基于光学原子钟比较，对超轻玻色子暗物质与光子耦合的限制得到改进

M. Filzinger、S. D¨orscher、R. Lange、J. Klose、M. Steinel、E. Benkler、E. Peik、C. Lisdat 和 N. Huntemann*
Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Bundesallee 100, 38116 Braunschweig, Germany(日期：2023年1月10日)

我们基于对两个光学频率比的长期测量，给出了超轻玻色子暗物质与光子耦合的改进约束。在这些光学钟比较中，我们将同一离子中^{171}Yb$^+$ 的 $^2S_{1/2}(F=0) \leftrightarrow {}^2F_{7/2}(F=3)$电八极（E3）跃迁的频率，与该离子的 $^2S_{1/2}(F=0) \leftrightarrow {}^2D_{3/2}(F=2)$电四极（E2）跃迁的频率，以及 ^{87}Sr中 $^1S_0 \leftrightarrow {}^3P_0$ 跃迁的频率进行比较。第一个频率比 $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{E2}}$ 通过在单离子钟中交错询问这两个跃迁而测得。基于E3跃迁的单离子钟与锶光学晶格钟进行比较，得到第二个频率比 $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{Sr}}$。利用这些测量结果约束精细结构常数$\alpha$ 的振荡，我们改进了超轻暗物质与光子的标量耦合 d_e 现有界限，适用的暗物质质量范围约为 $10^{-24}-10^{-17}\mathrm{eV}/c^2$。在该范围的大部分区域，这些结果较以往研究提升了一个数量级以上。我们还利用对 $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{E2}}$ 的重复测量，改进了其线性时间漂移及其与引力耦合的现有限制。

arXiv:2301.03433v1 [physics.atom-ph] 9 Jan 2023

尽管暗物质构成了我们宇宙中绝大部分的物质，但其微观性质和非引力相互作用仍然是个谜。一个广受理论支持的暗物质模型是超轻玻色子模型（近期综述见 [1, 2] ）。质量m_φ 远低于 1 eV$/c^2$的玻色子，其中 c 为光速，预计会表现得像经典相干波，其振荡频率由康普顿频率$\omega = 2\pi\, m_\varphi c^2/h$给出，其中 h 为普朗克常数；此外，由于我们银河系中暗物质的速度展宽 $\Delta v \approx 10^{-3}c$，它们还具有有限的相干时间 $\tau_{\mathrm{coh}} \approx h/m_\varphi \Delta v^2$。

这种超轻玻色暗物质（UBDM）与标准模型粒子的相互作用预计会导致基本常数发生相应的振荡，例如精细结构常数、电子质量以及量子色动力学质量标度 [3]。基于原子和光学技术的实验能够灵敏地探测这些参数的变化，并且迄今为止已经为超轻暗物质与标准模型粒子之间的耦合提供了最严格的限制之一 [4–11]。

在本工作中，我们关注无量纲暗物质场 φ 与光子的耦合，该耦合会为拉格朗日密度 $\mathcal{L}$贡献一项

$$\mathcal{L} \supset \varphi \frac{d_e}{4\mu_0} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,, \tag{1}$$

其中，耦合常数为 d_e， $F_{\mu\nu}$ 为电磁场张量， μ_0 为真空磁导率。这种耦合会导致精细结构常数 [3]发生振荡：

$$\alpha(t) \approx \alpha\,[1 + d_e\varphi_0\cos(\omega t + \delta)] \tag{2}$$

相位未知，且无量纲振幅为 δ

tude

$$\varphi_0 \equiv \sqrt{\frac{4\pi G\hbar^2}{c^6}}\,\frac{\sqrt{2\rho_{DM}}}{m_\varphi}\,, \tag{3}$$

其中， ρ_{DM} 表示暗物质能量密度，G 表示引力常数。

由于原子能级的能量取决于精细结构常数 α，原子跃迁频率可作为探测其数值变化的灵敏探针。特别是，超轻暗物质与光子的耦合导致 α 发生正弦振荡时，两个光学原子频率 ν_1 和 ν_2之比可能会发生放大的振荡

$$\frac{\Delta(\nu_1/\nu_2)}{\nu_1/\nu_2} = -k_\alpha\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\,, \tag{4}$$

如果它们对 α 变化的差分灵敏度 k_α 的绝对值大于一。

在本文中，我们展示了对两种光学频率比测量中此类正弦调制的搜索结果。 ^{171}Yb$^+$中 $^2S_{1/2}(F=0) \leftrightarrow {}^2F_{7/2}(F=3)$电八极（E3）跃迁的激发态在原本填满的 $4f$ 壳层中有一个空穴，而基态则具有一个价电子 $4f^{14}6s^1$。该重离子的 $4f$ 壳层靠近原子核，这直观地解释了为何相对论贡献会显著影响E3激发态能量。因此，目前运行中的光学钟中，基于E3跃迁的光学钟对 α 的变化最为敏感。我们利用这种高灵敏度，将E3跃迁频率 ν_{E3} 与另外两种跃迁频率进行比较：同一离子的 $^2S_{1/2}(F=0) \leftrightarrow {}^2D_{3/2}(F=2)$电四极（E2）跃迁频率 ν_{E2} ，以及 ^{87}Sr中的$^1S_0 \leftrightarrow {}^3P_0$ 跃迁频率 ν_{Sr} 。灵敏度 k_α 经计算， $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{E2}}$ 为6.95， $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{Sr}}$ [12]为6.01。这些频率比较对 α的强依赖性，使我们能够以高灵敏度搜索超轻暗物质与光子的耦合d_e 。

* nils.huntemann@ptb.de

本文所报告测量所用的单离子钟此前已评估过，其E3跃迁 [13], 的分数不确定度为 2.7×10^{-18}，E2跃迁 [14] 的分数不确定度为33×10^{-18}。自 2016 [14]以来，PTB一直在进行光学频率比 $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{E2}}$ 的测量。此前报告的数据主要通过比较两台单离子钟获得，其中一台实现 ν_{E3}，另一台实现ν_{E2}。自2020年秋季起，两种频率均通过交错询问由同一套装置实现，即以交替方式对单个离子的两种跃迁进行探测。E3跃迁采用拉比控制的超拉姆齐光谱 [15] 进行询问，暗时间为500 ms；而E2跃迁则采用标准拉比询问，脉冲时长为42 ms，因为其激发态寿命较短，仅为53 ms [16]。E2跃迁频率取施加磁场的三个相互垂直方向上的平均值，以抑制四极频移等张量频移 [17]。两台光学钟均以一阶塞曼不敏感的 $m_F = 0 \to m_F = 0$ 跃迁为基础，但我们会定期探测E2跃迁的 $m_F = 0 \to m_F = 2$分量，以确定三种设置下的磁场强度。利用这一结果，我们计算E2 $m_F = 0 \to m_F = 0$跃迁二阶塞曼频移的随时间变化修正。同样，我们根据电阻式温度传感器的测量结果，计算黑体辐射频移的动态修正。由于钟运行期间大多数其他参数都保持不变，预计 ν_{E2} 的可重复性远优于其不确定度。二阶塞曼频移的动态修正使该频移的可重复性达到 $< 1 \times 10^{-18}$。由于我们系统中的四极频移长期保持在 1×10^{-16}水平，且通过平均方案将该频移至少抑制了100倍 [18], ，我们估计剩余四极频移的可重复性为 1×10^{-18}。基于这两项改进，我们估计系统中 ν_{E2} 的总分数复现性为 4×10^{-18}，显著优于此前报告的 16×10^{-18} [14]。

总的来说，我们评估了约235天的频率比 $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{E2}}$测量数据。这些数据是在约26个月的时间内积累的，时间范围为修正儒略日59097（9月5日，2020年）至修正儒略日59900（2022年11月11日）。将这组新数据与 [14], 中的数据结合后，我们在频率比 $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{E2}}$的测量中发现了线性漂移 $\frac{1}{\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{E2}}} \frac{\mathrm{d}(\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{E2}})}{\mathrm{d}t} = -1.2(1.8) \times 10^{-18}$/年，这对应于精细结构常数的漂移$\frac{1}{\alpha} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = 1.8(2.5) \times 10^{-19}$/年。对于与太阳引力势的可能耦合 Φ，对所有数据进行最佳拟合得到 $\frac{c^2}{\alpha} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\Phi} = -2.4(3.0) \times 10^{-9}$。这两个数值都与零相容，并将先前极限 [14] 的不确定度提高了约四倍。

$\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{E2}}$ 测量的分数不稳定度受限于 $1.0 \times 10^{-14}/\sqrt{\tau(\mathrm{s})}$，这是由于询问时间较短，

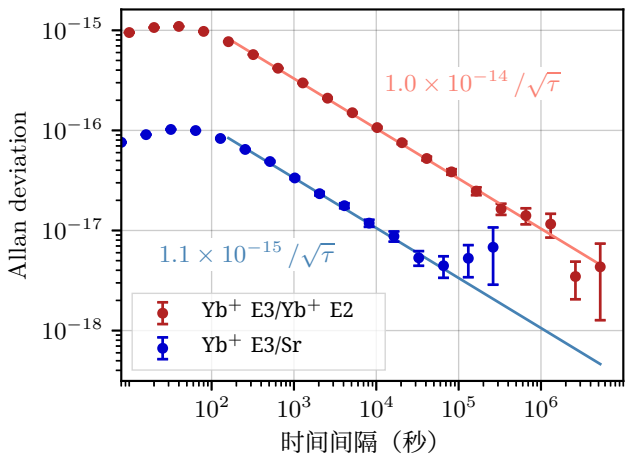

图1. 两种频率比测量的不稳定度，以阿伦偏差表征。实线是对阿伦偏差的拟合，其标度为白噪声预期的 $1/\sqrt{\tau}$。

且 E2 询问的占空比较低。为了克服这一限制并探究采用 E3跃迁运行的时钟的全部潜力，我们在 2022年春季开展了一项短期测量活动，将上述长期测量与 ^{171}Yb$^+$ E3单离子钟和 ^{87}Sr晶格钟的比对相结合。该频率比对 α 变化具有相似的灵敏度，但与我们对 $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{E2}}$的测量相比，测量稳定性有所提高。

如 [19, 20], 所述，锶钟的激光器锁定到 ^{87}Sr 中 $m_F = \pm 9/2$ $\Delta m_F = 0$跃迁的平均频率，该频率不受线性塞曼频移的影响。典型的 650 ms 拉比询问使钟的不稳定度低于$2 \times 10^{-16}/\sqrt{\tau(\mathrm{s})}$ [20]。与以往的发表成果不同，我们采用了新的物理装置 Sr3，其垂直定向的光晶格可抑制晶格位点之间的隧穿，而真空内辐射屏蔽罩则确保了高度均匀的热环境。这些改进以及其他改进，包括在晶格中通过边带冷却进行态制备，使新装置的系统不确定度达到 3×10^{-18}。更多详情将在后续发表的论文中介绍 [21]。用于比较的测量装置见 [22]。总计，我们评估了在约 41 天内采集的 $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{Sr}}$ 约 343 小时测量数据。

该 $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{Sr}}$ 测量的分数不稳定度为$1.1 \times 10^{-15}/\sqrt{\tau(\mathrm{s})}$，其极限由单离子钟的量子投影噪声决定。图1展示了用阿伦偏差表征的两种频率比测量的不稳定度。对于 $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{Sr}}$，当平均时间超过约 10^5s时，可以看到其偏离预期的白噪声行为。对于下文所述的数据分析，我们根据阿伦偏差对测量中的噪声进行建模：对于

ν_{E3}/ν_{E2} 的测量，我们假设噪声为纯白噪声。对于 ν_{E3}/ν_{Sr}，我们还加入振幅为 9×10^{-18}的随机游走噪声（$1/\omega^2$ 功率谱），以重现我们在较长平均时间间隔下观察到的阿伦偏差增大现象。

为寻找超轻暗物质与光子的耦合，我们在测量数据中寻找如下形式的正弦调制

$$S_\omega \sin(\omega t) + C_\omega \cos(\omega t) \tag{5}$$

这两种频率比的测量数据均如此，具体遵循文献 [4, 5]中详述的方法。我们关注角频率 ω范围内的振荡幅度 $A_\omega \equiv \sqrt{S_\omega^2 + C_\omega^2}$。为处理存在间断的实验数据，我们首先使用 Lomb-Scargle形式估算不同频率处的功率；这是一种用于分析非均匀采样数据的谱分析方法 [23, 24]。该方法等价于对每个频率显式拟合数据与模型方程 5，并根据 χ^2 拟合优度构建周期图：

$$P_\omega = \frac{1}{2}\left[\chi_0^2 - \chi^2(\omega)\right] , \tag{6}$$

其中，χ_0^2 由不随时间变化的参考模型（$S \equiv C \equiv 0$）得出。与标准拟合程序相比，使用 astropy Python软件包 [25]中实现的 Lomb-Scargle形式可显著加快计算速度。对于均匀采样数据，周期图 P_ω 会退化为通过标准离散傅里叶变换得到的结果。我们通过以下方式从周期图中提取调制幅度：

$$A_\omega = \sqrt{4\,P_\omega / N_0}\,, \tag{7}$$

其中 N_0 为数据点的数量。我们分析中的最高频率为 0.005 Hz，这受到光学钟伺服时间的限制：在更短的时间内，激光频率尚未完全由原子参考确定，而且将其稳定到同一超稳光学腔会导致信号受到共模抑制。对于一个数据集，T 表示首次测量开始与末次测量结束之间的时间，Lomb-Scargle统计量在 $1/T$ 附近及更低的频率下并不适用，也就是说，当信号在数据范围内无法完成一个完整的振荡周期时，情况便是如此。在这种情况下，我们仍可通过对公式 5 进行标准最小二乘拟合来限制振荡幅度，并允许每个频率具有一个常数偏移。此处，振幅上限随 $1/\omega^2$增加，因为无法排除其接近振荡波腹的可能性。我们在 $1/T$ 附近的频率范围内检验这两种方法的一致性，并验证我们的分析能够重现已知参考信号的振幅。

我们假设提取出的振幅是真实信号，并根据各自的噪声模型，为每个数据点添加随机生成的偏移量，生成 1000 组数据集，从而以 95%置信度为每个频率处的振荡振幅设定上限。

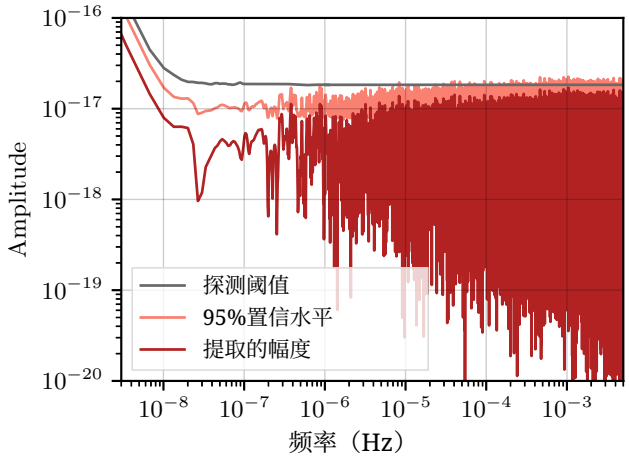

图 2。 ν_{E3}/ν_{E2} 测量数据的振幅谱（深红色），上方为 95%置信水平（浅粉色），并标示 5%探测阈值（灰色）（详情见正文）。

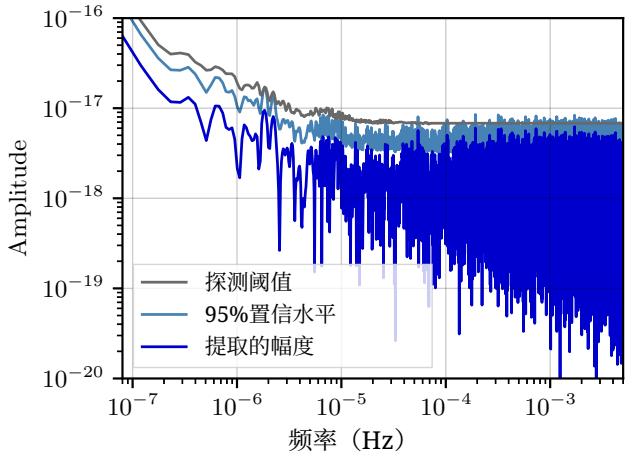

图 3。 ν_{E3}/ν_{Sr} 测量数据的振幅谱（深蓝色），上方为 95%置信水平（浅蓝色），并标示 5%探测阈值（灰色）（详情见正文）。

随机游走噪声分量首先在连续数据集上生成，然后根据测量的时间戳对数据进行间隔处理。随后，按照上述方法评估这些数据集，并取所得分布的第95百分位数，得到 95%置信水平上限 [4–6]。为评估频谱中任何峰值的统计显著性，我们还估算了 5% 的探测阈值。若发现高于此阈值的峰值，则将其误判为真实信号的概率低于 5%。我们通过蒙特卡洛（MC）噪声抽样估算该探测阈值（见补充材料[26]）；当频率较高时，该估算结果趋近于 [23] 中的解析描述。

ν_{E3}/ν_{E2} 测量数据的分析结果如图 2 所示。我们的 95% 置信

水平给出了对频率为$> 1/T$的 2×10^{-17} 以下振幅调制基本不随频率变化的约束。对相应$\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{Sr}}$ 数据的分析结果见图 3。对于高于中间10^{-6} Hz 范围的频率， $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{Sr}}$ 数据给出的振幅约束比 $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{E2}}$ 数据严格近 3 倍。较低频率下最佳拟合振幅明显增大，这可由我们的噪声模型解释，并对应于图 1 中可见的偏离白噪声现象。对于更低的频率 $< 1/T \approx 3\times10^{-7}$Hz，我们还观察到了预期的 $1/\omega^2$ 标度关系。

我们发现，在两个数据集中，振幅均未超过各自的探测阈值，因此得出结论：两项测量中都不存在统计显著的正弦调制。由此，在已知测量噪声的限制下，我们的数据未显示存在超轻暗物质-光子耦合。下文将利用从测量中提取的正弦调制上限（95%置信水平），推导此类调制 α 的限制，进而约束超轻暗物质与光子的耦合 d_e 。

假设质量为m_φ 的场 φ 构成了全部暗物质，我们可以结合式（2）至（4），将数据中频率为 $\omega/2\pi$ 的正弦调制振幅A_ω 的限制，转化为标量耦合绝对值d_e 的限制：

$$|d_e| = \frac{\omega A_\omega}{k_\alpha}\sqrt{\frac{c^2}{8\pi G\rho_{DM}}}, \tag{8}$$

环境暗物质能量密度为 $\rho_{DM} \approx$6.4 $\times 10^{-5}$ J/m $^3 \approx 0.4$GeV/cm^3 [1]。根据图 2 和图 3 所示的 95%置信水平得出的限制，如排除图图 4 所示。为供参考，我们重现了文献中这一质量范围内已有的限制。我们对 $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{E2}}$ 的测量总时长为 $T \approx 2$年，而最短相干时间对应于所研究的最大质量$m_\varphi \approx 2 \times 10^{-17}$eV，约为 6 年。由于 $T < \tau_{\mathrm{coh}}$，无需进行有限相干时间修正。按照文献 [27]的建议，我们将限制乘以 3，以纳入暗物质振幅随机涨落的影响。对于图 4 中原先未考虑随机涨落的所有数据，也应用了这一因子。

我们基于$\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{Sr}}$ 的测量，对 $|d_e|$ 的限制比基于 $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{E2}}$ 的限制严格约 3 倍，适用于质量高于 10^{-20} eV/c^2的情况。对于更小的质量， $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{E2}}$的长期测量给出了更严格的限制。综合结果在质量范围从10^{-23} 中期到10^{-18}eV/c^2 中期，较先前界限提升了一个数量级以上。

我们注意到，对于低于 $\approx 10^{-22}$eV/c^2的质量（对应的德布罗意波长与小型星系的大小相当），需要放宽质量为 m_φ 的场构成全部暗物质这一假设 [1], ，而图中所示的任何限制均未考虑这一点。

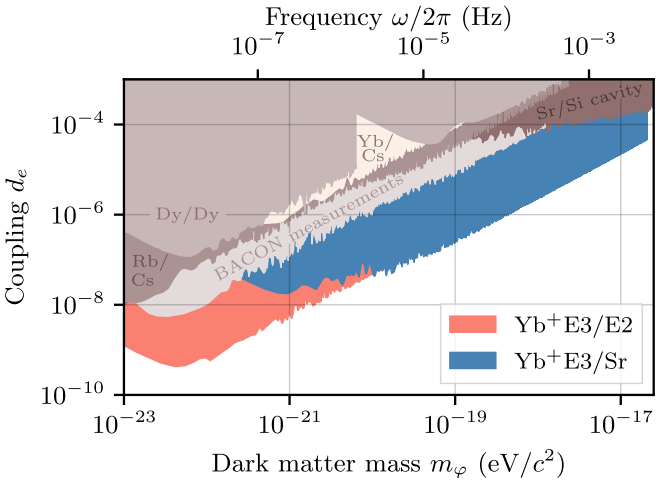

图 4. 超轻玻色子暗物质与光子耦合的排除图。根据图 2（图 3）中 95% 置信水平得出的、基于我们对 $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{E2}}$ （$\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{Sr}}$）的测量的新限制，分别以浅粉色（浅蓝色）显示。图中还列出了从文献中重现的先前原子限制：基于对不同镝同位素（Dy/Dy）进行射频光谱测量的限制 [4], ，基于铷和铯微波原子钟频率比较（Rb/Cs）的限制 [5], ，基于锶晶格钟与硅腔比较（Sr/Si）的限制 [6], ，基于博尔德原子钟光学网络（BACON）的多项光学钟比较的限制 [7], ，以及基于镱晶格钟与铯喷泉钟比较（Yb/Cs）的限制 [10]。

总之，我们利用 ^{171}Yb$^+$ E3跃迁对精细结构常数变化的高灵敏度，在两项光学钟比较中大幅改进了对超轻玻色子暗物质与光子耦合的限制。虽然E3跃迁对变化的灵敏度在目前运行的光学钟中最高，但未来基于钍的核光学钟有望具备高得多的灵敏度，并有可能探测到比本文所给限制低数个数量级的耦合。某些种类的高电荷离子也有望提升灵敏度 [30, 31]。另一方面，即使采用本研究中的灵敏度，仍可开展更灵敏的搜索，例如对基于E3跃迁的钟与对变化灵敏度较低的高稳定度配对钟进行长达数年的频率比较。此外，通过延长激光-离子相干时间和/或同时询问多个离子，可以提高基于E3跃迁的钟的稳定性。就所研究的质量范围而言，将E3跃迁对较大暗物质质量（约 10^{-16}eV/c^2 及以上）的高灵敏度应用于探测值得关注。为避免受到光学钟中典型伺服时间常数的限制，可以采用动态解耦序列；这类序列可提高对特定频率变化的灵敏度 [6, 32]。

我们感谢 Aur´elien Hees 进行了有益的讨论，感谢 Jialiang Yu、Thomas Legero 和 Uwe Sterr 提供稳定的激光振荡器，并感谢 Burghard Lipphardt 提供实验支持。我们感谢项目 20FUN01 TSCAC 提供的支持；该项目获得了由参与国共同资助的 EMPIR 计划以及欧盟地平线2020研究与创新计划的资助。我们还感谢德国研究联合会（DFG）通过德国卓越战略下的 EXC-2123 QuantumFrontiers 项目（项目编号 390837967）以及 SFB 1227 DQ-*mat* – 项目编号 274200144 – 项目 B02 提供的支持。本研究还部分获得马克斯·普朗克–RIKEN–PTB时间、常数与基本对称性中心的支持。

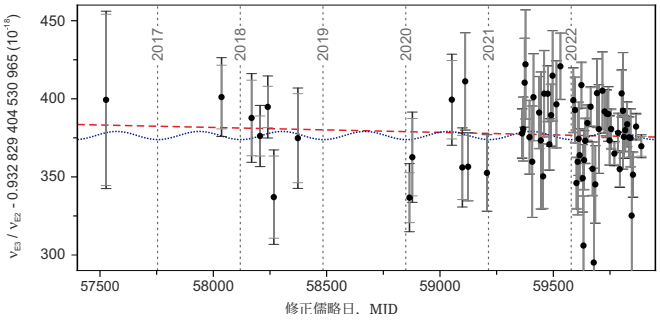

图 5. 在修正儒略日 57527（2016年5月19日）至修正儒略日 59900（2022年11月11日）期间测得的 ν_{E3} 和 ν_{E2} 之比，即 $^{171}\mathrm{Yb}^{+}$ 中 E3 与 E2 跃迁频率之比。灰色误差棒表示统计不确定度。对于黑色误差棒，我们将一个分数不确定度以平方和开方的方式加入，以计入测量期间系统偏移的可重复性。红色虚线和蓝色点线分别是针对线性时间漂移和引力势依赖性的搜索所得数据拟合结果。

补充材料

A. 精细结构常数的线性时间变化及其与引力的耦合约束

本组先前对 ν_{E3} 和 ν_{E2}进行的光学频率比较，对精细结构常数 α 的线性时间漂移及其与太阳引力势的耦合给出了迄今最严格的限制；这种耦合会导致 α 以一年为周期振荡 [14]。将正文中呈现的新数据纳入相同分析后，我们得以进一步改进这些限制。图 5 展示了此前发表的测量结果：2016年5月（修正儒略日 57527）至2020年8月（修正儒略日 59081）期间的频率比 $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{E2}}$，以及从2020年9月开始的新测量数据。与往年相比，2021年和2022年的数据量有所增加，这是因为测量活动增多，同时测量期间的时钟可用性也得到改善。红色虚线和蓝色点线分别是对所有数据进行线性时间漂移拟合和周期约为365天的正弦调制拟合。考虑统计不确定度和可重复性后，拟合得到的约化 χ^2 分别为1.2和1.1。我们发现线性漂移为

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = 1.8(2.5)\times 10^{-19}/\mathrm{yr}\,. \tag{9}$$

对于可能与太阳引力势 Φ耦合的情况，所有数据的最佳拟合结果为

$$\frac{c^2}{\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\Phi} = -2.4(3.0)\times 10^{-9}\,. \tag{10}$$

这两个数值均与零相容，并将此前的最佳限值在不确定度方面提高了约四倍 [14]。

B. 探测阈值

为了估算每个频率 $\omega/2\pi$对应的探测阈值，我们需要考虑这样一个事实：随着考察的独立样本数量增加，出现极端值的可能性也会增大（到处寻找效应）。我们按照 [5, 23], 定义阈值$P_{\mathrm{th},\ \omega}$，使其满足：

$$\mathrm{Prob}(P_\omega < P_{\mathrm{th},\omega}) = (1-p_0)^{1/n_{\mathrm{ind}}} \tag{11}$$

其中独立频率的数量为 n_{ind}。在这种情况下，如果我们在频谱中的任意位置发现一个值 $P_\omega \geq P_{\mathrm{th},\ \omega}$ 并将其解释为一次探测，那么它是虚警的概率小于 $p_0 = 5\%$。我们估计独立频率的数量为 $n_{\mathrm{ind}} \approx f_{\max}T$，其中 $f_{\max} = 0.005$ Hz，并得到$n_{\mathrm{ind}} \approx 3.5\times 10^5$（E3/E2 数据）和 $n_{\mathrm{ind}} \approx 1.8\times 10^4$（E3/Sr 数据）。对于 $\omega/2\pi \gg 1/T$ 且为纯高斯白噪声的情况，周期图服从指数概率分布，相应的探测阈值可通过解析方法确定 [23]。

对于频率较低且噪声类型各异的情形，估计功率谱的概率分布未知，因此原则上可以直接通过对噪声进行蒙特卡洛（MC）抽样来获得探测限。然而，这需要极其庞大的样本数量，在计算上不可行。对于总计评估的测量数据$\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{E2}}$、 $0.95^{1/n_{\mathrm{ind}}} \approx 1-(2\times 10^{-7})$，这意味着需要约 10^7 个蒙特卡洛样本，才能直接从相应概率分布的百分位数中获得探测阈值。针对这一问题，不同领域和不同统计量 [33–35]已提出多种方法。这里，我们利用这样一个事实：在允许存在常数偏移的情况下，指数分布能够很好地拟合给定频率处估计功率的概率分布

，并基于这种拟合，使用较少数量的MC样本提取阈值。使用 $N = 1000$个MC样本时，所得结果的收敛精度已达到百分之几；在所考虑的整个参数空间内，拟合结果与MC抽样结果均吻合良好，即使在低频以及存在随机游走噪声分量的情况下也是如此。

因此，为确定探测阈值，我们对指数分布的累积分布进行拟合

$$1 - \mathrm{e}^{-a(P-P_0)} \tag{12}$$

至累积提取功率的直方图 P，并根据所得拟合参数 a 和 P_0确定探测阈值，然后计算相应的振幅。我们确认，对于中间频率，该方法与 [23] 中给出的解析探测阈值一致；对于频率为 $\gg 1/T$的情况，则采用解析结果。对于 $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{E2}}$，噪声始终可由白噪声很好地描述，并且由于$1/T \approx 1.4 \times 10^{-8}$，我们采用频率高于 10^{-6}Hz 时的解析结果。对于 $\nu_{\mathrm{E3}}/\nu_{\mathrm{Sr}}$，我们采用频率高于 4×10^{-5}Hz 时的解析结果；此时 $1/\omega^2$ 噪声分量可以忽略，测量结果由白噪声主导。低频处探测阈值呈现出的可见结构，是由我们数据中采样间隔的具体分布造成的。

[1] D. F. J. Kimball 和 K. van Bibber（编）*The Search for Ultralight Bosonic Dark Matter* 2023 （Springer，）。

[2] D. Antypas、A. Banerjee、C. Bartram、M. Baryakhtar、J. Betz、J. J. Bollinger、C. Boutan、D. Bowring、D. Bud- ker、D. Carney、G. Carosi、S. Chaudhuri、S. Cheong、A. Chou、M. D. Cho wdhury、R. T. Co、J. R. C. L´opez- Urrutia、M. Demarteau、N. DePorzio、A. V. Derbin、T. Deshpande、M. D. Chowdhury、L. Di Luzio、A. Diaz- Morcillo、J. M. Doyle、A. Drlica-Wagner、A. Droster、N. Du、B. D¨obrich、J. Eby、R. Essig、G. S. Farren、N. L. Figueroa、J. T. Fry、S. Gardner、A. A. Geraci、A. Ghal- sasi、S. Ghosh、M. Giannotti、B. Gimeno、S. M. Griffin、D. Grin、D. Grin、H. Grote、J. H. Gundlach、M. Guzzetti、D. Hanneke、R. Harnik、R. Henning、V. Irsic、H. Jack- son、D. F. J. Kimball、J. Jaeckel、M. Kagan、D. Kedar、R. Khatiwada、S. Knirck、S. Kolkowitz、T. Kovachy、S. E. Kuenstner、Z. Lasner、A. F. Leder、R. Lehnert、D. R. Leibrandt、E. Lentz、S. M. Lewis、Z. Liu、J. Manley、R. H. Maruyama、A. J. Millar、V. N. Muratova、N. Musoke、S. Nagaitsev、O. Noroozian、C. A. J. O'Hare、J. L. Ouel- let、K. M. W. Pappas、E. Peik、G. Perez、A. Phipps、N. M. Rapidis、J. M. Robinson、V. H. Robles、K. K. Rogers、J. Rudolph、G. Rybka、M. Safdari、M. Safdari、M. S. Safronova、C. P. Sale mi、P. O. Schmidt、T. Schumm、A. Schwartzman、J. Shu、M. Simanovskaia、J. Singh、S. Singh、M. S. Smith、W. M. Snow、Y. V. Stadnik、C. Sun、A. O. Sushkov、T. M. P. Tait、V. Takhistov、D. B. Tanner、D. J. Temples、P. G. Thirolf、J. H. Thomas、M. E. Tobar、O. Tretiak、Y. D. Tsai、J. A. Tyson、M. Vandegar、S. Vermeulen、L. Visinelli、E. Vitagliano、Z. Wang、D. J. Wilson、L. Winslow、S. Withington、M. Wooten、J. Yang、J. Ye、B. A. Young、F. Yu、M. H. Zaheer、T. Zelevinsky、Y. Zhao 和 K. Zhou，《美国社区研究粒子物理未来》（Snowmass 2021）（2022）。[3] A. Arvanitaki、J. Huang 和 K. Van Tilburg，Physical Review D - Part. Fields, Gravit. Cosmol. **91**，015015（2015）。[4] K. Van Tilburg、N. Leefer、L. Bougas 和 D. Budker，Physical Review Letters **115**，011802（2015）。[5] A. Hees、J. Gu´ena、M. Abgrall、S. Bize 和 P. Wolf，Physical Review Letters **117**，061301（2016年）。[6] C. J. Kennedy、E. Oelker、J. M. Robinson、T. Bothwell、D. Kedar、W. R. Milner、G. E. Marti、A. Derevianko 和 J. Ye，Physical Review Letters **125**，201302（2020年）。

[7] K. Beloy, M. I. Bodine, T. Bothwell, S. M. Brewer, S. L. Bromley, J. S. Chen, J. D. Desch^enes, S. A. Diddams, R. J. Fasano, T. M. Fortier, Y. S. Hassan, D. B. Hume, D. Kedar, C. J. Kennedy, I. Khader, A. Koepke, D. R. Leibrandt, H. Leopardi, A. D. Ludlow, W. F. McGrew, W. R. Milner, N. R. Newbury, D. Nicolodi, E. Oelker, T. E. Parker, J. M. Robinson, S. Romisch, S. A. Sch¨affer, J. A. Sherman, L. C. Sinclair, L. Sonderhouse, W. C. Swann, J. Yao, J. Ye 和 X. Zhang，《自然》**591**, 564 (2021)。[8] E. Savalle, A. Hees, F. Frank, E. Cantin, P. E. Pottie, B. M. Roberts, L. Cros, B. T. McAllister 和 P. Wolf，Physical Review Letters **126**, 051301 (2021)。[9] O. Tretiak, X. Zhang, N. L. Figueroa, D. Antypas, A. Brogna, A. Banerjee, G. Perez 和 D. Budker，Physical Review Letters **129**, 031301 (2022)。[10] T. Kobayashi, A. Takamizawa, D. Akamatsu, A. Kawasaki, A. Nishiyama, K. Hosaka, Y. Hisai, M. Wada, H. Inaba, T. Tanabe 和 M. Yasuda，Physical Review Letters **129**, 241301 (2022)。[11] R. Oswald, A. Nevsky, V. Vogt, S. Schiller, N. L. Figueroa, K. Zhang, O. Tretiak, D. Antypas, D. Bud- ker, A. Banerjee 和 G. Perez，Physical Review Letters **129**, 031302 2022( )。[12] V. V. Flambaum 和 V. A. Dzuba，《加拿大物理学杂志》**87**, 25 (2009)。[13] C. Sanner, N. Huntemann, R. Lange, C. Tamm, E. Peik, M. S. Safronova 和 S. G. Porsev，《自然》**567**, 204 (2019)。[14] R. Lange, N. Huntemann, J. M. Rahm, C. Sanner, H. Shao, B. Lipphardt, C. Tamm, S. Weyers 和 E. Peik, Physical Review Letters **126**, 011102 (2021)。[15] N. Huntemann, C. Sanner, B. Lipphardt, C. Tamm 和 E. Peik, Physical Review Letters **116**, 063001 (2016)。[16] N. Yu 和 L. Maleki，《物理评论A辑》**61**, 022507 (2000)。[17] W. M. It ano，《国家标准与技术研究院研究杂志》**105**, 829 (2000)。[18] R. Lange, N. Huntemann, C. Sanner, H. Shao, B. Lip- phardt, C. Tamm 和 E. Peik，Physical Review Letters **125**, 143201 2020( )。[19] S. Falke, N. Lemke, C. Grebing, B. Lipphardt, S. Wey- ers, V. Gerginov, N. Huntemann, C. Hagemann, A. Al-Masoudi, S. H¨afner, S. Vogt, U. Sterr 和 C. Lisdat,

新物理学杂志 **16**, 073023 (2014)。[20] R. Schwarz, S. D¨orscher, A. Al-Masoudi, E. Benkler, T. Legero, U. Sterr, S. Weyers, J. Rahm, B. Lipphardt 和 C. Lisdat，Phys. Rev. Research **2**, 033242 (2020)。[21] S. D¨orscher, R. Schwarz, J. Klose, K. Stahl, E. Benkler, S. Weyers, J. Rahm, B. Lipphardt 和 C. Lisdat，（未发表）。[22] S. D¨orscher, N. Huntemann, R. Schwarz, R. Lange, E. Benkler, B. Lipphardt, U. Sterr, E. Peik 和 C. Lis- dat，《计量学》**58**, 015005 (2021)。[23] J. D. Scargle，Astrophys. J. **263**, 835 (1982)。[24] J. T. VanderPlas，Astrophys. J. Suppl. Ser. **236**, 28pp (2018)。[25] J. T. Vanderplas 和 ˇZ. Ivezi´c, Astrophys. J. **812**, 15pp (2015)。[26] 有关精细结构常数变化限值及探测阈值估算的详细信息，请参见……中的补充材料。[27]G. P. Centers, J. W. Blanchard, J. Conrad, N. L. Figueroa, A. Garcon, A. V. Gramolin, D. F. Kimball, M. Lawson、B. Pelssers、J. A. Smiga、A. O. Sushkov、A. Wickenbrock、D. Budker 和 A. Derevianko，Nat. Commun. **12**, 7321 (2021)。[28] V. V. Flambaum，Phys. Rev. Lett. **97**, 092502 (2006)。[29] E. Peik、T. Schumm、M. S. Safronova、A. P´alffy、J. Weit- enberg 和 P. G. Thirolf，Quantum Sci. Technol. **6**, 034002 2021( )。[30] J. C. Berengut、V. A. Dzuba 和 V. V. Flambaum，Phys. Rev. Lett. **105**, 120801 (2010)。[31] M. S. Safronova、V. A. Dzuba、V. V. Flambaum、U. I. Safronova、S. G. Porsev 和 M. G. Kozlov，Phys. Rev. Lett. **113**, 030801 (2014)。[32] S. Aharony、N. Akerman、R. Ozeri、G. Perez、I. Savoray 和 R. Shaniv，Phys. Rev. D **103**, 075017 (2021)。[33] E. Gross 和 O. Vitells，Eur. Phys. J. C **70**, 525 (2010)。[34] G. Cowan、K. Cranmer、E. Gross 和 O. Vitells，Eur. Phys. J. C **71**, 1554 (2011)。[35] F. Beaujean、A. Caldwell 和 O. Reimann，Eur. Phys. J. C **78**, 793 (2018)。