arXiv:2301.03434v1 [math.RT] 9 Jan 2023

彗星形箭图簇、魏尔群作用与修正 Kostka 多项式

Mathieu Ballandras巴黎大学 高等国际研究学院 数学科学研究所mballandras@imj-prg.fr

2023年1月10日

摘要

我们研究一个由修正 Kostka 多项式张成的代数。该代数的某些结构系数可解释为某些魏尔群作用在彗星形箭图簇的交叉上同调上的迹。

目录

1 引言 **2**

2 对称函数 **5**

2.1 一般性.5 2.2 对称群的特征标与对称函数 . . . . . 7 2.3 正交性与麦克唐纳多项式.8 2.3.1 关于 $\mathrm{Sym}\,[X]$ 上数量积的一般性 . . . . . 8 2.3.2 霍尔配对与 (q,t)-变形.9 2.4 Garsia–Haiman 的一个结果.10

3 几何背景 **12**

3.1 记号以及关于可构造层有界导出范畴的一般性.12 3.2 交叉上同调.14

4 主要对象与记号 **15**

4.1 中的伴随轨道 $\mathfrak{gl}_n$ .15 4.1.1 伴随轨道的记号.15 4.1.2 伴随轨道扎里斯基闭包的解消 . . . . . 16 4.2 簇 $\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\mu,\sigma}}$ 及其解消.18 4.3 簇 $\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\mu,\sigma}}$ 的交叉上同调.21

5 以中岛箭图簇的形式进行构造 22

5.1 关于中岛箭图簇的一般性讨论.225.2 作为中岛框架箭图簇的伴随轨道扎里斯基闭包的解消.245.3 彗星形箭图簇.265.4 彗星形箭图簇族.28

6 单值化韦伊群作用 29

6.1 伴随轨道闭包的解消族.296.2 该族的分解 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{P}}$ .326.3 W-该族纤维上同调的等变结构 $\sim\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{P}}$ .33~6.4 上同调上的单值化魏尔群作用 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{\sigma}}$ . . . . . 366.5 Frobenius 态射与单值化作用.37

7 由 Kostka 多项式张成的代数中的几何解释 41

7.1 代数的描述.417.2 某些系数作为魏尔群在箭图簇的交叉上同调上的作用之迹的解释.467.3 乘法情形下的上同调解释 47

1 引言

~修正 Kostka 多项式 $K_{\lambda,\rho}(q,t)$ 是一族由某个整数 n 的分拆对所索引的二元多项式。它们是科斯特卡数的双参数变形，并出现在对称函数理论中。Garsia–Haiman[GH96] 在用舒尔函数表示修正 Macdonald 多项式时引入了这些多项式。它们是具有非负整数系数的多项式，这一事实是一个重要结果。这被称为麦克唐纳猜想 [Mac88] ，它是 Garsia–Haiman[GH93], 的 $n!$-猜想的推论，该猜想由 Haiman [Hai01]证明。在本文中，我们研究由这些多项式张成的代数。其结构系数 $c^{\lambda}_{\mu,\nu}(q,t)$ 由 Rodriguez-Villegas 在未发表的笔记中引入，其定义为

$$\widetilde{K}_{\mu,\rho}\widetilde{K}_{\nu,\rho}=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n}c^{\lambda}_{\mu,\nu}\widetilde{K}_{\lambda,\rho}.$$

其中 $\mathcal{P}_n$ n 是整数 n 的分拆集合。我们尤其关注系数 $c^{1^n}_{\mu,\ \nu}(q,t)$。它们推广了 Garsia–Haiman [GH96] 的 q,t-卡特兰数列。我们从魏尔群对彗星形拟箭图簇上同调的作用这一角度，阐释了系数 $c^{1^n}_{\mu,\ \nu}(0,t)$。此外，我们还从特征簇部分解消的上同调这一角度，给出了系数 $c^{1^n}_{\mu\ \nu,}(q,t)$ 的一个猜想性解释。我们证明了该猜想的 $q=1$ 特化情形。

几何框架如下。基域 $\mathbb{K}$ 要么是 $\mathbb{C}$ ，要么是 $\overline{\mathbb{F}}_q$一个含有 q 个元素的域 $\mathbb{F}_q$ 的代数闭包。我们考虑系数为 κ 的上同调，其中 κ 要么是 $\mathbb{C}$ ，要么是 $\overline{\mathbb{Q}}_l$ ，且 l 与 q 互素。固定若干整数$n>0$、 $g\geq 0$和 $k>0$。设 $\mathbf{O}=(\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_k)$ 是

$\mathfrak{gl}_n$，GL_n的李代数。记 $\overline{\mathcal{O}}_j$ 为类 $\mathcal{O}_j$的扎里斯基闭包。对 k元组 $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ 的特征值施加了一些一般性条件（见定义4.9）。本文的主要研究对象是以下簇：

$$\mathcal{Q}_{\overline{\boldsymbol{\mathcal{O}}}} := \Big\{(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g, X_1, \ldots, X_k) \in \mathfrak{gl}_n^{2g} \times \overline{\mathcal{O}}_1 \times \cdots \times \overline{\mathcal{O}}_k \Big| \sum_{i=1}^{g} [A_i, B_i] + \sum_{j=1}^{k} X_j = 0 \Big\} /\!/ \mathrm{GL}_n,$$

与 $[A_i, B_i] :\ = A_i B_i - B_i A_i$ 李括号。该商是关于GL_n的整体伴随作用的几何不变理论（几何不变理论）商。这些簇由 Crawley-Boevey 研究 [CB03b、CB06] ，其中亏格为 $g = 0$。对于任意亏格和半单伴随轨道，Letellier、Hausel 和 Rodriguez-Villegas [HLRV11]对其进行了研究。Letellier [Let11] 将其推广到任意类型的伴随轨道。这些簇因其可解释为中岛箭图簇而被称为彗星形箭图簇。它们是下列特征簇的加法类比：

$$\mathcal{M}_{\overline{\boldsymbol{\mathcal{C}}}} := \Big\{(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g, X_1, \ldots, X_k) \in \mathrm{GL}_n^{2g} \times \overline{\mathcal{C}}_1 \times \cdots \times \overline{\mathcal{C}}_k \Big| A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \ldots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} X_1 \ldots X_k = \mathrm{Id} \Big\} /\!/ \mathrm{GL}_n$$

与$\boldsymbol{\mathcal{C}}$ $=(\mathcal{C}_1,$ ……, $\mathcal{C}_k)$一个 k元共轭类组，位于GL_n中。 GL_n 的作用是整体共轭作用。这些簇刻画了亏格为 g 、带有 k 个穿孔点的黎曼曲面的基本群表示，并规定了这些穿孔点周围的单值化。Hausel、Letellier 和 Rodriguez-Villegas [HLRV11] 对半单共轭类进行了广泛研究，而 Letellier [Let13] 则研究了任意若尔当型的情形。与加法情形类似，为了使商具有良好性质，对$\boldsymbol{\mathcal{C}}$ 的特征值施加一个一般性条件（见定义4.10）。

一般而言，簇 $\mathcal{Q}_{\overline{\boldsymbol{\mathcal{O}}}}$ 和 $\mathcal{M}_{\overline{\boldsymbol{\mathcal{C}}}}$ 是奇异的，因此研究它们的交叉上同调很有意义。Letellier [Let11,Let13] 通过构造奇点消解$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}} \to \mathcal{Q}_{\overline{\boldsymbol{\mathcal{O}}}}$ 研究了这些簇的交叉$\tilde{}$上同调（见定义 4.12）。这些奇点消解源自 Springer 理论 [Spr76, BM83] 以及 Lusztig 的抛物诱导理论 [Lus84, Lus85,Lus86]。正因如此，这些奇点消解（在加法和乘法情形下）都在其上同调上带有魏尔群作用。这一作用称为 Springer作用。本文聚焦于加法版本（彗星形箭图簇）。最后，我们将回到特征簇，以便为系数 $c^{1^n}_{\mu\,\nu,}(q,t)$ 给出一种猜想性的解释。

在加法情形中，得益于箭图簇的视角，除了 Springer作用之外，还可以构造其他魏尔群作用。Nakajima[Nak94、Nak00], Lusztig [Lus00] 和 Maffei [Maf02]广泛研究了魏尔群在中岛箭图簇上同调上的作用。Letellier、Hausel、Rodriguez-Villegas [HLRV13] 利用这些作用证明了卡茨猜想；Letellier [Let12] 则用它们研究 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ 的幺幂特征标。Nakajima 构造的 [Nak94]魏尔群作用依赖于箭图簇的超凯勒结构。我们结合这一构造、Lusztig 的技巧（见 Letellier [Let05，命题 5.5 的证明3]）以及 Mellit [Mel19，第 8] 节中的思想，从而能够统一地描述箭图簇上同调上的单值化作用，其中箭图簇带有

半单伴随轨道；并描述箭图簇解消的上同调上的 Springer作用。

借助这一构造，我们可以通过魏尔群作用在某些彗星形箭图簇的紧支撑交叉上同调上，对系数$c_{\mu,\nu}^{1^n}(0,t)$作出解释。

定理1.1。 考虑以下类型的一个一般的4元组伴随轨道：

- $\mathcal{O}_1$ 有一个特征值，其若尔当型为 $\mu' \in \mathcal{P}_n$，
- $\mathcal{O}_2$ 有一个特征值，其若尔当型为 $\nu' \in \mathcal{P}_n$，
- $\mathcal{O}_3$ 是正则半单的，有 n 个不同特征值，
- $\mathcal{O}_4$ 是半单的，有一个重数为 $n-1$ 的特征值，另一个特征值的重数为1。

那么，相对于 $\mathcal{O}_3$ 的魏尔群是对称群 $\mathfrak{S}_n$，并且它作用在 $\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}}$ 的紧支撑交叉上同调上。设 w 是该魏尔群中的一个 n-轮换，则

$$c_{\mu,\nu}^{1^n}(0,t) = t^{\frac{-d_{\mathcal{O}}}{2}} \sum_r \operatorname{tr}\left(w, IH_c^{2r}\left(\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}}, \kappa\right)\right) t^r.$$

一般而言，在乘法情形下，只有 Springer 作用存在。Mellit 构造了单值化作用[Mel19，第 8] 节，其中仅考虑一个具有正则单值化的穿孔点。Letellier 在特征簇的部分解消的上同调上定义了 Springer 作用[Let13] 。用于描述系数 $c_{\mu,\nu}^{1^n}$ 的相关部分解消是簇 $\mathcal{M}_{\mu,\nu}$，该簇在 7.3 节中引入。群 $\mathfrak{S}_n$ 作用在 $\mathcal{M}_{\mu,\nu}$ 的紧支撑交叉上同调上。对于 $w \in \mathfrak{S}_n$，$\mathcal{M}_{\mu,\nu}$ 的 w-扭曲混合霍奇多项式为

$$IH_c^w\left(\mathcal{M}_{\mu,\nu}; u, v\right) := \sum_{i,r} u^r v^i \operatorname{tr}\left(w, IH_c^{2r,i}\left(\mathcal{M}_{\mu,\nu}, \kappa\right)\right).$$

其中 $IH^{2r}{}_c{}^i(\mathcal{M}_{\mu,\nu},\kappa)$ 是$\mathcal{M}_{\mu,\nu}$ 的紧支撑交叉上同调中次数为 i 的部分的权 $2r$ 分次。

猜想1.2。 设 w 是 $\mathfrak{S}_n$中的一个 n-循环。系数$c_{\mu,\nu}^{1^n}(q,t)$ 与$\mathcal{M}_{\mu,\nu}$ 的 w-扭曲混合霍奇多项式有关，具体如下：

$$c_{\mu,\nu}^{1^n}(q,t) = t^{\frac{-\dim \mathcal{M}_{\mu,\nu}}{2}} IH_c^w\left(\mathcal{M}_{\mu,\nu}, \frac{1}{q}, \sqrt{qt}\right).$$

在 [Bal22] 中，我们计算了特征簇的紧支撑交叉上同调的庞加莱多项式。这使我们能够证明以下定理，它是猜想1.2的庞加莱多项式特化。

定理1.3。 设 w 是 $\mathfrak{S}_n$ 中的一个 n-循环，则系数$c_{\mu,\nu}^{1^n}$ 与$\mathcal{M}_{\mu,\nu}$ 的 w-扭曲庞加莱多项式有关，具体为

$$c_{\mu,\nu}^{1^n}(1,t) = t^{\frac{-\dim \mathcal{M}_{\mu,\nu}}{2}} \sum_i t^{\frac{i}{2}} \operatorname{tr}\left(w, IH_c^i\left(\mathcal{M}_{\mu,\nu}, \kappa\right)\right).$$

致谢

这项工作是我在 Emmanuel Letellier 和 Fernando Rodriguez-Villegas 指导下完成的博士论文的一部分。我非常感谢他们二位将我引入魏尔群作用于特征簇和箭图簇上同调这一有趣课题。我也感谢 François Bergeron 提出的宝贵意见和建议。

2 对称函数

2.1 一般性

记号 2.1（分拆）。 整数 $n \in \mathbb{N}$ 的一个分拆是一个非负整数的非递增序列

$$\lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_{l(\lambda)})\ with\ |\lambda| := \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{l(\lambda)} = n.$$

λ 的长度是非零项的个数 l（λ） 。 n 的分拆集合记作 $\mathcal{P}_n$ ， 并且

$$\mathcal{P} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n.$$

$\mathcal{P}$ 上的支配序定义为：当且仅当 $|\lambda| = |\mu|$ 时， $\lambda \preceq \mu$ *an* d

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{k} \mu_i\ for\ all\ k \in \mathbb{N}.$$

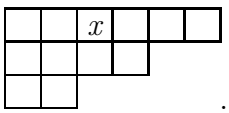
对于分拆 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ ， 我们引入以下记号

$$\mathcal{P}_\lambda := \mathcal{P}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{P}_{\lambda_l}.$$

No记号 2.2 (杨图**)**。 对于分拆 λ， 我们关联如下集合 t

$$\{(i,j)\,|1 \leq i \leq l(\lambda)\ and\ 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

这个集合称为 λ 的杨图， 它提供了一种直观理解分拆的方式。杨图的转置通过交换 i 和 j 得到。分拆 λ 的转置 λ' 是这样一个分拆：其杨图是 λ 的杨图的转置。分拆 $\lambda = (6,4,2)$ 的杨图如下图所示



.

方格 x 的坐标为(i,j) $=(1,3)$。 x 的臂长是其右侧方格的数量；在本例中为 $a(x)$ $=3$。腿长是 x下方方格的数量，因此有 $l(x) = 1$。

记号 2.3（对称函数）。 设 $X=(x_1,x_2,\ldots)$ 是一个无限变量集合，并设 $\mathrm{Sym}[X]$ 为 $(x_1,x_2,\ldots)$中的对称函数环。我们采用 ***Macdonald*** 的书 *[Mac15]*中的通常记号。特别地，按分拆索引的对称函数通常基为： m_λ, e_λ, h_λ, p_λ 和 s_λ 分别是单项式、初等、完全、幂和及 ***Schur*** 对称函数。

霍尔配对记作 $\langle\ldots,\ldots\rangle$，定义如下：

$$\langle p_\lambda, p_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda, \tag{1}$$

符号 $\delta_{\lambda,\mu}$ 在 λ 和 μ 是同一个分拆时取1，否则取0。循环类型为 λ 的置换的稳定子阶记作 z_λ，即

$$z_\lambda = \prod_{l=1}^{k} i_l^{m_l} m_l!$$

对于分拆 $\lambda = (\underbrace{i_1,\ldots i_1}_{m_1},\ldots,\underbrace{i_k,\ldots i_k}_{m_k})$。

定义 2.4 (亚当斯算子**)**。 对于 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$，亚当斯算子 p_n 是 $\mathrm{Sym}[X]$的一个环自同态。它可以通过其在幂和生成族上的取值来定义，

$$p_m\left[p_n[X]\right] := p_{mn}[X] \quad for\ m\in\mathbb{N}_{>0}\ and\ n\in\mathbb{N}.$$

亚当斯算子通常采用以下记号

$$F\left[X^n\right] := p_n\left[F[X]\right].$$

注 2.5。 更一般地，亚当斯算子可定义于任意 λ-环中。本文中出现的 λ-环只有对称函数环和多项式环，例如 $\mathbb{K}[u]$。在这类多项式环上，亚当斯算子 p_n 由 $p_n[u] := u^n$定义。

设 k 为正整数，我们考虑在 $\mathbb{Q}(q,t)$ 上、关于 k 组无穷变量的多元对称函数空间

$$\mathrm{Sym}\left[X_1,\ldots,X_k\right] := \mathbb{Q}(q,t)\otimes\mathrm{Sym}[X_1]\otimes\cdots\otimes\mathrm{Sym}[X_k].$$

系数取自该多元对称函数环的级数，可以方便地编码有关彗星形箭图簇的上同调信息。此类级数构成的环记作 $\mathrm{Sym}\left[X_1,\ldots,X_k\right][[s]]$，它是一个 λ-环，且 Adams 算子扩张为 $\mathrm{Sym}\left[X_1,\ldots,X_k\right][[s]]$ 的环自同态，其定义如下：

$$p_n\left[f(q,t)F_1\left[X_1\right]\otimes\cdots\otimes F_k\left[X_k\right]s^l\right] = f(q^n,t^n)F_1\left[X_1^n\right]\otimes\cdots\otimes F_k\left[X_k^n\right]s^{nl}.$$

定义 2.6（多重代入）。 设 F 是一个对称函数。对称函数环 $\mathrm{Sym}\left[X\right]$ 由幂和自由生成，因此 F 可以唯一地表示为幂和的多项式表达式 $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$。将p_n 视为亚当斯算子，同一个多项式表达式便定义了一个作用于任意 λ-环 Λ上的算子，该算子记作 $F[\ldots]$。对于 $G\in\Lambda$，表达式$F[G]$ 称为多重代入。

注 2.7。 与亚当斯算子类似，算子 $F[\dots]$ 自然地扩展到 $\operatorname{Sym}[X_1,\dots,X_k][[s]]$。

定义 2.8（复合指数与复合对数）。 复合指数Exp: $s\operatorname{Sym}[X_1,\dots,X_k][[s]] \to 1+\operatorname{Sym}[X_1,\dots,X_k][[s]]$ 定义为

$$\operatorname{Exp}[G] := \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{p_n[G]}{n}\right),$$

其逆运算复合对数

$$\operatorname{Log} : 1+s\operatorname{Sym}[X_1,\dots,X_k][[s]] \to \operatorname{Sym}[X_1,\dots,X_k][[s]],$$

定义为

$$\operatorname{Log}[1+G] := \sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n}p_n\left[\log(1+G)\right],$$

其中 μ 是通常的莫比乌斯函数。与普通指数和对数不同，复合指数和复合对数均以大写字母表示。

注 2.9。 复合运算满足以下关系

$$\begin{aligned}\operatorname{Exp}[F+G] &= \operatorname{Exp}[F]\operatorname{Exp}[G],\\ \operatorname{Log}[(1+F)(1+G)] &= \operatorname{Log}[1+F]+\operatorname{Log}[1+G],\\ \operatorname{Log}[\operatorname{Exp}[G]] &= G.\end{aligned}$$

2.2 对称群的特征标与对称函数

令 R_n 为由对称群的特征标张成的向量空间 $\mathfrak{S}_n$，并令 $R := \bigoplus_{n\leq 0} R_n$。在 R 上有自然的环结构和配对，使得 R自然同构于$\operatorname{Sym}[X]$。下面回顾这一众所周知的事实，更多详情请参见 [Mac15]。

设 χ 和 η 是 $\mathfrak{S}_n$的两个特征标，并设 V_χ和 V_η 分别是相应的表示。配对定义为

$$\langle\chi,\eta\rangle = \dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(V_\chi, V_\eta).$$

若 $m\neq n$，则空间 R_m 和 R_n 正交。两个特征标$\chi\in R_m$ 和 $\eta\in R_n$ 的乘积是表示 $\operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{m+n}} V_\chi\otimes V_\eta$的特征标，记作 $\chi.\eta$。

对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的不可约特征标由 n的分拆标记，记作 $(\chi_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{P}_n}$。与特征标 χ_λ 对应的不可约表示记作 V_λ。标记方式与 Macdonald 的书[Mac15], 中的相同，因此 $V_{(n)}$ 是平凡表示，而$V_{(1^n)}$ 是符号表示。

命题 2.10。 定义特征映射 $\operatorname{ch}: R\to\operatorname{Sym}[X]$，其定义为 $\operatorname{ch}(\chi_\lambda) := s_\lambda$。它是 R 与 $\operatorname{Sym}[X]$ 之间的同构，并且与乘积和配对相容；$\operatorname{Sym}[X]$ 上赋予霍尔配对。

证明。 参见 Macdonald [Mac15,I-7]。 □

注释 2.11。 上一个命题赋予了对称函数一种表示论意义。考虑 V 一个 $\mathfrak{S}_n$ 的表示，其特征为 χ_V，那么

- 配对 $\langle s_\lambda, \mathrm{ch}(\chi_V)\rangle$ 给出了不可约表示V_λ 在表示 V中的重数。

- 配对 $\langle p_\mu, \mathrm{ch}(\chi_V)\rangle$ 给出了循环类型为 μ 的元素在表示 V上的迹。

定义 2.12 （弗罗贝尼乌斯特征）。 我们通过加入变量 q 和 t 来记录次数，将特征映射 ch扩展到 $\mathfrak{S}_n$ 的双分次表示。对称群 $V = \bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} V_{i,j}$ 的一个双分次表示对应于 $\mathbb{Z}(q,t)$上的一个对称函数。这个对称函数定义为

$$\mathrm{ch}(V) = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n}\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \langle V_{i,j}, \chi_\lambda\rangle\, q^i t^j s_\lambda, \tag{2}$$

其中，我们将表示 $V_{i,j}$ 与其特征视为相同，因此$\langle V_{i,j}, \chi_\lambda\rangle$是类型为 λ 的不可约表示在 $V_{i,j}$中的重数。对称函数 $\mathrm{ch}(V)$ 称为双分次表示 V的 q,t-分次弗罗贝尼乌斯特征。

2.3 正交性与 Macdonald 多项式

本节回顾修正 Macdonald 多项式的刻画，遵循 Mellit [Mel20，Mel18]。

2.3.1 关于$\mathrm{Sym}\,[X]$上数量积的一般性论述

Sym 上的数量积 $[X]$ 是一个非退化的 $\mathbb{Q}(q,t)$-双线性型

$$\begin{array}{rccc} (\dots,\dots)^S & : & \mathrm{Sym}\,[X]\times\mathrm{Sym}\,[X] & \to & \mathbb{Q}(q,t) \\ & & F, G & \mapsto & (F[X], G[X])^S. \end{array}$$

通过在下标中指定作用的变量，可以将其扩展到多元对称函数

$$(\dots,\dots)^S_X \;:\; \mathrm{Sym}[X, Y_1,\cdots,Y_k]\times\mathrm{Sym}[X, Z_1,\cdots,Z_l] \;\to\; \mathrm{Sym}[Y_1,\cdots,Y_k, Z_1,\cdots,Z_l],$$

在纯张量上，它写作

$$(F[X]\otimes F'[Y_1,\cdots,Y_k], G[X]\otimes G'[Z_1,\cdots,Z_l])^S_X := (F[X], G[X])^S G'[Z_1,\cdots,Z_l]F'[Y_1,\cdots,Y_k].$$

假设 2.13 (齐次性**)**。 考虑以分拆为指标的对称函数族，例如 $(u_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{P}}$时，总是假设对称函数 u_λ 是次数为 $|\lambda|$的齐次函数。

定义 2.14 (再生核**)**。 设 $(u_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{P}}$ 和 $(v_\mu)_{\mu\in\mathcal{P}}$ 是$\mathrm{Sym}[X]$ 的两个基，它们关于数量积 $(\dots,\dots)^S$互为对偶。那么，由下式定义的元素 $K_S[X,Y]\in\mathrm{Sym}[X,Y]$

$$K_S[X,Y] := \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} u_\lambda[X]v_\lambda[Y],$$

它称为数量积$(\dots,\dots)^S$的再生核。它仅取决于数量积，而不取决于对偶基的选择，并且满足

$$(K_S[X,Y], F[X])^S_X = F[Y].$$

2.3.2 霍尔配对与(q,t)-形变

注 2.15. 回顾一下，霍尔配对满足

$$\langle p_\lambda, p_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda,$$

因此$(p_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{P}}$ 和 $\left(z_\mu^{-1}p_\mu\right)_{\mu\in\mathcal{P}}$ 是关于此配对的对偶基。这给出了霍尔配对的再生核：

$$\mathrm{Exp}[XY] = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} p_\lambda[X]\frac{p_\lambda[Y]}{z_\lambda} = \sum_n h_n[XY].$$

定义 2.16 ((q,t)-霍尔配对)。 霍尔配对的(q,t)-形变定义为

$$(F[X],G[X])^{q,t} \;:=\; \langle F[X], G[(q-1)(1-t)X]\rangle\,.$$

注 2.17。 (q,t)-霍尔配对的再生核为

$$\mathrm{Exp}\left[\frac{XY}{(q-1)(1-t)}\right].$$

命题 2.18。 设 $M_{\preceq\lambda}$ 是由满足 $\mu\preceq\lambda$ 的单项式对称函数 $m_\mu[X]$ 张成的$\mathrm{Sym}\,[X]$ 子空间。麦克唐纳多项式 $\left(\tilde{H}_\lambda[X;\ q,t]\right)_{\lambda\in\mathcal{P}}$由以下条件唯一确定：

- *Orthogonality* $(\tilde{H}_\lambda[X;q,t],\tilde{H}_\mu[X;q,t])^{q,t}=0$ *if* $\lambda\neq\mu$.
- 三角性条件 $H_\lambda[X(t-1)]\in M_{\preceq\lambda}$ 或 $\tilde{H}_\lambda[X(q-1)]\in M_{\preceq\lambda'}$之一。
- 归一化 $H[1;\ q,\ t]=1$。

此外

$$a_\lambda(q,t) := \left(\tilde{H}_\lambda[X;q,t],\tilde{H}_\lambda[X;q,t]\right)^{q,t} = \prod_{x\in\lambda}(q^{a(x)+1}-t^{l(x)})(q^{a(x)}-t^{l(x)+1}), \qquad (3)$$

其中，乘积遍历 λ 和 $a(x)$ 的杨图，$l(x)$ 是臂长，而*2.1*)

证明。 [根据20] 推论 2.8。 □

修正麦克唐纳多项式 $\tilde{H}_\lambda[X;\ q,\ t]$ 最初由 Garsia–Haiman [GH96] 引入，作为 Macdonald 定义的其他多项式的变形 [Mac15]。此处回顾的定义源自 [Mel20]。

定义 2.19 (修正 Kostka 多项式)。 修正 *Kostka* 多项式$\left(\widetilde{K}_{\lambda,\rho}(q,\ t)\right)_{\lambda,\ \rho\in\mathcal{P}_n}$ 定义为舒尔函数基与修正麦克唐纳多项式基之间过渡矩阵的系数

$$\tilde{H}_\rho[X;q,t] = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n}\widetilde{K}_{\lambda,\rho}(q,t)s_\lambda.$$

记号 2.20。 变量$(q,\ t)$ 通常省略不写，修正 *Kostka* 多项式记作 $K_{\lambda,\ \rho}$ 修正 *Macdonald* 多项式记作 $\tilde{H}_\lambda[X]$。

2.4 Garsia–Haiman 的一个结果

本节余下部分将介绍 Garsia– Haiman 的一项结果 [GH96，定理 3.4]。这项结果对于研究后续章节中的系数 $c_{\mu\,\nu,}^{1^n}$ 十分重要。尽管没有新的结果，为方便读者，本文仍收录了部分证明。

命题 2.21. 算子 Δ_1 定义为

$$\Delta_1 F\left[X\right] := F[X] - F\left[X + \frac{(1-q)(1-t)}{z}\right] \mathrm{Exp}\left[-zX\right]|_{z^0} ,$$

其中，$|_{z^0}$ 表示取 z^0前面的系数。该算子作用于修正的 *Macdonald* 多项式时满足

$$\Delta_1 \tilde{H}_\lambda\left[X;q,t\right] = (1-t)(1-q)\sum_{(i,j)\in\lambda} q^{j-1}t^{i-1}\tilde{H}_\lambda\left[X;q,t\right].$$

此外，以下关系成立

$$\tilde{H}_\lambda\left[1-u;q,t\right] = \prod_{(i,j)\in\lambda}\left(1-uq^{j-1}t^{i-1}\right). \tag{4}$$

证明。[GH96，推论 3.1 和定理 3。2] □

引理 2.22. u的一阶项

$$\tilde{H}_\lambda\left[1+u;q,t\right] = 1 + u\sum_{(i,j)\in\lambda} q^{j-1}t^{i-1} + \mathcal{O}(u^2). \tag{5}$$

证明。 对于多重代入应当谨慎：要计算（5）的左边，不能只将（4）中的 $-u$ 替换为 u。事实上， $p_n[1-u] = 1-u^n$ 和$p_n[1+u] = 1+u^n$，因此在后者中用 $-u$ 替换 u，只有当 n 为奇数时，才会得到前者~。我们用 $d_{\lambda,\mu}$ 表示 H_λ按幂和基（p_κ）$_{\kappa\in\mathcal{P}_n}$展开时 p_μ 的系数，那么

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_\lambda\left[1-u;q,t\right] &= \sum_{|\mu|=|\lambda|} d_{\lambda,\mu}\prod_i (1-u^{\mu_i}),\\
\tilde{H}_\lambda\left[1+u;q,t\right] &= \sum_{|\mu|=|\lambda|} d_{\lambda,\mu}\prod_i (1+u^{\mu_i}).
\end{aligned}$$

最后，我们比较 u 前面的系数，并利用（4）。 □

引理 2.23。 设 $F\in \mathrm{Sym}_n\left[X\right]$ 是一个次数为 $n\geq 2$的对称函数。那么， $F[1+u]$ 中 u 前面的系数由与一个完全对称函数的霍尔配对给出

$$F[1+u]|_u = \left\langle h_{(n-1,1)}[X], F[X]\right\rangle .$$

证明。 F 的单项式展开中 m_λ 的系数记为 c_λ。多重代入 $F[1+u]$ 对应于对变量集 $(1,u,0,\dots)$ 上的对称函数 F求值，此外

$$F[1+u] = \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda m_\lambda[1+u].$$

因此，只有长度至多为二的 m_λ 才会有贡献，而 u 前面的系数为$c_{(n-1,1)}$。由于完全对称函数与单项对称函数关于霍尔配对互为对偶，结论得证。

□

引理 2.24。 设 $F \in \mathrm{Sym}_n[X]$ 是一个次数为 n 的对称函数，则

$$\left.\frac{F[1-u]}{1-u}\right|_{u=1} = \langle F[X], p_n[X]\rangle,$$

其中 $|_{u=1}$ 表示令 $u=1$。

证明。 设 d_λ 是 F的幂和展开中 p_λ 前面的系数，

$$\begin{aligned} F[1-u] &= \sum_{|\lambda|=n} d_\lambda p_\lambda[1-u] \\ &= \sum_{|\lambda|=n} d_\lambda \prod_i (1-u^{\lambda_i}). \end{aligned}$$

除以 $(1-u)$ 并令 $u=1$ 后，所有来自长度至少为二的分拆的项都会消失，因为 $(1-u)^2$ 整除这些项。因此我们有

$$\left.\frac{F[1-u]}{1-u}\right|_{u=1} = d_{(n)} \left.\frac{1-u^n}{1-u}\right|_{u=1} = n d_{(n)}.$$

n-循环在 $\mathfrak{S}_n$ 中的中心化子的大小为 $z_{(n)} = n$，由幂和的正交性可得结论（1）。

□

现在我们可以陈述并回顾 Garsia–Haiman 的一个重要定理的证明。

定理 2.25 (Garsia–Haiman [GH96] 定理 3.4)。 我们用 $\prod'_{(i,j)\in\lambda}$ 表示对分拆 λ 的杨图中除左上角外的各项求积，其中$(i,j) = (1,1)$。以下恒等式成立

$$(-1)^{n-1} s_{(1^n)}[X] = (q-1)(1-t) \sum_{|\lambda|=n} \frac{\sum_{(i,j)\in\lambda} q^{j-1}t^{i-1} \prod'_{(i,j)\in\lambda}(1-q^{j-1}t^{i-1}) \tilde{H}_\lambda[X]}{a_\lambda(q,t)}. \tag{6}$$

证明。 （(q,t)-霍尔配对的再生核在注记 2.17中给出。 n 项的次数为 $\mathrm{Exp}[Z]$。基 $h_n[Z]$相对于此数量积与 $\left(\tilde{H}_\lambda[X]\right)_{\lambda\in\mathcal{P}}$ 和 $\left(\frac{\tilde{H}_\lambda[X]}{a_\lambda}\right)_{\lambda\in\mathcal{P}}$ 互为对偶。根据定义 2.14 和注记 2.15、2.17，项的次数为 该（(q,t)-霍尔配对的再生核为

$$h_n\left[\frac{XY}{(q-1)(1-t)}\right] = \sum_{|\lambda|=n} \frac{\tilde{H}_\lambda[X]\tilde{H}_\lambda[Y]}{a_\lambda}.$$

现在将 h_n 按幂和基展开，然后进行代换 $Y = 1-u$并应用（4）

$$\sum_{|\mu|=n} z_\mu^{-1} p_\mu\left[\frac{X(1-u)}{(q-1)(1-t)}\right] = \sum_{|\lambda|=n} \frac{\tilde{H}_\lambda[X]\prod_{(i,j)\in\lambda}(1-uq^{j-1}t^{i-1})}{a_\lambda}.$$

除以 $(1-u)$，令 $u=1$，将引理 2.24 应用于左侧，并显式计算右侧：

$$\sum_{|\mu|=n} z_\mu^{-1}\left(p_\mu\left[\frac{XY}{(q-1)(1-t)}\right], p_{(n)}[Y]\right)_Y = \sum_{|\lambda|=n} \frac{\tilde{H}_\lambda[X]\prod'_{(i,j)\in\lambda}(1-q^{j-1}t^{i-1})}{a_\lambda}.$$

由于 Adams 算子是环同态，我们有

$$p_\mu\left[\frac{XY}{(q-1)(1-t)}\right] = p_\mu\left[\frac{X}{(q-1)(1-t)}\right] p_\mu[Y],$$

于是根据幂和的正交性（1）

$$p_{(n)}\left[\frac{X}{(q-1)(1-t)}\right] = \sum_{|\lambda|=n} \frac{\tilde{H}_\lambda[X]\prod'_{(i,j)\in\lambda}(1-q^{j-1}t^{i-1})}{a_\lambda}. \tag{7}$$

将算子 Δ_1 应用于（7）。根据命题 2.21，算子 Δ_1 在麦克唐纳多项式基下是对角的，由此我们得到（6）右边的表达式，差一个符号。我们来计算左边

$$\begin{aligned}\Delta_1 p_{(n)}\left[\tfrac{X}{(q-1)(1-t)}\right] &= p_{(n)}\left[\tfrac{X}{(q-1)(1-t)}\right] - p_{(n)}\left[\tfrac{X}{(q-1)(1-t)}-\tfrac{1}{z}\right]\mathrm{Exp}[-zX]\,|_{z^0}\\ &= p_{(n)}\left[\tfrac{X}{(q-1)(1-t)}\right] - p_{(n)}\left[\tfrac{X}{(q-1)(1-t)}\right]\mathrm{Exp}[-zX]\,|_{z^0} + p_{(n)}\left[\tfrac{1}{z}\right]\mathrm{Exp}[-zX]\,|_{z^0}\\ &= \tfrac{1}{z^n}\,\mathrm{Exp}[-zX]\,|_{z^0}\,.\end{aligned}$$

第二行用到了 Adams 算子 p_n 是环同态，而最后一行用到了它将 z 提升到 n次幂。现在 $\mathrm{Exp}[-zX]$ 是 $\mathrm{Exp}[zX]$ 的逆，因此若 X 是由变量（x_1、x_2、.....）构成的无限变量集，则

$$\mathrm{Exp}[-zX] = \prod_i (1-zx_i).$$

z^n 前面的系数是 $(-1)^n e_n[X]$，因此

$$(-1)^n e_n[X] = -(q-1)(1-t)\sum_{|\lambda|=n} \frac{\sum_{(i,j)\in\lambda} q^{j-1}t^{i-1}\prod'_{(i,j)\in\lambda}(1-q^{j-1}t^{i-1})\tilde{H}_\lambda[X]}{a_\lambda}.$$

最后，注意到 $e_n = s_{(1^n)}$。 □

3 几何背景

本节回顾有关交叉上同调的经典结果。主要参考文献是 Beilinson–Bernstein–Deligne–Gabber [BBDG18]。

3.1 可构造层有界导出范畴的记号与一般性质

域 $\mathbb{K}$要么是 $\mathbb{C}$，要么是含有 q 个元素的有限域 $\mathbb{F}_q$ 的代数闭包 $\overline{\mathbb{F}}_q$。设 X 是定义在 $\mathbb{K}$ 上的代数簇，l 是一个不同于 $\mathbb{K}$的特征的素数。我们用 κ_X 表示 X 上的常值 l-adic 层，其系数取自

$\overline{\mathbb{Q}}_l$。若不会引起混淆，我们就直接写 κ，而不写 κ_X。对于 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$，我们也可以考虑解析拓扑下系数为复数的常值层。

记号 3.1. κ-可构造层在 X 上的有界导出范畴记为 $\mathcal{D}_c^b(X)$。其对象由层复形 K 表示，其中上同调层 $\mathcal{H}^iK$ 是 κ上的可构造层，且只有有限多个非零。设 Y 是定义在 $\mathbb{K}$ 上的一个簇，并设 $f\colon X\to Y$ 是一个态射，则有通常的四个函子

$$f^*, f^!: \mathcal{D}_c^b(Y)\to\mathcal{D}_c^b(X),$$
$$f_*, f_!: \mathcal{D}_c^b(X)\to\mathcal{D}_c^b(Y).$$

定理 3.2 (基变换**)**。设 $K\in\mathcal{D}_c^b(Y')$，并考虑一个笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & Y' \\ {\scriptstyle b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y, \end{array} \tag{8}$$

那么自然态射 $f^*a_!K\to b_!g^*K$ 是一个同构。

注 3.3. 设 $\alpha\hookrightarrow X$ 是 X 的一个几何点，且 β 是它在 f下的像。簇 $X_\alpha:=X'\times_X\alpha$ 是 b 在 α 上的纤维，而簇 $Y_\beta:=Y'\times_Y\beta$是 a 在 β上的纤维。笛卡尔方块 (8) 诱导出如下笛卡尔方块，其中 h 是一个同构

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \xrightarrow{h} & Y_\beta \\ \downarrow & & \downarrow \\ \alpha & \longrightarrow & \beta. \end{array}$$

该图表的基变换同构等同于 α 处图表 (8) 的基变换同构的茎，

$$f^*a_!K_\alpha\to b_!g^*K_\alpha.$$

这个态射不过是由紧支集上同调的函子性所得到的态射

$$H_c^\bullet(Y_\beta,K)\xrightarrow{h^*}H_c^\bullet(X_\alpha,h^*K).$$

定义 3.4。设 W 是一个从左侧作用于簇 X上的有限群。对于所有 $w\in W$，存在一个态射 $w:\ X\to X$。W 在元素$K\in\mathcal{D}_c^b(X)$上的作用，是指满足对所有 w，$w'\in W$均有同构 ϕ_w：$w^*K\cong K$这一组数据，

$$\phi_{w'w}=\phi_w w^*(\phi_{w'}), \tag{9}$$

并且满足 $\phi_1=\mathrm{Id}$。我们称复形 K 是 W-等变的。

备注 3.5. 当 W 对 X 的作用是平凡的时，W 对 $K\in\mathcal{D}_c^b(X)$的作用只不过是从对群 W^{op} 到自同构群$\mathrm{Aut}(K)$的一个群态射。

命题 3.6. 设 $f\colon X \to Y$ 是簇之间的一个 W-等变态射，这些簇带有左 W-作用。设 W 通过态射 $\phi_w\colon w^*K \cong K$作用于 K，则 W 作用于$f_!K$。

证明。 基变换公式使得可以对所有 $w \in W$ 定义作用，并给出一个同构 $w^* f_! K \to f_! w^* K$。将此同构与 $f_!\phi_w$ 复合，得到一个同构 $\phi_w\colon \ w^* f_! K \to f_! K$。相容性（9）由基变换的函子性得出。 □

3.2 交叉上同调

定义 3.7 (交叉复形)。 设 $Y \hookrightarrow X$ 是一个闭嵌入，且$j\colon \ U \hookrightarrow Y$ 是一个开嵌入。假设 U 是光滑、不可约的，且$\overline{U} = Y$。设 ξ 是 U上的一个局部系统。交叉复形 $\underline{\mathcal{IC}}^{\bullet}_{Y,\,\xi}$ 是 $\mathcal{D}^b_c(Y)$ 中的唯一（在同构意义下）元素 K，其特征由以下条件确定：

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^i K &= 0 \quad if \quad i < -\dim Y, \\ \mathcal{H}^{-\dim Y} K_{|U} &= \xi, \\ \dim\left(\operatorname{Supp} \mathcal{H}^i K\right) &< -i \quad if \quad i > -\dim Y, \\ \dim\left(\operatorname{Supp} \mathcal{H}^i D_Y K\right) &< -i \quad if \quad i > -\dim Y. \end{aligned}$$

我们也将其延拓$j_*\underline{\mathcal{IC}}^{\bullet}_{Y,\,\xi}$记为 $\underline{\mathcal{IC}}^{\bullet}_{Y,\,\xi}$。

注 3.8 (延续原理)。 的交叉复形 ξ 也可定义为中间延拓 $\underline{\mathcal{IC}}^{\bullet}_{Y,\,\xi} = j_{!*}\xi$。此外，函子 $j_{!*}$ 是全忠实的（参见 *Kiehl-Weissauer [KW01, III - 推论 5。11]*）。

注记 3.9. 交叉复形不依赖于 Y 中光滑开子集的选择。若未指定局部系统 ξ，则取常值层 κ_U，且 $\underline{\mathcal{IC}}^{\bullet}_X :=\underline{\mathcal{IC}}^{\bullet}_{X,\,\kappa_U}$。我们用 $\mathcal{IC}^{\bullet}_X$ 表示

记号 3.10. 移位交叉复形为

$$\mathcal{IC}^{\bullet}_{X,\xi} := \underline{\mathcal{IC}}^{\bullet-\dim X}_{X,\xi} \ and \ \mathcal{IC}^{\bullet}_X := \underline{\mathcal{IC}}^{\bullet-\dim X}_X.$$

定义 3.11 （交叉上同调）。 设 $p\colon \ X \to \operatorname{Spec}\mathbb{K}$ 为结构态射，且 k 为整数。 X 的第 k 个交叉上同调空间为

$$IH^k(X,\kappa) := \mathcal{H}^{k-\dim X} p_* \underline{\mathcal{IC}}^{\bullet}_X = \mathcal{H}^k p_* \mathcal{IC}^{\bullet}_X$$

X 的第 k 个紧支撑交叉上同调空间为

$$IH^k_c(X,\kappa) := \mathcal{H}^{k-\dim X} p_! \underline{\mathcal{IC}}^{\bullet}_X = \mathcal{H}^k p_! \mathcal{IC}^{\bullet}_X$$

对于 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$，Saito [Sai86] 证明了交叉上同调空间带有混合霍奇结构。因此，在 $IH^k_c(X,\mathbb{Q})$ 上存在一个称为权滤过、记作 $W^k_{\cdot}$ 的递增有限滤过，使得复化后的商 $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} W^k_r / W^k_{r-1}$ 带有权为 r 的纯霍奇结构。该结构的霍奇数记作 $h^{i,j\,k}_c(X)$ $= \dim\ IH^{i,\ j\,k}_c(X,\mathbb{C})$，并满足 $i+j=r$。

定义 3.12。 混合霍奇结构编码在混合霍奇多项式中，

$$IH_c(X;x,y,v) := \sum_{i,j,k} h_c^{i,j,k}(X) x^i y^j v^k. \tag{10}$$

这个多项式有一个重要的特化，即庞加莱多项式

$$P_c(X;v) := IH_c(X;1,1,v) = \sum_k \dim IH_c^k(X,\kappa) v^k. \tag{11}$$

本文中的“庞加莱多项式”始终指“紧支撑交叉上同调的庞加莱多项式”。

4 主要对象与记号

4.1 $\mathfrak{gl}_n$中的伴随轨道

4.1.1 伴随轨道的记号

本文旨在将一些几何对象与组合数据联系起来。第一步是众所周知的按若尔当型标记伴随轨道的方法；我们在此回顾这一方法，以便固定记号。

对于整数 r 以及 $z \in \mathbb{K}$，我们用 $J_r(z) \in \mathfrak{gl}_r$ 表示大小为 r、特征值为 z的若尔当块，因此 $J_r(z) - z\,\mathrm{Id}_r$ 是阶数为 r的幂零矩阵。令 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s)$ 为整数 m 的一个分拆，并令 $z \in \mathbb{K}$。令 $J_\mu(z)$ 为特征值为z 、若尔当块大小由 $(\mu_j)_{1 \le j \le s}$给出的矩阵，

$$J_\mu(z) := \begin{pmatrix} J_{\mu_1}(z) & & & \\ & J_{\mu_2}(z) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\mu_s}(z) \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_m .$$

令 $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_l) \in \mathcal{P}_n$为 n的一个分拆，引入以下记号

$$\mathcal{P}_\nu := \mathcal{P}_{\nu_1} \times \mathcal{P}_{\nu_2} \times \cdots \times \mathcal{P}_{\nu_l}.$$

考虑对角矩阵 σ,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \mathrm{Id}_{\nu_1} & & & \\ & \sigma_2 \mathrm{Id}_{\nu_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_l \mathrm{Id}_{\nu_l} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

其中，对于 $i \neq j$，有 $\sigma_i \neq \sigma_j$，因此 ν_i 是特征值 $\sigma_i \in \mathbb{K}$的重数。

记号 4.1. 考虑元素 $\underline{\mu} = \left(\mu^1, \ldots, \mu^l\right)$ 属于 $\mathcal{P}_\nu$，我们用 $\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}$ 表示矩阵的伴随轨道

$$J_{\underline{\mu},\sigma} := \begin{pmatrix} J_{\mu^1}(\sigma_1) & & & \\ & J_{\mu^2}(\sigma_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\mu^l}(\sigma_l). \end{pmatrix}.$$

回顾一个众所周知的命题。

命题 4.2. 伴随轨道 $\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}$ 的扎里斯基闭包为

$$\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu},\sigma} = \bigsqcup_{\underline{\rho} \preceq \underline{\mu}} \mathcal{O}_{\underline{\rho},\sigma},$$

并集取遍以下集合： l-元组 $\underline{\rho} = \left(\rho^1, \ldots, \rho^l\right)$ 满足 $\rho^j \preceq \mu^j$ 对于 $1 \leq j \leq l$。分拆上的支配序已在 *2.1* 中回顾。

在 $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上，伴随轨道有更精确的描述。记 F 为 $\mathfrak{gl}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ 的弗罗贝尼乌斯自同态，即将系数提升至 q 次幂。

定义 4.3 (F-稳定伴随轨道的类型)。 设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathfrak{gl}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ 中一个 F-稳定的伴随轨道，即满足 $F(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$ 的轨道。那么， $\mathcal{O}$ 中在弗罗贝尼乌斯作用下的不动点集合 $\mathcal{O}^F$ 非空。 $\mathcal{O}$ 的特征多项式的系数属于 $\mathbb{F}_q$ ，因此其位于 $\overline{\mathbb{F}}_q$ 中的特征值会被弗罗贝尼乌斯置换。 $\mathcal{O}$ 的谱（含重数）为

$$\left(\underbrace{\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_1^{q^{d_1-1}}\right), \ldots, \left(\gamma_1, \ldots, \gamma_1^{q^{d_1-1}}\right)}_{m_1}, \ldots, \underbrace{\left(\gamma_l, \ldots, \gamma_l^{q^{d_l-1}}\right), \ldots, \left(\gamma_l, \ldots, \gamma_l^{q^{d_l-1}}\right)}_{m_l} \right),$$

其中 $\gamma_i \in \overline{\mathbb{F}}_q$ 满足：对于 $i \neq j$，有 $\gamma_i^{q^{d_i-1}} \neq \gamma_i$、 $\gamma_i^{q^{d_i}} = \gamma_i$ 和 $\gamma_i \neq \gamma_j$ 。于是，轨道 $\mathcal{O}$ 确定了分拆 $\omega^i \in \mathcal{P}_{m_i}$ ，给出特征值 $\left(\gamma_i, \ldots, \gamma_i^{q^{d_i-1}}\right)$ 的弗罗贝尼乌斯轨道的若尔当块大小。忽略顺序，它定义了 $\mathbb{Z}_{>0} \times \mathcal{P}$ 中的一个序列 $\omega = (d_1, \omega_1) \ldots (d_l, \omega_l)$ ，称为该伴随轨道的类型。

4.1.2 伴随轨道扎里斯基闭包的解消

本节回顾伴随轨道闭包的解消构造。该构造的参考文献包括 Kraft–Procesi [KP 81], Nakajima [Nak98、Nak01], Crawley-Boevey [CB03a、CB03b] 以及 Shmelkin [Shm09] （另见 Letellier[Let11]）。

沿用上一节的记号，考虑一个伴随轨道 $\mathcal{O}_{\underline{\mu},\ \sigma}$。矩阵 $\sigma \in \mathfrak{gl}_n$ 如式（12）所示为对角矩阵，并记 M 为它在 GL_n 中的稳定子，

$$M = \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_{\nu_1} & 0 & \\ 0 & \mathrm{GL}_{\nu_2} & \\ \vdots & 0 & \ddots \end{pmatrix}.$$

设 $\underline{\mu} = (\mu^1, \ldots, \mu^l) \in \mathcal{P}_\nu$， 使得 μ^i 是整数 ν_i 的一个分拆。分拆 μ^i 的转置记作 $\mu^{i\prime} = \left(\mu_1^{i\prime}, \mu_2^{i\prime}, \ldots\right)$。设 L 是 GL_n 的一个子群，由大小为 $\mu_r^{i\prime}$ 的块组成的分块对角矩阵构成；它是 M 的一个子群，具有

以下形式

$$L=\begin{pmatrix}\overbrace{\begin{matrix}\mathrm{GL}_{\mu_1^{1\prime}} & 0\\ 0 & \mathrm{GL}_{\mu_2^{1\prime}}\\ \vdots & 0 & \ddots\end{matrix}}^{\nu_1} & & \\ & \overbrace{\begin{matrix}\mathrm{GL}_{\mu_1^{2\prime}} & 0\\ 0 & \mathrm{GL}_{\mu_2^{2\prime}}\\ \vdots & 0 & \ddots\end{matrix}}^{\nu_2} & \\ & & \ddots\end{pmatrix}.$$

记号 4.4。 对于分拆 $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_l)$，定义

$$\mathfrak{S}_\nu:=\mathfrak{S}_{\nu_1}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{\nu_l}\quad and\quad \mathrm{GL}_\nu:=\mathrm{GL}_{\nu_1}\times\cdots\times\mathrm{GL}_{\nu_l}\,.$$

现在，对于 $\underline{\rho}=(\rho^1,\ldots,\rho^l)\in\mathcal{P}_\nu$，我们使用以下记号，

$$\mathrm{GL}_{\underline{\rho}}:=\mathrm{GL}_{\rho^1}\times\ldots\mathrm{GL}_{\rho^l}=\prod_{r,s}\mathrm{GL}_{\rho_s^r}$$

and

$$\mathfrak{S}_{\underline{\rho}}:=\mathfrak{S}_{\rho^1}\times\ldots\mathfrak{S}_{\rho^l}=\prod_{r,s}\mathfrak{S}_{\rho_s^r}.$$

那么，先前引入的 ***Levi*** 子群满足 $M\cong\mathrm{GL}_\nu$ 和 $L\cong\mathrm{GL}_{\underline{\mu}'}$。

记 P 为以 L 为 Levi 因子的分块上三角矩阵抛物子群，则 $P=LU_P$，其中

$$U_P=\begin{pmatrix}\overbrace{\begin{matrix}\mathrm{Id}_{\mu_1^{1\prime}} & *\\ 0 & \mathrm{Id}_{\mu_2^{1\prime}}\\ \vdots & 0 & \ddots\end{matrix}}^{\nu_1} & & \\ & \overbrace{\begin{matrix}\mathrm{Id}_{\mu_1^{2\prime}} & *\\ 0 & \mathrm{Id}_{\mu_2^{2\prime}}\\ \vdots & 0 & \ddots\end{matrix}}^{\nu_2} & \\ & & \ddots\end{pmatrix},$$

而这个 Levi 分解对应的李代数版本为 $\mathfrak{p}=\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{u}_P$。

命题 4.5（共轭类的扎里斯基闭包的解消）。 考虑

$$\widetilde{\mathbb{Y}}_{L,P,\sigma}:=\left\{(X,gP)\in\mathfrak{gl}_n\times\mathrm{GL}_n/P\,\middle|\,g^{-1}Xg\in\sigma+\mathfrak{u}_P\right\}.$$

$\widetilde{\ }$到第一因子 $\mathbb{Y}_{L,\ P,\ \sigma}\to\mathfrak{gl}_n$ 的投影的像是伴随轨道 $\mathcal{O}_{\underline{\mu},\ \sigma}$的扎里斯基闭包。此外，下面的映射是奇点消解

$$\begin{array}{rccc}p^\sigma & : & \widetilde{\mathbb{Y}}_{L,P,\sigma} & \to & \overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu},\sigma}\\ & & (X,gP) & \mapsto & X\end{array}.$$

注记 4.6. 如果 M （定义为 σ 在 GL_n中的稳定子）恰好是 L，那么伴随轨道 $\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}$ 是半单的。 $\mathfrak{gl}_n$ 中的半单轨道是闭的且光滑的；对于这类轨道， p^σ 是同构。

注记 4.7。 分解定理和 *Springer* 理论（或更一般地说，*Lusztig* 的抛物诱导 *[Lus84*、*Lus85*、*Lus86]*）通过魏尔群表示，为前述奇点消解提供了更多信息。对于G 约化群以及 T 其中的极大环面 G 魏尔群记作

$$W_G := N_G(T)/T.$$

M 的魏尔群是$W_M \cong \prod_i \mathfrak{S}_{\nu_i}$ ，令$V_{\underline{\rho}}$ 为W_M的表示$\bigotimes_i V_{\rho^i}$ 。 L 的魏尔群是 $W_L \cong \prod_{i,\ j} \mathfrak{S}_{\mu_j^{i\prime}}$ 令 ϵ 为其符号表示。*Lusztig* 的抛物诱导给出如下分解

$$H_c^{\bullet+d_{\underline{\mu}}}\left(\widetilde{\mathbb{Y}}_{L,P,\sigma};\kappa\right) = \bigoplus_{\underline{\rho}\preceq\underline{\mu}} \mathrm{Hom}_{W_M}\left(\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_M}\epsilon, V_{\underline{\rho}}\right) \otimes H_c^{\bullet+d_{\underline{\rho}}}\left(\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\rho},\sigma};\kappa\right),$$

其中 $d_{\underline{\mu}}$ 是$\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu}\text{的维数},\ \sigma}$。*Letellier* *[Let11]* 构造了相对魏尔群在

在空间 $\mathrm{Hom}_{W_M}\left(\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_M}\epsilon,\ V_{\underline{\rho}}\right)$上$W_M(L) = N_M(L)/L$。

4.2 簇 $\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu},\ \sigma}}$ 及其解消

我们感兴趣的簇是加法类比物，它们对应于紧黎曼曲面基本群表示的特征簇，其中曲面带有 k 个穿孔点。Crawley-Boevey [CB03b、CB06]在$g = 0$的情形下研究了这些簇；Hausel、Letellier 和 Rodriguez-Villegas [HLRV11] 研究了半单伴随轨道的情形，而 Letellier [Let11] 研究了一般情形。

对每个穿孔点，固定一个伴随轨道 $\mathcal{O}_{\underline{\mu}^j,\ \sigma^j} \subset \mathfrak{gl}_n$ 。用粗体符号表示 k 元组：

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\mu} & := & \left(\underline{\mu}^1, \ldots, \underline{\mu}^k\right), \\ \boldsymbol{\sigma} & := & \left(\sigma^1, \ldots, \sigma^k\right), \\ \mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}} & := & \left(\mathcal{O}_{\underline{\mu}^1,\sigma^1}, \ldots, \mathcal{O}_{\underline{\mu}^k,\sigma^k}\right). \end{array} \tag{13}$$

定义 4.8 （彗星形箭图簇）。考虑簇

$$\mathcal{V}_{\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu},\sigma}} := \left\{(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g, X_1, \ldots, X_k) \in \mathfrak{gl}_n^{2g} \times \overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu}^1,\sigma^1} \times \cdots \times \overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu}^k,\sigma^k} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{g}[A_i, B_i] + \sum_{j=1}^{k} X_j = 0\right\}.$$

这是一个仿射簇，GL_n 通过逐坐标伴随作用于其上。GL_n 的中心作用平凡，因此该作用可分解为一个 PGL_n 作用。本文主要关注以下几何不变理论商，

$$\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu},\boldsymbol{\sigma}}} := \mathcal{V}_{\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu},\boldsymbol{\sigma}}} /\!\!/ \mathrm{PGL}_n = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{K}\left[\mathcal{V}_{\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}\right]^{\mathrm{GL}_n}\right). \tag{14}$$

我们称这些簇 $\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu},\ \sigma}}$ 为彗星形箭图簇，因为它们可解释为中岛箭图簇，我们将在第 *5* 节回顾这一点。

定义 4.9 （一般伴随轨道）。 用 $\Delta(\sigma^j)$ 表示 σ^j 的特征值多重集，按重数重复计数； σ_r^j 在该多重集中恰好出现 ν_r^j 次$\Delta(\sigma^j)$ 。伴随轨道 k 元组 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\sigma}}$ 是一般的，当且仅当它满足以下两个条件：

1.
$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha\in\Delta(\sigma^j)}\alpha=0,$$

2. 对任意 $r\leq n-1$，以及所有满足 $R_j\subset\Delta(\sigma^j)$ 大小为 r 的 $(R_1,\ldots,R_k)$
$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha\in R_j}\alpha\neq 0.$$

.

定义 4.10 (一般共轭类)。 如果 $\boldsymbol{\sigma}$ 中的所有特征值都非零，那么伴随轨道也是 GL_n 中的共轭类。它们记作 $\mathcal{C}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}=\left(\mathcal{C}_{\underline{\mu}^1,\sigma^1},\ldots,\mathcal{C}_{\underline{\mu}^k,\sigma^k}\right)$，而不记作 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}$。共轭类的 k 元组 $\mathcal{C}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}$ 称为一般的，如果满足以下两个条件：

1.
$$\prod_{j=1}^{k}\prod_{\alpha\in\Delta(\sigma^j)}\alpha=1,$$

2. 对任意 $r\leq n-1$，对于所有满足 $R_j\subset\Delta(\sigma^j)$ 大小为 r 的 $(R_1,\ldots,R_k)$
$$\prod_{j=1}^{k}\prod_{\alpha\in R_j}\alpha\neq 1.$$

.

命题 4.11 ([见11] 命题 5.2.4，推论 5.2.5)。 设 $\mathcal{V}_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}:=\mathcal{V}_{\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}\cap\mathfrak{gl}_n^{2g}\times\mathcal{O}_{\underline{\mu}^1,\sigma^1}\times\cdots\times\mathcal{O}_{\underline{\mu}^k,\sigma^k}$，并设 $\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}$ 是 $\mathcal{V}_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}$ 在 $\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}$ 中的像。假设 $\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}$ 是一般的，则
$$\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}=\bigsqcup_{\boldsymbol{\rho}\preceq\boldsymbol{\mu}}\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\sigma}}}$$
是 $\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\sigma}}}$ 的一个分层，其各层均光滑。此外，如果它非空，
$$\dim\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}=d_{\boldsymbol{\mu}}=n^2(2g-2)+2+\sum_{j=1}^{k}\dim\mathcal{O}_{\underline{\mu}^j,\sigma^j}.$$

与前面一样， σ^j是一个对角矩阵，其稳定子为 $M^j:=Z_{\mathrm{GL}_n}(\sigma^j)$使得在记号 4.4 下，
$$M^j\cong\mathrm{GL}_{\nu^j}$$
对于由 σ^j 的特征值重数给出的某个分拆 $\nu^j\in\mathcal{P}_n$。伴随轨道 $\mathcal{O}_{\underline{\mu}^j}$ 中特征值 σ_i^j 的若尔当型为 μ^j。记作

μ^j 的转置分拆。令 $L^j \subset M^j$ 为 4.1.2 中的分块对角矩阵子群，

$$L^j \cong \underbrace{\mathrm{GL}_{\mu_1^{j,1\prime}} \times \mathrm{GL}_{\mu_2^{j,1\prime}} \times \ldots}_{\subset \mathrm{GL}_{\nu_1^j}} \times \cdots \times \underbrace{\mathrm{GL}_{\mu_1^{j,l_j\prime}} \times \mathrm{GL}_{\mu_2^{j,l_j\prime}} \times \ldots}_{\subset \mathrm{GL}_{\nu_{l_j}^j}}.$$

令 $\widetilde{\mathbb{Y}}_{L^j,P^j,\sigma^j}$ 是 $\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu}^j,\sigma^j}$ 的一个解消，如 4.1.2 中所构造。令 $\boldsymbol{L} := \prod_{j=1}^k L^j$，并令 $\boldsymbol{P} := \prod_{j=1}^k P^j$，则定义

$$\widetilde{\mathbb{Y}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}} := \prod_{1\le j\le k} \widetilde{\mathbb{Y}}_{L^j,P^j,\sigma^j}.$$

Letellier [令11] 构造了 $\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\mu}}}$ 的奇点消解，$\boldsymbol{\sigma}$

定义 4.12 ($\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\mu^j,\sigma^j}}$ 的解消)。 定义

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}} := \Big\{(A_i,B_i)_{1\le i\le g},(X_j,g_jP^j)_{1\le j\le k} \in \mathfrak{gl}_n^{2g} \times \widetilde{\mathbb{Y}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}} \Big| \sum_{i=1}^g [A_i,B_i] + \sum_{j=1}^k X_j = 0 \Big\} /\!/ \mathrm{PGL}_n . \quad (15)$$

PGL_n 对 g_jP^j 的作用是左乘。映射 p^{σ^j}：$\widetilde{\mathbb{Y}}_{L^j,P^j,\sigma^j} \to \overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu}^j,\sigma^j}$ 诱导一个映射

$$p^{\boldsymbol{\sigma}} : \widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}} \to \mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}},$$

这个态射是一个奇点消解。

注 4.13。 与注 *4.6* 类似，若 $L^j = M^j$ 对于 $1 \le j \le k$，则伴随轨道 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}$ 是半单的，且 $p^{\boldsymbol{\sigma}}$ 是一个同构。

注 4.14。 与注 *4.7*类似，

$$H_c^{\bullet+d_{\boldsymbol{\mu}}}\left(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}},\overline{\mathbb{Q}}_l\right) = \bigoplus_{\boldsymbol{\rho}\preceq\boldsymbol{\mu}} V_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\rho}} \otimes IH_c^{\bullet+d_{\boldsymbol{\rho}}}\left(\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\sigma}}},\overline{\mathbb{Q}}_l\right),$$

其中 $V_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\rho}} := \bigotimes_{j=1}^k \mathrm{Hom}_{W_{M^j}}\left(\mathrm{Ind}_{W_{L^j}}^{W_{M^j}} \epsilon,\ V_{\underline{\rho}^j}\right)$。因此，如注 *4.7* 所述，*Letellier* 构造了相对魏尔群 $W_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{L}) = \prod_{j=1}^k W_{M^j}(L^j)$ 在$\widetilde{\ }$解消 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{\sigma}}$的上同调上的作用，我们称此作用为 *Springer*作用。

定义 4.15. 在乘法情形下也存在类似的构造（见 *Letellier*[*Let13*]）。如果 $\boldsymbol{\sigma}$ 中的所有特征值都非零，那么伴随轨道实际上是 GL_n 中的共轭类，记作 $\mathcal{C}$，而不是 $\mathcal{O}$。对于一般的 k 元共轭类组 $\overline{\mathcal{C}}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}$，特征簇定义为

$$\mathcal{M}_{\overline{\mathcal{C}}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}} := \Big\{(A_1,B_1,\ldots,A_g,B_g,X_1,\ldots,X_k) \in \mathrm{GL}_n^{2g} \times \overline{\mathcal{C}}_{\underline{\mu}^1,\sigma^1} \times \cdots \times \overline{\mathcal{C}}_{\underline{\mu}^k,\sigma^k} \Big| A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}\ldots A_gB_gA_g^{-1}B_g^{-1}X_1\ldots X_k = \mathrm{Id}\Big\} /\!/ \mathrm{PGL}_n .$$

它存在一个奇点消解

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}} := \Big\{(A_i,B_i)_{1\le i\le g},(X_j,g_jP^j)_{1\le j\le k}\in \mathrm{GL}_n^{2g}\times\widetilde{\mathbb{Y}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}} \\ \big|A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}\dots A_gB_gA_g^{-1}B_g^{-1}X_1\dots X_k=\mathrm{Id}\Big\}/\!/\,\mathrm{PGL}_n,$$

解消的上同调具有如下分解

$$H_c^{\bullet+d_{\boldsymbol{\mu}}}\left(\widetilde{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}},\overline{\mathbb{Q}}_l\right)=\bigoplus_{\boldsymbol{\rho}\preceq\boldsymbol{\mu}}V_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\rho}}\otimes IH_c^{\bullet+d_{\boldsymbol{\rho}}}\left(\mathcal{M}_{\overline{\mathcal{C}}_{\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\sigma}}},\overline{\mathbb{Q}}_l\right). \tag{16}$$

4.3 簇 $\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}$ 的交叉上同调

定义 4.16 (Hausel-Letellier-Villegas 核)。 令 $k\in\mathbb{Z}_{>0}$，并令 $g\in\mathbb{Z}_{\ge0}$ 为 k-点、亏格为 g 的柯西函数，其定义为

$$\Omega_k^g(z,w):=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}}\mathcal{H}_\lambda(z,w)\prod_{i=1}^k\tilde{H}_\lambda\left[X_i,z^2,w^2\right]s^{|\lambda|}, \tag{17}$$

with

$$\mathcal{H}_\lambda(z,w):=\prod\frac{\left(z^{2a+1}-w^{2l+1}\right)^{2g}}{\left(z^{2a+2}-w^{2l}\right)\left(z^{2a}-w^{2l+2}\right)}. \tag{18}$$

次数为 n 的 ***Hausel–Letellier–Villegas*** 核定义为

$$\mathbb{H}_n^{HLV}(z,w):=(z^2-1)(1-w^2)\,\mathrm{Log}\,\Omega_k^g(z,w)\big|_{s^n}.$$

该核最初用于描述亏格为 g 的黎曼曲面上具有 k 个穿孔点的特征簇的上同调。它还描述了簇 $\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}$ 的上同调。考虑伴随轨道 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}$ 的一个一般 k-元组，其中$\boldsymbol{\mu}=(\underline{\mu}^1,\ \dots,\ \underline{\mu}^k)$，且 $\underline{\mu}^j=\left(\mu^{j,1},\ \dots,\ \mu^{j,l_j}\right)$。分拆 $\mu^{j,i}\in\mathcal{P}_{\nu_i^j}$ 的转置记为 $\mu^{j,i'}$，并定义如下对称函数

$$s_{\boldsymbol{\mu}'}:=\prod_{j=1}^k\prod_{i=1}^{l_j}s_{\mu^{j,i'}}[X_j]. \tag{19}$$

定理 4.17。 设 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}$ 是一个一般的 k 元伴随轨道组。$\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}$ 的紧支撑交叉上同调的庞加莱多项式为

$$P_c\left(\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}},v\right)=v^{d_{\boldsymbol{\mu}}}\left\langle s_{\boldsymbol{\mu}'},\mathbb{H}_n^{HLV}(0,v)\right\rangle.$$

证明。 对于半单伴随轨道，该簇是光滑的，交叉上同调与通常上同调一致，而定理已由 Hausel、Letellier 和 Rodriguez-Villegas 证明 [HLRV11]。一般情形由 Letellier 证明 [Let11]。 □

Hausel–Letellier–Rodriguez-Villegas [HLRV11] 提出了一个关于具有半单单值的特征簇的混合霍奇多项式的猜想。Letellier 将其推广了 [Let13] 使其适用于具有任意若尔当型的单值。

猜想 4.18 (Letellier [Let13], 猜想 1.5)。 设 $\mathcal{C}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}$ 是一个一般的 k 元共轭类组，则特征簇 $\mathcal{M}_{\overline{\mathcal{C}}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}$ 的混合霍奇多项式（见定义 *3.12*）为

$$IH_c(\mathcal{M}_{\overline{\mathcal{C}}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}};q,v)=(v\sqrt{q})^{d_{\boldsymbol{\mu}}}\left\langle s_{\boldsymbol{\mu}'},\mathbb{H}_n^{HLV}\left(\frac{-1}{\sqrt{q}},v\sqrt{q}\right)\right\rangle$$

与 $q=xy$。

5 中岛箭图簇的构造

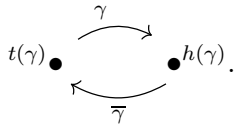
为了研究魏尔群的单值化作用在簇 $\widetilde{\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}}$ 和 $\mathcal{Q}_{L,P,\sigma}$的上同调上的作用，需要将它们放入一个随特征值变化的族 $\boldsymbol{\sigma}$中。一种实现方式是将它们构造为 Nakajima 的箭图簇 [Nak94]。所得的族是由矩映射给出的纤维化。本节回顾如何将$\widetilde{\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}}$ 构造为彗星形箭图簇。在零亏格情形下，该构造归功于 Crawley-Boevey [CB03b], ; 对于任意亏格，该构造归功于 Hausel、Letellier、Rodriguez-Villegas[HLRV11] 以及 Letellier [Let11]。

5.1 中岛箭图簇概述

本节回顾中岛箭图簇的构造 [Nak94] ，以确定记号。考虑一个箭图 Γ ，其顶点集为Ω_0 ，边集为Ω_1。我们将边 $t(\gamma)$ 的尾端记为，将 $h(\gamma)$ 记为边 $\gamma \in \Omega_1$的头端。对于 Γ ，维数向量是一个元素 $v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\Omega_0}$。维数向量为 v 的箭图表示空间可视为一个矩阵空间：

$$\operatorname{Rep}(\Gamma, v) := \bigoplus_{\gamma \in \Omega_1} \operatorname{Mat}_{\mathbb{K}}(v_{h(\gamma)}, v_{t(\gamma)}).$$

其余切丛 $T^* \operatorname{Rep}(\Gamma, v)$ 可视为扩展拟箭图 Γ 的表示空间$\widetilde{}$。该扩展拟箭图的顶点集与 Γ 相同。它通过为每条边 $\gamma \in \Omega_1$ 添加一条逆边 $\overline{\gamma}$ 得到：



~ ~我们将这类逆边的集合记为 Ω_1 ，那么 Γ 的边集为 $\Omega := \Omega_1 \sqcup \Omega_1$。我们有 $T^* \operatorname{Rep}(\Gamma, v) \cong \operatorname{Rep}\left(\widetilde{\Gamma}, v\right)$。

对于维数向量 $v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\Omega_0}$，考虑约化群 $\mathrm{GL}_v := \prod_{i \in \Omega_0} \mathrm{GL}_{v_i}$。该群在 $\operatorname{Rep}\left(\widetilde{\Gamma}, v\right)$ 上的作用为

$$(g_{v_i})_{i \in \Omega_0} . (\phi_\gamma)_{\gamma \in \widetilde{\Omega}} := \left(g_{h(\gamma)} x_\gamma g_{t(\gamma)}^{-1}\right).$$

乘法群 $\mathbb{K}^*$ 到 GL_v 的对角嵌入作用平凡，因此该作用可下降为群 $\mathrm{G}_v := \mathrm{GL}_v / \mathbb{K}^*$ 的作用。GL_v 的李代数为

$$\mathfrak{gl}_v := \bigoplus_{i \in \Omega_0} \mathfrak{gl}_{v_i},$$

而 G_v 的李代数为

$$\mathfrak{g}_v = \left\{ (x_j)_{j \in \Omega_0} \in \mathfrak{gl}_v \,\middle|\, \sum_{j \in \Omega_0} \operatorname{tr} x_j = 0 \right\}.$$

该李代数的中心为

$$Z(\mathfrak{g}_v)=\left\{(\xi_j\,\mathrm{Id}_{v_j})_{j\in\Omega_0}\,\middle|\,(\xi_j)_{j\in\Omega_0}\in\mathbb{K}^{\Omega_0}\text{ with }\sum_{j\in\Omega_0}v_j\xi_j=0\right\}.$$

考虑一个元素 $\theta\in\mathbb{Z}^{\Omega_0}$，满足 $\sum_{i\in\Omega_0}\theta_i v_i=0$。这样的元素称为稳定性参数，它定义了群 G_v 的一个特征 χ_θ，如下所示

$$\chi_\theta\left((g_j)_{j\in\Omega_0}\right)=\prod_{j\in\Omega_0}\det(g_j)^{-\theta_j}. \tag{20}$$

我们用 $\mathrm{Rep}\left(\widetilde{\Gamma},v\right)^{\theta\text{-ss}}$ 和 $\mathrm{Rep}\left(\widetilde{\Gamma},v\right)^{\theta\text{-s}}$ 分别表示在几何不变理论意义下，关于线性化 χ_θ 的 θ-半稳定轨迹和 θ-稳定轨迹。考虑矩映射

$$\begin{array}{rccc}\mu & : & \mathrm{Rep}(\widetilde{\Gamma},v) & \to & \mathfrak{g}_v\\ & & (\phi_\gamma)_{\gamma\in\widetilde{\Omega}} & \mapsto & \sum_{\gamma\in\widetilde{\Omega}}\epsilon(\gamma)\phi_\gamma\phi_{\overline{\gamma}}\end{array}$$

其中，对于 $\gamma\in\Omega_1$，$\epsilon(\gamma)=1$；对于 $\gamma\in\Omega_1$，$\epsilon(\gamma)=\overline{-1}$。

定义 5.1 (中岛箭图簇)。设 ξ 是 $Z(\mathfrak{g}_v)$ 中的一个元素，即 G_v 的李代数的中心。中岛箭图簇 $\mathcal{M}_v^\theta(\xi)$ 定义为以下几何不变理论商

$$\mathcal{M}_v^\theta(\xi):=\mu^{-1}(\xi)\cap\mathrm{Rep}\left(\widetilde{\Gamma},v\right)^{\theta\text{-}ss}/\!/\,\mathrm{G}_v\,.$$

我们还需要另一类箭图簇，即中岛框架箭图簇。固定第二个维数向量 $w\in\mathbb{N}^{\Omega_0}$，并定义

$$\mathrm{Rep}\,(v,w):=\bigoplus_{j\in\Omega_0}\mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(v_i,w_i),$$

$$\mathrm{Rep}\,(w,v):=\bigoplus_{j\in\Omega_0}\mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(w_i,v_i).$$

元素 $g\in\mathrm{GL}_v$ 作用于 $a=(a_j)_{j\in\Omega_0}\in\mathrm{Rep}\,(v,w)$，作用方式为

$$g.a:=(a_jg_j^{-1})_{j\in\Omega_0}$$

它作用于 $b=(b_j)_{j\in\Omega_0}\in\mathrm{Rep}\,(v,w)$，作用方式为

$$g.b:=(g_jb_j)_{j\in\Omega_0}.$$

引入带框架箭图表示的空间

$$\mathrm{Rep}\left(\widetilde{\Gamma},v,w\right):=\mathrm{Rep}\,(v,w)\oplus\mathrm{Rep}\,(w,v)\oplus\mathrm{Rep}\left(\widetilde{\Gamma},v\right).$$

在此背景下，矩映射为

$$\begin{array}{rccc}\mu' & : & \mathrm{Rep}(\widetilde{\Gamma},v,w) & \to & \mathfrak{gl}_v\\ & & (a,b,\phi) & \mapsto & (\mu(\phi)_j-b_ja_j)_{j\in\Omega_0}\end{array}.$$

对于 $\theta\in\mathbb{Z}^{\Omega_0}$，考虑线性化

$$\begin{array}{rccc}\chi_\theta & : & \mathrm{GL}_v & \to & \mathbb{K}^*\\ & & (g_i)_{i\in\Omega_0} & \mapsto & \prod_{i\in\Omega_0}\det(g_i)^{-\theta_i}\end{array}.$$

定义 5.2 （Nakajima 的带框架的箭图簇）。对于 ξ 在 $\mathfrak{gl}_v$ 的中心中且对于 $\theta\in\mathbb{Z}^{\Omega_0}$，*Nakajima* 的带框架箭图簇 $\mathcal{M}^\theta_{v,\,w}(\xi)$ 定义为关于线性化 χ_θ 的几何不变理论商，

$$\mathcal{M}^\theta_{v,w}(\xi):=\mu'^{-1}(\xi)\cap\mathrm{Rep}\left(\widetilde{\Gamma},v,w\right)^{\theta\text{-}ss}/\!/\,\mathrm{GL}_v\,.$$

5.2 将伴随轨道的扎里斯基闭包解消为 Nakajima 的带框架的箭图簇

本节回顾将伴随轨道闭包的解消构造为 Nakajima 的带框架箭图簇。这些结果来自 Kraft-Procesi [KP81],Nakajima [Nak98、Nak01], Crawley-Boevey [CB03a、CB03b], Shmelkin [Shm09] 和 Letellier [Let11]。在本小节以及 5.3 中，我们固定基域 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$。

设 $\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}$ 是一个伴随轨道，其半单部分为 σ，若尔当型为 $\underline{\mu} \in \mathcal{P}_\nu$，如~4.1.1所示。考虑解消 $\mathbb{Y}_{L,P,\sigma} \to \overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu},\sigma}$，如 4.5所示。有一个 Nakajima 的带框架的箭图簇实现了此解消。设 $d := \sum_{i=1}^{l} \mu_1^i$ 并回顾

$$L \cong \prod_{i=1}^{l} \prod_{r=1}^{\mu_1^i} \mathrm{GL}_{\mu_r^{i\prime}}.$$

指标 $\left(\mu_r^{i\prime}\right)_{\substack{1\le i\le l\\ 1\le r\le \mu_1^i}}$ 重新标记为 $(c_s)_{1\le s\le d}$，使得

$$L \cong \prod_{s=1}^{d} \mathrm{GL}_{c_s}.$$

引入参数 $\zeta = (\zeta_s)_{1\le s\le d}$，使得若 c_s 对应于某个 r，则 $\zeta_s = \sigma_i$。考虑类型为 A_{d-1} 的箭图 $\Gamma_{\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}}$，其顶点由 1 到 $d-1$ 之间的整数编号，箭头沿递减方向。引入维数向量 $v_{\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}} := (v_1, \ldots, v_{d-1})$，满足

$$v_1 := n - c_1, \quad v_i := v_{i-1} - c_i \ \text{ for } i > 1.$$

且 $w := (n, 0, \ldots, 0)$。定义参数 $\xi_{\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}} = (\xi_1, \ldots, \xi_{d-1})$，使得 $\xi_i = \zeta_i - \zeta_{i+1}$。

$$\xi_i := \begin{cases} \sigma_k - \sigma_{k+1} & \text{if} \quad i = \mu_1^1 + \cdots + \mu_1^k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

参数 $\xi_{\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}}$ 将被视为元素 $(\xi_j \,\mathrm{Id}_{v_j})_{1\le j\le d-1}$。

我们在下面的图表中总结所有内容，其中展示了箭图、维数向量、参数 ζ 和参数 ξ。

$$\bullet^1 \longleftarrow \bullet^2 \longleftarrow \cdots \longleftarrow \bullet^{\mu_1^1+\cdots+\mu_1^k} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \bullet^{d-1}$$

$n - c_1$	$n - c_1 - c_2$	$\cdots$	$n - \nu_1 - \cdots - \nu_k$	$\cdots$	c_r
σ_1	σ_1	$\cdots$	σ_k	$\cdots$	σ_r
0	0	$\cdots$	$\sigma_k - \sigma_{k+1}$	$\cdots$	0

注 5.3。在箭图下方写出维数向量时，我们用到了 $|\mu^i| = \nu_i$ 这一事实。

考虑第二个维数向量 $w=(n,0,\dots,0)$ 和扩展表示 $(a,b,\phi)\in\mathrm{Rep}\left(\widetilde{\Gamma}_{\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}},v_{\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}},w\right)$。由于 $w_i=0$，除非 $i=1$，分量 a 只是一个线性映射 $a:V_1\to W_1$ 和 $b:W_1\to V_1$，且满足 $W_1=\mathbb{C}^n$。对于 $1\le i\le d-2$，用 $\phi_{i+1,i}$ 表示与从 $i+1$ 到 i 的边相关联的线性映射，用 $\phi_{i,i+1}$ 表示与从 i 到 $i+1$ 的反向边相关联的映射。当且仅当下式成立时，这样的表示属于 $\mu'^{-1}(\xi_{\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}})$

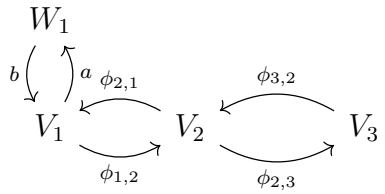
$$\left\{\begin{array}{ccc}\phi_{2,1}\phi_{1,2}-ba & = & (\zeta_1-\zeta_2)\,\mathrm{Id}_{v_1}\\ \phi_{i+1,i}\phi_{i,i+1}-\phi_{i-1,i}\phi_{i,i-1} & = & (\zeta_i-\zeta_{i+1})\,\mathrm{Id}_{v_i}\\ -\phi_{d-1,d-2}\phi_{d-1,d-2} & = & (\zeta_{d-1}-\zeta_d)\,\mathrm{Id}_{v_{d-1}}\end{array}\right.\quad\text{for } 2\le i\le d-2\ .\tag{21}$$

这些方程称为预射影关系。

例5.4。 矩阵的伴随轨道

$$\begin{pmatrix}\sigma_1&1&0&0&0&0\\0&\sigma_1&1&0&0&0\\0&0&\sigma_1&0&0&0\\0&0&0&\sigma_1&0&0\\0&0&0&0&\sigma_2&0\\0&0&0&0&0&\sigma_2\end{pmatrix}$$

具有若尔当型 $\underline{\mu}=((3,1),(1,1))\in\mathcal{P}_4\times\mathcal{P}_2$ 并且我们得到



$v_{\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}}:$	4	3	2
$\zeta:$	σ_1	σ_1	σ_1
$\xi_{\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}}:$	0	0	$\sigma_1-\sigma_2.$

定理 5.5。 首先考虑由前述数据和稳定性参数 $\theta=0$ 得到的 ***Nakajima*** 的框架箭图簇 $\mathcal{M}^0_{v_{\mathcal{O}},\ w}(\xi_{\mathcal{O}_{\underline{\mu},\ \sigma}})$。下述映射定义良好，且是一个同构

$$\begin{array}{rccc}\Psi_0\ :&\mathcal{M}^0_{v_{\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}},w}\left(\xi_{\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}}\right)&\to&\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu},\sigma}\\&(a,b,\phi)&\mapsto&ab-\sigma_1\,\mathrm{Id}_n\end{array}.$$

现在取一个稳定性参数 $\theta\in\mathbb{Z}^{d-1}_{>0}$，下面的映射是一个同构

$$\begin{array}{rccc}\Psi_\theta\ :&\mathcal{M}^\theta_{v_{\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}},w}\left(\xi_{\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}}\right)&\to&\widetilde{\mathbb{Y}}_{L,P,\sigma}\\&(a,b,\phi)&\mapsto&(ab+\sigma_1\,\mathrm{Id}_n,f_{a,b,\phi})\end{array},$$

其中 $f_{a,b,\phi}$ 是由以下条件定义的旗 $0 \subset E_{d-1} \subset \cdots \subset E_1 \subset \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} E_1 &:= \quad \mathrm{Im}(a), \\ E_i &:= \mathrm{Im}(a \circ \phi_{2,1} \circ \phi_{3,2} \circ \cdots \circ \phi_{i,i-1}) \quad \textit{for } 2 \leq i \leq d-1. \end{aligned}$$

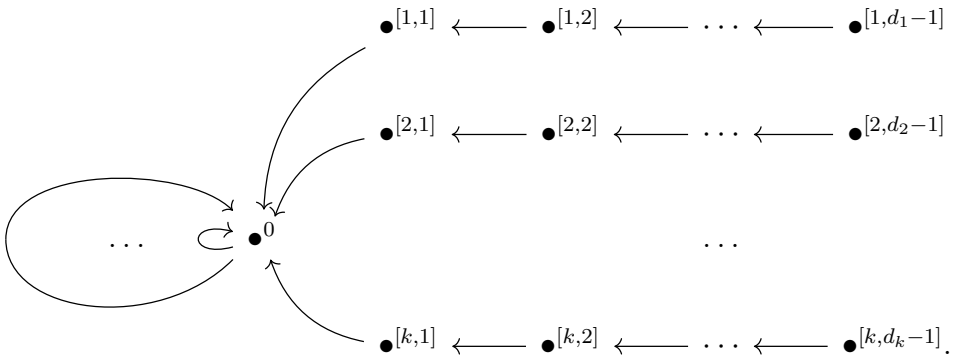
此外，下图是交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^{\theta}_{v_{\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}},w}\left(\xi_{\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}}\right) & \xrightarrow{\Psi_\theta} & \widetilde{\mathbb{Y}}_{L,P,\sigma} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle p^\sigma} \\ \mathcal{M}^{0}_{v_{\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}},w}\left(\xi_{\mathcal{O}_{\underline{\mu},\sigma}}\right) & \xrightarrow[\Psi_0]{} & \overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu},\sigma}, \end{array}$$

其中 p^σ 是$\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu}}$的解消，$\sigma$ 来自命题 *4.5*，而 π 是几何不变理论中的自然映射。

5.3 彗星形箭图簇

与上一小节一样，我们固定基域 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$。设 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\,\boldsymbol{\sigma}} = \left(\mathcal{O}_{\underline{\mu}^1,\sigma^1}, \ldots, \mathcal{O}_{\underline{\mu}^k,\sigma^k}\right)$ 是 $\mathfrak{gl}_n$ 中的一个一般 k 元伴随轨道组。我们回顾 Crawley-Boevey 关于将簇 $\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\mu},\,\boldsymbol{\sigma}}}$ 与箭图簇联系起来的结果。其思路是将对应于各个伴随轨道 $\mathcal{O}_{\underline{\mu}^j,\,\sigma^j}$ 的 k 个 A 型箭图粘合到中心顶点 0 上，并在该中心顶点处添加 g 个环。由此得到以下彗星形箭图 $\Gamma_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\,\boldsymbol{\sigma}}}$，



第 j 条支臂是一个 A 型箭图，其顶点标记为从 $[j,1]$ 到 $[j,d_j-1]$。维数向量 $v_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\,\boldsymbol{\sigma}}}$ 定义为：其在中心顶点处的坐标为 n，在第 j 条支臂上的坐标与上一节所述的维数向量 $v_{\mathcal{O}_{\underline{\mu}^j,\,\sigma^j}}$ 一致。类似地，参数 $\xi_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\,\boldsymbol{\sigma}}}$ 定义为：其在第 j 条支臂上的坐标与参数 $\xi_{\mathcal{O}_{\underline{\mu}^j,\,\sigma^j}}$ 一致。中心顶点处的分量 $\xi_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\,\boldsymbol{\sigma}},\,0}$ 定义为使得 $v_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\,\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \xi_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\,\boldsymbol{\sigma}}} = 0$，因此

$$n\xi_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}},0} = -\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{d_j-1} v_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}},[j,i]}\xi_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}},[j,i]}.$$

考虑扩展拟箭图 $\phi \in \mathrm{Rep}\left(\widetilde{\Gamma}_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}, v_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}\right)$ 的一个表示。

- 记 $\phi_{[j,i]}$ 为与尾端为 $[j,i]$ 的箭头关联的线性映射，记 $\phi_{\overline{[j,i]}}$为与头端为 $[j,i]$ 的反向箭头关联的线性映射。

- 对于 $1 \le i \le g$，与第 i个环关联的映射记为 ϕ_i，与反向环关联的映射记为 $\phi_{\overline{i}}$。

和往常一样，μ 是矩映射，而$\xi_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}$ 被视为李代数$\mathfrak{g}_{v_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}}$ 中心中的一个元素，并且我们令

$$X_j := \phi_{[j,1]}\phi_{\overline{[j,1]}} - \zeta_{[j,1]}.$$

若 ϕ属于 $\mu^{-1}(\xi_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}})$，则$X_j \in \overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu}^j,\sigma^j}$。事实上，这可由前面关于伴随轨道闭包作为带框架的箭图簇的描述，以及上一节中对每条支臂而言，中心顶点处的向量空间与框架向量空间 W_1 的同一识得到。

现在，若 A_i 是与箭图的第 i个环对应的线性映射，而 B_i 是与反向环对应的映射，那么中心顶点处的预射影关系恰好就是定义$\mathcal{V}_{\overline{\mathcal{O}}_{\mu,\sigma}}$的方程。于是，下述映射是良定义的

$$\begin{array}{rccc} \Psi^{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}} : & \mu^{-1}(\xi_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}) & \to & \mathcal{V}_{\overline{\mathcal{O}}_{\mu,\sigma}} \\ & \phi & \mapsto & (A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g, X_1, \ldots, X_k) \end{array}.$$

定理 5.6。在下图中，竖直箭头为商映射，映射 $\Psi^{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}$ 下降到商上，给出一个同构 $\Phi^{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}$，

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(\xi_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}) & \xrightarrow{\Psi^{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}} & \mathcal{V}_{\overline{\mathcal{O}}_{\mu,\sigma}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}^0_{v_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}}(\xi_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}) & \xrightarrow[\Phi^{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}]{} & \mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\mu,\sigma}}. \end{array}$$

证明。Crawley-Boevey 已证明 [CB01、CB03b], 另见 Letellier [Let11，命题5.2。2] 对任意亏格均成立。 □

~解消 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\sigma}$的 $\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\mu,\sigma}}$（如4.12中所引入）也可解释为箭图 $\Gamma_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}$的中岛箭图簇。

定理 5.7。考虑与箭图 $\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\mu,\sigma}}$ 相关联的稳定性参数 θ，使得对每个顶点 $[j,i]$都有 $\theta_{[j,i]} > 0$。存在一个同构 $\Phi^{\mathcal{O}_{\mu,\sigma},\theta}: \mathcal{M}^{\theta}_{v_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}}(\xi_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}) \to \mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\sigma}$，且下图交换，

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^{\theta}_{v_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}}(\xi_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}) & \xrightarrow{\Phi^{\mathcal{O}_{\mu,\sigma},\theta}} & \widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}} \\ \pi\downarrow & & \downarrow p^{\sigma} \\ \mathcal{M}^0_{v_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}}(\xi_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}) & \xrightarrow[\Phi^{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}]{} & \mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\mu,\sigma}}, \end{array}$$

其中 π 是来自几何不变理论的自然投影。

证明。映射 $\Phi^{\mathcal{O}_{\mu,\sigma},\theta}$ 由 Letellier [Let11，第 5 节.3]构造。此映射由定理 5.5 的映射 Ψ_θ 诱导。与 Letellier 的文章不同，我们不考虑部分解消，因此我们的参数 θ 只有非零分量。因此，描述~解消 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\sigma}$ 的箭图簇 $\mathcal{M}^{\theta}_{v_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}}(\xi_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}})$ 的维数向量，与描述$\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\mu,\sigma}}$的箭图簇的维数向量相同。

□

箭图簇的观点给出了非空性的判据。关于 $\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\mu,\sigma}}$（及其对应的特征簇）是否为空的问题称为 Deligne-Simpson 问题。Kostov [Kos04] 对这一问题作了综述。Crawley-Boevey 用箭图的根给出了一般情形下该问题的解[CB03b], ，另见 Letellier [Let11，第 5 节。2]这些结果总结如下。

定理 5.8。设 $\mathcal{O}_{\mu,\sigma}$ 是一个一般的 k 元伴随轨道组。簇 $\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}_{\mu,\sigma}}$ 非空，当且仅当 $\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}$ 非空。这又当且仅当维数向量 $v_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}$ 是箭图 $\Gamma_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}$ 的一个根。对于 $g>0$，这一条件总是成立。

5.4 彗星形箭图簇族

现在，域 $\mathbb{K}$ 又是 $\mathbb{C}$ 或 $\overline{\mathbb{F}}_q$。当特征值 $\boldsymbol{\sigma}$ 变化时，簇 $\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}$ 组成一个族。我们先明确描述这个族，然后从中岛箭图簇和矩映射的角度给出一种解释。

记号 5.9。从现在起，固定有序对 $\mathbf{L}$,$\mathbf{P}$ 。简言之，令

$$Z(\boldsymbol{l}) := Z(\mathfrak{l}_1) \times \cdots \times Z(\mathfrak{l}_k).$$

用 $\mathcal{B}$ 表示元素 $\boldsymbol{\sigma} \in Z(\boldsymbol{l})$ 的子集，其中 k 元伴随轨道组 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}$ 是一般的。注意，一般性条件仅取决于半单部分 $\boldsymbol{\sigma}$ ，而不取决于类型 $\boldsymbol{\mu}$。那么 $\mathcal{B}$ 要么为空，要么是由迹之和为零所定义的超平面 $Z(\boldsymbol{l})$ 中的扎里斯基开集。

定义 5.10（簇族 $\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{\sigma}}$）。定义

$$\widetilde{\mathcal{V}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}} := \big\{\big(\boldsymbol{\sigma},\ (A_i,B_i)_{1\le i\le g},\ (X_j,g_jP^j)_{1\le j\le k}\big)\ \big|\ \boldsymbol{\sigma}\in\mathcal{B},\ \textit{and}\ (A_i,B_i)_{1\le i\le g},\ (X_j,g_jP^j)_{1\le j\le k}\in\mathcal{V}_{\mathbf{L},\mathbf{P},\sigma}\big\},$$

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}} := \widetilde{\mathcal{V}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}} /\!/ \mathrm{GL}_n\,.$$

~ ~记 η 为自然映射 $\eta:\ \mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{P}}\to\mathcal{B}$。簇 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{\sigma}}=\eta^{-1}(\boldsymbol{\sigma})$ 构成一个以 $\mathcal{B}$ 为底空间的~族$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{P}}$。

选择 $\boldsymbol{L}$ 决定了唯一的箭图 $\Gamma_{\mathcal{O}_{\mu,\ \sigma}}$ 以及唯一的维数向量$v_{\mathcal{O}_{\mu,\ \sigma}}$，且与 $\boldsymbol{\sigma}$ 的选择无关。假设该维数向量不可约，使得 $\mathcal{B}$ 非空。于是我们可以作出如下假设:

假设 5.11（稳定性参数 的一般性）。稳定性参数θ 是一般的，即它是箭图 $\Gamma_{\mathcal{O}_{\mu,\ \sigma}}$ 的一个稳定性参数，其维数向量为$v_{\mathcal{O}_{\mu,\ \sigma}}$ 满足 $\theta.v_{\mathcal{O}_{\mu,\ \sigma}}=0$ ，且对于某个更小的维数向量 v有 $\theta.v\neq 0$ 。

定理 5.7 的构造可推广到这一族。它给出如下交换图（左侧的垂直箭头由矩映射 μ诱导）

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(\mathfrak{z}^{\mathrm{gen}}_{v_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}})^{\theta\text{-ss}} /\!/ G_{v_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}} & \xrightarrow{\Phi} & \widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}} \\ \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathfrak{z}^{\mathrm{gen}}_{v_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}} & \longrightarrow & \mathcal{B}, \end{array} \tag{22}$$

其中，θ 是一个固定的一般稳定性参数，$\mathfrak{z}^{\mathrm{gen}}_{v_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}}$ 是李代数 $\mathfrak{g}_{v_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}}$ 的中心中与子集 $\mathcal{B}$ 相对应的子集，此对应关系建立在参数 $\xi_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}$ 与特征值 $\boldsymbol{\sigma}$ 之间。注意，箭图簇 $\xi_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}} \in Z(\mathfrak{g}_{v_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}})$ 的参数与 $Z(\boldsymbol{l})$ 的参数之间的对应关系并非双射；在箭图簇的构造中，只会出现相邻特征值之差。因此，前述图表依赖于特征值的一种选取。将$\boldsymbol{\sigma} \in Z(\boldsymbol{l})$与 $Z(\mathfrak{g}_{v_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}})$ 中的元素 $(\xi_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}, \sigma_1^1, \ldots, \sigma_1^{k-1})$ 相对应，$\times \mathbb{K}^{k-1}$这定义了一个双射

$$h : Z(\boldsymbol{l}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{z}_{v_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}} \times \mathbb{K}^{k-1}. \tag{23}$$

注意，对于给定的参数 $\xi_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}$一般性条件与所选 $k-1$ 特征值无关，即 $h^{-1}(\xi_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}, \sigma_1^1, \ldots, \sigma_1^{k-1})$ 是一般的，当且仅当 $h^{-1}(\xi_{\mathcal{O}_{\mu,\sigma}}, 0, \ldots, 0)$ 是一般的。因此，可以修改图表（22），以适应特征值的各种选择；此时，水平箭头是同构，并且

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{k-1} \times \mu^{-1}(\mathfrak{z}^{\mathrm{gen}}_{v_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}})^{\theta\text{-ss}} /\!/ G_{v_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}} & \xrightarrow{\Phi} & \widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id} \times \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} \\ \mathbb{K}^{k-1} \times \mathfrak{z}^{\mathrm{gen}}_{v_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}}}} & \longrightarrow & \mathcal{B}. \end{array} \tag{24}$$

定理 5.12。 如果 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$，或者如果 $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}}_q$ 且特征充分大，则上同调层 $\mathcal{H}^i \eta_! \kappa$ 是常值层。

证明。 当 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 时，这可由图表（24）所示的箭图簇视角得出，这是 Nakajima 用来构造箭图簇上上同调的魏尔群作用的一个众所周知的事实（另见 [Nak94]）。为了证明 [Bal20]的结果，我们可以像 $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}}_q$ 中那样改变特征，参见 [HLRV13，定理 2 的证明。3]这便推出了特征充分大时的结论。 □

6 单值化 Weyl 群作用

本节旨在构造并研究~箭图簇上上同调的单值化 Weyl 群作用$\mathfrak{Q}_{\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{\sigma}}$。我们采用 Nakajima[Nak94]，Lusztig 的方法（参见 Letellier [Let05，命题 5.5 的证明。3]）、Mellit [Mel19，第 8] 节，以及 Hausel–Letellier–Rodriguez-Villegas [HLRV13]的方法。该构造主要依赖定理 5.12。

6.1 伴随轨道闭包解消的族

~本节研究由簇 $\mathbb{Y}_{L,\ P,\ \sigma}$ 构成的一个族，其中 σ 在变化。下一节将利用该族研究一族彗星形箭图簇，并获得一些维数估计，以证明引理 6.8。

设 P 是 GL_n 的抛物子群，L 是 P的 Levi 因子，则 L 同构于由分块对角矩阵构成的群 $\mathrm{GL}_{c_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{c_r}$。$L$ 和 U_P 的李代数分别记为 $\mathfrak{l}$ 和 $\mathfrak{u}_P$。在李代数层面，Levi 分解写作 $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}_P$。该李代数 $\mathfrak{l}$的中心记为

$Z(\mathfrak{l})$，其正则轨迹为

$$Z(\mathfrak{l})^{\mathrm{reg}} = \{x \in Z(\mathfrak{l}) \,|Z_G(x) = L\}\,.$$

定义

$$\widetilde{\mathbb{Y}}_{L,P}^{\mathrm{reg}} = \left\{(x, gL) \in \mathfrak{gl}_n \times \mathrm{GL}_n / L \,\middle|\, g^{-1}xg \in Z(\mathfrak{l})^{\mathrm{reg}}\right\}.$$

考虑到第一因子 p^{reg} 上的投影：$\widetilde{\mathbb{Y}}_{L,\ P}^{\mathrm{reg}} \to \mathfrak{gl}_n$，记其像为$\mathbb{Y}_{L,\ P}^{\mathrm{reg}}$。该像由具有 r 个不同特征值且重数分别为 c_1、……、c_r 的半单元素组成。考虑相对魏尔群 $W_{\mathrm{GL}_n}(L) = N_{\mathrm{GL}_n}(L)/L$，并对每个 $w \in W_{\mathrm{GL}_n}(L)$ 选取一个代表元 $\dot{w} \in N_{\mathrm{GL}_n}(L)$。该相对魏尔群通过以下方式作用于 $Z(\mathfrak{l})$：

$$w.\sigma := \dot{w}\sigma\dot{w}^{-1}.$$

考虑纤维积

$$\begin{array}{ccc} Z(\mathfrak{l})^{\mathrm{reg}} & \longleftarrow & \mathbb{Y}_{L,P}^{\mathrm{reg}} \times_{Z(\mathfrak{l})^{\mathrm{reg}}/W_{\mathrm{GL}_n}(L)} Z(\mathfrak{l})^{\mathrm{reg}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z(\mathfrak{l})^{\mathrm{reg}}/W_{\mathrm{GL}_n}(L) & \xleftarrow[\chi]{} & \mathbb{Y}_{L,P}^{\mathrm{reg}}, \end{array}$$

其中 χ 为特征多项式。注意，以下映射是一个同构

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{Y}}_{L,P}^{\mathrm{reg}} & \to & \mathbb{Y}_{L,P}^{\mathrm{reg}} \times_{Z(\mathfrak{l})^{\mathrm{reg}}/W_{\mathrm{GL}_n}(L)} Z(\mathfrak{l})^{\mathrm{reg}} \\ (x, gL) & \mapsto & (x, g^{-1}xg). \end{array} \tag{25}$$

因此，$W_{\mathrm{GL}_n}(L)$ 在 $Z(\mathfrak{l})^{\mathrm{reg}}$ 上的作用诱导出在 $\mathbb{Y}_{L,\ P}^{\mathrm{reg}}$ 上的作用。其具体形式为

$$w.(x, gL) = (x, g\dot{w}^{-1}L).$$

于是态射

$$\widetilde{\mathbb{Y}}_{L,P}^{\mathrm{reg}} \xrightarrow{p^{\mathrm{reg}}} \mathbb{Y}_{L,P}^{\mathrm{reg}}$$

是一个群为 $W_{\mathrm{GL}_n}(L)$ 的伽罗瓦覆盖。这个相对魏尔群作用在常值层 $p_*^{\mathrm{reg}}\kappa$ 的推前上。定义

$$\widetilde{\mathbb{Y}}_{L,P} = \left\{(x, gP) \in \mathfrak{gl}_n \times \mathrm{GL}_n / P \,\middle|\, g^{-1}xg \in Z(\mathfrak{l}) \oplus \mathfrak{u}_P\right\}.$$

注 6.1。一个元素 $gP \in \mathrm{GL}_n / P$ 可识别为一个部分旗

$$0 = E_r \subset E_{r-1} \subset \cdots \subset E_1 \subset \mathbb{K}^n$$

使得对所有 $1 \le i \le r$，维数 $E_{i-1}/E_i = c_i$。事实上，GL_n 在这类旗上传递作用，而任意一个旗的稳定子同构于 P。于是，点 $(x,\ gP)$ 属于$\sim\mathbb{Y}_{L,\ P}$，由一个端同态 $x \in \mathfrak{gl}_n$ 和一个被 x 保持的部分旗 gP 组成，其中对所有 $1 \le i \le r$，x 在 E_{i-1}/E_i 上的作用为标量。

记$\mathbb{Y}_{L,\ P}$ 为到第一因子 p ： $\mathbb{Y}_{L,\ P} \to \mathfrak{gl}_n$的投影的像。注意，映射 p 是适当的。以下定理是[Lus84引理 4.3 和命题 4 的一个特例5]。它可视为 Borho–MacPherson [BM83] Springer 理论方法的一种推广。

定理 6.2。 子簇 $\mathbb{Y}_L^{\mathrm{reg}}$, P 在 $\mathbb{Y}_{L,\ P}$中是开、光滑且稠密的。下面的方块是笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{Y}}_{L,P}^{\mathrm{reg}} & \xrightarrow{\ i\ } & \widetilde{\mathbb{Y}}_{L,P} \\ {\scriptstyle p^{\mathrm{reg}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbb{Y}_{L,P}^{\mathrm{reg}} & \hookrightarrow & \mathbb{Y}_{L,P}, \end{array} \tag{26}$$

其中 i映射为 （x， gL） $\to$ （x， gP） 。此外， $p_!\kappa = \mathcal{IC}^{\bullet}_{\mathbb{Y}_{L,\ P},\ p^{\mathrm{reg}}{}_!\ \ \kappa}$从而 W_{GL_n} （L）作用在 $p_!\kappa$上。

注 6.3。 态射 p^{reg} 是一个伽罗瓦覆盖，而 i 是一个开嵌入，因此维数可以很容易地计算

$$\dim \mathbb{Y}_{L,P} = \dim \widetilde{\mathbb{Y}}_{L,P} = \dim \widetilde{\mathbb{Y}}_{L,P}^{\mathrm{reg}} = \dim \mathrm{GL}_n - \dim L + \dim Z(L). \tag{27}$$

我们来描述它与 4.5 中引入的伴随轨道闭包的解消之间的关系。设 $\sigma \in Z(\mathfrak{l})$, 并设 $M := Z_{\mathrm{GL}_n}(\sigma)$ 是 σ 在 $\mathbf{GL}_n$中的稳定子。使用 4.1.2 中的记号，从而对于 ν 为 n的一个分拆，有 $M \cong \mathbf{GL}_\nu$ 。此外， $L \subset M$ 以及整数 $(c_1, c_2, \ldots, c_r)$ 被重新标记为 $(\mu_1^{1\prime}, \mu_2^{1\prime}, \ldots)$， 使得 $\mu^{i\prime}$ 是 ν_i的一个分拆。包含 $L \subset M$ 来自以下包含关系

$$\mathrm{GL}_{\mu_1^{i\prime}} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{\mu_{l_i}^{i\prime}} \subset \mathrm{GL}_{\nu_i}\,.$$

$\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu},\ \sigma}$ 的闭包的解消适合以下图表

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{Y}}_{L,P} & \longleftarrow & \widetilde{\mathbb{Y}}_{L,P,\sigma} \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p^{\sigma}} \\ \mathbb{Y}_{L,P} & \longleftarrow & \overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu},\sigma} = \bigsqcup_{\underline{\rho} \preceq \underline{\mu}} \mathcal{O}_{\underline{\rho},\sigma} \end{array} \tag{28}$$

$\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\mu},\ \sigma} = \bigsqcup_{\underline{\rho} \preceq \underline{\mu}} \mathcal{O}_{\underline{\rho},\ \sigma}$实际上源自$\mathbb{Y}_{L,\ P}$的一个分解。定义

$$\mathbb{Y}_{L,P}^{M,\underline{\rho}} := \bigsqcup_{\sigma' \in Z(\mathfrak{m})^{\mathrm{reg}}} \mathcal{O}_{\underline{\rho},\sigma'}.$$

这个分解与 Shoji 引入的分解类似[Sho88]。

命题 6.4。簇 $\mathbb{Y}^{M,\ \underline{\rho}}_{L\ P,\ }$ 是维数为

$$\dim \mathbb{Y}_{L,P}^{M,\underline{\rho}} = \dim \mathcal{O}_{\underline{\rho},\sigma} + \dim Z(\mathfrak{m}).$$

簇$\mathbb{Y}_{L,\ P}$ 具有以下分解

$$\mathbb{Y}_{L,P} = \bigsqcup_{M} \bigsqcup_{\underline{\rho} \preceq \underline{\mu}} \mathbb{Y}_{L,P}^{M,\underline{\rho}}.$$

第一个并集是对元素 $\sigma \in Z(\mathfrak{l})$的稳定子集合取并。在第二个并集中，$\underline{\mu}$ 依照前文所述取决于 M 。由 $M = L$索引的唯一部分是$\mathbb{Y}^{\mathrm{reg}}_{L\ P,\ }$。

证明。 记 $Z_{\underline{\rho}}$ 为GL_n 中元素$J_{\underline{\rho}}$的稳定子，σ 属于 $\mathcal{O}_{\underline{\rho}}$，$\sigma$ （见记号4.1）。存在一个有限覆盖

$$\begin{array}{rcl} Z(\mathfrak{m})^{\mathrm{reg}} \times \mathrm{GL}_n / Z_{\underline{\rho}} & \to & \mathbb{Y}_{L,P}^{M,\underline{\rho}} \\ \left(\sigma', gZ_{\underline{\rho}}\right) & \mapsto & gJ_{\underline{\rho},\sigma'}g^{-1}, \end{array}$$

因此 $\mathbb{Y}^{M}$，$_{L}{}^{\underline{\rho}}{}_{P}$，是光滑的，并且

$$\dim \mathbb{Y}_{L,P}^{M,\underline{\rho}} = \dim \mathcal{O}_{\underline{\rho},\sigma} + \dim Z(\mathfrak{m}).$$

□

6.2 族 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L}}$，$_{\boldsymbol{P}}$的分解

~本节研究一个与族 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L}}$，$_{\boldsymbol{P}}$ 相关的族，该族已在5.4中作了简要介绍。我们计算一些维数，这些维数将用于证明引理 6.8。

记号 6.5。 首先回顾在此背景下*6.1* 中的记号。对于 $1 \leq j \leq k$,

$$\widetilde{\mathbb{Y}}_{L^j,P^j} := \left\{ (X, g_j P^j) \in \mathfrak{gl}_n \times \mathrm{GL}_n / P^j \,\middle|\, g_j^{-1} X g_j \in Z(\mathfrak{l}^j) \oplus \mathfrak{u}_{P^j} \right\}$$

并定义

$$\widetilde{\mathbb{Y}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}} := \widetilde{\mathbb{Y}}_{L^1,P^1} \times \cdots \times \widetilde{\mathbb{Y}}_{L^k,P^k}.$$

那么 $\mathbb{Y}_{\boldsymbol{L}}$，$_{\boldsymbol{P}}$ 是映射 p 在 $\mathfrak{gl}_n^k$ 中的像，该映射遗忘了部分旗 $g_j P^j$,

$$\begin{array}{rccc} p & : & \widetilde{\mathbb{Y}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}} & \to & \mathfrak{gl}_n^k \\ & & (X_j, g_j P^j)_{1\leq j\leq k} & \mapsto & (X_j)_{1\leq j\leq k}. \end{array}$$

~ ~类似地，$\mathcal{V}_{\boldsymbol{L}}$，$_{\boldsymbol{P}}$分别由$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L}}$，$_{\boldsymbol{P}}$通过忘掉部分旗，从$\mathcal{V}_{\boldsymbol{L}}$，$_{\boldsymbol{P}}$分别得到$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L}}$，$_{\boldsymbol{P}}$。

本节从分解$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L}}$，$_{\boldsymbol{P}}$ 以及命题$\overline{\mathcal{O}_{\underline{\mu}}}$，$_{\sigma} = \bigsqcup_{\rho \preceq \underline{\mu}} \mathcal{O}_{\underline{\rho}}$，$_{\sigma}$ 中引入的分解6.4，推导出族的分解。

$$\mathbb{Y}_{L,P} = \bigsqcup_{M} \bigsqcup_{\underline{\rho} \preceq \underline{\mu}} \mathbb{Y}_{L,P}^{M,\underline{\rho}}.$$

下一节（引理6.8）将利用该分解定义魏尔群作用。

设$\mathbb{Y}_{\boldsymbol{L}}^{\mathcal{B}}$，$_{\boldsymbol{P}}$ 是$\mathbb{Y}_{\boldsymbol{L}}$，$_{\boldsymbol{P}}$ 中具有一般半单部分的元素子集，即，其 k元半单部分组属于 $\mathcal{B}$。假设集合$\mathbb{Y}_{\boldsymbol{L}}^{\mathcal{B}}$，$_{\boldsymbol{P}}$ 非空。按照备注，$_{\boldsymbol{P}}$ 中的维数可用类似维数$\mathbb{Y}_{L}$，$_{P}$ 的方法计算。6.3,

$$\dim \mathbb{Y}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}^{\mathcal{B}} = kn^2 + \dim \mathcal{B} - \sum_{j=0}^{k} \dim L^j.$$

分解 $\mathbb{Y}_{L}$，$_{P} = \bigsqcup_{M} \bigsqcup_{\underline{\rho} \preceq \underline{\mu}} \mathbb{Y}^{M}$，$_{L}{}^{\underline{\rho}}{}_{P}$，会导出 $\mathbb{Y}_{\boldsymbol{L}}^{\mathcal{B}}$，$_{\boldsymbol{P}}$ 的类似分解,

$$\mathbb{Y}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}^{\mathcal{B}} = \bigsqcup_{\boldsymbol{M}} \bigsqcup_{\boldsymbol{\rho} \preceq \boldsymbol{\mu}} \mathbb{Y}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}^{\mathcal{B},\boldsymbol{M},\boldsymbol{\rho}},$$

其中 $\boldsymbol{M}=(M^1,\dots,M^l)$ 和 $\mathbb{Y}^{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{M},\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\rho}}$ 是.....中的元素子集

$$\mathbb{Y}^{M^1,\underline{\rho}^1}_{L^1,P^1}\times\cdots\times\mathbb{Y}^{M^k,\underline{\rho}^k}_{L^k,P^k}$$

取一个一般的 k-元半单部分组。由命题 $\mathbb{Y}^{M}_{L,P,\rho}$,6.4 中的维数计算，我们推得当 $Z(\boldsymbol{m})\cap\mathcal{B}$ 非空时

$$\dim\mathbb{Y}^{\mathcal{B},\boldsymbol{M},\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}=\sum_{j=1}^{n}\dim\mathcal{O}_{\underline{\rho}^j,\sigma^j}+\dim Z(\boldsymbol{m})\cap\mathcal{B}. \tag{29}$$

现在，$\mathbb{Y}^{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}$ 的分解诱导出箭图簇族$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}$ 的一个分解，我们定义

$$\mathcal{Q}^{\boldsymbol{M},\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}:=\left(\mathcal{V}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\times_{\mathbb{Y}^{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}}\mathbb{Y}^{\mathcal{B},\boldsymbol{M},\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\right)/\!/\operatorname{PGL}_n.$$

命题 6.6。 簇 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}$ 具有如下分解

$$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}=\bigsqcup_{\boldsymbol{M}}\bigsqcup_{\boldsymbol{\rho}\preceq\boldsymbol{\mu}}\mathcal{Q}^{\boldsymbol{M},\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}.$$

非空时，一部分的维数为

$$\dim\mathcal{Q}^{\boldsymbol{M},\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}=n^2(2g-2)+2+\dim Z(\boldsymbol{m})\cap\mathcal{B}+\sum_{j=1}^{k}\dim\mathcal{O}_{\underline{\rho}^j,\sigma^j}. \tag{30}$$

证明。 $\mathcal{Q}^{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\rho}}$,的维数可仿照 $\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_{\mu},\sigma}$的维数进行计算（见 Hausel、Letellier、Rodriguez-Villegas [HLRV11，定理 2.2。4] 以及 Letellier [Let11，推论 5.2。3]）。该计算依赖于 $\mathbb{Y}^{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{M},\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\rho}}$,的光滑性，而这由 $\mathbb{Y}^{\mathcal{B}}_{M^j,\underline{\rho}^j}$,,的光滑性以及表达式（29）关于 $\mathbb{Y}^{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{M},\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\rho}}$,的维数给出。 □

6.3 W在族$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L}}$的纤维~上同调的等变结构$P$

~在本节中，我们利用族 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\to\mathcal{B}$ 在簇 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}$ （$\boldsymbol{\sigma}\in\mathcal{B}$）的上同调上构造魏尔群作用~。本节研究的魏尔群是

$$W:=W_{\mathrm{GL}_n}(L^1)\times\cdots\times W_{\mathrm{GL}_n}(L^k).$$

每个 $W_{\mathrm{GL}_n}(L^j)$ 都同构于一个对称群，并通过置换具有相同重数的不同特征值作用于 $Z(\mathfrak{l})$。于是，魏尔群 W 作用于 $\mathcal{B}$，其中 $w=(w_1,\ldots..,w_k)\in W$ 以及 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma^1,\ldots..,\sigma^k)\in\mathcal{B}$,

$$w.\boldsymbol{\sigma}:=\left(\dot{w}_1\sigma^1\dot{w}_1^{-1},\dots,\dot{w}_k\sigma^k\dot{w}_k^{-1}\right),$$

其中 $\dot{w}_j$是 $w_j\in W_{\mathrm{GL}_n}(L^j)$ 在 GL_n中的一个代表元。考虑图表

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{B} & \xleftarrow{\eta} & \widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\\ {\scriptstyle\pi^0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p}\\ \mathcal{B}/W & \xleftarrow[\chi]{} & \mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}.\end{array} \tag{31}$$

借助箭图簇的视角，上同调层 $\mathcal{H}^i\eta_!\kappa$ 是常值层（定理 W）。本节构造这些上同调层上的等变结构。Nakajima [Nak94]引入了具有此类常值层的箭图簇上同调的魏尔群作用。这里我们也采用 Lusztig 的一种方法（见 [Let05，命题 5.5 的证明。3]），Laumon-Letellier 也在 [LL19，第 5 节2]中应用了这一方法。这种方法使得等变结构能够延拓到正则轨迹之外。Mellit 通过另一种构造，为特征簇得到了类似的结果 [Mel19，第 8]节。

在构造等变结构之前，我们先定义正则轨迹。记 $\mathcal{B}^{\mathrm{reg}}$ 为正则元素的子集，即满足 $(\sigma^1,\dots,\sigma^k)\in\mathcal{B}$ 的元素，其中 $Z_{\mathrm{GL}_n}(\sigma^j)=L^j$。这是 $\mathcal{B}$ 上 W-作用自由的轨迹。图表（31）拉回到正则轨迹上

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{B}^{\mathrm{reg}} & \xleftarrow{\eta^{\mathrm{reg}}} & \widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathrm{reg}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\\ \downarrow{\scriptstyle \pi^{\mathrm{reg}}} & & \downarrow{\scriptstyle p^{\mathrm{reg}}}\\ \mathcal{B}^{\mathrm{reg}}/W & \xleftarrow[\chi^{\mathrm{reg}}]{} & \mathcal{Q}^{\mathrm{reg}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}.\end{array}\tag{32}$$

与（25）类似，注意到

$$\mathcal{Q}^{\mathrm{reg}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\times_{\mathcal{B}^{\mathrm{reg}}/W}\mathcal{B}^{\mathrm{reg}}\cong\widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathrm{reg}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}.\tag{33}$$

定理 6.7. 上同调层 $\mathcal{H}^i\eta_!\kappa$ 在$\mathcal{B}$上具有 W-等变结构。

证明。 考虑图表

$$\begin{array}{ccccc} & & \widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}} & & \\ & \overset{\eta}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle c} & \searrow^{p} & \\ \mathcal{B} & \xleftarrow{a} & \mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\times_{\mathcal{B}/W}\mathcal{B} & & \\ \downarrow{\scriptstyle \pi^0} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \\ \mathcal{B}/W & \xleftarrow[\chi]{} & \mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}} & & \end{array},\tag{34}$$

群 W 作用于 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\times_{\mathcal{B}/W}\mathcal{B}$，且态射 a 是 W-等变的。簇 $\mathcal{Q}^{\mathrm{reg}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\times_{\mathcal{B}^{\mathrm{reg}}/W}\mathcal{B}^{\mathrm{reg}}$ 在$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\times_{\mathcal{B}/W}\mathcal{B}$中光滑、稠密且开。$\mathcal{Q}^{\mathrm{reg}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\times_{\mathcal{B}^{\mathrm{reg}}/W}\mathcal{B}^{\mathrm{reg}}$ 上的常值层 κ 是 W-等变的。事实上，对于 $w\in W$，我们可以定义一个态射

$$\phi_w:w^*\kappa\to\kappa$$

它在各茎上是恒等映射。它满足定义 3.4中的条件。应用注释 3.8中的延续原理，这个 W-等变结构可延拓为 W-等变结构，定义在 $\mathcal{IC}^{\bullet}_{\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\times_{\mathcal{B}/W}\mathcal{B}}$上。注意，$\eta_!\kappa\cong a_!c_!\kappa$。我们将在引理 6.8 中看到

$$c_!\kappa\cong\mathcal{IC}^{\bullet}_{\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\times_{\mathcal{B}/W}\mathcal{B}}.$$

于是， W上的等变结构在 $c_!\kappa$ 上诱导出 W等变结构。除同构$c_!\kappa\cong\mathcal{IC}^{\bullet}_{\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{P}}\times_{\mathcal{B}/W}\mathcal{B}}$外，定理得证。 □

接下来只需证明以下引理。

引理 6.8. 存在同构 $c_!\kappa \cong \mathcal{IC}^\bullet_{\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\times_{\mathcal{B}/W}\mathcal{B}}$。

证明。 由同构 (33)， $c_!\kappa$ 在光滑轨迹 $\mathcal{Q}^{\mathrm{reg}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\times_{\mathcal{B}^{\mathrm{reg}}/W}\mathcal{B}^{\mathrm{reg}}$ 上的限制是常值层 κ。为了验证定义 3.7 的假设，还需证明映射 c 是小的，即满足以下不等式

$$\dim\left\{x\in\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\times_{\mathcal{B}/W}\mathcal{B}\,\middle|\,\text{维数 } c^{-1}(x)\ \geq d\right\}\leq \text{维数}\,\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\times_{\mathcal{B}/W}\mathcal{B}-2d \text{ 对所有 } d>0.$$

我们采用 Lusztig [Lus84, 1.2], 另见 [Sho88，定理 1。4]。在李代数 $\mathfrak{gl}_n$ 中，对于 X 属于伴随轨道 $\mathcal{O}$的情形，该估计变为:

$$\dim\left\{gP\in \mathrm{GL}_n/P\,\middle|\,g^{-1}Xg\in\sigma+\mathfrak{u}_P\right\}\leq\frac{1}{2}\left(n^2-\dim L-\dim\mathcal{O}\right). \tag{35}$$

因此，证明在 Springer 理论中是标准的。设 $d>0$，并设 x 满足

$$\dim c^{-1}(x)\geq d,$$

元素 x 属于 $\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_\rho,\,\sigma}$ 其中元素 $\boldsymbol{\sigma}\in\mathcal{B}$ 以及某些伴随轨道 $\mathcal{O}_{\underline{\rho}^1,\,\sigma^1}$，$\ldots$，$\mathcal{O}_{\underline{\rho}^k,\,\sigma^k}$。维数估计（35）推出

$$d\leq\frac{1}{2}\left(kn^2-\sum_{j=1}^k\dim L^j-\dim\mathcal{O}_{\underline{\rho}^j,\sigma^j}\right),$$

从而

$$\sum_{j=1}^k\dim\mathcal{O}_{\underline{\rho}^j,\sigma^j}\leq kn^2-\sum_{j=1}^k\dim L^j-2d.$$

利用命题 6.6 中的分解，我们有 $x\in\mathcal{Q}^{\mathcal{B},\,\boldsymbol{M},\,\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{\rho}}$，。结合前一个不等式以及表达式（30）给出的 $\mathcal{Q}^{\mathcal{B},\,\boldsymbol{M},\,\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{\rho}}$，的维数，得到

$$\dim\mathcal{Q}^{\mathcal{B},\boldsymbol{M},\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\leq n^2(2g-2)+2+\dim Z(\boldsymbol{m})\cap\mathcal{B}+kn^2-\sum_{j=1}^k\dim L^j-2d. \tag{36}$$

此外

$$\dim\mathcal{Q}^{\mathcal{B},\boldsymbol{M},\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\times_{\mathcal{B}/W}\mathcal{B}=\dim\mathcal{Q}^{\mathcal{B},\boldsymbol{M},\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}} \tag{37}$$

and

$$\dim\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\times_{\mathcal{B}/W}\mathcal{B}=\dim\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}=n^2(2g-2)+2+\dim\mathcal{B}+kn^2-\sum_{j=1}^k\dim L^j. \tag{38}$$

结合（36）、（37）和（38），

$$\dim\mathcal{Q}^{\mathcal{B},\boldsymbol{M},\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\times_{\mathcal{B}/W}\mathcal{B}\leq\dim\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}\times_{\mathcal{B}/W}\mathcal{B}+2d+\dim Z(\boldsymbol{m})\cap\mathcal{B}-\dim\mathcal{B}. \tag{39}$$

由于假设 d 严格为正，因此包含关系 $\boldsymbol{L}\subsetneq\boldsymbol{M}$ 必然是严格的，于是

$$\dim Z(\boldsymbol{m})\cap\mathcal{B}<\dim\mathcal{B}. \tag{40}$$

现在，(39) 和 (40) 给出了估计

$$\dim \mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}}^{\mathcal{B},\boldsymbol{M},\rho} \times_{\mathcal{B}/W} \mathcal{B} < \dim \mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}} \times_{\mathcal{B}/W} \mathcal{B} - 2d. \tag{41}$$

总而言之，集合 $\{x \in \mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}} \times_{\mathcal{B}/W} \mathcal{B} \mid \text{维数 } c^{-1}(x) \geq d\}$ 是有限个簇的并集 $\mathcal{Q}^{\mathcal{B},\boldsymbol{M},\boldsymbol{L}^{\rho},\boldsymbol{P}} \times_{\mathcal{B}/W} \mathcal{B}$ 其维数满足前述估计（41）。 □

注 6.9。 我们来研究 W-等变层 $\mathcal{H}^i\eta_!\kappa$ 在 $\widetilde{\ }$正则轨迹上的限制。回忆一下，$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{reg}}, \boldsymbol{P} \times_{\mathcal{B}^{\mathrm{reg}}/W} \mathcal{B}^{\mathrm{reg}} \cong \mathcal{Q}_{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{reg}}, \boldsymbol{P}$，那么对于 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{B}^{\mathrm{reg}}$

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{\sigma}}^i\eta_!\kappa \cong H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}, \kappa).$$

对于 $w \in W$， W-等变结构由紧支撑上同调的函子性给出（见命题 *3.6* 和注 *3.3*）

$$w^* : H_c^i\left(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},w.\boldsymbol{\sigma}}, \kappa\right) \to H_c^i\left(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}, \kappa\right).$$

因此，定理 *6.7* 的构造给出了该自然魏尔群作用在 $\mathcal{B}$ 上的规范延拓，该作用定义在 $\mathcal{B}^{\mathrm{reg}}$上。

6.4 对 $\sim\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}$的上同调的单值魏尔群作用

我们在 5.12 中看到，上同调层 $\mathcal{H}^i\eta_!\kappa$ 在 $\mathcal{B}$上是常值层。结合 W-等变结构，可以在簇 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}$ 的上同调上构造魏尔群$\widetilde{\ }$作用；对于任意 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{B}$，这称为单值化 Weyl 群作用。注意，这个常值层在 $\boldsymbol{\sigma}$ 上的纤维是 $\sim H_c^i(\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}; \kappa)$。因此，对于任意 $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{B}$，存在一个同构

$$f_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}} : H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}; \kappa) \to H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},\boldsymbol{\tau}}; \kappa),$$

使得对于任意 $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{B}$

$$f_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}} = f_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\tau}} \circ f_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega}}.$$

定理 W-等变性局部系统 $\mathcal{H}^i\eta_!\kappa$ 蕴含以下定理。也可以直接证明该定理，而不必借助局部系统的等变性（参见 Maffei [Maf02，第 5]节）。

定理 6.10。 设 $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{B}$，则下图交换

$$\begin{array}{ccc} H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}; \kappa) & \xrightarrow{w^*} & H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},w^{-1}.\boldsymbol{\sigma}}; \kappa) \\ \downarrow{\scriptstyle f_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{w^{-1}.\boldsymbol{\sigma},w^{-1}.\boldsymbol{\tau}}} \\ H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},\boldsymbol{\tau}}; \kappa) & \xrightarrow{w^*} & H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},w^{-1}.\boldsymbol{\tau}}; \kappa). \end{array}$$

注 6.11。 注意，如果 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{B}$ 不是正则的，那么映射

$$w^* : H_c^i\left(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}, \kappa\right) \to H_c^i\left(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},w^{-1}.\boldsymbol{\sigma}}, \kappa\right)$$

这只是由常值层 $\mathcal{H}^i\eta_!\kappa$ 的 W-等变结构所给出的映射。它不一定是由簇的态射通过函子性得到的。

这个定理允许在紧支撑上同调空间 $H_c^i(\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L}},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{\sigma};\ \kappa)$ 上定义一个 W-作用。

定理 6.12。 对于 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{B}$ 和 $w \in W$，令

$$\rho_i(w) = f_{w.\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}} \circ (w^{-1})^*.$$

~这定义了 W 在 $H_c^i(\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L}},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{\sigma};\ \kappa)$上的作用，称为单值化 *Weyl* 群作用。

证明。 对于 w_1 和 w_2 在 W中，由定理 6.10，下图交换。

$$\begin{array}{ccccc}
H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}};\kappa) & \xrightarrow{(w_2^{-1})^*} & H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},w_2.\boldsymbol{\sigma}};\kappa) & \xrightarrow{(w_1^{-1})^*} & H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},w_1w_2.\boldsymbol{\sigma}};\kappa) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{w_2.\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{w_1w_2.\boldsymbol{\sigma},w_1.\boldsymbol{\sigma}}} \\
 & & H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}};\kappa) & \xrightarrow{(w_1^{-1})^*} & H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},w_1.\boldsymbol{\sigma}};\kappa) \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle f_{w_1.\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}}} \\
 & & & & H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}};\kappa)
\end{array}$$

从左上角经右上角到右下角的路径为$\rho(w_1w_2)$。经过中间的路径给出 $\rho(w_1)\rho(w_2)$。因此 $\rho(w_1w_2) = \rho(w_1)\rho(w_2)$。

□

6.5 Frobenius态射与单值化作用

本节的技巧源自 Hausel、Letellier 和 Rodriguez-Villegas[HLRV13]，，但我们不考虑矩映射的正则半单值。相反，矩映射的每个分量都是中心的，并且彗星形箭图的每条支臂都对应一个特定的伴随轨道。Letellier 也在这一背景下研究了彗星形箭图簇 [Let12]。这里考虑的情形略为一般，因为支臂可以表示任意伴随轨道，而不仅仅是正则半单轨道。

定理 6.12 中 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$定义的表示与在 $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}}_q$ 及足够大的特征下得到的表示同构。事实上，可以完全仿照 [HLRV13 定理25]，通过基变换证明这一点。因此，从现在起我们作如下假设：

假设6.13。 $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}}_q$ 且特征足够大。

这一假设非常方便，因为它使我们能够引入弗罗贝尼乌斯自态射，并使用格罗滕迪克迹公式计算所得作用的迹。

我们将 F 在 $\mathfrak{gl}_n$ 上的弗罗贝尼乌斯自同态记为将系数提升至 q次幂的映射。$\mathfrak{gl}_n$ 中 F-不动点的集合为 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}_q)$，$\mathrm{GL}_n$ 中也类似。假设 L^j 是分块对角矩阵子群，而 P^j是分块上三角矩阵子群，则它们在 F作用下稳定。态射 F ~在 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{reg}}$，$\boldsymbol{P}$ 以及 $\mathcal{B}^{reg}$ 上诱导出一个弗罗贝尼乌斯自同态，也记为 F，

$$F\left(\boldsymbol{\sigma}, (A_i, B_i)_{1\le i\le g}, (X_j, g_jL_j)_{1\le j\le k}\right) = \left(F(\boldsymbol{\sigma}), (F(A_i), F(B_i))_{1\le i\le g}, (F(X_j), F(g_j)L_j)_{1\le j\le k}\right).$$

这个弗罗贝尼乌斯自同态可以通过魏尔群 W中的元素 $w=(w_1,\dots,w_k)$ 扭曲。对于 $\boldsymbol{\sigma}\in B^{\mathrm{reg}}$，定义

$$wF(\boldsymbol{\sigma}_1,\dots,\boldsymbol{\sigma}_k):=(w_1.F(\boldsymbol{\sigma}_1),\dots,w_k.F(\boldsymbol{\sigma}_k))\,.$$

被 wF 固定的点集为 $(\mathcal{B}^{\mathrm{reg}})^{wF}$。类似地， w-扭曲的弗罗贝尼乌斯在$_\sim\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{reg}}$ ，$\boldsymbol{P}$ 上为

$$wF:=w\circ F.$$

它们相容， $p^{\mathrm{reg}}\circ wF=wF\circ p^{\mathrm{reg}}$ 因此对于 $\boldsymbol{\sigma}$， $\boldsymbol{\tau}\in\mathcal{B}^{\mathrm{reg}}$ ，下图交换

$$\begin{array}{ccc} H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},\boldsymbol{\sigma}};\kappa) & \xrightarrow{F^*} & H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},F^{-1}(\boldsymbol{\sigma})};\kappa) \\ \downarrow{\scriptstyle f_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{F^{-1}(\boldsymbol{\sigma}),F^{-1}(\boldsymbol{\tau})}} \\ H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},\boldsymbol{\tau}};\kappa) & \xrightarrow{F^*} & H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},F^{-1}(\boldsymbol{\tau})};\kappa). \end{array}$$

定理6.14。 对于 $\boldsymbol{\tau}\in(B^{\mathrm{reg}})^F$ 以及 $\boldsymbol{\sigma}\in(B^{\mathrm{reg}})^{wF}$， $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{\sigma}}$ 中$_\sim wF$ 不动点集的基数为

$$\sharp\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}^{wF}=\sum_i \operatorname{tr}\left(\rho^{2i}(w),H_c^{2i}(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},\boldsymbol{\tau}};\kappa)\right)q^i.$$

证明。 考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},\boldsymbol{\tau}};\kappa) & \xrightarrow{w^*} & H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},w^{-1}.\boldsymbol{\tau}};\kappa) & & \\ & \searrow^{\rho(w^{-1})} & \downarrow{\scriptstyle f_{w^{-1}.\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\tau}}} & & \\ \uparrow{\scriptstyle f_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}}} & & H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},\boldsymbol{\tau}};\kappa) & \xrightarrow{F^*} & H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},\boldsymbol{\tau}};\kappa) \\ & & \uparrow{\scriptstyle f_{F(\boldsymbol{\sigma}),\boldsymbol{\tau}}} & & \uparrow{\scriptstyle f_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}}} \\ H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},\boldsymbol{\sigma}};\kappa) & \xrightarrow{w^*} & H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},F(\boldsymbol{\sigma})};\kappa) & \xrightarrow{F^*} & H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},\boldsymbol{\sigma}};\kappa). \end{array}$$

将格罗滕迪克迹公式应用于 wF,

$$\begin{aligned}\sharp\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}^{wF} &= \sum_i(-1)^i\operatorname{tr}\left((wF)^*,H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}};\kappa)\right)\\ &= \sum_i(-1)^i\operatorname{tr}\left(F^*\circ\rho^i(w^{-1}),H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},\boldsymbol{\tau}};\kappa)\right).\end{aligned}$$

簇 $\mathcal{Q}_{\mathbf{L},\ \mathbf{P},\ \boldsymbol{\tau}}$ 是纯的且计数多项式（见注 4.13 和 [HLRV11，定理1.3。1]）并且(w^{-1}) 与 F 交换，因此

$$\begin{aligned}\sharp\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}^{wF} &= \sum_i\operatorname{tr}\left(F^*\circ\rho^{2i}(w^{-1}),H_c^{2i}(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},\boldsymbol{\tau}};\kappa)\right)\\ &= \sum_i\operatorname{tr}\left(\rho^{2i}(w^{-1}),H_c^{2i}(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},\boldsymbol{\tau}};\kappa)\right)q^i.\end{aligned}$$

现在，由于 W 同构于若干对称群的乘积， w 与其逆元 w^{-1} 共轭，且

$$\sharp\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}^{wF}=\sum_i \operatorname{tr}\left(\rho^{2i}(w),H_c^{2i}(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathbf{L},\mathbf{P},\boldsymbol{\tau}};\kappa)\right)q^i.$$

□

记号 6.15. $\boldsymbol{L}$ 的第 j 部分为

$$L^j \cong \underbrace{\mathrm{GL}_{c_1^j} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{c_1^j}}_{m_1^j} \times \cdots \times \underbrace{\mathrm{GL}_{c_{l_j}^j} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{c_{l_j}^j}}_{m_{l_j}^j},$$

其中 $c_r^j \neq c_s^j$ 对应 $r \neq s$。那么，相对魏尔群 W 的第 j 个部分为

$$W_{\mathrm{GL}_n}(L^j) \cong \mathfrak{S}_{m_1^j} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{m_{l_j}^j}$$

对称群 $\mathfrak{S}_{m_r^j}$ 通过置换大小为 c_r^j 的块作用。取 $w = (w_1, \ldots, w_k)$ 属于 W，并选取 $\boldsymbol{\sigma}_w = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ 属于 $(\mathcal{E}^{\mathrm{reg}})^{wF}$。元素 w_j 的共轭类由一个 l_j 元组 $(\eta^{j,1}, \ldots, \eta^{j,l_j})$ 确定，其中 $\eta^{j,r} \in \mathcal{P}_{m_r^j}$。令 $\mathcal{O}_{\sigma_j}$ 为 σ_j 的伴随轨道。该轨道是半单的、F 稳定的，且具有以下类型（定义见 *4.3*）：

$$\left(\eta_1^{j,1}, 1^{c_1^j}\right) \ldots \left(\eta_{l(\eta^{j,1})}^{j,1}, 1^{c_1^j}\right) \ldots \left(\eta_1^{j,l_j}, 1^{c_{l_j}^j}\right) \ldots \left(\eta_{l(\eta^{j,l_j})}^{j,l_j}, 1^{c_{l_j}^j}\right).$$

定义 $\mathcal{O}_w := (\mathcal{O}_{\sigma_1}, \ldots, \mathcal{O}_{\sigma_k})$。

引理 6.16。 使用上述记号，我们有以下关于基数的恒等式：

$$\sharp \widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}^{wF} = \sharp \mathcal{Q}_{\mathcal{O}_w}^F. \tag{42}$$

证明。由于轨道 $\mathcal{O}_w = (\mathcal{O}_{\sigma_1}, \ldots, \mathcal{O}_{\sigma_k})$ 是半单的（因而是闭的），~映射 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}} \to \mathcal{Q}_{\mathcal{O}_w}$ 是一个同构，并且与源上的弗罗贝尼乌斯 wF 及目标上的弗罗贝尼乌斯 F 相容。

□

Letellier [Let11]计算了彗星形箭图簇的点数，特别是 $\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_w}^F$。

定理 6.17。 采用记号 *6.15*，$\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_w}^F$ 的基数为

$$\sharp \mathcal{Q}_{\mathcal{O}_w}^F = (-1)^{r(\boldsymbol{\eta})} q^{\frac{d_{\boldsymbol{\mu}}}{2}} \left\langle \widetilde{h}_{\boldsymbol{\eta}}, \mathbb{H}_n^{HLV}(0, q^{\frac{1}{2}}) \right\rangle,$$

~其中 $h_{\boldsymbol{\eta}}$ 是 *[Let11]*中的广义舒尔函数的一个特例。这个对称函数可以用完全对称函数 h_n表示，

$$\widetilde{h}_{\boldsymbol{\eta}} := \prod_{j=1}^{k} \prod_{r=1}^{l_j} \prod_{s=1}^{l(\eta^{j,i})} h_{c_r^j}\left[X_j^{\eta_s^{j,r}}\right],$$

and

$$r(\boldsymbol{\eta}) := \sum_{j=1}^{k} \sum_{r=1}^{l_j} c_r^j \sum_{s=1}^{l(\eta^{j,i})} (\eta_s^{j,r} - 1).$$

证明。由于轨道 $\mathcal{O}_{\sigma_j}$ 是半单的，簇 $\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_w}$ 是光滑的，因此交叉复形的特征函数为常数 1。结论由 Letellier [Let11，定理 6.9.1、定理 7.4.1 和推论 7.4 得出。3]。

□

推论 6.18。 对于 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{B}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 表示魏尔群中的一个共轭类$\widetilde{}$（如记号 *6.15*所述）， $\boldsymbol{\eta}$-扭曲的 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L}}$ 庞加莱多项式$P_{\boldsymbol{\sigma}}$ 为

$$\sum_i \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\eta}, H_c^i(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}, \kappa)\right) v^i = (-1)^{r(\boldsymbol{\eta})} v^{d_{\boldsymbol{\mu}}} \left\langle \widetilde{h}_{\boldsymbol{\eta}}, \mathbb{H}_n^{HLV}(0, v)\right\rangle.$$

证明。 该作用来自 W常值层的等变结构$\mathcal{H}^i{}_{\eta!}\kappa$。因此，在同构意义下，该表示不依赖于 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{B}$ 的选择，因此可以针对$\boldsymbol{\tau} \in (\mathcal{B}^{\mathrm{reg}})^F$计算扭曲庞加莱多项式。由定理 6.14 以及（42），

$$\sum_i \operatorname{tr}\left(\rho^{2i}(\boldsymbol{\eta}), H_c^{2i}\left(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\tau}}, \kappa\right)\right) q^i = (-1)^{r(\boldsymbol{\eta})} q^{\frac{d_{\boldsymbol{\mu}}}{2}} \left\langle \widetilde{h}_{\boldsymbol{\eta}}, \mathbb{H}_n^{HLV}(0, q^{\frac{1}{2}})\right\rangle.$$

将 q^n 替换为 q，将 $n > 0$替换为后，该等式仍然成立。因此，这是两个多项式之间的等式，推论得证。 □

注记6.19 （单值化作用与 Springer 作用的比较）。 令 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots\ldots, \sigma_k) \in \mathcal{B}$, 与前面一样， M^j 是 σ_j 在 GL_n中的稳定子。相对魏尔群为

$$W_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{L}) = \prod_{j=1}^{k} W_{M^j}(L^j)$$

其中 $W_{M^j}(L^j) = N_{M^j}(L^j)/L^j$。那么 $W_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{L})$ 是本节研究的魏尔群 W 的子群。群 $W_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{L})$ 恰好是由满足 $w.\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}$ 的元素 $w \in W$构成的子群。定理 *6.12* 中的单值化 *Weyl* 群作用诱导出 $W_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{L})$ 在 $H_c^i\left(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}, \kappa\right)$ 上的作用。有趣的是，该作用仅来自 W-等变结构，并不依赖于层的常值性质：它由 $\rho_i(w) = (w^{-1})^*$ 显式给出。

还有一个 $W_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{L})$ 在 $H_c^i\left(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}, \kappa\right)$上的作用，即 *Letellier* 构造并在 *4.14*中提及的 *Springer*作用。*Letellier* 计算了该 *Springer*作用的扭曲庞加莱多项式 *[Let11，* 推论 *7.4*。*3],* 它与单值化作用所得到的庞加莱多项式一致，因此两种作用同构。若能对此给出直接证明，将会很有意思。我们已在特征簇的情形下证明了这一点，其中只考虑一个正则轨道，且该轨道只有一个特征值*[Bal21，* 第 *5]*章。

研究正则轨迹上的单值化作用$\mathcal{B}^{\mathrm{reg}}$ 作为具有半单伴随轨道的箭图簇上上同调的一种作用，也很有意思。对于 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{B}^{\mathrm{reg}}$ 考虑相应的一般 k元组半单伴随轨道 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathcal{O}_{\sigma_1}, \ldots\ldots, \mathcal{O}_{\sigma_k})$。魏尔群 $W_{\mathrm{GL}_n}(L^j)$是由 $\mathcal{O}_{\sigma_j}$ 中重数相同的不同特征值的置换构成的群。这给出了推论 6.18的另一种表述。

推论 6.20。 对于 $\boldsymbol{\eta}$ 如记号 *6.15*中所述、代表魏尔群中一个共轭类的 $\boldsymbol{\eta}$-扭曲庞加莱多项式 $\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\sigma}}}$ 为

$$\sum_i \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\eta}, H_c^i(\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\sigma}}}, \kappa)\right) v^i = (-1)^{r(\boldsymbol{\eta})} v^{d_{\boldsymbol{\eta}}} \left\langle \widetilde{h}_{\boldsymbol{\eta}'}, \mathbb{H}_n^{HLV}(0, v)\right\rangle.$$

结合注记 6.19 ，通过半单箭图簇对正则轨迹上的情形进行诠释，展现了将 W-等变结构从 $\mathcal{B}^{\mathrm{reg}}$ 扩展到 $\mathcal{B}$ 的优势（定理 6.10）。这为某些解消$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{\sigma}}$ 的上同调上的$\widetilde{\text{Springer}}$作用，以及半单箭图簇 $\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\sigma}}}$上同调上的单值化作用，提供了统一的描述。

注 6.21。 研究相对于某个特定支臂的魏尔群作用 $1 \leq j \leq k$也很有意思，例如相对于第一个支臂的作用。这将在7.2中用于描述由 *Kostka* 多项式张成的代数的一些结构系数。一个特别有意思的情形是 L^1 是一个极大环面，且 $M^1 = \mathrm{GL}_n$。相对于第一个支臂的魏尔群分量为 $W_{M^1}(L^1) \cong \mathfrak{S}_n$ 并且

$$W_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{L}) \cong \mathfrak{S}_n \times \prod_{j=2}^{k} W_{M^j}(L^j).$$

根据这一分解，考虑一个元素$(w,\ 1,\ \ldots,\ 1) \in W_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{L})$ 以及$w \in \mathfrak{S}_n$ 一个循环类型为 $\lambda \in \mathcal{P}_n$的元素。于是

$$\widetilde{h}_{\boldsymbol{\eta}} = p_\lambda[X_1] h_{\underline{\mu'^2}}[X_2] \ldots h_{\underline{\mu'^k}}[X_k],$$

并且$(-1)^{r(\boldsymbol{\eta})} = \epsilon(\lambda)$ 是置换 w 的符号，其循环类型为 λ。推论6.18 表述如下

$$P_c^{\boldsymbol{\eta}}\left(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}, v\right) = v^{d_{\boldsymbol{\mu}}} \epsilon(\lambda) \left\langle p_\lambda[X_1] h_{\underline{\mu'^2}}[X_2] \ldots h_{\underline{\mu'^k}}[X_k], \mathbb{H}_n^{HLV}(0, v) \right\rangle.$$

这可以用弗罗贝尼乌斯特征来理解，参见定义2.12。$\widetilde{\ }$考虑 $\mathfrak{S}_n$ 在$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{\sigma}}$ 的上同调上的表示，并用符号扭曲，$\sim H^\bullet(\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{\sigma},\ \kappa}) \otimes \epsilon$。其 v-分次弗罗贝尼乌斯特征由下列关于 X_1的对称函数给出

$$v^{d_{\boldsymbol{\mu}}} \left\langle h_{\underline{\mu'^2}}[X_2] \ldots h_{\underline{\mu'^k}}[X_k], \mathbb{H}_n^{HLV}(0, v) \right\rangle_{X_2, \ldots, X_k}.$$

注意到 $V_\rho \otimes \epsilon \cong V_{\rho'}$，根据注记 2.11，不可约$\widetilde{\ }$表示 V_ρ 在 $H^\bullet(\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{\sigma},\ \kappa})$ 中的重数由下式给出

$$v^{d_{\boldsymbol{\mu}}} \left\langle s_{\rho'}[X_1] h_{\underline{\mu'^2}}[X_2] \ldots h_{\underline{\mu'^k}}[X_k], \mathbb{H}_n^{HLV}(0, v) \right\rangle.$$

7 Kostka 多项式所张成的代数的几何解释

7.1 代数的描述

本节研究由 Kostka 多项式张成的代数，并将一些结构系数与魏尔群在箭图簇上同调上的作用之迹联系起来。定义线性映射 $\Delta^{\#}: \mathrm{Sym}[X] \to \mathrm{Sym}[X, Y]$，使其在修正 Macdonald 多项式基上满足，

$$\Delta^{\#}\left(\tilde{H}_\lambda[X]\right) := \tilde{H}_\lambda[X]\tilde{H}_\lambda[Y] \quad \text{for all } \lambda \in \mathcal{P}.$$

如 2.20 中一样，变量 $(q,\ t)$ 是隐含的。由于霍尔配对非退化，存在唯一确定的双线性映射 $\ldots\#\ldots$，使得对所有 $F,\ G$ 以及 H中$\mathrm{Sym}[X]$,

$$\langle F[X]\#G[X], H[X]\rangle = \left\langle F[X]G[Y], \Delta^{\#}\left(H[X]\right)\right\rangle.$$

The 乘积 # 在 Sym$[X$ 上定义了一种结合交换代数结构].

定义 7.1. 对于分拆的 k-元组 $\boldsymbol{\mu} = \left(\mu^1, \ldots, \mu^k\right) \in \mathcal{P}_n^k$ 以及 $\lambda \in \mathcal{P}_n$，我们用 $c_{\boldsymbol{\mu}}^{\lambda}$ 表示舒尔函数基下乘积 $\#$ 的结构系数

$$s_{\mu^1}\#s_{\mu^2}\ldots\#s_{\mu^k} = \sum_{|\mu|=n} c_{\boldsymbol{\mu}}^{\lambda} s_{\lambda}. \tag{43}$$

引理 7.2. 对于 $\boldsymbol{\mu} = (\mu, \nu)$，系数 $c_{\mu,\nu}^{\lambda}$ 与引言中定义的系数一致，即满足以下关系

$$\widetilde{K}_{\mu,\rho}\widetilde{K}_{\nu,\rho} = \sum_{\lambda} c_{\mu,\nu}^{\lambda}\widetilde{K}_{\lambda,\rho}. \tag{44}$$

证明. 首先令 $\left(\widetilde{L}_{\eta,\lambda}\right)_{\lambda,\eta\in\mathcal{P}_n}$ 为 Kostka 多项式矩阵的逆矩阵$\left(\widetilde{K}_{\eta,\lambda}\right)_{\lambda,\eta\in\mathcal{P}_n}$ (参见定义 2.19), 则

$$s_{\lambda} = \sum_{\eta\in\mathcal{P}_n} \widetilde{L}_{\eta,\lambda}\tilde{H}_{\eta}[X].$$

现在，系数 $c_{\mu,\nu}^{\lambda}$ 定义为

$$\begin{aligned} c_{\mu,\nu}^{\lambda} &= \langle s_{\mu}\#s_{\nu}, s_{\lambda}\rangle \\ &= \left\langle s_{\mu}\#s_{\nu}, \sum_{\eta\in\mathcal{P}_n} \widetilde{L}_{\eta,\lambda}\tilde{H}_{\eta}[X]\right\rangle. \end{aligned}$$

根据乘积 # 和余乘法 $\Delta^{\#}$ 的定义,

$$\begin{aligned} c_{\mu,\nu}^{\lambda} &= \sum_{\eta\in\mathcal{P}_n} \widetilde{L}_{\eta,\lambda}\left\langle s_{\mu}[X]s_{\nu}[Y], \tilde{H}_{\eta}[X]\tilde{H}_{\eta}[Y]\right\rangle, \\ c_{\mu,\nu}^{\lambda} &= \sum_{\eta\in\mathcal{P}_n} \widetilde{L}_{\eta,\lambda}\widetilde{K}_{\mu,\eta}\widetilde{K}_{\nu,\eta}. \end{aligned}$$

~将最后一个方程乘以$K_{\lambda,\ \rho}$ 并对 $\lambda \in \mathcal{P}_n$求和,

$$\widetilde{K}_{\mu,\rho}\widetilde{K}_{\nu,\rho} = \sum_{\lambda} c_{\mu,\nu}^{\lambda}\widetilde{K}_{\lambda,\rho}.$$

最后这个关系式正是引言中用于定义系数$c_{\mu,\ \nu}^{\lambda}$的关系式。

□

例 7.3。 我们使用软件 *SageMath* 计算了一些系数

$$\begin{aligned} c_{(2,2),(2,1,1)}^{(2,1,1)} &= -q^3t - q^2t^2 - qt^3 - q^2t - t^2q + q^2 + qt + t^2, \\ c_{(2,2),(2,1,1)}^{(1,1,1,1)} &= q^3 + q^2t + qt^2 + t^3 + q^2 + 2qt + t^2 + q + t. \end{aligned}$$

下一个猜想来自 Rodriguez-Villegas 未发表的笔记。

猜想 7.4. 结构系数 $c_{\boldsymbol{\mu}}^{\lambda}$ 属于 $\mathbb{Z}[q,t]$。

我们将提供一些支持这一猜想的证据。以下定义和注记由 François Bergeron 提出。

定义 7.5. 设 F 为一个对称函数，考虑算子

$$\begin{array}{rccc} F\#\ldots & : & \mathrm{Sym}\,[X] & \to & \mathrm{Sym}\,[X] \\ & & G & \mapsto & F\#G. \end{array}$$

我们将 ψ_F 记为它关于霍尔配对的伴随算子，使得对任意 G， H $\in$对称函数 $[X]$

$$\langle F\#G, H\rangle = \langle G, \psi_F(H)\rangle \tag{45}$$

这些算子在修正麦克唐纳多项式构成的基下是对角的

$$\psi_F(\tilde{H}_\lambda[X;q,t]) = \left\langle F, \tilde{H}_\lambda[X;q,t]\right\rangle \tilde{H}_\lambda[X;q,t]. \tag{46}$$

注 7.6. 应用关系 (46) 其中 e_n，

$$\psi_{e_n}\left(\tilde{H}_\lambda[X;q,t]\right) = q^{n(\lambda')}t^{n(\lambda)}\tilde{H}_\lambda[X;q,t],$$

并且我们认出这是由 *Bergeron- Garsia* 引入的算子 ∇ *[BG98]* 的常见表达式。*Garsia–Haiman* *[GH96]*提出的高阶 (q,t)-*Catalan* 序列（另见 *Haiman* *[Hai02]*，第*95*页）定义如下：

$$C_n^{(m)}(q,t) = \left\langle e_n, \nabla^m e_n\right\rangle,$$

但 $\nabla = \psi_{e_n}$ 是 $e_n\#\ldots$ 的伴随，并且 $s_{1^n} = e_n$ 使得

$$C_n^{(m)}(q,t) = c_{\underbrace{1^n,\ldots,1^n}_{m+1}}.$$

高阶 (q,t)-*Catalan* 序列是系数 $c_{\boldsymbol{\mu}}^{1^n}$ 的特例。

我们回顾一个重要定理，它最初由 Garsia–Haiman 提出猜想[GH96]。

定理 7.7 ([Hai02] 定理 4.2.5)。 对称函数 $\nabla(e_n)$ 是作为一个双分次表示的弗罗贝尼乌斯特征而得到的（见定义*2.12*），该表示属于$\mathfrak{S}_n$，称为对角调和多项式。特别地，

$$\langle \nabla(e_n), s_\lambda\rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[q,t].$$

推论 7.8。 对于任意 $\mu \in \mathcal{P}_n$，结构系数 $c_{1^n}^{1^n}$，μ 给出了类型为 μ 的不可约表示在 $\mathfrak{S}_n$ 对角调和多项式上的双分次表示中的重数。特别地 $c_{1^n}^{1^n}$，$\mu(q,\ t)\ \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[q,t]$ 因此，猜想 *7.4* 对于这些特定系数成立。

证明。 根据注记 7.6 以及伴随关系（45），

$$\langle s_\mu, \nabla(e_n)\rangle = \langle e_n \# s_\mu, e_n\rangle . \tag{47}$$

根据结构系数的定义 $c^\lambda_{\mu,\nu}$ 以及 $e_n = s_{1^n}$，我们有

$$e_n \# s_\mu = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n} c^\lambda_{1^n\mu} s_\lambda,$$

代入（47）可得

$$c^{1^n}_{1^n,\mu}(q,t) = \langle s_\mu, \nabla(e_n)\rangle .$$

最后，我们根据定理 7.7将 $\nabla(e_n)$ 解释为弗罗贝尼乌斯特征。

□

下一个定理及其后的推论来自 Rodriguez-Villegas 未发表的笔记。它们将特定的结构系数 $c^{1^n}_{\boldsymbol{\mu}}$ 与核 $\mathbb{H}^{HLV}_n$联系起来。

考虑定义 4.16 中亏格为 $g = 0$, $k+2$个穿孔点且变量为 $z = q^{\frac{1}{2}}$, $w = t^{\frac{1}{2}}$的生成函数。它的表达式为

$$\Omega^0_{k+2} := \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} \frac{\prod_{i=1}^{k+2} \tilde{H}_\lambda[X_i;q,t]}{a_\lambda(q,t)} s^{|\lambda|},$$

其中 $a_\lambda(q,t) = \left(\tilde{H}_\lambda[X;\ q,t], \tilde{H}_\lambda[X;\ q,t]\right)_{q,t}$如 2.18所示。

定理 7.9。 以下关系成立，

$$\left\langle p_{(n)}[X_{k+1}] h_{(n-1,1)}[X_{k+2}], \mathrm{Log}\left[\Omega^g_{k+2}\right]\right\rangle_{X_{k+1},X_{k+2}} = \sum_{|\lambda|=n} \frac{\phi_\lambda \Pi'_\lambda}{a_\lambda} \prod_{i=1}^{k} \tilde{H}_\lambda[X_i] s^{|\lambda|},$$

with

$$\begin{aligned} \phi_\lambda &= \sum_{i,j\in\lambda} q^{j-1}t^{i-1}, \\ \Pi'_\lambda &= \prod_{i,j\in\lambda\setminus(1,1)} (1-q^{j-1}t^{i-1}). \end{aligned}$$

证明。 根据引理 2.23，与 $h_{(n-1,1)}[X_{k+2}]$作霍尔配对等价于进行多重代入 $X_{k+2} = 1+u$ 并取 n在 u前的系数。由于多重代入与复合对数可交换，我们可以在复合对数内部进行此代入。利用引理 2.22， u 中 1阶的项为，

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}\left[\Omega^0_{k+2}\right] &= \mathrm{Log}\left[\Omega^0_{k+1} + u\sum_{\lambda\in\mathcal{P}^*} \frac{\phi_\lambda}{a_\lambda} \prod_{i=1}^{k+1} \tilde{H}_\lambda[X_i] s^{|\lambda|} + \mathcal{O}(u^2)\right] \\ &= \mathrm{Log}\left[\Omega^0_{k+1}\left(1 + u\frac{1}{\Omega^0_{k+1}}\sum_{\lambda\in\mathcal{P}^*} \frac{\phi_\lambda}{a_\lambda} \prod_{i=1}^{k+1} \tilde{H}_\lambda[X_i] s^{|\lambda|} + \mathcal{O}(u^2)\right)\right] \\ &= \mathrm{Log}\left[\Omega^0_{k+1}\right] + \mathrm{Log}\left[1 + u\frac{1}{\Omega^0_{k+1}}\sum_{\lambda\in\mathcal{P}^*} \frac{\phi_\lambda}{a_\lambda} \prod_{i=1}^{k+1} \tilde{H}_\lambda[X_i] s^{|\lambda|} + \mathcal{O}(u^2)\right]. \end{aligned}$$

我们利用了复合对数将乘积转化为和这一性质。根据复合对数的定义，鉴于 $p_n[u]=u^n$，我们很容易看出前一个表达式中 u 前的系数

$$\operatorname{Log}\left[\Omega^0_{k+2}\right]\big|_u=\frac{1}{\Omega^0_{k+1}}\sum_{\lambda\in\mathcal{P}^*}\frac{\phi_\lambda}{a_\lambda}\prod_{i=1}^{k+1}\tilde{H}_\lambda[X_i]s^{|\lambda|}.$$

保留次数为 n 的项，我们得到

$$\left\langle h_{(n-1,1)}[X_{k+2}],\operatorname{Log}\left[\Omega^0_{k+2}\right]\right\rangle_{X_{k+2}}=\frac{1}{\Omega^0_{k+1}}\sum_{\lambda\in\mathcal{P}^*}\frac{\phi_\lambda}{a_\lambda}\prod_{i=1}^{k+1}\tilde{H}_\lambda[X_i]s^{|\lambda|}\Bigg|_{s^n}.$$

求 Ω^0_{k+1} 的逆是合法的，它定义为

$$\frac{1}{\Omega^0_{k+1}}=\frac{1}{1+\left(\Omega^0_{k+1}-1\right)}=\sum_k\left(1-\Omega^0_{k+1}\right)^k.$$

现在只需与幂和 $p_{(n)}\left[X_{k+1}\right]$ 取霍尔配对。这等价于取 $n^{-1}p_{(n)}\left[X_{k+1}\right]$ 前面的系数。但 $p_{(n)}$ 不能写成两个次数严格小于 n 的对称函数的乘积，因此分母中 Ω^0_{k+1} 对 $n^{-1}p_{(n)}\left[X_{k+1}\right]$ 前面的系数没有影响，并且

$$\left\langle p_{(n)}[X_{k+1}]h_{(n-1,1)}[X_{k+2}],\operatorname{Log}\left[\Omega^0_{k+2}\right]\right\rangle_{X_{k+1},X_{k+2}}=\left\langle p_{(n)}[X_{k+1}],\sum_{\lambda\in\mathcal{P}^*}\frac{\phi_\lambda}{a_\lambda}\prod_{i=1}^{k+1}\tilde{H}_\lambda[X_i]s^{|\lambda|}\right\rangle_{X_{k+1}}.$$

我们以引理 2.24 和（4）结束。 □

下面的推论给出了系数的几何解释。事实上，它将系数 $c^{(1^n)}_{\boldsymbol{\mu}}$ 与生成级数 Ω^0_{k+2} 联系起来；已知该生成级数编码了彗星形箭图簇和特征簇的上同调信息。

推论 7.10。 采用前一定理和定义*7.1*，

$$(-1)^{n-1}c^{(1^n)}_{\boldsymbol{\mu}}=(q-1)(1-t)\left\langle\prod_{j=1}^{k}s_{\mu^j}[X_j]p_{(n)}[X_{k+1}]h_{(n-1,1)}[X_{k+2}],\operatorname{Log}\left[\Omega^0_{k+2}\right]\right\rangle_{X_1,\ldots,X_{k+2}}. \tag{48}$$

证明。我们应用定理7.9 将（48）的右端表示为

$$(q-1)(1-t)\left\langle s_{\mu^1}[X_1]\ldots s_{\mu^k}[X_k],\sum_{|\lambda|=n}\frac{\phi_\lambda\Pi'_\lambda}{a_\lambda}\prod_{i=1}^{k}\tilde{H}_\lambda[X_i]\right\rangle_{X_1,\ldots,X_k}.$$

根据乘积 # 的定义，

$$(q-1)(1-t)\left\langle s_{\mu^1}\#\ldots\#s_{\mu^k}[X],\sum_{|\lambda|=n}\frac{\phi_\lambda\Pi'}{a_\lambda}\tilde{H}_\lambda[X]\right\rangle_X.$$

这里我们认出了定理2.25

$$\left\langle s_{\mu^1}\#\ldots\#s_{\mu^k}[X],(-1)^{n-1}s_{(1^n)}\right\rangle_X$$

因此，如果我们写成

$$s_{\mu^1}\#\ldots\#s_{\mu^k}[X]=\sum_\lambda c_{\boldsymbol{\mu}}^\lambda s_\lambda[X]$$

结果由舒尔函数的正交归一性得出。 □

7.2 某些系数作为魏尔群在箭图簇交叉上同调上的作用之迹的解释

本节将给出系数 $c_{\boldsymbol{\mu}}^{1^n}$ 的上同调解释。为简化记号，这里仅描述系数 $c_{\mu\,\nu,}^{1^n}$。推广到任意 $\boldsymbol{\mu}$ 是直接的。

首先，详细说明群 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}$ 的构造和魏尔群的作用。设 $L^j=T$，其中 $\widetilde{1}\leq j\leq 3$ 和 $L^4=\mathrm{GL}_1\times\mathrm{GL}_{n-1}$。半单部分 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma^1,\ldots,\sigma^4)$ 满足：

- $\sigma^1=\zeta_1\,\mathrm{Id}$ is central,
- $\sigma^2=\zeta_2\,\mathrm{Id}$ is central,
- $\sigma^3=\begin{pmatrix}\alpha_1&&&\\&\alpha_2&&\\&&\ddots&\\&&&\alpha_n\end{pmatrix}$ with $\alpha_r\neq\alpha_s$ for $r\neq s$,
- $\sigma^4=\begin{pmatrix}\beta&&&\\&\gamma&&\\&&\ddots&\\&&&\gamma\end{pmatrix}$ has two eigenvalues $\beta\neq\gamma$. The multiplicity of β is one and the multiplicity of γ is $n-1$.

注意，此类选择可在一般位置中作出，即，其中 $\boldsymbol{\sigma}\in\mathcal{B}$.

首先，我们考虑 Letellier 构造的 Springer 式作用，以计算等型分量。令 $\boldsymbol{M}=M^1\times\cdots\times M^4$，其中 M^j 是 GL_n 中 σ^j 的稳定子。则 $W_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{L})\cong\mathfrak{S}_{n^\circ}^2$ Letellier 构造（备注 4.14）给出了 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{\sigma}}$ 上同调的 $\widetilde{\ }\ W_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{L})$ 作用。此外，对于 $V_{\mu'}$ 和 $V_{\nu'}$，分别是与某个分拆 μ 和 ν 的转置相关联的 $\mathfrak{S}_n$ 的不可约表示，

$$\mathrm{Hom}_{W_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{L})}\left(V_{\mu'}\otimes V_{\nu'},H_c^{i+d_{\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}}}\left(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}},\kappa\right)\right)=H_c^{i+d_{\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}}}}\left(\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}},\kappa\right).\tag{49}$$

记 $\mathcal{O}=(\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_4)$ 为由下式定义的一般伴随轨道的 4元组，

- $\mathcal{O}_1$ 的若尔当型为 μ'，特征值为 ζ_1,
- $\mathcal{O}_2$ 具有若尔当型 ν'，特征值为 ζ_2,

- $\mathcal{O}_3$ 是 σ^3 的轨道,
- $\mathcal{O}_4$ 是 σ^4的轨道。

现在利用定理 6.12中的构造，整个~群 $W \cong \mathfrak{S}_n^3$ 在 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{L}}$的上同调上$\boldsymbol{P}$有$\boldsymbol{\sigma}$作用。此 W 作用在$W_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{L}) \cong \mathfrak{S}_n^2$ 上的限制与 Springer作用同构（见注 6.19）。首先取关于 $V_{\mu'} \otimes V_{\nu'}$ 作用的 $\mathfrak{S}_n^2$等型分量。然后还存在一个相对于第三条腿的魏尔群作用，作用于交叉上同调 $\mathfrak{S}_n\, IH_c^i(\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}}, \kappa)$。

定理 7.11。 令 w 为相对于第三条腿的魏尔群中的一个 n-循环（这一术语源于彗星形箭图）。系数$c_{\mu,\nu}^{1^n}$,在特化为 $q=0$后，由 $\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}}$的 w-扭曲庞加莱多项式给出，即

$$c_{\mu,\nu}^{1^n}(0,t) = t^{-\frac{d_{\overline{\mathcal{O}}}}{2}} \sum_i \operatorname{tr}\left(w, IH_c^{2i}\left(\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}}, \kappa\right)\right) t^i.$$

证明。 结合（49）、推论 6.18 和注 6.21,

$$\sum_i \operatorname{tr}\left(w, IH_c^i\left(\mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{O}}}, \kappa\right)\right) v^i = (-1)^{n-1} v^{d_{\overline{\mathcal{O}}}} \left\langle s_\mu[X_1] s_\nu[X_2] p_{(n)}[X_3] h_{(n-1,1)}[X_4], \mathbb{H}_n^{HLV}(0,v)\right\rangle.$$

定理现由推论 7.10得出。 □

7.3 乘法情形下的上同调解释

乘法情形下也有类似的解释。一个涉及 $c_{\mu}^{1^n},_{\nu}(q,t)$ 的猜想性解释，在特化为 $c_{\mu}^{1^n},_{\nu}(1,t)$ 后便成为定理。遗憾的是，在乘法情形下，一般情况下未定义单值化作用，因此我们只能依赖 Springer作用。因此，这些陈述涉及特征簇的部分解消，而非实际的特征簇。

首先引入相关参数。Levi 子群是由对角矩阵 $L^j = T$构成的环面，适用于 $1 \le j \le 3$和 $L^4 = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_{n-1}$。半单部分$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \ldots, \sigma^4)$ 满足:

- $\sigma^1 = \zeta_1 \mathrm{Id}$ 是中心的,
- $\sigma^2 = \zeta_2 \mathrm{Id}$ 是中心的,
- $\sigma^3 = \zeta_3 \mathrm{Id}$ 是中心的,
- $\sigma^4 = \begin{pmatrix} \beta & & & \\ & \gamma & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma \end{pmatrix}$ 有两个特征值 $\beta \neq \gamma$。

这个 4元组被选为一般的（按定义 4.10 的乘法意义而言）。例如，当 $\zeta_1\zeta_2\zeta_3 = 1$ 且 $\gamma^{n-1} = \beta^{-1} \neq 1$时，情况便是如此。相对魏尔群为 $W_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{L}) \cong \mathfrak{S}_n^3$。现在考虑以下共轭类

- $\mathcal{C}_1$ 的若尔当型为 μ' ，特征值为 ζ_1,

- $\mathcal{C}_2$ 的若尔当型为 ν'，特征值为 ζ_2,
- $\mathcal{C}_3$ 有一个大小为 n 、特征值为 ζ_3 的若尔当块,
- $\mathcal{C}_4$ 是 σ_4的共轭类。

那么 $\mathcal{M}_{\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{\sigma}}$是$\mathcal{M}_{\overline{\boldsymbol{\mathcal{C}}}}$的解消，其中 $\boldsymbol{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}_1, \ldots\ldots, \mathcal{C}_4)$ （见定义4.15）。在$\mathcal{M}_{\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{\sigma}}$ 和$\mathcal{M}_{\overline{\boldsymbol{\mathcal{C}}}}$ 之间的一个中间簇由以下簇给出

$$\mathcal{M}_{\mu,\nu} = \left\{(X_1,\ldots,X_4) \in \overline{\mathcal{C}}_1 \times \cdots \times \overline{\mathcal{C}}_4, gB \in \mathrm{GL}_n/B \,\middle|\, g^{-1}X_3 g \in \zeta_3 U \right.$$
$$\left. X_1 \ldots X_4 = \mathrm{Id}\right\} /\!/ \mathrm{PGL}_n,$$

其中 B 是GL_n 中的上三角矩阵 Borel 子群，其 U 幺幂根式为。于是，解消 $\mathcal{M}_{\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{\sigma}} \to \mathcal{M}_{\overline{\boldsymbol{\mathcal{C}}}}$ 经由$\mathcal{M}_{\mu,\ \nu}$。这是 Letellier 研究的特征簇部分解消的一个特例[见13]。我们回顾的关于特征簇解消的 Springer 理论结果（16）对部分解消有一个更一般的版本。特别是，考虑 $\mathfrak{S}_n^2$ 关于前两个穿孔点的作用，并取上同调的 $V_{\mu'} \otimes V_{\nu'}$ 等型分量 $H_c^\bullet\left(\widetilde{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}, \kappa\right)$，我们得到:

$$\mathrm{Hom}_{W_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{L})}\left(V_{\mu'} \otimes V_{\nu'}, H_c^{i+d_{\widetilde{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}}}\left(\widetilde{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{\sigma}}, \kappa\right)\right) = H_c^{i+d_{\mathcal{M}_{\mu,\nu}}}\left(\mathcal{M}_{\mu,\nu}, \kappa\right).$$

相对于第三个穿孔点，仍有一个魏尔群 $\mathfrak{S}_n$ 的作用。对于w，在该魏尔群中定义 w-扭曲混合霍奇多项式如下:

$$IH_c^w\left(\mathcal{M}_{\mu,\nu}; u, v\right) := \sum_{i,r} u^r v^i \,\mathrm{tr}\left(w, IH_c^{r,r,i}\left(\mathcal{M}_{\mu,\nu}, \kappa\right)\right).$$

猜想 4.18可以推广，用以描述魏尔群在特征簇部分解消的交叉上同调上的作用（Letellier [Let13，猜想 5.5]）。特别地，该猜想预言了以下关于w-扭曲混合霍奇多项式的公式，其中 w a n-循环为:

$$IH_c^w\left(\mathcal{M}_{\mu,\nu}; u, v\right) =$$
$$(-1)^{n-1}\left(v\sqrt{u}\right)^{\dim \mathcal{M}_{\mu,\nu}} \left\langle s_\mu[X_1] s_\nu[X_2] p_{(n)}[X_3] h_{(n-1,1)}[X_4], \mathbb{H}_n^{HLV}\left(\frac{-1}{\sqrt{u}}, v\sqrt{u}\right)\right\rangle.$$

下一个猜想可由这一猜想公式推出，正如定理 7.11由推论 6.18推出一样。

猜想 7.12. 设 w 是相对于第三个穿孔点的魏尔群中的一个 n-循环。系数$c_\mu^{1^n}$，ν 与 w-扭曲混合霍奇多项式$\mathcal{M}_{\mu',\ \nu'}$的关系为

$$c_{\mu,\nu}^{1^n}(q,t) = t^{\frac{-\dim \mathcal{M}_{\mu,\nu}}{2}} IH_c^w\left(\mathcal{M}_{\mu,\nu}, \frac{1}{q}, \sqrt{qt}\right).$$

我们将证明，这个猜想右端确实是一个关于 q、t 的多项式，从而为猜想 7.4 提供支持。

引理 7.13。 簇 $\mathcal{M}_{\mu,\nu}$ 的庞加莱多项式（紧支撑交叉同调）为

$$\sum_i v^i \dim IH_c^i\left(\mathcal{M}_{\mu,\nu},\kappa\right) = v^d \left\langle s_\mu[X_1]s_\nu[X_2]h_{1^n}[X_3]h_{(n-1,1)}[X_4], \mathbb{H}_n^{HLV}\left(-1,v\right)\right\rangle, \tag{50}$$

并且，对于魏尔群中相对于第三个穿孔点的 w a n-循环，其 w-扭曲庞加莱多项式为

$$\sum_i v^i \dim \mathrm{tr}\left(w, IH_c^i\left(\mathcal{M}_{\mu,\nu},\kappa\right)\right) = v^d \left\langle s_\mu[X_1]s_\nu[X_2]p_{(n)}[X_3]h_{(n-1,1)}[X_4], \mathbb{H}_n^{HLV}\left(-1,v\right)\right\rangle.$$

证明。 Letellier [Let13，定理 5。4]研究了特征簇部分解消的 Springer 理论。这使得我们能够用特征簇的交叉上同调来描述这些部分解消的交叉上同调及其魏尔群作用。特征簇交叉上同调的庞加莱多项式已在 [Bal22]中计算。因此，解消的（扭曲）庞加莱多项式公式是 [Let13，命题 5。7]中的庞加莱多项式特化的推论。

□

命题 7.14。 以下表达式

$$t^{\frac{-\dim \mathcal{M}_{\mu,\nu}}{2}} IH_c^w\left(\mathcal{M}_{\mu,\nu}, \frac{1}{q}, \sqrt{qt}\right),$$

根据猜想 *7.12*，它是 q，t的整数系数多项式。

证明。 首先注意，由于（50）以及在亏格 $g=0$ 时核 $\mathbb{H}_n^{HLV}(z,w)$ 只包含 z^2, w^2中的项，

设 $\mathcal{S}$ 是一个正则半单共轭类，使得 4元组 $\mathbf{C}' = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{S}, \mathcal{C}_4)$ 是一般的。根据 [Bal22] 和 (50)，特征簇 $\mathcal{M}_{\vec{\mathcal{C}}'}$ 的庞加莱多项式与簇 $\mathcal{M}_{\mu,\nu}$ 的庞加莱多项式相同。但簇 $\mathcal{M}_{\vec{\mathcal{C}}'}$ 是仿射的，因此其紧支撑交叉上同调在严格小于其维数的次数上消失，且表达式中只出现 t 的正幂。只出现 q 的正幂，是因为紧支撑交叉上同调的权小于上同调次数。

□

引理 7.13中的第二个等式推出猜想 7.12的庞加莱多项式特化形式。

定理 7.15。 设 w 是相对于第三个穿孔点的魏尔群中的一个 n-循环。系数 $c_\mu^{1^n}$，ν 与 $\mathcal{M}_{\mu,\nu}$ 的 w-扭曲庞加莱多项式相关：

$$c_{\mu,\nu}^{1^n}(1,t) = t^{\frac{-\dim \mathcal{M}_{\mu,\nu}}{2}} \sum_i t^{\frac{i}{2}} \mathrm{tr}\left(w, IH_c^i\left(\mathcal{M}_{\mu,\nu},\kappa\right)\right).$$

参考文献

[Bal20] Mathieu Ballandras. 矩映射的平凡化。*arXiv.2010.08294*，2020。

[Bal21] Mathieu Ballandras. 特征簇和箭图簇上上同调的 Weyl群作用。博士论文，巴黎大学 – 高等国际研究学院，2021。[Bal22] Mathieu Ballandras. 带 puncture 的黎曼曲面上特征簇的交叉上同调。arXiv.2201.08795，2022。[BBDG18] A. A. Beilinson、J. Bernstein、P. Deligne 和 O. Gabber。反常层，Astérisque 第100卷。法国数学会，2018。[BG98] F. Bergeron 和 G. Garsia。科幻小说与 Macdonald 多项式。CRM 会议录讲义，22，1998年10月。[BM83] W. Borho 和 R. MacPherson。幂零簇的部分解消，载于《奇异空间上的分析与拓扑》II、III，Astérisque 第101卷。法国数学会，1983。[CB01] William Crawley-Boevey。箭图表示的矩映射几何。Compositio Mathematica，126(3):257–293，2001。[CB03a] William Crawley-Boevey。不可分解抛物丛，以及具有指定共轭类闭包且乘积等于单位矩阵的矩阵的存在性。《数学出版物》，100，2003年8月。[CB03b] William Crawley-Boevey。关于具有指定共轭类、没有公共不变子空间且和为零的矩阵。Duke Math. J.，118(2):339–352，2003年6月。[CB06] William Crawley-Boevey。箭图代数、加权射影直线与 Deligne-Simpson 问题。国际数学家大会，ICM 2006，2，2006年5月。[GH93] A. M. Garsia 和 M. Haiman。Macdonald 多项式的分次表示模型。《美国国家科学院院刊》，90(8):3607–3610，1993。[GH96] A.M. Garsia 和 M. Haiman。一个非凡的 q,t-卡塔兰数列与 q-拉格朗日反演。《代数组合学杂志》，5:191–244，1996。[Hai01] Mark Haiman。希尔伯特概形、多图与 Macdonald 正性猜想。《美国数学会杂志》，14(4):941–1006，2001。[Hai02] Mark Haiman。组合学、对称函数与希尔伯特概形。《数学最新进展》，2002:39–111，2002。[HLRV11] Tamás Hausel、Emmanuel Letellier 和 Fernando Rodriguez-Villegas。特征簇与箭图簇上的算术调和分析。Duke Math. J.，160(2):323–400，2011年11月。

[HLRV13] Tamás Hausel、Emmanuel Letellier 和 Fernando Rodriguez-Villegas。Kac多项式的正性与箭图的DT不变量。《数学年刊》，177(3):1147–1168，2013。[Kos04] Vladimir Petrov Kostov。Deligne–Simpson问题——综述。《代数杂志》，281(1):83–108，2004。[KP81] Hanspeter Kraft 和 Claudio Procesi。GLn中的极小奇异性。《数学发明》，62:503–515，1980/81。[KW01] Reinhardt Kiehl 和 Rainer Weissauer。Weil猜想、多重层与l进傅里叶变换。Springer，2001年1月。[Let05] Emmanuel Letellier。有限约化李代数上不变函数的傅里叶变换。《数学讲义》，Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，2005。[Let11] Emmanuel Letellier。箭图簇与有限域上一般线性群的特征环。《欧洲数学会杂志》，15，2011年3月。[Let12] Emmanuel Letellier。有限域上一般线性群幺幂特征的张量积。《变换群》，18，2012年4月。[Let13] Emmanuel Letellier。穿孔点处共轭类的扎里斯基闭包所对应的特征簇。《Selecta Mathematica》，21，2013年9月。[LL19] Gérard Laumon 和 Emmanuel Letellier。关于 Braverman-Kazhdan 猜想的札记，2019。[Lus84] G. Lusztig。约化群上的交叉上同调复形。《数学发明》，75:205–272，1984。[Lus85] G. Lusztig。特征层 I。《数学进展》，56(3):193–237，1985年6月。[Lus86] G. Lusztig。有限Chevalley群在幺幂元素处的特征值。《代数杂志》，104:146–194，1986。[Lus00] G. Lusztig。箭图簇与Weyl群作用。《傅里叶研究所年刊》，50(2):461–489，2000。[Mac88] I.G. Macdonald。一类新的对称函数。《洛林组合学研讨会》，仅电子版/, 20:B20a，41页–B20a，41页，1988。[Mac15] I. G. Macdonald。对称函数与Hall多项式。《牛津物理科学经典文本》。牛津大学出版社克拉伦登出版社，纽约，第二版，2015。附有A. V. Zelevinsky的贡献及Richard Stanley的序言；重印自2008年平装版 [MR1354144]。

[Maf02] Andrea Maffei。关于箭图簇与Weyl群的一点注记。比萨高等师范学院科学班年刊，第5辑，1(3):649–686，2002。[Mel18] Anton Mellit。Hausel–Letellier–Villegas 核的整性。《杜克数学杂志》，167(17):3171–3205，2018年11月。[Mel19] Anton Mellit。特征簇的胞腔分解，2019。[Mel20] A. Mellit。特征簇的庞加莱多项式、Macdonald多项式与仿射Springer纤维。《数学年刊》，192(1):165–228，2020。[Nak94] Hiraku Nakajima。ALE空间上的瞬子、箭图簇与Kac-Moody代数。《杜克数学杂志》，76(2):365–416，1994年11月。[Nak98] Hiraku Nakajima。箭图簇与Kac-Moody代数。《杜克数学杂志》，91(3):515–560，1998。[Nak00] Hiraku Nakajima。箭图簇的反射函子与Weyl群作用。《数学年刊》，327，2000年8月。[Nak01] Hiraku Nakajima。箭图簇与量子仿射代数的有限维表示。美国数学会杂志，14(1):145–238，2001。[Sai86] Morihiko Saito。混合Hodge模。《日本学术会议会刊 *A*辑 数学科学》，62(9):360–363，1986。[Shm09] D. A. Shmelkin。关于A型中岛箭图簇的若干注记，2009。[Sho88] Toshiaki Shoji。轨道几何与Springer对应。载于《幺幂轨道与表示论——*I*：有限群与*Hecke*代数》，Astérisque第168卷。法国数学会，1988。[Spr76] T. Springer。三角和、有限群的Green函数与Weyl群表示。《数学发明》，36:173–207，1976。