arXiv:2301.03444v1 [math.RT] 9 Jan 2023

李群的因子型 I KMS 态

Tobias Simon

2023年1月10日

摘要

受由拓扑群的协变酉表示所定义的 C*-或 W*-动力系统的 KMS 条件研究启发，我们考察有限维李群 G 的吉布斯态，并证明这些态恰好是因子型 I KMS 态。对于元素 $X \in \mathbf{L}(G)$ 以及满足 $\mathrm{tr}(e^{i\partial\rho(X)}) = 1$的 G 的不可约酉表示 ρ，相应的吉布斯态定义为 $\varphi(g) = \mathrm{tr}(\rho(g)e^{i\partial\rho(X)})$。我们证明，在 ρ 具有离散核这一温和假设下，条件 $\mathrm{tr}(e^{i\partial\rho(X)}) < \infty$意味着生成元 X 是椭圆元素集合 $\mathrm{comp}(\mathfrak{g})$ 中的一个内点，其中 $\mathfrak{g}$。这使我们能够完整刻画满足 $\mathrm{tr}(e^{i\partial\rho(X)}) < \infty$的李代数 $\mathfrak{g}$、具有离散核的表示 ρ以及生成元 X。

目录

1 吉布斯态的几何与表示论方面 4
1.1 吉布斯元素的椭圆性.5 1.2 吉布斯型表示的刻画.8

2 拓扑群的 KMS 态 12
2.1 拓扑群 KMS 态的基本性质.13 2.2 局部紧群的 C*-方法.15 2.3 拓扑群的半有限 KMS 态.19

3 展望与未解决问题 21
3.1 将 G 的 KMS 态扩张为 $G^\flat$ 的 KMS 态.21 3.2 李群的因子型 II KMS 态.22

A 附录 22
A.1 紧嵌入的嘉当子代数与可容许李代数 22 A.2 凸几何与表示论概念.24

记号与定义

- 本文所讨论的群动力系统 $(G, \alpha, \mathbb{R})$ 由一个拓扑群 G 和一个群同态 $\alpha : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(G)$ 构成，其轨道映射连续，即 α 是强连续的。我们称 α 为单参数自同构群。

- 群动力系统（G， α， $\mathbb{R}$）的一个协变酉表示是 $G^\flat := G \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 的酉表示。这些恰好是酉表示（π， $\mathcal{H}$）

满足以下条件的 G： 存在一个作用于 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子 H，使得对所有 $t \in \mathbb{R}$, $g \in G$，都有 $e^{itH}\pi(g)e^{-itH} = \pi(\alpha_t(g))$。我们称 H 为一个实现算子。

- 拓扑群的一个态 $\varphi : G \to \mathbb{C}$ 是一个连续函数，其核K_φ： $G \times G \to \mathbb{C}$ 定义为 $K_\varphi(x, y) := \varphi(x^{-1}y)$，它是正定的，且 $\varphi(e) = 1$。其 GNS 表示记作 $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \Omega_\varphi)$。

- 如果 G 是一个李群，我们用 $\mathbf{L}(G)$ 或 $\mathfrak{g}$ 表示其李代数。

- 冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$ 可唯一分解为 I 型、II_1 型、II_∞ 型和 III 型冯·诺伊曼代数的直和（参见 [Tak02, 定义 V.1.17], [Tak02, 定理 V.1.19]）。如果 III 型直和项为平凡项，则称其为半有限 。这等价于存在一个定义在 $\mathcal{M}$ 上的半有限忠实正规迹权 τ （参见 [Tak03, 定义 VII.1.1], [Tak02, 定理 V.2.15]）。

- 如果某个拓扑群或 C*代数上的一个态所生成的冯·诺伊曼代数（由其 GNS 表示生成）是半有限的，我们称该态为半有限态；如果该代数是因子，则称该态为因子态。

- 有限维向量空间上的椭圆的线性映射端omorphism，是指具有纯虚特征值的半单线性映射。

引言

对于 C* 或 W*-动力系统 $(\mathcal{M}, \tau, \mathbb{R})$，KMS 态已得到广泛研究，例如见 [BR96]。我们关注由群动力系统 $(G, \alpha, \mathbb{R})$ 和 α-协变表示 π所定义的动力系统的 KMS 态；也就是说，我们考虑冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M} = \pi(G)''$ 以及由$\tau_t(\pi(g)) = \pi(\alpha_t(g))$唯一确定的 *-自同构单参数群。此类动力系统的一个例子是 Weyl 代数 $\mathrm{W}(\mathrm{E}\ \sigma)$，它由海森堡群 $\mathrm{Heis}(\mathrm{E}\ \sigma)$的薛定谔表示的像生成，其中 (E, σ) 是一个辛向量空间（参见 [BR96，定理 5.2.8]）。在此例中，动力学 τ 由与一个辛映射单参数群相对应的 Bogoliubov 变换实现；这正是上述一般情形的一个例子。对于此类动力系统，态 $\omega : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ 满足 (τ, β)-KMS 条件，这意味着相应的态 $\varphi : G \to \mathbb{C},\ g \mapsto \omega(\pi(g))$ 是下述定义意义下的 (α, β)-KMS 态。

定义。设 $(G, \alpha, \mathbb{R})$ 是一个群动力系统，$\varphi : G \to \mathbb{C}$ 是一个态。对于 $\beta > 0$，我们称 φ 满足 (α, β)-KMS 条件，如果这些函数

$$F_{x,y} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \varphi(x\alpha_t(y)), \quad \text{for} \quad x, y \in G,$$

可延拓为带状区域 $\mathcal{S}_\beta := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Im}(z) \le \beta\}$ 上的连续映射，且在内部全纯，并满足反射性质 $F_{x,y}(t + i\beta) = \varphi(\alpha_t(y)x)$，其中 $t \in \mathbb{R}$。

反过来，若从拓扑群的一个 (α, β)-KMS 态出发，并考察相应的 W*-动力系统 $(W^*(G)\ \tau, \mathbb{R})$，其中 $W^*(G)$ 是 G 的群 W* 代数，则很容易得到 G 的 (α, β)-KMS 态与 $W^*(G)$ 的 (τ, β)-KMS 态之间的对应关系（参见第2.1小节）。当群 G 局部紧时，可以使用由群 C* 代数 $C^*(G)$ 给出的 C*-动力系统，其中 $C^*(G)$ 定义为 $L^1(G)$ 的包络 C* 代数，并配有相应的作用。这使得局部紧群的 KMS 态更易于研究，因为 C*-动力系统及其 KMS 态具有更强的分解结果。特别是，对于局部紧 I 型群，其中每个因子态都是 I 型

态，每个 (α,β)-KMS 态都是相对于极端 (α,β)-KMS 态集合上的某个 Radon概率测度，对极端吉布斯态取积分所得（参见第2.2小节）。

如果拓扑群 G 的 (α,β)-KMS 态 φ 在如下意义下是半有限的：$\pi_\varphi(G)''$ 是一个半有限冯·诺伊曼代数，那么在 $\pi_\varphi(G)''$ 上存在一个半有限的忠实正规迹 τ。可以利用拉东-尼科迪姆定理证明

$$\varphi(g)=\frac{\tau(\pi(g)e^{-\beta H})}{\tau(e^{-\beta H})},\quad \text{for}\quad g\in G, \tag{1}$$

对于一个与 $\pi_\varphi(G)''$ 相关联的自伴算子 H，若其满足 $e^{itH}\pi_\varphi(g)e^{-itH}=\pi_\varphi(\alpha_t(g))$ 且 $\tau(e^{-\beta H})<\infty$（参见第2.3小节）。这尤其适用于 $\pi_\varphi(G)''$ 是一个 I型因子的情形，即对于某个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，有 $\pi_\varphi(G)''\cong B(\mathcal{H})$。因此，按照公式（1）的方式，可以在因子 I 型 (α,β)-KMS 态与不可约 α-协变酉表示 π 的酉等价类之间建立一一对应关系，其中实现算子 H 满足 $\mathrm{tr}(e^{-\beta H})<\infty$，而 H 是 α 的实现算子，并且 $e^{itH}\pi(g)e^{-itH}=\pi(\alpha_t(g))$。

假设 G 是一个有限维李群，并且 α 是内作用，即存在$X\in\mathbf{L}(G)$，使得 α_t 是由 $\exp_G(tX)$ 给出的共轭作用。那么，任意酉表示 π 都是α-协变的，因为 $e^{it\partial\pi(X)}\pi(g)e^{-it\partial\pi(X)}=\pi(\exp(tX)g\exp(-tX))$。对于不一定是内作用的 α，考虑群 $G^\flat:=G\rtimes_\alpha\mathbb{R}$，即可始终实现这一点，其中

$$(e,t)(g,s)(e,t)^{-1}=(\alpha_t(g),s),\quad \text{for}\quad g\in G,\ s,t\in\mathbb{R}.$$

对于由内自同构给出的作用，在研究因子型 I KMS 态时相关的表示如下：

定义。设 G 是一个有限维李群，且 $X\in\mathbf{L}(G)$。若酉表示 $(\pi,\mathcal{H})$ 关于 G 是吉布斯型 的，则称之为吉布斯型表示；这里要求 $e^{i\partial\pi(X)}$ 属于迹类。使得存在吉布斯型表示的G中的元素称为吉布斯元素。我们用 $\mathrm{Gibbs}(G,\mathfrak{g})$ 表示 G 的吉布斯元素集合；对于 G 的万有覆盖群 $\tilde{G}$，记 $\mathrm{Gibbs}(\mathfrak{g}):=\mathrm{Gibbs}(\tilde{G},\mathfrak{g})$。

Ou主要结果是以下定理，该定理事实证明对于刻画
rep吉布斯型表示至关重要。

定理。设 G 是一个有限维李群，且 $X\in\mathbf{L}(G)$。若 $(\pi,\mathcal{H})$ 是一个具有离散核的酉表示，且 $e^{i\partial\pi(X)}$ 属于迹类，则 X 包含于椭圆元素集合 $\mathrm{comp}(\mathfrak{g})$ 的内部，该集合位于 $\mathfrak{g}$（参见定义 A.1.1）。

有限维李群的不可约酉表示 π，若存在$X\in\mathrm{comp}(\mathfrak{g})^\circ$ 使得 $i\partial\pi(X)$ 的谱有上界，则在 [Ne 00] 中对此进行了广泛研究。利用这些结果，我们对具有离散核的吉布斯型不可约表示 π、李代数 $\mathfrak{g}$ 以及吉布斯元素 X 得到如下结论：

(i) $\mathfrak{g}:=\mathbf{L}(G)$ 是一个可容许李代数（参见定义 A.1.5），

(ii) 存在一个紧嵌入的嘉当子代数 $\mathfrak{t}\subseteq\mathfrak{g}$，其中包含 X（参见定义 A.1.1），

(iii) 存在一个可容许正根系 $\Delta^+\subseteq\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\ \mathfrak{t}_\mathbb{C})$（参见定义 1.2.2），使得 X 包含于锥的内部

$$C_{\max}(\Delta_p^+):=\{Y\in\mathfrak{t}\mid i\alpha(X_0)\geq 0\ \text{for all}\ \alpha\in\Delta_p^+\},$$

其中 Δ_p^+ 是非紧正根的集合（参见定义 A.1.3），

(iv) π 是相对于根系 Δ^+ 的酉最高权表示（参见定义 A.2.9）。

反过来，若从一个可容许李群 G 以及相对于可容许正系 Δ^+的 G 的酉最高权表示 π 出发，那么 [Ne00, Thm. IX.4.6] 得出，对于所有 $X \in C_{\max}(\Delta_p^+)^\circ$， $e^{i\partial\pi(X)}$ 都属于迹类。因此，我们已用几何数据刻画了所讨论的李代数、生成元和表示。 [Ne00, Thm. A.V.1] 对简单可容李代数（也称为厄米李代数）给出了完整分类。对于这些李代数，可容根系已为人所知，锥 $C_{\max}(\Delta_p^+)$ 也可显式计算。

本文所涉及的表示的半有界性条件在[Ni22] 中得到了推广，并被证明是李群的每个 KMS 态都具有的性质。我们还提及 [LT18]，作为共形场论中出现的迹类条件的一个例子。

本文结构:
本文分为两节。本文的研究动机主要见第2节。在这一节中，我们主要将 C*- 或 W*-动力系统的 KMS 态已有结果与群动力系统图景联系起来。这引出了吉布斯型酉表示，我们将在第 1 节对其进行刻画。这一刻画本身也可作为独立结果，因此我们在其后加入第2节作为研究动机。

致谢
本研究得到 DFG-grant NE 413/10-1 的资助。感谢我的导师 Karl-Hermann Neeb 提供的诸多宝贵修改意见，也感谢 Ricardo Correa da Silva 在非交换积分理论方面给予的建议。

1 吉布斯态的几何与表示论方面

在本节中，我们研究吉布斯元素及其对应的吉布斯型酉表示。为此，我们将运用附录 A.1 小节和 A.2 小节中引入的概念。这些小节旨在简要介绍专著 [Ne00]中深入讨论的概念。

定义。 如果 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ 紧嵌入 于 $\langle e^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})}\rangle \subseteq \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 是紧的，我们就称子代数 $\overline{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}}$ 紧嵌入。如果一个元素 $x \in \mathfrak{g}$ 是椭圆的，即子代数 $\mathbb{R} \cdot x \subseteq \mathfrak{g}$ 紧嵌入，则称该元素为椭圆元素，并用 $\mathrm{comp}(\mathfrak{g})$ 表示 $\mathfrak{g}$ 中椭圆元素的子集。

假设 π 是吉布斯型的不可约酉表示，我们证明生成元 X 属于 $\mathfrak{g}$中椭圆元素集合 $\mathrm{comp}(\mathfrak{g})$ 的内部。条件 $\mathrm{comp}(\mathfrak{g})^\circ \neq \emptyset$ 等价于存在紧嵌入的嘉当子代数 $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$；在此情形下，$\mathrm{comp}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Inn}(\mathfrak{g}).\mathfrak{t}$ （参见 [Ne00，定理 VII.1.8]）。在注 A.1.2 中，我们讨论如何针对紧嵌入的嘉当子代数 $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$得到一个根系

$$\Delta := \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) \subseteq i\mathfrak{t}^* \quad \text{such that} \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$$

是相对于 $\mathfrak{t}$的同时特征空间分解。鉴于 $\mathrm{comp}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Inn}(\mathfrak{g}).\mathfrak{t}$以及吉布斯元素集合的 $\mathrm{Inn}(\mathfrak{g})$-不变性，只需刻画 $\mathrm{Gibbs}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{t}$中的元素。我们通过考察与根系 Δ相关的数据来证明这种刻画是可行的；具体而言，我们证明，对于具有离散核的 G的酉表示 π 以及满足 $e^{i\partial\pi(X)}$的元素 $X \in \mathfrak{g}$，有如下结论：

(i) $\mathfrak{g}$ 是可容许李代数，即它包含一个不变生成闭凸子集，且该子集不含任何仿射直线。(ii) 存在一个紧嵌入的嘉当子代数 $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$，其中包含 X。(iii) 存在一个可容许正根系 $\Delta^+ \subseteq \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$（参见定义 1.2.2），使得 X 包含在锥 $C_{\max}(\Delta_p^+)$的内部（参见定义 A.1.4）之中。(iv) 关于根系 Δ^+， π 是一个酉最高权表示（参见定义 A.2.9）。

在 [Ne00，定理 IX.4.6] 中证明了，如果 π 是关于可容许正系 Δ^+ 的酉最高权表示，且 $X \in C_{\max}(\Delta_p^+)^\circ$，那么 $e^{i\partial\pi(X)}$ 属于迹类。若此时去掉离散核这一假设，通过考察关于可容许商的可容许正系的忠实酉最高权表示，便可完整刻画单连通李群的吉布斯表示和吉布斯元素。

1.1 吉布斯元素的椭圆性

本小节的目标是证明：若 π 是一个有限维李群 G 的酉表示，且其核离散，并且 $X \in \mathfrak{g} := \mathbf{L}(G)$ 满足 $e^{i\partial\pi(X)}$ 是迹类，那么 $X \in \mathrm{comp}(\mathfrak{g})^\circ$。根据 [Ne00, 引理 VII.1.7(c)]，这等价于 $\mathfrak{g}^X := \ker(\mathrm{ad}(X)) \subseteq \mathfrak{g}$ 是紧嵌入的。

首先要注意，在这种情况下，$e^{i\partial\pi(X)}$ 的特征子空间都是有限维的，并且在 $G^X := \langle \exp(\mathfrak{g}^X) \rangle$作用下保持不变。由于 π 的核是离散的，这意味着 $\mathfrak{g}^X$ 是一个紧李代数。为了证明它实际上是紧嵌入的，我们考虑固定 $Y \in \mathfrak{g}$时最小的理想 $\mathfrak{n}_Y \trianglelefteq \mathfrak{g}$，使得

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_Y} : \mathfrak{g}/\mathfrak{n}_Y \to \mathfrak{g}/\mathfrak{n}_Y,\ x + \mathfrak{n}_Y \mapsto [Y, x] + \mathfrak{n}_Y$$

是一个椭圆端omorphism。对于 $Y \in \mathfrak{g}^X$，我们证明 $\mathfrak{n}_Y = \{0\}$ 成立，这等价于Y 是椭圆的。为此，我们先证明 $\mathfrak{n}_Y$ 是阿贝尔的，再据此证明 $\mathfrak{n}_Y$ 是至多一维的中心理想。

引理 1.1.1. 设 $(\pi, \mathcal{H})$ 是 G 的一个酉表示，其核是离散的，且 $e^{i\partial\pi(X)}$属于迹类。对每个 $Y \in \mathfrak{g}^X$，椭圆性理想 $\mathfrak{n}_Y$ 都是阿贝尔的。

证明. 考虑 G 在希尔伯特-施密特算子 $B_2(\mathcal{H})$ 上给出的酉表示

$$\rho : G \to U(B_2(\mathcal{H})), \quad \rho(g)(A) = \pi(g) A \pi(g)^*.$$

$e^{i\partial\pi(X)}$ 的特征子空间投影是有限秩的，因此是希尔伯特–施密特算子。由于 $\pi(\exp(\mathbb{R}Y))$ 保持 $e^{i\partial\pi(X)}$ 的特征子空间不变，单参数群

$\rho(\exp(\mathbb{R}Y))$ 固定相应的投影。现在，Moore 定理 [Mo80, Thm. 1.1] 表明，正规子群 $N_Y := \langle \exp(\mathfrak{n}_Y)\rangle \trianglelefteq G$ 也固定到特征子空间上的投影，这等价于 $\pi(N_Y)$ 保持特征子空间不变。因此，表示 $\pi|_{N_Y}$分解为有限维子表示，且具有离散核。因此， $\mathfrak{n}_Y$ 的有限维酉表示能够分离各点，这意味着 $\mathfrak{n}_Y$ 是紧李代数。作为紧李代数， $\mathfrak{n}_Y$ 特别是约化的，并分解为 $\mathfrak{n}_Y = \mathfrak{z}_{\mathfrak{n}_Y} \oplus [\mathfrak{n}_Y, \mathfrak{n}_Y]$。我们定义 $\mathfrak{a} := [\mathfrak{n}_Y, \mathfrak{n}_Y] \trianglelefteq \mathfrak{g}$，并注意到 $\mathfrak{a}$是一个半单紧理想。由 [HN12, Cor. 5.6.14], 可知， $\mathfrak{a}$ 包含于某个 Levi 补 $\mathfrak{s}$ 中，因此对于理想 $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{s}$，存在一个补理想 $\mathfrak{a}^\perp \trianglelefteq \mathfrak{s}$，使得 $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$，因为 $\mathfrak{s}$是半单的。现在很容易看出， $\mathfrak{b} := \mathfrak{s}^\perp \oplus \mathfrak{rad}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 中的一个理想，且满足 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$。这表明 $\mathfrak{g}/\mathfrak{b} \cong \mathfrak{a}$ 是紧的，因此 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}(Y)$ 是椭圆的，由此可得 $\mathfrak{n}_Y \subseteq \mathfrak{b}$，因为 $\mathfrak{n}_Y$ 是具有此性质的最小理想。于是，由 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{n}_Y$和 $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \{0\}$ 可得 $[\mathfrak{n}_Y, \mathfrak{n}_Y] = \mathfrak{a} = \{0\}$，结论随即成立。

□

群 $K := \overline{\pi(N_Y)} \subseteq U(\mathcal{H})$ 在 $\mathcal{H}$ 上的作用保持 $e^{i\partial\pi(X)}$ 的有限维特征子空间不变，这意味着 K 是紧的，而引理 1.1.1 表明 K 是阿贝尔的。由于 $N_Y \trianglelefteq G$ 是正规子群，且 $\pi(N_Y) \subset K$ 稠密，因此可得 $\pi(g)K\pi(g)^{-1} \subseteq K$，从而

$$\Phi : G \to \mathrm{Aut}(K), \quad \Phi(g)(k) = \pi(g)k\pi(g)^{-1}$$

是一个群同态。接下来，我们在 $\mathrm{Aut}(K)$ 上考虑一种合适的拓扑 [1]，使 Φ 连续。我们将利用这一拓扑引用一些结果，这些结果表明：连通群通过群同态作用于紧阿贝尔群时，其连续作用是平凡的。

引理 1.1.2。设 $(\pi, \mathcal{H})$ 是 G 的一个酉表示，且其核离散，并满足 $e^{i\partial\pi(X)}$ 属于迹类。对于 $Y \in \mathfrak{g}^X$ 和 $N_Y := \langle \exp(\mathfrak{n}_Y)\rangle$，群 $K := \overline{\pi(N_Y)}$ 是紧的、阿贝尔的，并且与 G 的单位连通分支对易。特别地， $\mathfrak{n}_Y$ 是 $\mathfrak{g}$ 中心的。

证明。 [HM06，定理 9.82] 表明，关于上述脚注中引入的拓扑，$\mathrm{Aut}(K)$ 的单位连通分支与 K 的内自同构重合。由于 K 是阿贝尔的，它是平凡的。由于 Φ 是群同态，为了证明其关于 $\mathcal{O}$ 的连续性，我们只需证明它关于 $\mathcal{O}_1$ 是连续的。根据连续函数空间的指数律（参见 [GN，定理 1.7.29]），这由下式的连续性推出

$$\Phi^\wedge : G \times K \to K, \quad (g, k) \mapsto \Phi(g, k) = \pi(g)k\pi(g)^{-1}.$$

这表明， G的单位连通分支在 K 上作用平凡，因此 $\mathfrak{n}_Y$ 是中心的。假设表示 π 是不可约的，因此 $\pi(N_Y) \subseteq \pi(G)' = \mathbb{C}\mathbb{1}$，而 π 的核的离散性由此表明， $\mathfrak{n}_Y \trianglelefteq \mathfrak{g}$ 是一个中心理想。用同样的论证可得， $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 至多是一维的。

□

还需证明 $\mathfrak{n}_Y$ 不可能是一维的。为此，我们反设 $\{0\} \neq \mathfrak{n}_Y \subseteq \mathfrak{z} := \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$。于是我们处于以下引理所述的情形，该引理将使我们能够运用三维海森堡群表示论的一些结果，从而导出矛盾。

[1] 考虑相对于 $C(K, K)$ 上一致收敛拓扑的子空间拓扑 $\mathcal{O}_1$。该拓扑是包含集合 $U(V_0, f_0) := \{f \in C(K, K) \mid f(k) \in V_0 f_0(k)$ 的最粗拓扑，其中 $k \in K\}$, 对于$f_0 \in C(K, K)$ 以及 V_0 中的单位邻域成立。令 $\mathcal{O}_2$ 为 $\mathrm{Aut}(K)$ 上的唯一拓扑，使得$\iota : \mathrm{Aut}(K) \to (\mathrm{Aut}(K)\ \mathcal{O}_1)\ \ f \mapsto f^{-1}$ 成为同胚。现在定义 $\mathcal{O} := \mathcal{O}_1 \vee \mathcal{O}_2$，则 $(\mathrm{Aut}(K)\ \mathcal{O})$ 构成一个拓扑群（参见 [HM06，第 257]页）。

引理 1.1.3。设 $\mathfrak{g}$ 是一个实有限维李代数，其中心为 $\mathfrak{z}$，并假设$y+\mathfrak{z}\in\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ 是椭圆的，但 $y\in\mathfrak{g}$ 不是椭圆的。则存在 $x\in\mathfrak{g}$ 使得 $[x,y]=z\in\mathfrak{z}\setminus\{0\}$。特别地，$\mathfrak{h}:=$张成$_{\mathbb{R}}\{x,y,z\}$ 与三维海森堡代数 $\mathfrak{h}_3$（$\mathbb{R}$）同构。

证明。我们将 ad(y) 视为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的一个端omorphism，其约当分解为 ad(y) =ad$(y)_s$ +ad$(y)_n$. 由于 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 分解为 ad$(y)_s$ 的 ad$(y)_n$-不变特征子空间 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda}$，对于$\lambda\in\mathbb{C}$，以及 $\mathfrak{z}_{\mathbb{C}}\subseteq\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{0}$，由 $y+\mathfrak{z}$ 是椭圆的这一事实可知

$$\mathrm{ad}(y)_n|_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda}}\equiv 0,\quad \text{for}\quad \lambda\neq 0,\quad \text{and}\quad \mathrm{ad}(y)_n(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{0})\subseteq\mathfrak{z}_{\mathbb{C}}.$$

若 ad$(y)_n$ 为零，则 ad(y) =ad$(y)_s$ 将是椭圆的，因为 $\mathfrak{z}_{\mathbb{C}}\subseteq\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{0}$。这证明存在 $x\in\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{0}$，使得 ad$(y)(x)$ = ad$(y)_n(x)$ $\in\mathfrak{z}_{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$。若记作 $x=x_0+ix_1\in\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，则$[x,y]\in\mathfrak{z}_{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ 意味着 $[x_0,y]\in\mathfrak{z}\setminus\{0\}$ 或 $[x_1,y]\in\mathfrak{z}\setminus\{0\}$ 成立。这就证明了该断言。 □

注 1.1.4. 考虑如下定义的三维海森堡群:

$$\mathrm{Heis}(\mathbb{R}^2):=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\quad\text{with multiplication}\quad (a,b,c)(x,y,z):=(a+x,b+y,c+z+ay),$$

对于 $a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}$。对于 Heis($\mathbb{R}^2$) 的不可约酉表示，中心 Z(Heis($\mathbb{R}^2$)) $\cong\mathbb{R}$ 以标量作用，因此，若中心非平凡地作用，则定义一个中心特征。斯通-冯诺伊曼定理（参见 [DE09, 定理 10.2.1]）意味着，该中心特征$\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{T},\ x\mapsto e^{i\lambda x}$ 唯一确定此酉表示，并且该酉表示与定义在 $L^2(\mathbb{R})$ 上的表示酉等价，后者定义为

$$\pi_\lambda(a,b,c)f(x):=e^{i\lambda(bx+c)}f(x+a)\quad\text{for}\quad a,b,c,x\in\mathbb{R},\ f\in L^2(\mathbb{R}).$$

考虑自同构 $\Phi:$ Heis($\mathbb{R}^2$) $\to$ Heis($\mathbb{R}^2$), $(a,b,c)\mapsto(b,-a,c-ab)$，它逐点固定中心。我们注意到，根据斯通-冯诺伊曼定理，$\pi_\lambda\cong\pi_\lambda\circ\Phi$ 且$\Phi(0,t,0)=(t,0,0)$ 成立，其中 $t\in\mathbb{R}$。这证明由下式定义的单参数酉群

$$\pi_\lambda(t,0,0)f(x)=f(x+t)\quad\text{and}\quad\pi_\lambda(0,t,0)f(x)=e^{it\lambda x}f(x),\quad\text{for}\quad x,t\in\mathbb{R},\ f\in L^2(\mathbb{R})$$

可通过 $U(\mathcal{H})$ 共轭。特别是，$\pi_\lambda(\mathbb{R},0,0)$ 和 $\pi_\lambda(0,\mathbb{R},0)$ 在 $U(\mathcal{H})$ 中没有紧闭包，因为这两个群在 $L^2(\mathbb{R})$ 上的恒等表示显然不能分解为不可约子表示，且这两个群彼此共轭。

现在我们来介绍第一个主要结果:

定理 1.1.5. 设 $(\pi,\mathcal{H})$ 是 G 的一个酉表示，其核为离散核，且 $e^{i\partial\pi(X)}$ 是迹类。那么，π 是不可约表示的直和，且 X 包含于 紧的$(\mathfrak{g})^\circ$。

证明。由于 $e^{i\partial\pi(X)}\in\pi(G)''$ 是一个迹类正算子，因此 $\pi(G)'$ 保持有限维特征子空间不变。由于有限维 C*代数同构于矩阵代数的直和，这意味着存在一族极大的两两不相交的极小投影，它们在强算子拓扑下的和为恒等算子。因此，$\pi(G)'$ 是不可约表示π_j 的直和，这些表示具有离散核，并满足 tr$(e^{i\partial\pi_j(X)})<\infty$。现在假设 π 不可约，并令 $Y\in\mathfrak{g}^X$。由引理 1.1.2 可知 $\mathfrak{n}_Y\subseteq\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，因此 Y 要么是椭圆的，要么 $0\neq Y+\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 中是椭圆的。在后一种情况下，引理 1.1.3 表明存在 $x_0\in\mathfrak{g}$，使得 $[Y,x_0]=z\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\setminus\{0\}$，因此子代数

$\mathfrak{h} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{Y, x_0, z\}$ 同构于三维海森堡代数 $\mathbf{L}(\mathrm{Heis}(\mathbb{R}^2))$，该同构由下式定义

$$Y \mapsto (1,0,0),\ x_0 \mapsto (0,1,0), z \mapsto (0,0,1).$$

单连通海森堡群 $\mathrm{Heis}(\mathbb{R}^2)$ 是 $\langle \exp(\mathfrak{h}) \rangle$ 的万有覆盖群，因此表示 $\pi|_{\langle \exp(\mathfrak{h}) \rangle}$ 可提升为 $\mathrm{Heis}(\mathbb{R}^2)$ 的表示 ρ。由于 π 不可约，$\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 作用为标量，即存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得

$$\partial\rho(0,0,1) = \partial\pi(z) = i\lambda\mathbb{1}.$$

有 $\lambda \neq 0$，因为 $\partial\pi(z) = 0$ 将意味着 $\mathfrak{n}_Y \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \ker(\partial\pi) = \{0\}$。
Stone-von-Neumann 定理（参见 [Ne00，定理 X.3.1]）表明，ρ 是 π_λ 的倍数，其中 π_λ 是海森堡群中具有中心特征 $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$，$x \mapsto e^{i\lambda x}$ 的唯一不可约酉表示。由注 1.1.4 可知，

$$\rho(\exp(\mathbb{R}(1,0,0))) = \pi(\exp(\mathbb{R}Y))$$

不是紧的。这与以下事实矛盾：$U(\mathcal{H})$的一个闭子群若保持 $e^{i\partial\pi(X)}$ 的有限维特征子空间不变，则它是紧的。因此，$\mathfrak{n}_Y = \{0\}$ 成立，这证明了 Y 是椭圆的。由于 $Y \in \mathfrak{g}^X$ 是任意的，我们已经证明 $\mathfrak{g}^X$ 包含于 $\mathrm{comp}(\mathfrak{g})$ 中；结合 [Ne00，引理 VII.1.5(b)]，可得$\mathfrak{g}^X$ 是紧嵌入的。由[Ne00，引理 VII.1.7(c)], 可得 $X \in \mathrm{comp}(\mathfrak{g})^\circ$。 □

1.2 吉布斯型表示的刻画

本小节旨在总结 [Ne00] 中的结果，以证明具有离散核的吉布斯型不可约酉表示 ρ 与有限维连通李群 G的忠实酉最高权表示相一致。存在这类表示的李代数恰好是可容许李代数，即包含一个不含仿射直线的生成性不变闭凸子集的李代数。本小节所用的李代数和表示论概念将在 A.1 小节和 A.2 小节中介绍。

有限维李群 G 的酉表示 $(\pi, \mathcal{H})$ 的凸动量集 $I_\pi \subseteq \mathfrak{g}^*$（参见定义 A.2.3）连接了凸几何与表示论。其与我们对吉布斯型表示的研究的相关性可由以下结果看出（参见 [Ne00，引理 X.I.6]）：

$$B(I_\pi) := \{Y \in \mathfrak{g} \mid \langle I_\pi, Y\rangle > -\infty\} = \{Y \in \mathfrak{g} \mid \sup \mathrm{spec}(i\partial\pi(Y)) < \infty\}.$$

若 $(\pi, \mathcal{H})$ 是 G 的不可约酉表示，且其核为离散核，并且存在 $X \in \mathfrak{g} := \mathbf{L}(G)$ 使得 $e^{i\partial\pi(X)}$ 属于迹类，则 $i\partial\pi(X)$ 的谱有上界，由定理 1.1.5 可知 $X \in B(I_\pi) \cap \mathrm{comp}(\mathfrak{g})^\circ$。因此，[Ne00，定理 X.3.8] 适用，我们得到以下推论：

推论 1.2.1. 设 G 是一个有限维李群，且 G 的不可约酉表示为 π，$\mathcal{H}$），其核为离散核，并且存在 $X \in \mathfrak{g}$：$=\boldsymbol{L}$（G），使得 $e^{i\partial\pi(X)}$ 属于迹类。那么，存在一个包含 X 的紧嵌入的嘉当子代数 $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$，以及一个正根系 $\Delta^+ \subseteq \Delta$（$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$），该正根系是适配的（参见定义 A.1.3），使得 π 是关于 Δ^+ 的酉最高权表示（参见定义 A.2.9），且 X 包含于锥的内部

$$C_{\max} := C_{\max}(\Delta_p^+) = \{X \in \mathfrak{t} \mid i\alpha(X) \geq 0 \text{ for all } \alpha \in \Delta_p^+\}.$$

对于一个元素 $X \in \mathfrak{g}$，存在一个适配正系 Δ^+ 使得 $X \in C_{\max}(\Delta_p^+)^\circ$，这一条件不足以使 X 成为 Gibbs 元素。为确保这一点，我们需要对 Δ^+ 施加进一步限制。酉最高权表示的 Gelfand-Rai'kov 定理 [Ne00，定理 X.4.8] 给出了单连通可容李群的正根系 Δ^+ 存在酉最高权表示的充分条件。在该定理中，考虑凸锥

$$C_{\min}(\Delta_p^+) := \mathrm{cone}(\{i[Z_\alpha, Z_\alpha^*] \mid Z_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha,\ \alpha \in \Delta_p^+\} \subseteq \mathfrak{t},$$

其中 $*:\ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\quad x+iy \mapsto -x+iy$ 表示注 A.1.2 中讨论的 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的对合。下述定义中的条件保证了酉最高权表示能够分离各点。

定义 1.2.2. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数，$\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个紧嵌入的嘉当子代数。若适配正根系 $\Delta^+ \subseteq \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ 满足 $C_{\min}(\Delta_p^+)$ 是尖的，且包含于 $C_{\max}(\Delta_p^+)$ 中，则称其为可容的。

注 1.2.3. [Ne00]中并未用"可容"一词来描述正根系。我们引入这一术语，以便更简洁地表述我们所讨论的背景下出现的正根系所满足的条件。

正根系的可容性条件在酉最高权表示理论中自然而然地出现。在 Gelfand-Raik'kov 定理中，该条件被表述为可容李代数存在酉最高权表示的一个充分条件。下述定理（在 [Ne00], 中作了隐含表述）表明，对于忠实的酉最高权表示，该条件也是必要的:

定理 1.2.4。 ([Ne00，定理 IX.2.17])
设 G 是一个有限维李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，且 $(\pi, \mathcal{H})$ 是相对于正系 Δ^+ 的 G 的不可约酉最高权表示，并假设 π 具有离散核。那么 $\mathfrak{g}$ 是可容的，且 Δ^+ 是可容许正系。

证明。 我们考虑光滑向量空间 $\mathcal{H}^\infty$，它是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$的忠实酉最高权模。由 [Ne00，命题 IX.1.14] (iii) 可知，对于 π 的最高权 $\lambda \in i\mathfrak{t}^*$，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-模 $\mathcal{H}^\infty$ 同构于其中引入的 $L(\lambda, \Delta^+)$。利用适用于 $L(\lambda, \Delta^+)$的 [Ne00，定理 IX.2.17], ，可得 $\mathfrak{g}$ 是可容的， Δ^+ 是适配的，且 $-i\lambda \in \mathfrak{t}^*$ 包含于..... 的内部

$$C_{\min}(\Delta_p^+)^\star := \{f \in \mathfrak{t}^* \mid f(C_{\min}(\Delta_p^+)) \subseteq [0, \infty)\} \subseteq B(C_{\min}(\Delta_p^+)).$$

于是，由 [Ne00，命题 V.1.15] 可知，凸锥 $C_{\min}(\Delta_p^+)$ 是尖的，因为 $B(C_{\min}(\Delta_p^+))$ 有内点。为证明 $C_{\min}(\Delta_p^+) \subseteq C_{\max}(\Delta_p^+)$ 成立，我们应用 [Ne00，命题 VIII.1.11] ; 该命题适用于存在 $f \in C_{\min}(\Delta_p^+)^\star$ 的情形，此时其在余伴随作用下的轨道 $\mathcal{O}_f$ 是闭集， $\mathcal{O}_f$ 的凸包不含仿射直线，且 $\mathcal{O}_f$ 张成 $\mathfrak{g}^*$。

若将 [Ne00，定理 VIII.1.19] 应用于酉最高权表示 π （其离散核为离散核）的最高权 $\lambda \in iC_{\min}(\Delta_p^+)^\star \subseteq i\mathfrak{t}^*$，则可得 $-i\lambda$ 是可容的，即其在余伴随作用下的轨道 $\mathcal{O}_{-i\lambda}$ 是闭集，且其凸包不含仿射直线。根据 [Ne00，定理 X.4.1] ，该定理指出 π 的动量集为 $I_\pi = \mathrm{conv}(\mathcal{O}_{-i\lambda})$，并且 $(I_\pi)^\perp = \ker(d\pi) = \{0\}$ （参见 [Ne00，引理 X.1.6]），可得 $I_\pi \subseteq \mathfrak{g}^*$ 是生成的，并且

$$-i\lambda \in C_{\min}(\Delta_p^+)^\star \quad \text{satisfies} \quad \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{-i\lambda} = \mathfrak{g}^*.$$

因此 [Ne00，命题 VIII.1.11] 适用，从而得到 $C_{\min}(\Delta_p^+) \subseteq C_{\max}(\Delta_p^+)$，因此正系 Δ^+ 是可容的。

□

注 1.2.5. 请注意， [Ne00，VIII.1.11]表明，上述定理中的正系 Δ^+ 由以下条件唯一确定：(π, $\mathcal{H}$) 是关于 Δ^+ 的不可约酉最高权表示。

In [Ne00], 研究了最高权模 $L(\lambda, \Delta^+)$，其对应于具有根 t dec分解的对合李代数（参见 [Ne00，第 IX.2]小节）。对于这些模，有如下结果：

定理 1.2.6. ([Ne00，定理 IX.4.6])
设 $\mathfrak{g}$ 为可容许李代数， Δ^+ 为适配正系，且 $L(\lambda, \Delta^+)$ 为关于 Δ^+的酉最高权模。若 $X \in C_{\max}(\Delta_p^+)^\circ$ ，且 $\partial\pi$ 表示 $\mathfrak{g}$ 在$L(\lambda, \Delta^+)$上的表示，则 $\mathrm{tr}(e^{i\partial\pi(X)}) < \infty$。

注 1.2.7. 设 $\mathfrak{g}$ 为可容许李代数。则 [Ne00，定理 VII.3.10]表明，存在一个紧嵌入的嘉当子代数 $\mathfrak{t}$ ，包含于 $\mathfrak{g}$ ，以及一个可容许正根系 Δ^+。接着， [Ne00，命题 VIII.3.7] 将一个闭生成不变锥 $W_{\max}(\Delta_p^+)$ 与每个可容许正系 Δ^+ 相关联，使得 $W_{\max} \cap \mathfrak{t} = C_{\max}$。在[Ne00，定理 VIII.3.10] 的证明中还证明了

$$W_{\max}(\Delta_p^+)^\circ = \mathrm{Inn}(\mathfrak{g}).C_{\max}(\Delta_p^+)^\circ \subseteq \mathrm{comp}(\mathfrak{g})^\circ.$$

若 $\mathfrak{g}$ 是非紧的，则开不变凸锥 $W_{\max}(\Delta_p^+)^\circ$ 是真锥，因为 $\mathrm{comp}(\mathfrak{g})^\circ \subsetneq \mathfrak{g}$。

现在我们可以给出第二个主要结果：

定理 1.2.8. 设 G 是一个有限维李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$ ，且$(\pi, \mathcal{H})$ 是相对于正系 Δ^+ 的 G 的不可约酉最高权表示。那么有 $\{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{tr}(e^{i\partial\pi(X)}) < \infty\} = W_{\max}(\Delta_p^+)^\circ.$

证明。 这可由推论 1.2.1、定理 1.2.4 和注 1.2.5 立即推出。 □

由于 Gelfand-Rai'kov 定理（参见 [Ne00, 定理 X.4.8]）适用于单连通可容许李群，我们可以结合这些结果得到以下推论：

Co推论 1.2.9. 设 G 是一个单连通有限维李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$ and $X \in \mathfrak{g}$。那么，以下两者之间存在一一对应关系：

(i) π 的不可约酉表示，满足 $e^{i\partial\pi(X)}$ 属于迹类，

(ii) 可容许商 q 的不可约酉最高权表示：相对于 $\mathfrak{g}_1$ 的可容许正系 Δ_1^+，满足 $q(X) \in W_{\max}(\Delta_{1,p}^+)^\circ$。

现在我们将证明，元素 X 属于 Gibbs($\mathfrak{g}$)，当且仅当它属于 $\mathfrak{g}$ 的某个开真不变凸子集。

定理 1.2.10. 吉布斯元素的几何刻画
设 $\mathfrak{g}$ 是一个有限维李代数。当且仅当元素 X 属于 $\mathfrak{g}$ 的某个开真不变凸子集时，它才是一个吉布斯元素。

证明。 假设 $X \in$Gibbs($\mathfrak{g}$)，且 G 是一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的单连通李群。那么存在 π 的一个酉表示 G ，使得 $e^{i\partial\pi(X)}$ 属于迹类。于是，推论 1.2.1 和定理 1.2.4 表明， $\mathfrak{g}/\ker(d\pi)$ 是可容的，并且存在一个可容许正系 Δ^+ ，使得

$$q(X) \in C_{\max}(\Delta_p^+)^\circ \subseteq W_{\max}(\Delta_p^+)^\circ,$$

其中 $q\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\ker(d\pi)$ 表示商映射。如果 $\mathfrak{g}/\ker(d\pi)$ 是非紧的，则子集

$$q^{-1}(W_{\max}(\Delta_p^+)^\circ) \subsetneq \mathfrak{g}$$

是一个包含 X 的开真不变凸子集。若 $\mathfrak{g}' := \mathfrak{g}/\ker(d\pi)$ 是紧的，则在 $\mathfrak{g}'$ 上选取一个 $\mathrm{Inn}(\mathfrak{g}')$-不变度量，并取关于此度量的一个包含$q(X)$ 的开球 $B \subsetneq \mathfrak{g}'$。于是 $q^{-1}(B) \subsetneq \mathfrak{g}$ 是一个包含 X 的开真不变凸子集。

反过来，假设 X 包含于一个开真不变凸子集 $C \subsetneq \mathfrak{g}$ 中。我们采用 Ne00, Prop. VII.3.4] 证明中的一些方法。考虑集合

$$H(C) := \{v \in \mathfrak{g} \mid v + C = C\}.$$

$H(C)$ 是向量空间 $\mathfrak{g}$ 的一个凸加法子群，这意味着 $H(C)$ 是一个线性子空间，而 C 的不变性表明 $H(C)$ 是一个理想。考虑商映射$q : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}' := \mathfrak{g}/H(C)$，并注意到 $q(C)$ 是一个不变开生成凸子集。它满足

$$H_{\mathfrak{g}'}(q(C)) = \{w \in \mathfrak{g}' \mid w + q(C) = q(C)\} = \{q(v) \in \mathfrak{g}' \mid v \in \mathfrak{g},\ q(v + C) = q(C)\} = \{0\}$$

因为 $q(v + C) = q(C)$ 等价于 $(v + C) + H(C) = C + H(C)$，而 $C + H(C) = C$蕴含 $v \in H(C)$。因此， $q(C)$ 的闭包是不含仿射直线的不变生成闭凸子集，故 $\mathfrak{g}'$ 是可容的。为了应用定理 1.2.6 和推论 1.2.9，我们证明存在一个可容许正系 Δ^+，使得 $q(X) \in C_{\max}(\Delta_p^+)^\circ$。

集合 $q(C)$ 包含于其闭包 $q(C)$ 的内部，而该内部由椭圆元素组成（参见 [Ne00, Prop. VII.3.4(b)]），因此 $q(X)$ 包含于开不变椭圆凸集 $q(C)$ 中。

对于紧嵌入的嘉当子代数 $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}'$，有 $\mathrm{comp}(\mathfrak{g}') = \mathrm{Inn}(\mathfrak{g}').\mathfrak{t}$ （参见 [Ne00, Thm. VII.1.8]），我们可以假设 $q(X) \in \mathfrak{t}$。于是，夹逼定理（参见定理 A.1.6）蕴含存在一个相对于 $\mathfrak{t}$ 适配的正系 Δ^+，使得

$$\overline{q(C)} \cap \mathfrak{t} \subseteq C_{\max}(\Delta_p^+) \quad \text{and} \quad C_{\min}(\Delta_p^+) \subseteq \lim(\overline{q(C)} \cap \mathfrak{t}) := \{v \in \mathfrak{t} \mid v + \overline{q(C)} \cap \mathfrak{t} \subseteq \overline{q(C)} \cap \mathfrak{t}\}.$$

由于$\overline{q(C)}$ 不含仿射直线，锥 $C_{\min}(\Delta_p^+)$ 是尖锥；又由于 $C_{\max}$ 是一个锥且$q(C) \cap \mathfrak{t} \subseteq C_{\max}(\Delta_p^+)$，因此

$$C_{\min}(\Delta_p^+) \subseteq \lim(\overline{q(C)} \cap \mathfrak{t}) \subseteq C_{\max}(\Delta_p^+).$$

这证明了 Δ^+ 是可容的，且 $q(X) \in C_{\max}(\Delta_p^+)^\circ$。因此断言得证。 □

例 1.2.11. 设 (V,Ω) 是一个辛向量空间， $\mathfrak{h}(V, \Omega) = \mathbb{R} \oplus V$是相应的海森堡代数，并且

$$\mathfrak{sp}(V, \Omega) := \{A \in \mathfrak{gl}(V) \mid \Omega(v, Aw) + \Omega(Av, w) = 0 \text{ for all } v, w \in V\}$$

是相应的辛李代数。一个非半单可容许李代数的典型例子是雅可比代数 $\mathfrak{g} := \mathfrak{hsp}(V,\Omega) := \mathfrak{h}(V, \Omega) \rtimes \mathfrak{sp}(V,\Omega)$。映射

$$\Phi : \mathfrak{hsp}(V, \Omega) \to C^\infty(V), \quad \Phi(s, v, A)(w) := \tfrac{1}{2}\Omega^A(w) + \Omega(v, w) + s,$$

对于 $s \in \mathbb{R}$, $v, w \in V$, $A \in \mathfrak{sp}(V,\Omega)$，若赋予 $C^\infty(V)$ 与 Ω 对应的泊松括号，则该映射定义了一个李代数的单射同态（参见 [Ne00，命题 A.IV.15]）。Φ 的像恰为次数为 ≤ 2 的多项式，并将 $\mathfrak{sp}(V,\Omega)$ 映射为齐次次数为 2 的多项式。继续下去，我们将 $\mathfrak{hsp}(V,\Omega) \cong$ 识别为 $\mathrm{im}(\Phi)$。考虑一个辛基

$$\{p_j, q_j \mid 1 \leq j \leq n := \tfrac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} V\} \quad \text{and define} \quad \mathfrak{t}_{\mathfrak{l}} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{p_i^2 + q_i^2 \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

于是，$\mathfrak{t}_{\mathfrak{l}}$ 是 $\mathfrak{l} := \mathfrak{sp}(V,\Omega)$的紧嵌入的嘉当子代数。若按照 [Ne00, Ex. VII.2.30] 计算根系 $\Delta := \Delta(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}},(\mathfrak{t}_{\mathfrak{l}})_{\mathbb{C}})$，并选取唯一的（相差一个符号）正可容许系 Δ^+，则有

$$C_{\max}(\Delta_p^+) = \mathrm{cone}(\{p_i^2 + q_i^2 \mid 1 \leq i \leq n\}) = \{\Omega^A \in \mathfrak{t}_{\mathfrak{l}} \mid \Omega^A \geq 0\}.$$

由于单厄米李代数 $\mathfrak{sp}(V,\Omega)$中非紧根的可容许正系 Δ_p^+（相差一个符号）唯一（参见 [Ne00, Lemma VII.2.16(iv)]），且$\Omega^A > 0$ 当且仅当 A 是椭圆的且其所有特征值都属于 $i\mathbb{R}^+$，这就证明了，Gibbs 元素集合由所有椭圆的辛自同态构成，且这些自同态的特征值属于 $i\mathbb{R}^+$ 或 $i\mathbb{R}^-$。

于是，[Ne00, Ex. VII.2.30]）表明，对于通过将 $\Delta^\pm \subseteq \Delta(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}},(\mathfrak{t}_{\mathfrak{l}})_{\mathbb{C}})$的元素延拓至 $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$并在 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 上取零所定义的相应根的可容许正系 $\Delta_0^\pm \subseteq \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$，$\mathfrak{t} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{t}_{\mathfrak{l}}$是 $\mathfrak{hsp}(V,\Omega)$的紧嵌入的嘉当子代数。特别地，有

$$W_{\max}(\Delta_{0,p}^\pm)^\circ = \mathrm{Inn}(\mathfrak{g}).C_{\max}(\Delta_{0,p}^\pm)^\circ = \mathrm{Inn}(\mathfrak{g}).(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus C_{\max}(\Delta_p^\pm)^\circ)$$

这意味着 $W_{\max}(\Delta_{0,\,p}^\pm)^\circ = \{(s,\ v,\ A) \in \mathfrak{hsp}(V,\ \Omega) \mid \Omega^A > 0\}$，它通过 Φ 映射到次数为 ≤ 2 的严格凸多项式集合。这是 $\mathrm{Inn}(\mathfrak{g})$- 不变锥的内部

$$W := \{f \in \mathrm{im}(\Phi) \mid \inf f > \infty\} = \left\{\Phi(s,v,A) \mid \Omega^A \geq 0,\ v \in \mathrm{rad}(\Omega^A)^{\perp_\Omega}\right\}$$

下有界的次数为 ≤ 2 的多项式集合。注意，该集合不是闭集，因为其边界与所有一次多项式重合。

2 拓扑群的 KMS 态

本节讨论如何将关于 C*代数和 W*-代数的 KMS 态的结果推广到拓扑群。对于一般的拓扑群 G，存在一个通用群W*-代数 $W^*(G)$。它具有如下性质：对于强连续单参数自同构群 $\alpha : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(G)$，存在一个 σ-弱连续的 *-自同构单参数群 $\tau\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(W^*(G))$，使得 G 上的态 φ 是 $(\alpha,\ \beta)$-KMS 态，当且仅当其对应的 $W^*(G)$ 上的态 ω_φ 是 $(\tau,\ \beta)$-KMS 态（参见命题 2.1.6）。与 W*-动力系统的情形一样，一般而言，我们无法很好地掌握 KMS 态的集合。局部紧群的情形则不同，因为群 C* 代数 $C^*(G)$ 的存在意味着，局部紧拓扑群的 $(\alpha,\ \beta)$-KMS 态集合 K_β 是 $L^\infty(G) \cong L^1(G)'$ 的弱*-紧凸子集（参见定理 2.2.4）。因此，克莱因–米尔曼定理推出，K_β 是其极端点集 $\mathrm{Ext}(K_\beta)$ 的闭凸包。KMS 态是极端态当且仅当它是因子态，因此只需研究因子KMS态。对于一般的拓扑群 G，我们将半有限 KMS 态刻画为

广义吉布斯态。这使我们能够将第1节的结果应用于有限维李群 G 的因子型 I KMS 态，考虑由 $X \in \mathbf{L}(G)$ 生成的内自同构单参数群；这些态对应于满足 $\mathrm{tr}(e^{i\beta\partial\rho(X)}) < \infty$ 的不可约酉表示 ρ 。

2.1 拓扑群 KMS 态的基本性质

本小节旨在说明拓扑群的 (α,β)-KMS 态与由该群的 α-协变表示定义的 W*-动力系统的 KMS 态之间的关系。特别地，我们证明每个拓扑群的 (α,β)-KMS 态都是 α-不变的。

定义 2.1.1。 (cf. [BR96，定义 5.3.1], [BR96，引理 5.3.7])
：设 ω 是 C*代数 $\mathcal{A}$ 上的一个态（分别是冯·诺伊曼代数上的正规态），并设 $\tau\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ 是一个强连续（分别是 σ-弱连续）的 *-自同构单参数群。若函数满足以下条件，则称 ω 为一个 (τ,β)-KMS 态

$$F_{A,B} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \omega(A\tau_t(B)), \quad \text{for} \quad A, B \in \mathcal{A},$$

ext延拓为带状区域 $\mathcal{S}_\beta := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \overline{\mathrm{Im}}(z) \le \beta\}$ 上的连续映射，并满足反射
rela关系 $F_{A,\ B}(t + i\beta) = \omega(\tau_t(B)A)$，其中 $t \in \mathbb{R}$，且在内部全纯。

我们仿照 C*-或 W*-动力系统的 KMS 态的等价定义（$\mathcal{A}$，τ，$\mathbb{R}$），来定义拓扑群的 KMS 态（参见 [BR96, 引理 5.3.7]）。

定义 2.1.2。设 $(G,\ \alpha,\ \mathbb{R})$ 是一个群动力系统，且 $\varphi\colon G \to \mathbb{C}$ 是一个态。对于$\beta > 0$，若函数

$$F_{x,y} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \varphi(x\alpha_t(y)), \quad \text{for} \quad x, y \in G,$$

延拓为带状区域 $\mathcal{S}_\beta := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Im}(z) \overline{\le} \beta\}$ 上的连续映射，在内部全纯，并满足反射关系 $F_{x,\ y}(t + i\beta) = \varphi(\alpha_t(y)x)$，其中 $t \in \mathbb{R}$。

现在，我们定义与群动力系统 $(G,\alpha,\mathbb{R})$ 相对应的 W*-动力系统 $(W^*(G)\ \tau,\mathbb{R})$，以及与某个态 φ 相对应的 $W^*(G)$上的态 ω_φ，使得 φ 是 G 的 (α,β)-KMS 态，当且仅当 ω_φ 是 $W^*(G)$的 (τ,β)-KMS 态。

定义 2.1.3. 对于拓扑群 G，我们将群 W* 代数定义为一对冯·诺伊曼代数 $W^*(G)$ 和一个 σ-弱连续群同态 $\pi\colon G \to U(W^*(G))$，它具有如下泛性质：对于 G 的每个强连续酉表示 $(\rho,\mathcal{H})$，都存在唯一的 *-同态

$$\Phi : W^*(G) \to \rho(G)'' \quad \text{such that} \quad \Phi(\pi(g)) = \rho(g), \quad \text{for all} \quad g \in G.$$

对于每个拓扑群 G，根据 [GN00，命题 4.2]，都存在这样的代数。

注 2.1.4。设 G 为一个拓扑群。

(i) 根据泛性质，对于每个 $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$，都存在一个 *-自同构

$$\Phi : W^*(G) \to W^*(G) \quad \text{such that} \quad \Phi(\pi(g)) = \pi(\alpha(g)), \quad \text{for all} \quad g \in G.$$

对于强连续单参数自同构群 $\alpha : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(G)$，相应的 *-自同构单参数群 $\tau\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(W^*(G))$ 是 σ-弱连续的，因为 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\pi(G) \subseteq W^*(G)$ 在 σ-弱拓扑下稠密，而在 $U(\mathcal{H})$ 上，σ- 弱拓扑与强算子拓扑重合。

(ii) 如果 φ 是 G 的一个态，其 GNS 表示为 $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \Omega_\varphi)$，那么相应的表示 $\pi_\varphi: W^*(G) \to \pi_\varphi(G)''$ 定义了该态

$$\omega_\varphi : W^*(G) \to \mathbb{C}, \quad A \mapsto \langle \Omega_\varphi, \pi_\varphi(A)\Omega_\varphi \rangle$$

满足 $\omega_\varphi(\pi(g)) = \varphi(g)$，对所有 $g \in G$ 均成立。

若采用 [BR96，命题 5.3.7] [2], 的证明方法，可得到以下引理:

引理 2.1.5. 设 $(\mathcal{A}, \tau, \mathbb{R})$ 是一个 C*-动力系统（分别地，W*-动力系统），且$\omega: \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ 是一个态（分别地，正规态）。若 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$ 是一个范数稠密（分别地，σ-弱稠密）子空间（分别地，*-子代数），使得对于 A, $B \in \mathcal{K}$，函数

$$F_{A,B} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \omega(A\tau_t(B))$$

可延拓为带状区域 $\mathcal{S}_\beta := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leqslant \beta\}$上的连续函数，且在其内部全纯，并满足 $F_{A,\ B}(t + i\beta) = \omega(\tau_t(A)B)$，对 $t \in \mathbb{R}$ 成立，则 ω 是一个(τ, β)-*KMS* 态。

命题 2.1.6. 设 G 是拓扑群 G，$\alpha: \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(G)$ 是强连续单参数自同构群，且 $\varphi: G \to \mathbb{C}$ 是一个态。那么，φ 是一个(α, β)-*KMS* 态，当且仅当相应的态 $\omega_\varphi: W^*(G) \to \mathbb{C}$ 是一个(τ, β)-*KMS* 态。

证明。 注意，对所有 $x, y \in G$，等式 $\omega_\varphi(\pi(x)\tau_t(\pi(y))) = \omega_\varphi(\pi(x\alpha_t(y))) = \varphi(x\alpha_t(y))$ 成立。由引理 2.1.5 可得结论，因为 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\pi(G)$ 是 $W^*(G)$ 中一个 σ-弱稠密的 *-子代数，在该子代数上 KMS条件成立。 □

推论 2.1.7. 设 G 是拓扑群 G，$\alpha: \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(G)$ 是强连续单参数自同构群，且 $\varphi: G \to \mathbb{C}$ 是一个(α, β)-*KMS* 态。那么 φ 是 α-不变的。

证明。 [BR96，命题 5.3。3] 蕴含 ω_φ 是 τ-不变的。这就证明了该断言。 □

设 G 是一个拓扑群，$\alpha: \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(G)$ 是一个强连续单参数自同构群，且 φ 是一个 α-不变态，其 GNS 表示为 $(\pi, \mathcal{H}, \Omega)$。若 $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \Omega_\varphi)$ 表示 φ 的 GNS 表示，则存在一个强连续酉单参数群 $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$，作用于 $\mathcal{H}_\varphi$，使得

$$U_t\pi_\varphi(g)U_{-t} = \pi_\varphi(\alpha_t(g)) \quad \text{and} \quad U_t\Omega_\varphi = \Omega_\varphi, \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R},\ g \in G.$$

考虑正规态 $\omega_\varphi : \pi_\varphi(G)'' \to \mathbb{C},\ A \mapsto \langle \Omega_\varphi, A\Omega_\varphi \rangle$，以及定义在 $\pi_\varphi(G)''$ 上的 *-自同构单参数群 τ，其定义为 $\tau_t(A) := U_tAU_{-t}$，其中 $t \in \mathbb{R}$ 且 $A \in \pi_\varphi(G)''$，并且它是 σ-弱连续的。

命题 2.1.8。 群动力系统$(G, \mathbb{R}, \alpha)$ 的一个态 φ 是(α, β)-*KMS* 态，当且仅当 ω_φ 是 W*-动力系统 $(\pi_\varphi(G)'', \tau, \mathbb{R})$的$(\tau, \beta)$-*KMS* 态。

*Pro*的。 这可由 $\mathrm{span}^{\mathbb{C}}\pi_\varphi(G) \subseteq \pi(G)''$ 的 σ-弱稠密性以及关系

$$\omega(\pi_\varphi(g)\tau_t(\pi_\varphi(h))) = \varphi(g\alpha_t(h)), \quad \text{for} \quad g, h \in G,\ t \in \mathbb{R}$$

以及命题 2.1.5。 □

[2]在 [BR96 的定义 5.3 中，C*-或 W*-动力系统的 KMS 态通过一项性质来定义：对于一个由适当稠密的 *-子代数 $\mathcal{B}$ 所构成的 τ-解析元素，需确保对于 A, $B \in \mathcal{B}$ 映射 $F_{A,\ B}(t) := \omega(A\tau_t(B))$ 可延拓至 $\mathbb{C}$，并满足 $\omega(A\tau_{i\beta}(B)) = \omega(BA)$。在 [BR96 的命题 5.3 的证明中，只用到 *-子代数 $\mathcal{B}$ 由 τ-解析元素构成，以确保函数 $F_{A,\ B}$具有延拓性质。

2.2 局部紧群的 C*-方法

设 G 是一个局部紧群。 G 的群 C^*-代数 定义为卷积代数 $L^1(G)$ 的泛包络 C^*-代数 $C^*(G) := C^*(L^1(G))$，即将 $L^1(G)$ 按照定义在 $L^1(G)$ 上的最大 C^*-范数完备化所得：

$$\|f\|_{C^*} := \sup\{\|\pi(f)\| \mid \pi : L^1(G) \to B(\mathcal{H}) \text{ non-degenerate } ^*\text{-representation}\}.$$

每个非退化 *-表示 $\pi: L^1(G) \to B(\mathcal{H})$ 都唯一延拓为 $C^*(G)$ 的连续 *-表示，并且 $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_{C^*}$ 对所有 $f \in L^1(G)$ 都平凡成立。通常也将此延拓记为 π。注意，非退化 *-表示与 G 的酉表示一一对应（参见 [DE09, 命题 6.2.3]）。由于态由其循环 GNS 表示及一个固定的循环向量唯一确定，这种一一对应也给出了态之间如下的一一对应关系。

引理 2.2.1. φ 上的态与 $C^*(G)$上的态之间存在一一对应关系，该对应关系由 $\Phi : \mathcal{S}(G) \to \mathcal{S}(C^*(G))$ $\varphi \mapsto \omega_\varphi$ 建立，其中 ω_φ 由下式唯一确定：

$$\omega_\varphi(f) = \int_G f(x)\varphi(x)dx, \quad for \quad f \in L^1(G).$$

若在 $\mathcal{S}(G)$ 上赋予来自 $\mathcal{S}(G) \subseteq L^\infty(G) \cong L^1(G)'$ 的弱*子空间拓扑，并在 $\mathcal{S}(C^*(G))$上赋予 $C^*(G)'$的弱*拓扑，那么 Φ 是仿射线性的，且是弱*连续的同胚。

为了在 $C^*(G)$的 KMS 态与G的 KMS 态之间建立一一对应关系，需要定义一个强连续单参数自同构群

$$\tau : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(C^*(G)) \quad \text{corresponding to} \quad \alpha : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(G)$$

使得 ω_φ 是 $C^*(G)$的 (τ, β)-KMS 态，当且仅当 φ 是 G的 (α, β)-KMS 态。为此，我们注意到， G 的哈尔测度 μ_G 的拉回 $(\alpha_t)_*\mu_G$ 是左不变拉东测度，因此存在唯一的标量 $\lambda_t \in \mathbb{R}^+$ 满足

$$\mu_G \circ \alpha_{-t} =: (\alpha_t)_*\mu_G = \lambda_t \cdot \mu_G \quad \text{for all} \quad t \in \mathbb{R}.$$

容易验证， $\tau: \mathbb{R} \times L^1(G) \to L^1(G)$ $\tau_t(f) := \lambda_t \cdot (f \circ \alpha_{-t})$ 可扩张为 $C^*(G)$ 上的强连续 *-自同构单参数群，我们仍将其记为 τ。对于 $t \in \mathbb{R}$ 和 $f \in L^1(G)$，有

$$\pi(\tau_t(f)) = \int_G \lambda_t \cdot f(\alpha_{-t}(x))\pi(x)dx = \int_G f(x)\pi(\alpha_t(x))dx = (\pi \circ \alpha_t)(f).$$

引理 2.2.2。 设 G 是一个局部紧拓扑群，且 $\alpha: \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(G)$ 是一个强连续单参数自同构群。对于一个态 $\varphi: G \to \mathbb{C}$，有

$$\omega_\varphi(f * \tau_t(g)) = \int_G \int_G f(y)\, g(x)\, \varphi(y\alpha_t(x))dxdy, \quad for \quad t \in \mathbb{R},\ f, g \in L^1(G).$$

证明。 设 $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ 是 φ and ω_φ 的 GNS 表示。利用 $\varphi(x) = \langle \Omega\ \pi(x)\Omega \rangle$，我们计算 $\omega_\varphi(f * \tau_t(g))$，其结果为

$$\int_G (f * \tau_t(g))(x)\langle \Omega, \pi(x)\Omega \rangle dx = \int_G \int_G f(y)\, \lambda_t\, g(\alpha_{-t}(y^{-1}x))\, \varphi(x)dxdy$$
$$= \int_G \int_G f(y)\, \lambda_t\, g(\alpha_{-t}(x))\, \varphi(yx)dxdy = \int_G \int_G f(y)\, g(x)\, \varphi(y\alpha_t(x))dxdy. \qquad \square$$

命题 2.2.3。 态 $\varphi \in \mathcal{S}(G)$ 是一个(α,β)-*KMS* 态，当且仅当 $\omega_\varphi \in \mathcal{S}(C^*(G))$ 按照 C^*-动力系统的意义是一个(τ,β)-*KMS* 态。特别地，映射 $\mathcal{S}(G) \ni \varphi \to \omega_\varphi \in \mathcal{S}(C^*(G))$ 限制在相应 *KMS* 态集合上时，是一个仿射线性同胚。

证明。 设 φ 是 G 的 $(\alpha,\ \beta)$-KMS 态。我们首先证明 ω_φ 是 $(\tau,\ \beta)$-KMS 态。[由命题 5.3.12 和 BR96] 可知，只需证明

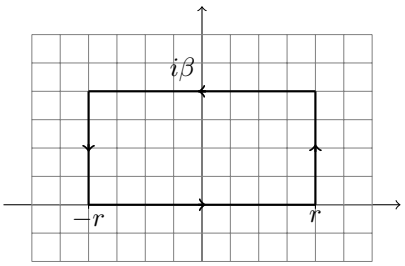
$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(t)\, \omega_\varphi(f * \tau_t(g))dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(t+i\beta)\, \omega_\varphi(\tau_t(g) * f)dt,$$

对所有 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 和 $f,\ g \in L^1(G)$。

固定 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$。Paley-Wiener 定理 [BR96, 命题 5.3.11] 表明，对于 $R > 0$ 和 $\widehat{\ }$，若 $\mathrm{supp}(\psi) \subseteq [-R, R]$，则函数 ψ 是整解析的，并且对每个 $n \in \mathbb{N}_0$，都存在常数 $C_n > 0$ 使得

$$|\widehat{\psi}(z)| \le C_n(1+|z|)^{-n} \exp(R \cdot |\mathrm{Im}(z)|), \quad \text{for} \quad z \in \mathbb{C}.$$

$\widehat{\ }$这证明映射 $t \mapsto \psi(t)\varphi(y\alpha_t(x))$ 可延拓为带状区域 $\mathcal{S}_\beta$ 上的连续函数 F，且在其内部全纯。对于 $\overline{\ \ }$ $r > 0$，选择一条分段光滑曲线 γ_r，使其参数化下图所示的矩形；该矩形的宽度取决于 r，高度固定为 β：



对在 $\mathcal{S}_\beta$ 上连续且在其内部全纯的函数 F 应用 [BR96，命题 5.3.5]，得到

$$F(t+is\beta) \le |\widehat{\psi}(t+is\beta)| \cdot \sup\{|\varphi(x\alpha_t(y))|, |\varphi(\alpha_t(y)x)|\} \le C_n(1+\beta^2+t^2)^{-n}\exp(\beta R).$$

这证明，当 $r \to \infty$ 时，$F(z)$ 在上述参数化矩形的左右两边上的限制一致收敛于零，因为它由 $|F(\pm r + is\beta)|$ 给出，其中 $s \in [0,1]$。矩形左右两边的长度有限，因此当 $r \to \infty$ 时，沿左右两边的积分趋于零。由于 F 全纯，$F(z)$ 沿可缩曲线 γ_r 的积分为零，这意味着

$$0 = \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} F(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\widehat{\psi}(t)\varphi(y\alpha_t(x))}_{F(t)}\, dt - \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\widehat{\psi}(t+i\beta)\varphi(\alpha_t(x)y)}_{F(t+i\beta)}\, dt.$$

为证明 ω_φ 是 $(\tau,\ \beta)$-KMS 态，我们应用引理 2.2.2，得到

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(t)\, \omega_\varphi(f * \tau_t(g))dt = \int_G \int_G f(y)\, g(x) \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(t)\, \varphi(y\alpha_t(x))dtdxdy$$
$$= \int_G \int_G f(y)\, g(x) \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(t+i\beta)\varphi(\alpha_t(x)y)dtdxdy = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(t+i\beta)\, \omega_\varphi(\tau_t(g) * f)dt.$$

反过来，假设 ω_φ 是 $(\tau,\ \beta)$-KMS 态。那么 [BR96，命题 5.3.4] 推出存在唯一的 σ-弱连续单参数自同构群 $\widehat{\tau}$ 作用于 $\pi_{\omega_\varphi}(C^*(G))''$，使得对于所有 $A \in C^*(G)$，都有 $\widehat{\tau}_t(\pi_{\omega_\varphi}(A)) = \pi_{\omega_\varphi}(\tau_t(A))$，且该态

$$\widehat{\omega}_\varphi : \pi_{\omega_\varphi}(C^*(G))'' \to \mathbb{C},\ A \mapsto \langle \Omega_\varphi, A\Omega_\varphi \rangle$$

是 W*-动力系统意义下的 $(\widehat{\tau}, \beta)$-KMS 态。特别地

$$\int_G f(x)\widehat{\tau}_t(\pi_\varphi(x))dx = (\widehat{\tau}_t \circ \pi_{\omega_\varphi})(f) = \pi_{\omega_\varphi}(\tau_t(f)) = \int_G f(x)\pi_\varphi(\alpha_t(x))dx,$$

imp可得 $\widehat{\tau}_t(\pi_\varphi(x)) = \pi_\varphi(\alpha_t(x))$，对所有 $x \in G$ 均成立，因为可以用左移逼近
壳网狄圆此

$$\varphi(x\alpha_t(y)) = \langle \Omega_\varphi, \pi_\varphi(x)\pi_\varphi(\alpha_t(y))\Omega_\varphi \rangle = \langle \Omega_\varphi, \pi_\varphi(x)\widehat{\tau}_t(\pi_\varphi(y))\Omega_\varphi \rangle = \widehat{\omega}_\varphi(\pi_\varphi(x)\widehat{\tau}_t(\pi_\varphi(y)))$$

由此可得，这证明了 φ 是一个 (α, β)-KMS 态。 □

现在，我们已将证明下述定理所需的全部信息从群的 KMS 态转换为 C*代数的 KMS 态。

定理 2.2.4。设 G 为局部紧拓扑群，$\alpha : \mathbb{R} \to$ 自同构群(G) 为强连续单参数自同构群。那么，$K_\beta \subseteq \mathcal{S}(G)$ 中的(α, β)-*KMS* 态集满足

(i) K_β 是凸的，并且相对于其子空间拓扑是弱-$*$-紧的

$$\mathcal{S}(G) \subseteq L^\infty(G) \cong L^1(G)'.$$

(ii) K_β 是一个单纯形（参见注 2.2.5）。

(iii) $\varphi \in K_\beta$ 是 K_β 的极端点，当且仅当 φ 是因子态。

(iv) $K_\beta =$是 $\overline{\text{Conv}(\text{Ext}(K_\beta))}$, 其中 $\text{Ext}(K_\beta)$ 是 K_β 中的极端点，闭包是相对于弱-$*$-拓扑而言的。

证明。引理 2.2.1 和命题 2.2.3 表明，我们可以将 K_β 视为 $\mathcal{A} := C^*(G)$上的（τ, β）-KMS 态集。接着，[BR96，第 116] 页表明，（τ, β）-KMS 态与单位化 $\mathcal{A}_+ := \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$上的（$\tau_+, \beta$）-KMS 态一一对应，其中 τ_+ 在 $\mathcal{A}_+$上的作用为

$$\tau_+ : \mathbb{R} \times \mathcal{A}_+ \to \mathcal{A}_+, \quad (t, (A, \lambda)) \mapsto (\tau_t(A), \lambda).$$

那么，定理 [BR87，定理 5.3.30] 推出 (τ_+, β)-KMS 态子集满足 (i)-(iii)。由于该对应关系是通过关于弱-$*$-拓扑的仿射线性同胚建立的，该同胚由

$$K_\beta \ni \omega \mapsto \omega_+ : (A, \lambda) \mapsto \omega(A) + \lambda,$$

由此可知，(i)–(iii) 对 K_β 也成立。因此，(iv) 是由 (i) 和 Krein–Milman 定理直接推出的。

□

注 2.2.5. 对于局部凸拓扑向量空间$C^*(G)'$ 中配备弱-$*$-拓扑的紧凸子集 K_β [，BR87 第 4.1] 小节给出了分解理论。对于 K_β上的给定 Radon概率测度 μ [，BR87 命题 4.1.1] 证明存在唯一一点 $b(\mu) = \int_K \omega\, d\mu(\omega) \in K_\beta$，称为 μ的重心，使得

$$f(b(\mu)) = \mu(f) := \int_K f(\omega) d\mu(\omega),$$

对于所有仿射线性连续函数 $f : K_\beta \to \mathbb{R}$。于是 [BR87，定理 4.1.15] 确立了 K_β 为单纯形的重要性，因为这意味着每个 $\omega \in K$ 都是唯一归一化 Radon 测度 μ_ω 的重心，且该测度关于由 $\succ$ 定义的偏序是极大的

$$\mu \succ \nu \quad :\Leftrightarrow \quad \mu(f) \geq \nu(f), \quad \text{for all } f : K \to \mathbb{R} \text{ continuous and convex.}$$

对于可分局部紧拓扑群 G，卷积代数 $L^1(G)$ 是可分的，这表明 $C^*(G)$ 是可分 C*代数。特别地， K_β 是可度量化的，因此 [BR87，定理 4.1.11] 意味着 μ_ω 支撑在 K_β的极端点上，即 $\mu_\omega(\text{Ext}(K_\beta)) = 1$。因此，对于每个 $\omega \in K_\beta$，我们都能得到唯一分解

$$\omega = \int_{\text{Ext}(K_\beta)} \omega' d\mu_\omega(\omega').$$

对于 $f \in L^1(G)$，函数 $\text{Ext}(K_\beta) \times G \ni (\omega,\ x) \mapsto f(x)\varphi_\omega(x)$ 显然是可积的，测度空间 $\text{Ext}(K_\beta) \times G$ 是 σ-有限的，因此根据富比尼定理，对于所有 $\omega_0 \in K_\beta$，可得

$$\omega_0(f) = \int_{\text{Ext}(K_\beta)} \int_G f(x)\varphi_\omega(x) dx d\mu_{\omega_0}(\omega) = \int_G f(x) \int_{\text{Ext}(K_\beta)} \varphi_\omega(x) d\mu_{\omega_0}(\omega) dx.$$

这意味着对应于 ω_0 的 G 上的态 φ_{ω_0} 由下式给出

$$\varphi_{\omega_0}(x) = \int_{\text{Ext}(K_\beta)} \varphi_\omega(x) d\mu_{\omega_0}(\omega), \quad \text{for} \quad x \in G.$$

由于 $L^1(G) \subseteq C^*(G)$ 是稠密的，因此求值泛函

$$\delta_f : K_\beta \to \mathbb{C}, \quad \omega \mapsto \omega(f), \quad \text{for} \quad f \in L^1(G),$$

可以分离各点，因此由 Stone-Weierstrass 定理，这些泛函生成的代数关于上确界范数在 $C(K_\beta)$ 中稠密。这证明 μ_{ω_0} 已由这些泛函唯一确定。由于集合 K_β 是凸的且弱-$*$-闭，每个这样的测度都定义了一个 (α, β)-KMS 态。因此我们证明了以下命题：

命题 2.2.6. 设 G 是一个可分局部紧拓扑群， $\alpha : \mathbb{R} \to \text{Aut}(G)$ 是一个强连续单参数群，并且 $\beta \neq 0$。对于每个 $\varphi_0 \in K_\beta$，存在一个定义在 $\text{Ext}(K_\beta)$上的 *Radon*概率测度 μ，由下式唯一确定

$$\varphi_0(x) = \int_{\text{Ext}(K_\beta)} \varphi(x) d\mu(\varphi), \quad for\ all \quad x \in G.$$

反之，每个这样的测度都定义了 G的(α, β)-*KMS* 态。

2.3 拓扑群的半有限 KMS 态

考虑拓扑群 G上的一个 (α,β)-KMS 态 φ。若 $\mathcal{M}_\varphi = \pi_\varphi(G)''$ 是半有限冯·诺伊曼代数，则存在唯一的忠实半有限正规迹 τ，定义在 $\mathcal{M}_\varphi$上（参见 [Tak02，定理 2.15]）。由于忠实正规态 ω_φ 在迹 τ的模自同构群 $\sigma_t^\tau = \mathrm{id}^{\mathcal{M}_\varphi}$ 下保持不变，根据拉东-尼科迪姆定理[Tak03，推论 3.6]，存在唯一的非奇异正自伴算子 h，其仿射于 $\mathcal{M}_\varphi$，使得对于 $A \in \mathcal{M}_\varphi$，有 $\omega_\varphi(A) = \tau(hA)$。于是 [Tak03，定理 2.11] 表明，$\omega_\varphi$ 的模自同构群为

$$\mathrm{Ad}(h^{-it/\beta}) = \mathrm{Ad}(e^{itH}), \quad \text{for} \quad H = -\tfrac{1}{\beta}\log(h).$$

此外，有 $\tau(h) = \tau(e^{-\beta H}) = \omega_\varphi(1) = 1$，且 φ由下式给出

$$\varphi(g) = \frac{\tau(\pi_\varphi(g)e^{-\beta H})}{\tau(e^{-\beta H})}, \quad \text{for} \quad g \in G.$$

反过来，假设 π 是一个 α-协变循环酉表示，满足 $\pi(G)''$ 是半有限的，并且存在一个非奇异实现算子 H，它实现 α 且隶属于 $\pi(G)''$，并满足 $\tau(e^{-\beta H}) = 1$；这里 τ是 $\mathcal{M}_\varphi = \pi(G)''$上的唯一忠实半有限正规迹。我们要通过构造一个 $(\sigma,\ \beta)$-KMS 态，证明这定义了 G的一个 $(\alpha,\ \beta)$-KMS 态，其中 $\sigma_t(A) := e^{itH}Ae^{-itH}$ 对于 $A \in \mathcal{M}_\varphi$。为此，注意到 [Tak02, Thm. 2.22] 表明，半有限冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}_\varphi \otimes \mathcal{M}_\varphi^{\mathrm{op}}$作用在 $L^2(\mathcal{M}_\varphi,\ \tau)$上；后者定义为复预希尔伯特空间的完备化

$$\{A \in \mathcal{M}_\varphi \mid \tau(|A|^2) < \infty\}$$

关于标量积 $\langle A, B\rangle := \tau(A^*B)$，通过左乘与右乘。如果记

$$\begin{aligned} \lambda : \mathcal{M}_\varphi \to B(L^2(\mathcal{M}_\varphi,\tau)), \quad \lambda(a)x = ax, \quad \text{for} \quad \tau(|x|^2) < \infty \\ \text{and} \quad \rho : \mathcal{M}_\varphi^{\mathrm{op}} \to B(L^2(\mathcal{M}_\varphi,\tau)), \quad \rho(a)x = xa, \quad \text{for} \quad \tau(|x|^2) < \infty, \end{aligned}$$

有 $\lambda(\mathcal{M}_\varphi)' = \rho(\mathcal{M}_\varphi)''$ 且 $\rho(\mathcal{M}_\varphi)' = \lambda(\mathcal{M}_\varphi)''$（参见 [Tak02，定理 2.22]）。

特别地，若 $\Omega = e^{-\frac{1}{2}\beta H}$，则 $\Omega \in L^2(\mathcal{M}_\varphi,\ \tau)$ 非奇异且自伴。这意味着向量 Ω 对于 $\mathcal{M}_\varphi$ 是循环且分离的，因为根据值域-核引理，有$\mathcal{R}(\Omega) = \ker(\Omega^*) = \ker(\Omega) = \{0\}$，因此 $A\Omega = 0$ 蕴含 $A = 0$，而 $\Omega B = 0$ 蕴含 $(\Omega B)^* = B^*\Omega = 0$，即 $B^* = 0$，从而 $B = 0$，对于 $A,\ B \in \mathcal{M}_\varphi$。

相应的模对象（$\Delta,\ J$）在 $\lambda(\mathcal{M})\Omega$ 上由 $J(A\Omega) = \Omega A^*$ 和 $\Delta(A\Omega) = \Omega A$ 给出，其中 $A \in \Omega$，因此相应的模自同构群由下式给出

$$\sigma_t : \mathcal{M} \to \mathcal{M}, \quad A \mapsto e^{itH}Ae^{-itH}, \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R}.$$

这意味着该态

$$\omega : \mathcal{M} \to \mathbb{C}, \quad A \mapsto \frac{\tau(Ae^{-\beta H})}{\tau(e^{-\beta H})} = \frac{\langle \Omega, A\Omega\rangle}{\|\Omega\|^2}$$

是一个（$\sigma,\ \beta$）-KMS 态。这证明 $\varphi:\ G \to \mathbb{C},\ g \mapsto \omega(\pi(g))$ 是一个（$\alpha,\ \beta$）-KMS 态。因此有如下命题:

命题 *2.3.1.* 设 G 为一个拓扑群，$\alpha : \mathbb{R} \to Aut(G)$ 为一个强连续单参数自同构群。在满足 $\pi_\varphi(G)''$ 为半有限冯·诺伊曼代数的 (α, β) *-KMS* 态 φ 与满足 $\pi_\varphi(G)''$ 为半有限代数的 α-协变循环酉表示 π 之间，存在一一对应关系；对于 $\pi(G)''$ 上唯一的忠实半有限正规迹 τ，存在一个实现算子 H，它属于 α，并且与 $\pi(G)''$ 相联系，满足 $\tau(e^{-\beta H}) = 1$。

注 2.3.2. 如果 φ 是一个因子 I 型 (α, β) KMS 态，那么 $\mathcal{M}_\varphi = \pi_\varphi(G)''$ 是一个 I 型冯·诺伊曼代数，因此存在一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 和一个冯诺依曼代数同构 $\Phi : \mathcal{M}_\varphi \to B(\mathcal{H})$。酉表示 $\rho := \Phi \circ \pi_\varphi$ 是不可约的，因为 σ-弱闭包 $\mathrm{span}\mathbb{C}(\rho(G))$ 等于 $\rho(G)'' = \Phi(\mathcal{M}_\varphi) = B(\mathcal{H})$。这证明存在一个作用于 $\mathcal{H}$ 的算子 H，使得

$$e^{itH}\rho(g)e^{-itH} = \rho(\alpha_t(g)) \quad \text{and} \quad \mathrm{tr}(e^{-\beta H}) < \infty$$

因为 φ 的 GNS 表示对于模自同构群是 α-协变的，即 $\Delta^{it}\pi_\varphi(g)\Delta^{-it} = \pi_\varphi(\alpha_t(g))$ 且 $\Phi \circ \pi_\varphi = \rho$。特别是

$$\varphi : G \to \mathbb{C}, \quad \frac{\mathrm{tr}(\rho(g)e^{-\beta H})}{\mathrm{tr}(e^{-\beta H})}, \quad \text{for} \quad g \in G,$$

是对应于 G 的不可约酉表示 ρ 的吉布斯态。由于表示 ρ 是唯一的，实现算子 H 除相差一个实标量外也是唯一的。

注 2.3.3. 根据 [Tak03，定理 3.14]，冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$ 是半有限的，当且仅当对于每个忠实的半有限正规权重 ψ，相应的模自同构群 σ_t^ψ 在如下意义下是内自同构：存在一个自伴算子 H 与 $\mathcal{M}$ 相联系，使得 $\sigma_t^\psi = \mathrm{Ad}(e^{itH})$ 是 $\mathcal{M}$ 上的自同构。对于拓扑群的 KMS 态，模自同构群的这种内性意味着因子 KMS 态可延拓到较大的群 $G^\flat := G \rtimes_\alpha \mathbb{R}$。设 φ 是一个 (α, β)-KMS 态，满足 $\pi_\varphi(G)''$ 是半有限冯诺伊曼代数，且 H 是与 $\mathcal{M}_\varphi$ 相联系的相应实现算子：$= \pi_\varphi(G)''$满足 $\tau(e^{-\beta H}) < \infty$。由此可得酉表示

$$\pi_\varphi^\flat : G^\flat = G \rtimes_\alpha \mathbb{R} \to U(\mathcal{H}), \quad (g, t) \mapsto \pi_\varphi(g)e^{itH}$$

是一个半有限表示，因为 $e^{itH} \in \mathcal{M}_\varphi$ 蕴含 $\pi_\varphi^\flat(G \rtimes_\alpha \mathbb{R})'' = \pi_\varphi(G)'' = \mathcal{M}_\varphi$。特别地

$$\varphi^\flat : G^\flat = G \rtimes_\alpha \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad (g, t) \mapsto \frac{\tau(\pi_\varphi^\flat(g, t)e^{-\beta H})}{\tau(e^{-\beta H})}$$

是 $G^\flat = G \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 的 $(\alpha^\flat, \beta)$-KMS 态，其中 $\alpha^\flat$ 是 $G^\flat$ 的内自同构单参数群，由 (e, t) 的共轭作用定义，即

$$\alpha^\flat(g, s) = (e, t)(g, s)(e, t)^{-1} = (\alpha_t(g), s), \quad \text{for} \quad g \in G,\ s, t \in \mathbb{R}.$$

注意，模自同构群通过与 e^{itH} 作共轭作用而作用于 $\mathcal{H}_\varphi \cong L^2(\mathcal{M}_\varphi,\ \tau)$，因而使循环向量 $\Omega = \frac{e^{-\frac{\beta H}{2}}}{\sqrt{\mathrm{tr}(e^{-\beta H})}}$ 保持不变，但左乘 e^{itH} 并不保持其不变。

定理 2.3.4。设 $\beta > 0$，并假设 G 是一个有限维李群，且 $\alpha\colon\ \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(G)$由 $\alpha_t(g) = \exp(tX)g\exp(-tX)$给出，其中固定 $X \in \mathfrak{g} := \mathbf{L}(G)$ 且 $g \in G$。则极端 I 型 (α,β)-*KMS* 态就是极端吉布斯态

$$\varphi(g) = \frac{\mathrm{tr}(\rho(g)e^{i\beta\partial\rho(X)})}{\mathrm{tr}(e^{i\beta\partial\rho(X)})},$$

其中，ρ 是 G 的不可约表示，且 $e^{i\beta\partial\rho(X)}$ 属于迹类。特别地，如果 G 是单连通的，那么以下两者之间存在一一对应关系：

(i) 极值 I 型(α,β)-*KMS* 态

(ii) 可容许商 $q\colon\ \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}_1$ 的不可约酉最高权表示的等价类，其中正系Δ_1^+是 $\mathfrak{g}_1$ 的可容许正系，并且 $q(X)$ 与 $C_{\max}(\Delta_{1,p}^+)^\circ$共轭。

证明。这立即由注 2.3.2 得出，因为 $\rho(\exp(tX)) = e^{t\partial\rho(X)} = e^{it(-i\partial\rho(X))}$意味着相应的实现算子 H（其在加上一个实标量的意义下唯一）不妨取为 $-i\partial\rho(X)$。因此，$e^{i\beta\partial\rho(X)}$ 属于迹类；如果 G 是单连通的，则推论 1.2.9 适用。 □

注 2.3.5. 如果 G 是一个有限维李群，且作用 $\alpha\colon\ \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(G)$ 不是内作用，那么考虑具有李代数 $\mathfrak{g}^\flat := \mathbf{L}(G^\flat)$ 的 $G^\flat = G \rtimes_\alpha \mathbb{R}$。为了对所有吉布斯型表示进行分类，只需对 $\mathfrak{g}'$ 的所有可容许商进行分类，并检查 $(0,\ 1) \in \mathfrak{g}^\flat = \mathfrak{g} \rtimes \mathbb{R}$ 在商映射 $q\colon\ \mathfrak{g}^\flat \to \mathfrak{g}'$ 下的像是否属于 $C_{\max}(\Delta_p^+)^\circ$ 的内部，其中 Δ^+ 是 $\mathfrak{g}'$的一个可容许正系。随后，如果按照上述方式对 $\mathfrak{g}'$ 关于 Δ^+ 的酉最高权表示进行分类，就会以同样的方式得到 G 的一个吉布斯型表示，并且所有吉布斯型表示都可由此得到。

3 展望与未解决问题

3.1 将 G 的 KMS 态延拓为 $G^\flat$ 的 KMS 态

为了全面理解拓扑群 G 到 $G^\flat$ 的延拓如何影响 KMS 态的研究，一个值得探讨的问题是：每个 G 的 (α,β)-KMS 态是否都能延拓为 $G^\flat = G \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 的 $(\alpha^\flat,\beta)$-KMS 态，以及每个 $G^\flat$ 的 KMS 态是否都以这种方式得到。我们在注 2.3.3 中看到，G 的半有限 (α,β)-KMS 态可以延拓为 $G^\flat$ 的 $(\alpha^\flat,\beta)$-KMS 态。对于 G 的一个不一定半有限的 (α,β)-KMS 态 φ，其 GNS 表示为 $(\pi_\varphi,\mathcal{H}_\varphi,\Omega_\varphi)$，且 $\mathcal{M} := \pi_\varphi(G)''$，目前尚不清楚这种 KMS 延拓是否总是存在。甚至有可能，这种延拓性质本身就意味着该态是半有限的。

我们考虑交叉积 $\mathcal{M}\rtimes_\sigma\mathbb{R}$，其中 $\sigma\colon\ \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ 是相应态 ω_φ 在 $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H}_\varphi)$ 上的模自同构群（参见 [Tak03，第 X.1] 节）。该交叉积定义为由下列作用在$L^2(\mathbb{R},\mathcal{H}_\varphi)$ 上的有界线性算子集合生成的冯·诺伊曼代数：

$$(\pi_\sigma(A)f)(t) := \sigma_{-t}(A)f(t) \quad \text{and} \quad (\lambda(s)f)(t) := f(t-s),$$

对于 $A \in \mathcal{M},\ \ s,\ t \in \mathbb{R},\ \ f \in L^2(\mathbb{R},\ \mathcal{H}_\varphi)$。然后可以考虑与 $\mathcal{M} \rtimes_\sigma \mathbb{R}$ 相关的对偶权 $\widetilde{\omega}_\varphi$，而 [Tak03, Thm. X.1.17(ii)] 推出模自同构群

$\widetilde{\sigma}:\ \mathbb{R}\to$ 对偶权 $\widetilde{\omega}_\varphi$ 的 $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}\rtimes_\sigma\mathbb{R})$ 满足

$$\widetilde{\sigma}_t(\pi_\sigma(A))=\pi_\sigma(\sigma_t(A)),\quad \text{and}\quad \widetilde{\sigma}_t(\lambda(s))=\lambda(s),\quad \text{for}\quad A\in\mathcal{M},\ s,t\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

对于在 $L^2(\mathbb{R},\mathcal{H}_\varphi)$ 上定义为 $\rho(g,t):=\pi_\sigma(\pi_\varphi(g))\lambda(t)$ 的 $G^\flat$ 的酉表示 ρ，关系 $\pi_\varphi(\alpha_t(g)))=\sigma_t(\pi_\varphi(g))$ 和 (2) 推出

$$\rho(\alpha_t^\flat(g,s))=\rho(\alpha_t(g),s)=\widetilde{\sigma}_t\left(\rho(g,s)\right),\quad \text{for}\quad g\in G,\ s,t\in\mathbb{R}.$$

然而，态的对偶权 $\widetilde{\omega}_\varphi$ 并不定义交叉积的一个态，因此不能天真地将 φ 的延拓定义为 $\varphi^\flat(g,t):=\widetilde{\omega}_\varphi(\rho(g,t))$，其中 $g\in G,\ t\in\mathbb{R}$。这样做行不通，因为对偶权并不定义一个态。为说明这一点，注意到 [Tak03, Thm. X.1.17(i)] 表明，对于一个紧支撑的 $\mathcal{M}$ 值连续函数 $f\in C_c(\mathbb{R},\mathcal{M})$，以及在 $L^2(\mathbb{R},\mathcal{H}_\varphi)$ 上定义为

$$\widetilde{\pi}_\sigma(f):=\int_{\mathbb{R}}\lambda(s)\pi_\sigma(f(s))ds,\quad \text{one has}\quad \widetilde{\omega}_\varphi(\widetilde{\pi}_\sigma(f))=\omega_\varphi(f(e))=\langle\Omega_\varphi,f(e)\Omega_\varphi\rangle.$$

由于 $\widetilde{\pi}_\sigma(C_c(\mathbb{R},\mathcal{M}))$ 生成 $\mathcal{M}\rtimes_\sigma\mathbb{R}$（参见 [Tak03, 引理 X.1.10(iii)]），这意味着对偶权并未在交叉积 $\mathcal{M}\rtimes_\sigma\mathbb{R}$ 上定义一个态，因为从 $C_c(\mathbb{R},\mathcal{M})$ 到 $L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{M})$ 的过渡表明，狄拉克分布并不定义态。因此，这种尝试似乎行不通，不过它揭示了若干关键结构。

3.2 李群的 II 型因子 KMS 态

我们不了解有限维李群的 II 型因子表示 π 是什么样的。对我们而言，II 型因子表示更自然的背景是李群的归纳极限；例如，这些群作用于由二阶矩阵代数的无限乘积定义的超有限 II_1 因子上（参见 [Po67]）。关于归纳极限群 $U(\infty)=\varinjlim_n U(n)$ 的 KMS 态，[St78] 已对此进行了研究；而 $U(\infty)$ 的一般因子表示则见 [SV75]。这些结果的综述见 [SV82]。尽管如此，仍然值得探究 $\tau(e^{i\beta\partial\pi(X)})<\infty$ 对有限维李群 G、表示 π 和生成元 $X\in\mathfrak{g}$ 有何蕴含？显然，$H=-i\partial\pi(X)$ 的谱不再需要是半有界的，因为在 II 型因子中，存在一列非零且两两正交的投影 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $0<\tau(p_n)\to 0$。与其要求 $\mathrm{spec}(H)$ 半有界，不如说其谱以指数速度递减，即 $\int_{\mathbb{R}}e^{-\beta x}d\tau(P_H(x))<\infty$ 成立；也就是说，$\tau(P_H((-\infty,t_0]))\le e^{\beta t_0}\tau(e^{-\beta H})$ 随着 $t\to-\infty$ 指数趋于 0。

A 附录

A.1 紧嵌入的 Cartan 子代数与可容李代数

定义 A.1.1. 如果子代数 $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{g}$ 紧嵌入，则称其为紧嵌入的，其中 $\langle e^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}(\mathfrak{a})}}\rangle\subseteq\overline{\mathrm{GL}(\mathfrak{g})}$ 是紧的。如果元素 $x\in\mathfrak{g}$ 椭圆的，则称其为椭圆元素；若子代数 $\mathbb{R}\cdot x\subseteq\mathfrak{g}$ 紧嵌入，则称其为椭圆的，并用 $\mathrm{comp}(\mathfrak{g})$ 表示 $\mathfrak{g}$ 中椭圆元素的子集。

注 A.1.2。（参见 [Ne00，第 VII.2.2] 定理）：如果 $\mathfrak{t}$ 是一个紧嵌入的嘉当子代数，那么它是幂零的且是紧的，即为阿贝尔的。

因此，子集 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 是一个由可对角化元素组成的阿贝尔子代数，因为紧群 $\mathrm{INN}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ 是紧群 $\mathrm{O}(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的紧子群，而后者是 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 关于某个 $\mathfrak{g}$ 上的标量积的紧子群。因此可得到一个根分解

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha},$$

其中 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} := \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [t, X] = \alpha(t)X, \text{ 对所有 } t \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}\}$ 和 $\Delta := \{\alpha \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^{*} \mid \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} \neq \{0\}\}$均成立。在复李代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上，我们定义对合反同态

$$(X + iY)^{*} := -X + iY \quad \text{for} \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

并注意到 $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid X^{*} = -X\}$。由 [Ne00, 定理 VII.2.2] 可知，对于$Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$，有 $Z^{*} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\alpha}$ 和 $[Z, Z^{*}] \in i\mathfrak{t}$。定义

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(Z) := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{Z, Z^{*}, [Z, Z^{*}]\} \quad \text{and} \quad \mathfrak{g}(Z) := \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(Z) \cap \mathfrak{g}$$

对于根 $\alpha \in \Delta$，现在区分以下几种情况:

(NS) 存在元素 $Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$，使得 $\alpha([Z, Z^{*}]) < 0$ （非紧单型）。则 $\mathfrak{g}(Z) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$。(CS) 存在元素 $Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$，使得 $\alpha([Z, Z^{*}]) > 0$ （紧单型）。则$\mathfrak{g}(Z) \cong \mathfrak{su}(2)$。(N) 对所有 $Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$， $\alpha([Z, Z^{*}]) = 0$，且存在 $Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$，使得 $[Z, Z^{*}] \neq 0$（幂零型）。则 $\mathfrak{g}(Z)$ 同构于三维海森堡代数 $\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$。(A) 对所有 $Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$， $[Z, Z^{*}] = 0$ （阿贝尔型）。则 $\mathfrak{g}(Z) \cong \mathbb{R}^2$。

仅出现这四种情形，是由 [Ne00, 引理 VII.2.3] 推出的；该引理表明，对于所有 $\alpha \in \Delta$ 单型的情形，$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} = 1$，因此，只要条件 (NS) 和 (CS) 对其中一种情形成立，它们就对所有 $Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$ 成立。

定义 A.1.3. (参见 [Ne00, Def. VII.2.4] 和 [Ne00, Def. VII.2.6]): 设 $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个紧嵌入的嘉当子代数。

(i) 若一个根 $\alpha \in \Delta$ 是半单的，则称其为半单根，并将半单根的集合记为 Δ_s。可解根 的集合记为 $\Delta_r := \Delta \setminus \Delta_k$。

(ii) 若存在 $Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$ 使得 $\alpha([Z, Z^{*}]) < 0$，则称一个根 $\alpha \in \Delta$ 是紧的。其他根均称为非紧的，所有非紧根的集合记为 Δ_p，紧根的集合记为 Δ_k。我们还定义非紧半单根 $\Delta_{p,\,s} := \Delta_p \cap \Delta_s$。

(iii) 若存在正则元 $X_0 \in i\mathfrak{t}$ 使得，则称子集 $\Delta^{+} \subseteq \Delta$ 为一个 正系

$$\Delta^{+} = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha(X_0) > 0\}.$$

如果 Δ^{+} 是这样一个正根系，我们将 Δ_k^{+}， Δ_p^{+}，$\Delta_{p,\,s}^{+}$ 和 Δ_r^{+}定义为相应子集与 Δ^{+}的交集。

(iv) 如果一个正系 Δ^+ 适配的，则称其为适配正系；对于所有 $\alpha \in \Delta_k$ 和 $\beta \in \Delta_p^+$，有

$$\beta(X_0) > \alpha(X_0),$$

对于定义 Δ^+的某个 X_0。

定义 A.1.4。（参见 [Ne00，定义 VIII.2.6]）：
设 $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$ 为一个紧嵌入的嘉当子代数， Δ^+ 为相应的正根系。对于非紧根的正系 Δ_p^+，我们关联如下凸锥

$$C_{\min}(\Delta_p^+) := \operatorname{cone}(\{i[Z_\alpha, Z_\alpha^*] \mid Z_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha,\ \alpha \in \Delta_p^+\} \subseteq \mathfrak{t}$$
$$\text{and} \quad C_{\max}(\Delta_p^+) := (i\Delta_p^+)^\star := \{X \in \mathfrak{t} \mid i\alpha(X) \geq 0 \text{ for all } \alpha \in \Delta_p^+\}.$$

若所考虑的非紧根正系 Δ_p^+ 是明确的，则我们简单记 $C_{\min}$（分别记 $C_{\max}$）为 $C_{\min}$（Δ_p^+）（分别为 $C_{\max}$（Δ_p^+）。

定义 A.1.5。如果李代数 $\mathfrak{g}$ 可容，则称其为 $\mathfrak{g}$ 包含一个不含任何仿射直线的不变闭生成凸子集 C。

定理 A.1.6。（**夹逼定理** [Ne00，定理 VII.3。8]）
设 $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个紧嵌入的嘉当子代数， $\emptyset \neq C \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个闭的、生成的、不变的椭圆凸子集。则存在唯一确定的非紧根适配正系 Δ_p^+，使得$C \cap \mathfrak{t} \subseteq C_{\max}(\Delta_p^+)$。此外，我们还有 $C_{\min}(\Delta_p^+)$ $\subseteq \lim(C \cap \mathfrak{t})$。此外，若 C 是一个锥，则这意味着

$$C_{\min}(\Delta_p^+) \subseteq C \cap \mathfrak{t} \subseteq C_{\max}(\Delta_p^+).$$

A.2 凸几何与表示论概念

定义 A.2.1。（参见 [Ne00，定义 V.1.1] 和 [Ne00，命题 V.1.6]）：
设 V 是一个有限维实向量空间， $W \subseteq V$ 是一个闭凸锥。

（i）对于子集 $E \subseteq V$，我们定义

$$B(E) := \{\omega \in V^* \mid \inf \omega(E) > -\infty\} \quad \text{and} \quad E^\star := \{\omega \in V^* \mid \omega(E) \subseteq [0, \infty)\}.$$

（ii）对于凸子集 $C \subseteq V$，我们定义其衰退锥 lim(C)：$= \{v \in V \mid v + C \subseteq C\}$。

(iii) 对于 $I \subseteq V^*$，我们定义 $I^\perp := \{v \in V \mid \omega(v) = 0$ 对所有 $\omega \in I\}$成立。

(iv) 对于子集 $E \subseteq V$，我们将 algint(E) 定义为 E 相对于由 E张成的仿射子空间的内部。

注 A.2.2. 我们指出以下几点：

(i) $E^\star$ 总是闭集，但一般而言 $B(E)$ 不是闭集。
(ii) 有 $B\left(\underline{\operatorname{conv}(E)}\right) = B(E)$。

(iii) $B(E)^\star$ =lim(E) 对于 E 凸（参见 [Ne00，命题 V.1.14]）

定义 A.2.3。（参见 [Ne00，定义 X.1.2]）：
设 $(\pi, \mathcal{H})$ 是李群 G 的酉表示，其李代数为 $\mathbf{L}(G) = \mathfrak{g}$，作用于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$；设 $\mathcal{H}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 中由光滑向量构成的稠密子空间，$\mathfrak{g}$ 在其上的作用为$d\pi(X)(v) := \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \pi(\exp_G(tX))v$，其中 $X \in \mathfrak{g}$，$\overline{\ }v \in \mathcal{H}^\infty$。于是我们将酉表示 π 的动量映射定义为

$$\Phi_\pi : \mathbb{P}(\mathcal{H}^\infty) := (\mathcal{H}^\infty \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times \to \mathfrak{g}^*, \quad \Phi_\pi([v])(X) := -i\frac{\langle v, d\pi(X)v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

并将 动量集 I_π 定义为 Φ_π的像的闭凸包。

注记 A.2.4。 若 $(\pi, \mathcal{H})$ 是李群 G 的酉表示，我们考虑锥

$$B(I_\pi) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \inf\langle I_\pi, X\rangle > -\infty\}.$$

该锥是不变的，因为 I_π 在余伴随作用下是不变的（参见 [Ne00，引理 X.1.3]），并且 [Ne00，引理 X.1.6] 意味着

$$B(I_\pi) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sup(\mathrm{spec}(i \cdot d\pi(X))) < \infty\}.$$

定义 A.2.5。 如果 $\mathfrak{g}$ 是复李代数，且 $*\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 是反线性反自同构，即对于所有 $x, y \in \mathfrak{g}$，$[x^*, y^*] = -[x, y]^*$成立，则称一对 $(\mathfrak{g}, *)$ 为对合李代数 。

定义 A.2.6。 如果存在一个 $*$-不变子代数 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ 和一个子集 $\Delta \subseteq \mathfrak{g}^*$，使得 $\alpha(h^*) = \alpha(h)$ 且.....，则称对合李代数 $(\mathfrak{g}, *)$ 具有根分解 。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha,$$

对于所有 $h \in \mathfrak{h}\} \neq \{0\}$，$\mathfrak{g}^\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}(h)(X) = \alpha(h)X$ 。

定义 A.2.7. 设 $(\mathfrak{g}, *)$ 是一个对合李代数。如果存在一个正定厄米形式 $h\colon V \times V \to \mathbb{C}$，且该形式也是反变的，即对所有 $X \in \mathfrak{g}$ 和 $v, w \in V$，它满足 $h(X.v, w) = h(v, X^*.w)$，则称 $\mathfrak{g}$-模 V 是酉的 。

定义 A.2.8. 设 $(\mathfrak{g}, *)$ 是一个具有根分解的对合李代数，且 $\Delta^+ \subseteq \Delta$ 是一个正系。如果存在一个线性泛函，则称 $\mathfrak{g}$-模 V 是关于 Δ^+ 的最高权模

$$\lambda : \mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha \to \mathbb{C}$$

以及一个循环向量 $v \in V$，使得对所有 $X \in \mathfrak{b}$ 都成立 $X.v = \lambda(X)v$ 。称 λ 为 V 的最高权，并称 v 为最高权向量。

定义 A.2.9。 若连通李群 G 的不可约酉表示 $(\pi,\ \mathcal{H})$ 满足以下条件，则称其为酉最高权表示：李代数 $\mathfrak{g}$ G 包含一个紧嵌入的嘉当子代数 $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$，且 $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ 是包含 $\mathfrak{t}$ 的唯一极大紧嵌入子代数（参见 [Ne00，命题 VII.25]）；并且 $K := \exp(\mathfrak{k})$ 时，光滑 K-有限向量空间 $\mathcal{H}^{K,\ \infty}$ 是对合李代数 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 的最高权模，其对合为 $(X + iY)^* = -X + iY$，其中 $X,\ Y \in \mathfrak{g}$。

参考文献

[BR87] Bratteli, O. 和 D. W. Robinson，《算子代数与量子统计力学 I》，第 2 版，《物理学文本与专著》，Springer-Verlag，1987 年。[BR96] Bratteli, O. 和 D. W. Robinson，《算子代数与量子统计力学 II》，第 2 版，《物理学文本与专著》，Springer-Verlag，1997 年。[DE09] Anton Deitmar、Siegfried Echterhoff，《调和分析原理》，第 1 版，Springer-Verlag，2009 年。[HM06] Karl H. Hofmann 和 Sidney A. Morris，《紧群的结构》：学生入门读物——专家参考手册。修订增补第 2 版。《De Gruyter 数学研究丛书》25。Walter de Gruyter & Co.，柏林，2006 年。[HN12] Karl-Hermann Neeb、Joachim Hilgert，《李群的结构与几何》，第 1 版，《Springer 数学专著》。Springer，纽约，2012 年。[GN] Helge Glöckner、Karl-Hermann Neeb，《无限维李群：一般理论与主要例子》，编写中。[GN00] Helge Glöckner、Karl-Hermann Neeb，《极小几乎周期阿贝尔群与交换 W*-代数》，《数学研究与论述》，Heldermann 出版社，柏林，2000 年。[LT18] Roberto Longo、Yoh Tanimoto，《旋转 KMS 态与 I 型共形网》，[Mo80] Calvin C. Moore，《一般酉表示的 Mautner 现象》，《太平洋数学杂志》86（19（1980），155–169。[Ne00] Karl-Hermann Neeb，《李理论中的全纯性与凸性》，《De Gruyter 数学论著》28。Walter de Gruyter & Co.，柏林，2000 年。[Ni22] Milan Niestijl，《喷射群的广义正能量表示》，arXiv:2211.10390 [math.RT][Po67] Robert T. Powers，《一致超有限代数及其相关冯·诺伊曼环的表示》，《数学年刊》，1967 年 7 月，第二辑，第 86 卷，第 1 期（1967 年 7 月），第 138–171 页。[St78] Stratila, S.，《关于酉群 $U(\infty)$ 的一类 KMS 态》，Math. Ann. 235:1（1978），87–110。[SV75] Stratila, S. 和 D. Voiculescu，《AF 代数及群$U(\infty)$的表示》，《数学讲义》486，Springer Verlag，柏林，1975 年。[SV82] Stratila, S. 和 D. Voiculescu，《酉群$U(\infty)$表示概述》，载于《谱理论》，《巴拿赫中心出版物》8，PWN 波兰科学出版社，华沙，1982 年；第 415–434 页。[Tak02] M. Takesaki，《算子代数理论 I》（英文摘要）。1979 年第 1 版的重印本。《数学科学百科全书》124。《算子代数与非交换几何》5。Springer-Verlag，柏林，2002 年。

[Tak03] M. Takesaki, 《算子代数理论 II》（英文摘要）, 《数学科学百科全书》第125卷, 《算子代数与非交换几何》第6卷。Springer-Verlag，柏林，2003