图 D 都是 k-混合的；按照其证明，可以得出 $\mathcal{D}_k(D)$ 的直径至多为 2^n，其中 $n = |V(D)|$。不过，这个界很可能还可以更小，甚至可能是关于 n 的多项式。

问题 24. 在所有阶为 n 的 $(k-2)$-最小退化有向图 D 中， $\mathcal{D}_k(D)$ 的最大直径是多少?

另一个例子是次三次定向图 $\vec{G}$ 中 $\mathcal{D}_2(\vec{G})$ 的直径。根据定理 11，它至多为$2n$。但是，我们不知道这个界是否紧。

问题 25. 所有阶为 n 的次三次定向图 $\vec{G}$ 中， $\mathcal{D}_2(\vec{G})$ 的最大直径是多少?

参考文献

[1] Valentin Bartier. 重配置的组合与算法方面。博士论文，格勒诺布尔阿尔卑斯大学，2021 年。[2] Marthe Bonamy、Nicolas Bousquet 和 Guillem Perarnau。有界度图的冻结着色。离散数学电子札记，68:167–172，2018 年。2018 离散数学日。[3] Paul Bonsma 和 Luis Cereceda. 寻找图着色之间的路径：多项式空间完全性与超多项式距离。Theoretical Computer Science，410(50):5215–5226，2009 年。计算机科学数学基础（MFCS 2007）。[4]Nicolas Bousquet 和 Marc Heinrich. Cereceda 猜想的多项式版本。CoRR，abs/1903.05619，2019 年。[5] Nicolas Bousquet 和 Guillem Perarnau. 稀疏图的快速重新着色。欧洲组合学杂志，52:1–11，2016 年。[6] Luis Cereceda. 图着色混合。博士论文，伦敦政治经济学院，2007 年。[7] Luis Cereceda、Jan Van den Heuvel 和 Matthew Johnson. 二分图中的 3-着色混合。欧洲组合学杂志，30(7):1593–1606，2009 年。[8] Luis Cereceda、Jan van den Heuvel 和 Matthew Johnson. 寻找 3-着色之间的路径。图论杂志，67(1):69–82，2011 年。

[9] Martin Dyer、Abraham D. Flaxman、Alan M. Frieze 和 Eric Vigoda. 用少于最大度的颜色数随机着色稀疏随机图。Random Structures & Algorithms，29(4):450–465，2006 年。[10] Robert A. Hearn 和 Erik D. Demaine. 通过非确定性约束逻辑计算模型证明滑块谜题及其他问题的多项式空间完全性。Theoretical Computer Science，343(1-2):72–96，2005 年。[11] Jan van den Heuvel. 变化的复杂性，第 127–160 页。伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，2013 年。[12] Felix Lazebnik 和 Vasiliy A. Ustimenko. 任意大围长、大规模图的显式构造。Discrete Applied Mathematics，60(1-3):275–284，1995 年。[13] Victor Neumann-Lara. 有向图的有向色数。J. Combin. Theory Ser. B.，33:265–270，1982 年。[14] Naomi Nishimura. 重配置导论。Algorithms，11(4)，2018 年。[15] Walter J. Savitch. 非确定性与确定性磁带复杂度之间的关系。Journal of Computer and System Sciences，4(2):177–192，1970 年。