arXiv:2301.03481v1 [math.PR] 9 Jan 2023

全不对称简单排斥过程的 KPZ 标度与 KPZ 固定点

Yuta Arai *

摘要

我们考虑所有转移概率由 Sch¨utz 型公式给出、且以齐次速率跳跃的全不对称简单排斥过程（TASEPs）。我们证明，粒子位置的多点分布以及 KPZ 标度系数，可通过最右侧粒子跳跃后所得分布的概率生成函数来描述。对于满足特定假设的所有全不对称简单排斥过程，我们还证明，粒子位置联合分布中出现的核逐点收敛到 KPZ 固定点公式中出现的核。我们的结果推广了 Matetski、Quastel 和 Remenik [16] 的结果。

1 引言

KPZ 普适类是在 [15] 中提出的，用于描述界面生长模型的普适性。全不对称简单排斥过程（TASEP）是最典型的相互作用随机粒子系统之一。它可以被解释为属于 KPZ 普适类的随机界面生长模型。此外，TASEP 被认为是研究 KPZ 普适性的重要模型，因为其分布函数可以针对某些量进行计算。

自 2000年左右以来，关于 TASEP 的 KPZ 普适性的研究一直在积极开展。首先，在阶跃初始条件下，通过考察随机生长的杨图与 TASEP 之间的关系，Johansson [13] 利用 RSK 对应推导出了粒子流的一点极限分布。在这种情况下，极限分布被证明是随机矩阵理论中的 GUE Tracy-Widom 分布 [28]。作为相关研究，在平坦多核生长（PNG）模型的情况下，已在 [19]中获得了高度分布的一点极限分布。此外，对于最后通过渗流，也在[2, 3]中得到了类似结果。 [2, 3, 19] 的结果包括以 TASEP 的语言表述的周期初始条件下粒子流的一点极限分布结果。结果表明，极限分布是随机矩阵理论中的 GOE Tracy-Widom 分布 [29]。

以上是关于单点涨落的结果，但也已有许多关于多点涨落的结果。对于对应于阶跃初始条件的情形，在采用不同设定的多核苷酸生长模型中，已得到了极限多点分布的 Fredholm 行列式公式 [14, 20]。在这种情形下，由多点分布刻画的极限过程是 Airy_2 过程。另一方面，对于周期初始条件，利用全不对称简单排斥过程中的转移概率结果 [26]，已在连续时间 TASEP [9, 25] 中推导出极限多点分布的 Fredholm 行列式公式。在这种情形下，由多点分布刻画的极限过程称为 Airy_1 过程。[9, 25] 中的技术已应用于多种模型。因此，已得到了采用不同设定的全不对称简单排斥过程和多核苷酸生长模型的多点分布的极限分布 [6, 8, 10]。

粒子位置的广义初始条件情形也得到了研究。Matetski、Quastel 和 Remenik [16] 首先扩展了 [9, 25] 的方法，得到了任意初始条件下连续时间 TASEP 多点分布的极限分布：在 [9, 25]，中，

·艺术与科学平台，千叶商科大学，市川市 263-8522，日本。电子邮箱：yuta-taarai@cuc.ac.jp

Fredholm 行列式的相关核被表示为双正交函数$\Psi_k^n(x)$ 和 $\Phi_k^n(x)$ 的形式。不过，问题在于 $\Phi_k^n(x)$ 没有显式表示，而 $\Psi_k^n(x)$ 则有。因此，如何取该核的 KPZ 标度极限并不明确。Matetski、Quastel 和 Remenik [16] 解决了这个问题。他们用几何随机游走的命中概率来表示函数 $\Phi_k^n(x)$。根据 Donsker 不变性原理，在取时间—空间极限时，几何随机游走的击中时刻收敛到布朗运动的击中时刻，因此，$\Phi_k^n(x)$ 的这种表示使我们能够取 KPZ 标度极限。基于这一方法，他们推导出了任意初始条件下连续时间 TASEP 多点分布的极限分布。具有这一多点分布极限分布的极限过程称为 KPZ 固定点。利用 [16]的方法，人们还在单侧反射布朗运动 [18] 以及具有几何跳跃和伯努利跳跃的两种离散时间 TASEP [1] 中得到了 KPZ 固定点。此外，关于 KPZ 固定点还有许多其他有趣的进展，例如 [11, 22, 24]。

已有研究利用 [12] 的结果，求得离散时间 TASEP 中粒子位置的分布：Dieker 和 Warren [12] 利用 RSK 对应，推导出了对应于离散时间 TASEP 四种变体的四个过程的传递核。Matetski 和 Remenik [17] 结合上述结果与 [16] 的方法，给出了离散时间 TASEP 四种变体中粒子位置的分布。他们还得到了粒子位置分布的一个公式，例如可应用于连续时间 TASEP 以及采用顺序更新的离散时间 TASEP。在 [5], 中，他们推广了 [12] 的方法，使其能够应用于具有粒子与时间非齐次速率的离散时间伯努利 TASEP。结合上述方法与 [16], 的方法，他们给出了具有粒子与时间非齐次速率的离散时间伯努利 TASEP 中粒子位置的分布。然而，在 [5, 17], 中，他们尚未推导出一个能够统一应用于不同设定下 TASEP 的、用于求得 KPZ 固定点的公式。

本文研究转移概率由 Sch¨utz 型公式给出且以齐次速率跳跃的所有全不对称简单排斥过程。随后，我们证明，粒子位置的分布可以用最右侧粒子跳跃后所遵循的分布的概率生成函数来描述。我们指出，这种使用概率生成函数的方法与 [5, 17] 的方法截然不同。我们还指出，用于获得 KPZ 固定点的 KPZ 标度系数，可以表示为最右侧粒子跳跃后所遵循的分布的概率生成函数。此外，我们还证明了 KPZ 标度系数的性质。最后，通过推广 [16], 的方法，我们证明，在满足某些假设的所有全不对称简单排斥过程中，粒子位置联合分布中出现的核逐点收敛到 KPZ 固定点公式中出现的核。这些过程包括连续时间 TASEP、采用顺序更新的离散时间伯努利 TASEP，以及采用并行更新的离散时间几何 TASEP。这表明，我们的方法可以适用于多种模型，而非仅适用于一种模型。值得注意的是，即使对于跳跃率为 $\beta \in (0, \infty)$ 的连续时间 TASEP，我们的方法也能导出 KPZ 固定点，而此前尚未给出该情形下的 KPZ 固定点（见例 2.2 和附录 A）。

本文结构如下：第 2 节中，我们陈述转移概率由 Sch¨utz 型公式给出的全非对称简单排斥过程（见假设 2.1）。我们还给出主要结果：满足假设 2.1 的全非对称简单排斥过程的 Fredholm 行列式公式（定理 2.8）、KPZ 标度系数的性质（定理 2.15），以及在假设 2.11 和假设 2.16 成立时，满足假设 2.1 的全非对称简单排斥过程的 KPZ 标度极限（定理 2.21）。第 3 节中，对于满足假设 2.1 的全非对称简单排斥过程，我们在将转移概率表示为最右侧粒子跳跃后分布的概率生成函数后，证明定理 2.8。第 4 节中，我们证明定理 2.15。第 5 节中，我们给出定理 2.21 和命题 2.24 的证明。附录 A 中，我们运用本文的方法证明，在跳跃率为 $\beta \in (0, \infty)$ 的连续时间 TASEP 中可以得到 KPZ 固定点。我们证明的关键在于利用最右侧粒子跳跃后分布的概率生成函数，对核进行鞍点分析。

2 模型与结果

2.1 模型

我们考虑定义在 $\mathbb{Z}$ 上的全非对称简单排斥过程。每个粒子独立地随机向右跳跃，但只有在目标位置为空时才能跳；如果目标位置被其他粒子占据，则不能移动。以上就是排斥规则。

我们主要关注每个粒子的位置。根据版本，我们将 $t \in \mathbb{Z}$ 或 $t \in \mathbb{R}$。然后定义 $X_t(i) \in \mathbb{Z}$ 为时间 t 第 i 个粒子的位置。全不对称简单排斥过程的动力学保持粒子的顺序，即

$$\cdots < X_t(i+2) < X_t(i+1) < X_t(i) < X_t(i-1) < X_t(i-2) < \cdots$$

其中，当将 $\pm\infty$ 加入状态空间时，位于 $\pm\infty$ 的粒子在动力学中不起作用。现在我们设

$$\Omega_N = \{\vec{x} = (x_N, x_{N-1}, \cdots, x_1) \in \mathbb{Z}^N : x_N < \cdots < x_2 < x_1\}$$

为 Weyl 室，其元素表示全不对称简单排斥过程的粒子位置。此外，我们令 t

$$F_n(x,t) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{0,1}} dw \frac{(1-w)^{-n}}{w^{x-n+1}} \mathcal{M}(t,w) \tag{2.1}$$

其中 $\Gamma_{0,1}$ 是任意一个逆时针定向且包含 $w=0$ 和 $w=1$的简单闭环，而 $\mathcal{M}(t,w)$ 在 $\{w \in \mathbb{C} : |w| < R\}$ 上解析，半径为 $R \geq 1$。

本文研究满足以下假设的全不对称简单排斥过程（TASEP），不考虑跳跃率或跳跃概率随时间变化的全不对称简单排斥过程。

假设 2.1. 从 $\vec{y} \in \Omega_N$ 到 $\vec{x} \in \Omega_N$ 的转移概率为

$$\mathbb{P}(X_t = \vec{x} | X_0 = \vec{y}) = \det[F_{i-j}(x_{N+1-i} - y_{N+1-j}, t)]_{1 \leq i,j \leq N}, \tag{2.2}$$

其中，$X_t = (X_t(1)\ X_t(2) \ldots, X_t(N))$ 是粒子系统的位置。

以下示例展示了许多满足假设 2.1 的全不对称简单排斥过程。

例 2.2. 这里介绍三个典型示例。

- 跳跃率为 β 的连续时间 TASEP

  连续时间 TASEP 在 [27] 中作为一个数学模型被引入。该过程 $X_t, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 的演化规则如下：每个粒子以速率 $\beta \in (0,\infty)$ 独立尝试向右跳至相邻位置，前提是该位置为空。连续时间 TASEP 是一个马尔可夫过程，其生成元 L 定义如下：我们记 $\eta = \{\eta(x) : x \in \mathbb{Z}\} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 为一个粒子构型，其中 $\eta(x) = 1$ 表示位置 x 被粒子占据，而 $\eta(x) = 0$ 表示该位置为空。接着，将作用于柱函数 f 的生成元 L： $\{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ 定义为

  $$(Lf)(\eta) = \beta \sum_{x \in \mathbb{Z}} \eta(x)(1-\eta(x+1))(f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta))$$

  其中

  $$\eta(x) = \begin{cases} 1, & \textit{if the site is occupied by a particle,} \\ 0, & \textit{if the site } x \textit{ is empty,} \end{cases}$$

  而 $\eta^{x,x+1}$是构型 η，其中位置 x和 $x+1$处的占据状态已交换，即

  $$\eta^{x,x+1}(y) = \begin{cases} \eta(x+1) & \textit{for } y = x, \\ \eta(x) & \textit{for } y = x+1, \\ \eta(y) & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

X_t 的转移概率由 [26]通过 Bethe Ansatz 给出:

$$\mathbb{P}(X_t = \vec{x}|X_0 = \vec{y}) = \det[F_{i-j}(x_{N+1-i} - y_{N+1-j}, t)]_{1\le i,j\le N},$$

with

$$F_n(x,t) = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{0,1}} dw \frac{(1-w)^{-n}}{w^{x-n+1}} e^{\beta t(w-1)}$$

其中 $\Gamma_{0,\ 1}$ 是任意一个逆时针定向且包含 $w=0$ 和 $w=1$的简单闭环。显然，该模型满足假设 2.1，其中函数为

$$\mathcal{M}(t,w) = e^{\beta t(w-1)}. \tag{2.3}$$

注意，当 $\beta \in$ (0,1) 时，该模型可以解释为下文将介绍的离散时间伯努利 TASEP 的连续时间版本。当 $\beta = 1$时， [16]中已推导出 KPZ 固定点；但我们的结果表明，当 $\beta \in$ (0, ∞) 时，也可以得到 KPZ 固定点（见附录 A）。

- 顺序更新的离散时间伯努利 TASEP

  文献 [7] 此前研究了 $\mathbb{Z}$ 上的顺序更新离散时间伯努利 TASEP，将其视为 Gelfand-Tsetlin 模式上动力学的一个边缘过程；该动力学保持 Schur过程这一类不变。过程 $X_t, t \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 的演化由以下递推关系给出

$$X_{t+1}(1) = X_t(1) + w_{t+1,1}$$

and

$$X_{t+1}(i) = \min\left\{X_t(i) + w_{t+1,i}, X_{t+1}(i-1) - 1\right\}, \qquad i = 2,3,\ldots,N$$

其中 $w_{t,\ i}$ 是相互独立的随机变量，服从参数为$p \in$ (0, 1) 的伯努利分布。该模型的转移概率由 [23]给出:

$$\mathbb{P}(X_t = \vec{x}|X_0 = \vec{y}) = \det[F_{i-j}(x_{N+1-i} - y_{N+1-j}, t)]_{1\le i,j\le N},$$

with

$$F_n(x,t) = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{0,1}} dw \frac{(1-w)^{-n}}{w^{x-n+1}} (1+p(w-1))^t$$

其中 $\Gamma_{0,1}$ 是任意一个取逆时针方向且包含 $w=0$ 和 $w=1$的简单闭环。容易看出，该模型满足假设 2.1，其中函数

$$\mathcal{M}(t,w) = (1+p(w-1))^t.$$

- 并行更新的离散时间几何非对称简单排斥过程

  此前， $\mathbb{Z}$ 上的并行更新离散时间几何非对称简单排斥过程已在 [30] 中作为 Gelfand-Tsetlin 模式上的动力学的边缘过程进行了研究，该动力学保持 Schur过程这一类不变。过程 $X_t, t \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 的演化由递推关系给出

$$X_{t+1}(1) = X_t(1) + \widehat{w}_{t+1,1}$$

and

$$X_{t+1}(i) = \min\left\{X_t(i) + \widehat{w}_{t+1,i}, X_{t+1}(i-1) - 1\right\}, \qquad i = 2,3,\ldots,N$$

其中 $\widehat{w}_{t,\ i}$ 是相互独立的随机变量，服从参数为$\alpha \in$ (0, 1)的几何分布。该过程的转移概率为 [1, 12, 17]:

$$\mathbb{P}(X_t = \vec{x}|X_0 = \vec{y}) = \det[F_{i-j}(x_{N+1-i} - y_{N+1-j}, t)]_{1\le i,j\le N}, \tag{2.4}$$

with

$$F_n(x,t) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{0,1}} dw \frac{(1-w)^{-n}}{w^{x-n+1}} \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha w}\right)^t \tag{2.5}$$

其中 $\Gamma_{0,\ 1}$ 是任意一个逆时针取向、包含 $w = 0$ 和 $w = 1$的简单闭环。注意，[12] 首次证明了转移概率可以表示为行列式：Dieker 和 Warren [12] 利用涉及对称多项式的某些求和表示转移概率。另一方面，[1]首次给出了类似 (2.5) 的围道积分公式所表示的转移概率。此外，[17] 证明了 [1]中的转移概率表达式与 [12] 中的转移概率表达式等价。容易看出，该模型满足假设 2.1，其函数为

$$\mathcal{M}(t,w) = \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha w}\right)^t.$$

2.2 结果

本小节陈述我们的主要结果。

2.2.1 粒子位置分布的表示

现在，我们给出一个单一的 Fredholm 行列式公式，用于表示满足假设 2.1 的全不对称简单排斥过程中的粒子位置联合分布。为描述我们的结果，我们先给出一些定义。

定义 2.3（上图集与下图集）。对于一个定义域为 $\mathbb{A}$ 的实值单值函数 $f\colon \mathbb{A} \to (-\infty, \infty]$，我们定义

$$\mathrm{epi}(\widehat{f}) = \{(x,y) : y \geq \widehat{f}(x)\},\ \mathrm{hypo}(\widehat{f}) = \{(x,y) : y \leq \widehat{f}(x)\}.$$

定义 2.4。我们将 $RW_m,\ m = 0, 1, 2\ldots$ 作为一名随机游走者的位置，该随机游走者从某个固定位置 c 出发，并以 Geom$[\frac{1}{2}]$的方式严格向左跳跃，也就是说，

$$RW_m = c - \chi_1 - \chi_2 - \cdots - \chi_m,$$

其中 $\chi_i,\ i = 1, 2, \ldots$ 是独立同分布的随机变量，其 $\mathbb{P}(\chi_i = k)$ 为 $= 1/2^{k+1},\ k = 0, 1, 2, \ldots$。我们还定义停时

$$\tau = \min\{m \geq 0 : RW_m > X_0(m+1)\} \tag{2.6}$$

其中 τ 是随机游走 RW_k 击中曲线 $(X_0(k+1))_{k=0,\ldots,n-1}$ 的严格上图的时刻，$X_0(m)$ 为常数，且仅在粒子数为 N 时定义 $m \leq N$。

最后，我们定义乘法算子。

定义 2.5。对于固定向量 $a \in \mathbb{R}^m$ 和指标 $n_1 < \cdots < n_m$，我们定义

$$\chi_a(n_j, x) = \mathbf{1}_{x > a_j},\quad \bar{\chi}_a(n_j, x) = \mathbf{1}_{x \leq a_j}.$$

为作用在空间 $\ell^2(\{n_1, \ldots, n_m\} \times \mathbb{Z})$（或作用在空间 $L^2(\{x_1, \ldots, x_m\} \times \mathbb{R})$）上的乘法算子。

在考虑粒子位置的分布时，我们假设最右侧粒子存在，且标号为 1。现在我们指出如下事实：TASEP $X_t(1)$ 的最右侧粒子是一个（向右）单向跳跃随机游走或复合泊松过程，因为排斥规则不起作用。因此

- 如果 $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，那么

$$X_t(1) := Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_t \tag{2.7}$$

其中 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_t$ 是独立同分布的非负整数值随机变量。

- 如果 $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，那么

$$X_t(1) = S_{N_t} := Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{N_t} \tag{2.8}$$

其中 $Z_1, Z_2, \ldots$ 是独立同分布的非负整数值随机变量，N_t 是参数为 $\lambda \in (0, \infty)$ 的泊松过程，且与过程 $S_n, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 独立。

由 (2.7) 和 (2.8) 可得以下结果。

命题 2.6. 考虑满足假设 2.1 的全不对称简单排斥过程（TASEP）。那么

$$\mathcal{M}(t, w) = \mathcal{M}(w)^t \tag{2.9}$$

其中

$$\mathcal{M}(w) = \begin{cases} G_{Y_1}(w) & \text{if } t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ G_X(G_{Z_1}(w)) & \text{if } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \end{cases} \tag{2.10}$$

$G_Z(w)$ 是非负整数值随机变量 Z 的概率生成函数，即

$$G_Z(w) = \sum_{k=0}^{\infty} w^k \mathbb{P}(Z = k), \tag{2.11}$$

Y_1 定义于 (2.7)，Z_1 定义于 (2.8)，而 X 是参数为 $\lambda \in (0, \infty)$ 的泊松随机变量。

此证明见第 3.1 节。

此外，利用命题 2.6 可得以下结果。

定理 2.7。考虑满足假设 2.1 的全不对称简单排斥过程。则该过程的转移概率如下：

$$\mathbb{P}(X_t = \vec{x} | X_0 = \vec{y}) = \det[\overline{F}_{i-j}(x_{N+1-i} - y_{N+1-j}, t)]_{1 \leq i,j \leq N}$$

其中 $\vec{x}, \vec{y} \in \Omega_N$，

$$\overline{F}_n(x, t) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{0,1}} dw \frac{(1-w)^{-n}}{w^{x-n+1}} \mathcal{M}(w)^t, \tag{2.12}$$

其中 $\Gamma_{0,1}$ 是任意一个逆时针定向、包含 $w = 0$ 和 $w = 1$ 的简单闭环，而 $\mathcal{M}(w)$ 的定义见 (2.10)。

证明见第 3.1 节。

由 [17]，的定理 2.7 和定理 1.2 可得以下结果。这些结果表明，粒子位置的分布可以表示为最右侧粒子跳跃后所遵循分布的概率生成函数。

定理 2.8. 考虑满足假设 2.1 的全不对称简单排斥过程。令 $t \in \mathbb{Z}$ 或 $t \in \mathbb{R}$。此外，记 $X_t(j)$ $j \in \mathbb{Z}$ 为时间 t 第 j 个粒子的位置。假设初始位置$X_0(j) \in \mathbb{Z}$ 对于 $j = 1$、2、.....均为任意常数，且满足 $X_0(1) > X_0(2) > \cdots$，而 $X_0(j) = \infty$ 对于 $j \leq 0$。

对于 $n_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ $j = 1, 2, \ldots, M$，其中 $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_M$，以及 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_M) \in \mathbb{Z}^M$，我们得到

$$\mathbb{P}(X_t(n_j) > a_j, j = 1, \ldots, M) = \det(I - \bar{\chi}_a K_t \bar{\chi}_a)_{\ell^2(\{n_1, \ldots, n_M\} \times \mathbb{Z})}. \tag{2.13}$$

这里， $\bar{\chi}_{\boldsymbol{a}}(n_j, x)$ 在定义 2.5 中引入，而

$$K_t(n_i, x; n_j, y) = -Q^{n_j - n_i}(x, y)\mathbf{1}_{n_i < n_j} + (\mathfrak{S}_{-t,-n_i})^* \bar{\mathfrak{S}}^{\mathrm{epi}(X_0)}_{-t,n_j}(x, y), \tag{2.14}$$

$$Q^m(x, y) = \frac{1}{2^{x-y}} \binom{x-y-1}{m-1} \mathbf{1}_{x \geq y+m}, \tag{2.15}$$

$$\mathfrak{S}_{-t,-n}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_0} dw \frac{(1-w)^n}{2^{z_2 - z_1} w^{n+1+z_2-z_1}} \left\{ \frac{\mathcal{M}(w)}{\mathcal{M}\left(\frac{1}{2}\right)} \right\}^t, \tag{2.16}$$

$$\bar{\mathfrak{S}}_{-t,n}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_0} dw \frac{(1-w)^{z_2 - z_1 + n - 1}}{2^{z_1 - z_2} w^n} \left\{ \frac{\mathcal{M}(1-w)}{\mathcal{M}\left(\frac{1}{2}\right)} \right\}^{-t}, \tag{2.17}$$

$$\bar{\mathfrak{S}}^{\mathrm{epi}(\mathrm{X}_0)}_{-t,n}(z_1, z_2) = \mathbb{E}_{RW_0 = z_1} \left[\bar{\mathfrak{S}}_{-t,n-\tau}(RW_\tau, z_2) \mathbf{1}_{\tau < n} \right], \tag{2.18}$$

其中 Γ_0 是一条围绕 0 且不包围其他极点的简单逆时针闭合曲线，而 $\mathcal{M}(w)$ 由 (2.10) 定义。(2.18) 中的上标 $\mathrm{epi}(\mathrm{X}_0)$ 表示， τ 是随机游走 RW_k （定义见定义 2.4）击中曲线 $(X_0(k+1))_{k=0,\ldots,n-1}$ 的严格上图的时刻。

该证明见第 3.2 节。

注 2.9. 定理 2.7 表明，将命题 2.6 应用于假设 2.1 可推出 [17] 的假设 1.1。因此，在假设 2.1（比 [17] 中的假设 1.1 更弱）下，定理 2.8 已得到了粒子位置的分布。此外，定理 2.8 表明，函数 $\mathcal{M}(w)$ 可由最右侧粒子跳跃后所遵循分布的概率生成函数给出；该函数在 [17]，的定理 1.2 中并未以显式形式得到。

2.2.2 KPZ 标度的系数与 KPZ 标度极限

现在我们介绍定理 2.8 中关于联合分布函数标度极限的结果。我们的主要结果包括 [16] 中连续时间 TASEP 的结果，以及 [1] 中离散时间 TASEP 的结果，并且适用于多个模型，而非仅适用于单一模型。

为了观察涨落的普适行为，我们聚焦于高度函数。

定义 2.10. 对于 $z \in \mathbb{Z}$，我们给出与 X_t 相关的 TASEP 高度函数：

$$h_t(z) = -2(X_t^{-1}(z-1) - X_0^{-1}(-1)) - z \tag{2.19}$$

其中

$$X_t^{-1}(u) = \min\{k \in \mathbb{Z} : X_t(k) \leq u\} \tag{2.20}$$

是 在时间 t 时位于 u 左侧或恰好位于 u 处的最右侧粒子的标号，并且我们固定 $h_0(0) = 0$.

注意，我们可以将其表示为

$$h_t(z+1) = h_t(z) + \widehat{\eta}_t(z) \tag{2.21}$$

其中

$$\widehat{\eta}_t(z) = \begin{cases} 1 & \text{if there is a particle at } z \text{ at time } t, \\ -1 & \text{if there is no particle at } z \text{ at time } t. \end{cases}$$

我们还可以通过在整数点之间进行线性插值，将高度函数扩展为关于 $x \in \mathbb{R}$ 的连续函数。

由于已知全不对称简单排斥过程属于 Kardar-Parisi-Zhang（KPZ）普适类，我们预期高度函数的适当缩放为

$$\frac{h_t(x) - At}{Ct^{\frac{1}{3}}}, \text{ with } x = Bt^{2/3}. \tag{2.22}$$

这意味着全不对称简单排斥过程的高度平均值以速度 A 增长，其中 A 是一个常数。此外，高度相对于平均值的波动量级为 $t^{1/3}$ ，而中心极限定理中的缩放量级为 $t^{1/2}$ 。 x方向的标度指数为 $2/3$ ，是 h方向标度指数 $1/3$ 的两倍。这表明高度函数的路径呈现类似布朗运动的形态。众所周知，指数（$1/3$, $2/3$）具有普适性，能够刻画 KPZ普适类。在以往的研究中，常数 A、 B 和 C 仅针对各个模型分别得到。

本文指出，在施加特定假设时，常数 A、 B 和 C 可以写成与模型无关的形式。首先，令

$$\gamma(w)=\frac{\mathcal{M}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)}{\mathcal{M}\left(\frac{1}{2}\right)} \tag{2.23}$$

其中， $\mathcal{M}(w)$ 在 (2.10) 中定义。接下来，我们提出以下假设。

假设 2.11。

$$\gamma^{(3)}(0)-3\gamma^{(2)}(0)\gamma^{'}(0)+2\{\gamma^{'}(0)\}^3-2\gamma^{'}(0)>0 \tag{2.24}$$

其中， $\gamma^{(n)}(w)$ 是 $\gamma(w)$ 的第 n 阶导数。

注 2.12。若干著名的全不对称简单排斥过程模型满足上述假设。例如，很容易看出，连续时间 TASEP、采用顺序更新的离散时间伯努利 TASEP，以及采用并行更新的离散时间几何 TASEP 均满足假设 2.11。不过，我们也可以给出一个不满足假设 2.11 的概率生成函数 $\mathcal{M}(w)$ (2.10)。例如，考虑更新规则如下所示的情形:

$$\mathbb{P}(X_{t+1}(1)=a_1+b|X_t(1)=a_1)=\begin{cases}p & \text{for } b=4,\\ 1-p & \text{for } b=0,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

其中 $a_1\in\mathbb{Z}$ 和 $0<p<1$。于是

$$\mathcal{M}(w)=1-p+pw^4$$

and

$$\gamma^{(3)}(0)-3\gamma^{(2)}(0)\gamma^{'}(0)+2\{\gamma^{'}(0)\}^3-2\gamma^{'}(0)=\frac{p(1-p)(23p-16)}{16\left\{\mathcal{M}(\frac{1}{2})\right\}^3}.$$

因此，当 $0<p<\frac{16}{23}$，

$$\gamma^{(3)}(0)-3\gamma^{(2)}(0)\gamma^{'}(0)+2\{\gamma^{'}(0)\}^3-2\gamma^{'}(0)<0.$$

由上述内容可知，假设 2.11 是必要的。

假设假设 2.11 成立，常数 A、 B 和 C 如下给出:

$$A=\frac{2\{\gamma^{'}(0)+\{\gamma^{'}(0)\}^2-\gamma^{(2)}(0)\}}{\gamma^{(3)}(0)-3\gamma^{(2)}(0)\gamma'(0)+2\{\gamma'(0)\}^3-2\gamma'(0)},B=2,C=1. \tag{2.25}$$

根据高度函数的性质，我们定义缩放高度，它等价于（2.25）。这称为“1:2:3标度”，定义见 [16]。

定义2.13。对于 $\mathbf{t}\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ 和 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}$，我们定义缩放高度函数

$$\widehat{h}^{\varepsilon}(\mathbf{t},\mathbf{x})=\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left[h_t(x)+\frac{2\{\gamma^{(2)}(0)-\{\gamma^{'}(0)\}^2-\gamma^{'}(0)\}}{\gamma^{(3)}(0)-3\gamma^{(2)}(0)\gamma'(0)+2\{\gamma'(0)\}^3-2\gamma'(0)}\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\mathbf{t}\right], \tag{2.26}$$

其中 t 和 x 按如下方式缩放

$$t=\frac{2}{\gamma^{(3)}(0)-3\gamma^{(2)}(0)\gamma'(0)+2\{\gamma'(0)\}^3-2\gamma'(0)}\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\mathbf{t},\ x=2\varepsilon^{-1}\mathbf{x}. \tag{2.27}$$

注 2.14. (2.26) 和 (2.27) 表明， $\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$t 的系数可以用最右侧粒子跳跃后所遵循的分布的概率生成函数来表示。这意味着， $\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$t 的系数由不受排斥规则影响的粒子的概率生成函数描述。

在 (2.26) 和 (2.27) 中，我们关注 $\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$t 的系数的分母和分子。由此，我们可以给出获得高度函数分布的标度极限所需的性质。

定理 2.15。我们有

$$0 \leq \gamma^{(2)}(0) - \{\gamma^{'}(0)\}^2 - \gamma^{'}(0) < \infty, \tag{2.28}$$

$$|\gamma^{(3)}(0) - 3\gamma^{(2)}(0)\gamma^{'}(0) + 2\{\gamma^{'}(0)\}^3 - 2\gamma^{'}(0)| < \infty \tag{2.29}$$

其中 $\gamma(w)$ 在 (2.23) 中引入。

该证明见第 4 节。

我们的目标是计算联合分布函数的 $\varepsilon \to 0$ 极限

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}_{\widehat{h}_0^\varepsilon}(\widehat{h}^\varepsilon(\mathbf{t}, \mathbf{x}_1) \leq \mathbf{a}_1, \ldots, \widehat{h}^\varepsilon(\mathbf{t}, \mathbf{x}_m) \leq \mathbf{a}_m) \tag{2.30}$$

对于 $\mathbf{x}_1 < \mathbf{x}_2 < \cdots < \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}$ 以及 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}$，其中 $\mathbb{P}_{\widehat{h}_0^\varepsilon}(\cdot)$ 是概率测度， $h^\varepsilon(0, x)$ 是初始高度剖面。这里我们引入计算 (2.30) 所需的假设。

假设 2.16. 对于 $\theta \in [-\pi, -\frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \pi]$,

$$E \log|2 - e^{i\theta}| + D \log|\gamma(1 - e^{i\theta})| < 0 \tag{2.31}$$

and

$$F \log|2 - e^{i\theta}| - D \log|\gamma(e^{i\theta} - 1)| < 0 \tag{2.32}$$

其中

$$D = \frac{2}{\gamma^{(3)}(0) - 3\gamma^{(2)}(0)\gamma'(0) + 2\{\gamma'(0)\}^3 - 2\gamma'(0)}, \tag{2.33}$$

$$E = \frac{\gamma^{(2)}(0) - \{\gamma^{'}(0)\}^2 - \gamma^{'}(0)}{\gamma^{(3)}(0) - 3\gamma^{(2)}(0)\gamma'(0) + 2\{\gamma'(0)\}^3 - 2\gamma'(0)}, \tag{2.34}$$

$$F = \frac{\{\gamma^{'}(0)\}^2 - \gamma^{(2)}(0) - \gamma^{'}(0)}{\gamma^{(3)}(0) - 3\gamma^{(2)}(0)\gamma'(0) + 2\{\gamma'(0)\}^3 - 2\gamma'(0)} \tag{2.35}$$

且 $\gamma(w)$ 在 (2.23) 中引入。

注意，考虑众所周知的全不对称简单排斥过程，假设 2.16 与假设 2.11 类似地成立。我们将证明，极限 (2.30) 收敛到刻画 [16] 中定义的 KPZ 固定点的联合分布函数。现在我们引入 KPZ 固定点。首先定义 UC 和连续函数空间。

定义 2.17.（UC 和连续函数空间 [16]）。

我们将 UC 定义为上半连续函数 h 的空间： $\mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$，其中 $h(x) \leq C_1 + C_2|x|$，对某些 $C_1, C_2 < \infty$ 成立，且 $h(x) > -\infty$，对某些 x 成立；并将连续函数空间定义为 $\mathrm{LC} = \{\widehat{g} : -\widehat{g} \in \mathrm{UC}\}$。

接下来给出艾里函数的积分表示。

定义 2.18. 艾里函数的积分表示为

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\langle} dw\ e^{\frac{1}{3}w^3 - zw},$$

where $\langle$ 是正向定向的轮廓，沿着经过 0、从 $e^{-\frac{i\pi}{3}}\infty$ 到 $e^{\frac{i\pi}{3}}\infty$ 的直线 .

现在我们可以陈述 KPZ 固定点了（详情请见 [16]）。

定义 2.19（KPZ 固定点 [16]）。KPZ 固定点是定义在 UC 上的唯一马尔可夫过程（$h(\mathbf{t},\cdot))_{\mathbf{t}>0}$，其转移概率为

$$\mathbb{P}_{\widehat{h}_0}(\widehat{h}(\mathbf{t},\mathbf{x}_1)\le \mathbf{a}_1,\dots,\widehat{h}(\mathbf{t},\mathbf{x}_m)\le \mathbf{a}_m)=\det\left(\mathbf{I}-\chi_{\mathbf{a}}\mathbf{K}_{\mathbf{t},\mathrm{ext}}^{\mathrm{hypo}(\widehat{h}_0)}\chi_{\mathbf{a}}\right)_{L^2(\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_m\}\times\mathbb{R})} \tag{2.36}$$

其中，在左端，$\mathbf{x}_1<\mathbf{x}_2<\cdots<\mathbf{x}_m\in\mathbb{R}$ 以及 $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m\in\mathbb{R}$, $h_0\in$ UC，而 $\mathbb{P}_{\widehat{h}_0}$ 表示以 为初始数据的过程的测度。在右端，我们将核表示为

$$\begin{aligned}
&\mathbf{K}_{\mathbf{t},\mathrm{ext}}^{\mathrm{hypo}(\widehat{h}_0)}(\mathbf{x}_i,v;\mathbf{x}_j,u)\\
&=-\frac{1}{\sqrt{4\pi(x_j-x_i)}}\exp\left(-\frac{(u-v)^2}{4(x_j-x_i)}\right)\mathbf{1}_{\mathbf{x}_i<\mathbf{x}_j}+\left(\mathbf{S}_{\mathbf{t},-\mathbf{x}_i}^{\mathrm{hypo}(\widehat{h}_0^-)}\right)^*\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}_j}(v,u), &(2.37)\\
&\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}}(v,u)=\mathbf{t}^{-\frac{1}{3}}e^{\frac{2\mathbf{x}^3}{3\mathbf{t}^2}-\frac{(v-u)\mathbf{x}}{\mathbf{t}}}\mathrm{Ai}(-\mathbf{t}^{-\frac{1}{3}}(v-u)+\mathbf{t}^{-\frac{4}{3}}\mathbf{x}^2), &(2.38)\\
&\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}}^{\mathrm{hypo}(\widehat{h})}(v,u)=\mathbb{E}_{B(0)=v}[\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}'}(B(\boldsymbol{\tau}'),u)\mathbf{1}_{\boldsymbol{\tau}'<\infty}], &(2.39)
\end{aligned}$$

其中，$(A)^*$ 表示积分算子 A 的伴随算子，Ai(z) 在定义 2.18 中定义，且 $B(x)$ 是扩散系数为 2 的布朗运动，$\boldsymbol{\tau}'$ 是定义 2.3 中引入的 hypo(h) 的击中时刻。

备注 2.20。利用定义 2.18 中给出的艾里函数的积分表示，我们发现 $\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}}(v,u)$（2.38）可表示为

$$\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}}(v,u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\langle}dw\ e^{\frac{\mathbf{t}}{3}w^3+\mathbf{x}w^2+(v-u)w}. \tag{2.40}$$

现在我们假设极限

$$\widehat{h}_0=\lim_{\varepsilon\to 0}\widehat{h}^{\varepsilon}(0,\cdot) \tag{2.41}$$

存在。由 (2.19)、(2.41) 和 (2.43)，这个假设可改写为

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}[(X_0^{\varepsilon})^{-1}(\mathbf{x})+2\varepsilon^{-1}\mathbf{x}-2]\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}-\widehat{h}_0(-\mathbf{x}), \tag{2.42}$$

其中 $(X_0^{\varepsilon})^{-1}(\mathbf{x}):=2X_0^{-1}(-2\varepsilon^{-1}\mathbf{x}-1)$，(2.42) 左侧被解释为关于 $x\in\mathbb{R}$ 的线性插值，从而成为连续函数；我们选择的参考系为

$$X_0^{-1}(-1)=1, \tag{2.43}$$

也就是说，标号为 1 的粒子初始时是 $\mathbb{Z}_{<0}$ 中最右侧的粒子。

现在，我们考虑满足假设 2.1 的全不对称简单排斥过程。在上述假设 (2.41) 以及假设 2.11、2.16 下，通过利用核的逐点收敛性（见命题 2.24），我们得到极限联合分布函数 (2.30) 的以下结果。

定理 2.21。（单侧固定点公式）。令 $h_0\in$ UC 满足 $h_0(\mathbf{x})=-\infty$，其中 $\mathbf{x}>0$。那么，对于 $\mathbf{x}_1<\mathbf{x}_2<\cdots<\mathbf{x}_m\in\mathbb{R}$ 以及 $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m\in\mathbb{R}$，我们得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{P}_{\widehat{h}_0^{\varepsilon}}(\widehat{h}^{\varepsilon}(\mathbf{t},\mathbf{x}_1)\le\mathbf{a}_1,\dots,\widehat{h}^{\varepsilon}(\mathbf{t},\mathbf{x}_m)\le\mathbf{a}_m)=\det\left(\mathbf{I}-\chi_{\mathbf{a}}\mathbf{K}_{\mathbf{t},\mathrm{ext}}^{\mathrm{hypo}(\widehat{h}_0)}\chi_{\mathbf{a}}\right)_{L^2(\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_m\}\times\mathbb{R})}, \tag{2.44}$$

其中，右端等价于 (2.36)。

该证明见第 5 节。

注 2.22. 在以往的研究中，单侧固定点公式仅针对每个模型分别得出。然而，上述结果表明，对于所有满足假设 2.1、2.11、2.16 的全非对称简单排斥过程，都得到了单侧固定点公式。

注 2.23. 通过采用 [16], 中定理 3.8 的类似论证，我们可以去掉定理 2.21 中的假设 $\curvearrowright h_0(\mathbf{x}) = -\infty$，其中 $\mathbf{x} > 0$ （更多细节见 [16] 的第 3.4 小节）。

为证明定理 2.21，我们使用粒子位置 $X_t(j)$ 与高度函数 $h_t(z)$ (2.19) 之间的以下关系。令 $s_1, \ldots, s_k, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{R}$ 和 $z_1, \ldots, z_k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$。于是，根据定义 2.10，我们得到

$$\mathbb{P}(h_t(z_1) \le s_1, \ldots, h_t(z_k) \le s_k) = \mathbb{P}(X_t(n_1) \ge m_1, \ldots, X_t(n_k) \ge m_k). \tag{2.45}$$

由上述关系可知

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}_{\widehat{h}_0^\varepsilon}(\widehat{h}^\varepsilon(\mathbf{t}, \mathbf{x}_1) \le \mathbf{a}_1, \ldots, \widehat{h}^\varepsilon(\mathbf{t}, \mathbf{x}_m) \le \mathbf{a}_m) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}_{X_0^\varepsilon}\left(X_t^\varepsilon(n_1) > a_1, \ldots, X_t^\varepsilon(n_m) > a_m\right), \tag{2.46}$$

其中 $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ 和 $t,\ n_i, a_i$ 的缩放方式如下

$$t = D\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\mathbf{t},\ n_i = E\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\mathbf{t} - \varepsilon^{-1}\mathbf{x}_i - \frac{1}{2}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\mathbf{a}_i + 1,\ a_i = 2\varepsilon^{-1}\mathbf{x}_i - 2, \tag{2.47}$$

其中 D 和 E 分别在 (2.33) 和 (2.34) 中引入。

因此，在缩放 (2.47) 下，取定理 2.8 中表达式 (2.13) 的 $\varepsilon \to 0$ 极限即可得到我们的目标 (2.46)。解决这一问题的关键步骤是以下关于逐点收敛性的命题。

命题 2.24。（逐点收敛）。考虑满足假设 2.1 的全不对称简单排斥过程。假设假设 2.11、2.16 和 (2.42) 成立。在缩放 (2.47) 下（省略 i 下标），若设 $z = G\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\mathbf{t} + 2\varepsilon^{-1}\mathbf{x} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}(u + \mathbf{a}) - 2$ and $y' = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}v$，则当 $\mathbf{t} > 0$ as $\varepsilon \to 0$ 时，

$$\mathbf{S}^\varepsilon_{-t,x}(v,u) := \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{S}_{-t,-n}(y',z) \to \mathbf{S}_{-\mathbf{t},\mathbf{x}}(v,u) \tag{2.48}$$

$$\bar{\mathbf{S}}^\varepsilon_{-t,-x}(v,u) := \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\bar{\mathfrak{S}}_{-t,n}(y',z) \to \mathbf{S}_{-\mathbf{t},-\mathbf{x}}(v,u) \tag{2.49}$$

$$\bar{\mathbf{S}}^{\varepsilon,\mathrm{epi}(-h_0^{\varepsilon,-})}_{-t,-x}(v,u) := \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\bar{\mathfrak{S}}^{\mathrm{epi}(X_0)}_{-t,n}(y',z) \to \mathbf{S}^{\mathrm{epi}(-\widehat{h}_0^-)}_{-\mathbf{t},-\mathbf{x}}(v,u) \tag{2.50}$$

逐点，其中

$$G = \frac{2[\{\gamma'(0)\}^2 - \gamma^{(2)}(0)]}{\gamma^{(3)}(0) - 3\gamma^{(2)}(0)\gamma'(0) + 2\{\gamma'(0)\}^3 - 2\gamma'(0)},$$

$\curvearrowright h_0^-(x) = h_0(-x)$ 对于 $x \ge 0$, $\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}}(v,u)$ 由 (2.38) 给出；对于 $\widehat{g} \in$ 连续函数空间,

$$\mathbf{S}^{\mathrm{epi}(\widehat{g})}_{\mathbf{t},\mathbf{x}}(v,u) = \mathbb{E}_{B(0)=v}[\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}'}(B(\boldsymbol{\tau}'),u)\mathbf{1}_{\boldsymbol{\tau}'<\infty}]$$

且 $\mathfrak{S}_{-t,\ -n}(z_1,z_2)$、$\bar{\mathfrak{S}}_{-t,\ n}(z_1,z_2)$ 和 $\bar{\mathfrak{S}}^{\mathrm{epi}(X_0)}{}_{-t,\ n}(z_1,z_2)$ 分别定义于 (2.16)、(2.17) 和 (2.18) 中。

证明见第 5 节。

3 全不对称简单排斥过程的分布表示

3.1 全不对称简单排斥过程转移概率的表示：命题 2.6 和定理 2.7 的证明

在本小节中，我们将证明，转移概率可以表示为最右侧粒子跳跃后所遵循分布的概率生成函数。首先，我们考察粒子数为一时转移概率的性质。

L理 3.1. 假设假设 2.1 成立。当 $N=1$ 时，对于满足 $x\geq y$ 的 $x,y\in\mathbb{Z}$ ，

$$\mathbb{P}(X_t(1)=x|X_0(1)=y)=F_0(x-y,t) \tag{3.1}$$

P上方。容易看出，将 $N=1$、$x_1=x$ 和 $y_1=y$ 代入 (2.2)，即可得到 (3.1)。 □

接下来，我们证明当 $N=1$ 时的空间齐次性。

引理 3.2（空间齐次性）。假设假设 2.1 成立。当 $N=1$ 时，对于满足 $x\geq y$ 的 x、$y\in\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(X_t(1)=x|X_0(1)=y)=\mathbb{P}(X_t(1)=x-y|X_0(1)=0).$$

证明。由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_t(1)=x|X_0(1)=y)&=F_0(x-y,t)\\&=\mathbb{P}(X_t(1)=x-y|X_0(1)=0).\end{aligned}$$

□

注意，当 $N=1$ 时，排斥规则不起作用，因此全不对称简单排斥过程就是单向跳跃随机游走或复合泊松过程。为方便起见，我们作如下定义：

$$\mathbb{P}(X_t(1)=x):=\mathbb{P}(X_t(1)=x|X_0(1)=0). \tag{3.2}$$

现在，我们证明以下结论成立。

引理 3.3. 考虑满足假设 2.1 的全不对称简单排斥过程。则以下两条等价：

(i) $\mathcal{M}(t,w)=\sum_{x=0}^{\infty}w^x\mathbb{P}(X_t(1)=x)$，其中收敛半径为 $R\geq 1$.

(ii) $F_0(x,t)=\mathbb{P}(X_t(1)=x)$。

证明。首先证明 $(i)\Rightarrow(ii)$。由 (2.1),

$$F_0(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_0}dw\frac{1}{w^{x+1}}\mathcal{M}(t,w) \tag{3.3}$$

其中 Γ_0 是任意一个逆时针定向且包含 $w=0$ 的简单闭环。定义 $r\in\mathbb{R}$ 使得 $0<r<R$，并作变量代换 $w=re^{iv}$,

$$\begin{aligned}(3.3)&=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}dv\frac{1}{(re^{iv})^{x+1}}ire^{iv}\mathcal{M}(t,re^{iv})\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dvr^{-x}e^{-ixv}\mathcal{M}(t,re^{iv}).\end{aligned} \tag{3.4}$$

由于

$$\mathcal{M}(t,re^{iv})=\sum_{k=0}^{\infty}r^ke^{ikv}\mathbb{P}(X_t(1)=k)$$

是绝对收敛的,

$$\begin{aligned}(3.4)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dvr^{-x}e^{-ixv}\sum_{k=0}^{\infty}r^ke^{ikv}\mathbb{P}(X_t(1)=k)\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}r^{k-x}\mathbb{P}(X_t(1)=k)\int_0^{2\pi}e^{i(k-x)v}dv\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}r^{k-x}\mathbb{P}(X_t(1)=k)2\pi\delta_{k,x}\\&=\mathbb{P}(X_t(1)=x)\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中 $\delta_{k,x}$ 是克罗内克δ函数，也就是说，

$$\delta_{k,x} := \begin{cases} 1 & \text{for } k = x, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.6}$$

接下来我们证明（ii）$\Rightarrow$ (*i*)。对于 $s \in \mathbb{C}$，令

$$\phi(s) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \mathbb{P}(X_t(1) = x)$$

其中收敛半径为 $R \geq 1$。由条件（ii），

$$\phi(s) = \sum_{x=0}^{\infty} F_0(x,t) s^x \tag{3.7}$$

成立。将（3.3）代入（3.7），得到

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \sum_{x=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_0} dw \frac{1}{w^{x+1}} \mathcal{M}(t,w) \right\} s^x \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_0} dw \frac{\mathcal{M}(t,w)}{w} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{s}{w} \right)^x \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_0} dw \frac{\mathcal{M}(t,w)}{w} \frac{1}{1 - \frac{s}{w}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_0} dw \frac{\mathcal{M}(t,w)}{w - s} \\ &= \mathcal{M}(t,s) \end{aligned} \tag{3.8}$$

在积分域满足 $|s| < |w|$的条件下。因此，我们得到

$$\mathcal{M}(t,w) = \sum_{x=0}^{\infty} w^x \mathbb{P}(X_t(1) = x)$$

其中收敛半径为 $R \geq 1$。 □

注3.4。由（2.2）、引理 3.1和引理 3.2可知，（ii） $F_0(x,t) = \mathbb{P}(X_t(1) = x)$成立。因此，由引理 3.3可知，构成全不对称简单排斥过程转移概率的函数 $\mathcal{M}(t,w)$可表示为概率生成函数。

现在，我们证明命题 2.6。

命题 2.6 的证明。由引理 3.1、引理 3.2 和引理 3.3，

$$\mathcal{M}(t,w) = \sum_{x=0}^{\infty} w^x \mathbb{P}(X_t(1) = x).$$

现在，我们先展示 $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的情形。由 (2.7) 得，

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(t,w) &= \mathbb{E}\left[w^{X_t(1)} \right] \\ &= \mathbb{E}\left[w^{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_t} \right] \\ &= \left(\mathbb{E}\left[w^{Y_1} \right] \right)^t \\ &= \mathcal{M}(w)^t. \end{aligned} \tag{3.9}$$

接下来，我们证明 $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 的情形。由 (2.8) 和 (2.11) 得,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(t,w) &= \mathbb{E}[w^{S_{N_t}}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[w^{S_{N_t}} | N_t = n] \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[w^{S_n}] \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[w^{Z_1+Z_2+\cdots+Z_n}] \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{E}[w^{Z_1}])^n \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \{G_{Z_1}(w)\}^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= e^{\lambda t \{G_{Z_1}(w) - 1\}}.
\end{aligned}$$

另一方面，由 (2.10),

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(w) &= G_X(G_{Z_1}(w)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \{G_{Z_1}(w)\}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{\lambda \{G_{Z_1}(w) - 1\}}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

因此我们得到

$$\mathcal{M}(t,w) = \mathcal{M}(w)^t.$$

□

接下来，我们证明定理 2.7。

定理 2.7 的证明。由 (2.1) 和命题 2.6,

$$\begin{aligned}
F_n(x,t) &= \frac{(-1)^n}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{0,1}} dw \frac{(1-w)^{-n}}{w^{x-n+1}} \mathcal{M}(t,w) \\
&= \frac{(-1)^n}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{0,1}} dw \frac{(1-w)^{-n}}{w^{x-n+1}} \mathcal{M}(w)^t \\
&= \overline{F}_n(x,t).
\end{aligned}$$

由上可知，全不对称简单排斥过程的转移概率为

$$\mathbb{P}(X_t = \vec{x} | X_0 = \vec{y}) = \det[\overline{F}_{i-j}(x_{N+1-i} - y_{N+1-j}, t)]_{1 \leq i,j \leq N}.$$

□

3.2 定理 2.8 的证明

在本小节中，我们证明定理 2.8。

容易验证， $\mathcal{M}(w)$ 满足 [16] 中的假设 1.1。因此，根据 [16] 中的定理 1.2 和定理 2.7，我们得到粒子位置的分布:

$$\mathbb{P}(X_t(n_j) > a_j, j = 1, \ldots, M) = \det(I - \bar{\chi}_a K_t \bar{\chi}_a)_{\ell^2(\{n_1,\ldots,n_M\} \times \mathbb{Z})}$$

其中

$$K_t(n_i,x;n_j,y)=-Q^{n_j-n_i}(x,y)\mathbf{1}_{n_i<n_j}+(\mathscr{S}_{-t,-n_i})^*\overline{\mathscr{S}}^{\mathrm{epi}(X_0)}_{-t,n_j}(x,y) \tag{3.11}$$

and

$$\mathscr{S}_{-t,-n}(z_1,z_2)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_0}dw\frac{(1-w)^n}{2^{z_2-z_1}w^{n+1+z_2-z_1}}\mathcal{M}(w)^t,$$

$$\overline{\mathscr{S}}_{-t,n}(z_1,z_2)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_0}dw\frac{(1-w)^{z_2-z_1+n-1}}{2^{z_1-z_2}w^n}\mathcal{M}(1-w)^{-t},$$

$$\overline{\mathscr{S}}^{\mathrm{epi}(X_0)}_{-t,n}(z_1,z_2)=\mathbb{E}_{RW_0=z_1}\left[\overline{\mathscr{S}}_{-t,n-\tau}(RW_\tau,z_2)\mathbf{1}_{\tau<n}\right].$$

由 (2.13) 和 (2.14)，只需验证

$$(\mathfrak{S}_{-t,-n_i})^*\bar{\mathfrak{S}}^{\mathrm{epi}(X_0)}_{-t,n_j}=(\mathscr{S}_{-t,-n_i})^*\overline{\mathscr{S}}^{\mathrm{epi}(X_0)}_{-t,n_j}$$

即可证明定理 2.8。因为

$$\mathfrak{S}_{-t,-n}(z_1,z_2)=\mathcal{M}\left(\frac{1}{2}\right)^{-t}\mathscr{S}_{-t,-n}(z_1,z_2)$$

and

$$\overline{\mathfrak{S}}_{-t,n}(z_1,z_2)=\mathcal{M}\left(\frac{1}{2}\right)^{t}\overline{\mathscr{S}}_{-t,n}(z_1,z_2),$$

我们得到

$$(\mathfrak{S}_{-t,-n_i})^*\bar{\mathfrak{S}}^{\mathrm{epi}(X_0)}_{-t,n_j}=(\mathscr{S}_{-t,-n_i})^*\overline{\mathscr{S}}^{\mathrm{epi}(X_0)}_{-t,n_j}.$$

证明至此完成。

4 KPZ 标度系数的性质：定理 2.15 的证明

本节证明定理 2.15。首先，我们证明 $t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的情形。注意，根据柯西-阿达马定理，$\mathcal{M}(w)$ 和 $\mathcal{M}^{(n)}(w)$ 的收敛半径相同，其中 $\mathcal{M}^{(n)}(w)$ 是 $\mathcal{M}(w)$ 的 n 阶导数。由于 $\mathcal{M}(w)$ 对 $|w|\leq 1$ 绝对收敛，$\mathcal{M}^{(n)}(w)$ 对 $|w|\leq 1$ 绝对收敛。因此我们得到

$$|\gamma^{(2)}(0)-\{\gamma^{'}(0)\}^2-\gamma^{'}(0)|<\infty$$

and

$$|\gamma^{(3)}(0)-3\gamma^{(2)}(0)\gamma^{'}(0)+2\{\gamma^{'}(0)\}^3-2\gamma^{'}(0)|<\infty.$$

现在，我们指出

$$\gamma^{(n)}(0)=(-1)^n\frac{\mathbb{E}[Y_1(Y_1-1)\dots(Y_1-n+1)(\frac{1}{2})^{Y_1}]}{\mathcal{M}(\frac{1}{2})}.$$

利用柯西–施瓦茨不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\gamma^{(2)}(0)-\{\gamma^{'}(0)\}^2-\gamma^{'}(0)&=\frac{\mathbb{E}[Y_1(Y_1-1)(\frac{1}{2})^{Y_1}]}{\mathcal{M}(\frac{1}{2})}-\left\{-\frac{\mathbb{E}[Y_1(\frac{1}{2})^{Y_1}]}{\mathcal{M}(\frac{1}{2})}\right\}^2+\frac{\mathbb{E}[Y_1(\frac{1}{2})^{Y_1}]}{\mathcal{M}(\frac{1}{2})}\\&=\frac{\mathbb{E}[Y_1^2(\frac{1}{2})^{Y_1}]\mathbb{E}[(\frac{1}{2})^{Y_1}]-\{\mathbb{E}[Y_1(\frac{1}{2})^{Y_1}]\}^2}{\{\mathcal{M}(\frac{1}{2})\}^2}\geq 0.\end{aligned}$$

接下来，我们证明 $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 的情形。回顾

$$\mathcal{M}(w) = e^{\lambda\{G_{Z_1}(w)-1\}}$$

由 (3.10) 得。注意，根据柯西–哈达玛定理， $G_{Z_1}(w)$ 和 $G_{Z_1}^{(n)}(w)$ 的收敛半径相同，其中 $G_{Z_1}^{(n)}(w)$ 是 $G_{Z_1}(w)$ 的 n 阶导数。由于当 $|w| \leq 1$ 时， $G_{Z_1}(w)$ 绝对收敛；当 $|w| \leq 1$ 时， $G_{Z_1}^{(n)}(w)$ 绝对收敛。因此，对于 $|1-w| \leq 2$， $\mathcal{M}(\frac{1}{2}(1-w))$ 的三阶及以下导数为

$$\frac{d}{dw}\left[\mathcal{M}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right] = \lambda\left\{\frac{d}{dw}\left[G_{Z_1}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right]\right\} e^{\lambda\{G_{Z_1}(\frac{1}{2}(1-w))-1\}}, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dw^2}\left[\mathcal{M}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right] &= \lambda\left\{\frac{d^2}{dw^2}\left[G_{Z_1}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right]\right\} e^{\lambda\{G_{Z_1}(\frac{1}{2}(1-w))-1\}} \\ &\quad + \lambda^2\left\{\frac{d}{dw}\left[G_{Z_1}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right]\right\}^2 e^{\lambda\{G_{Z_1}(\frac{1}{2}(1-w))-1\}},\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dw^3}\left[\mathcal{M}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right] &= \lambda\left\{\frac{d^3}{dw^3}\left[G_{Z_1}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right]\right\} e^{\lambda\{G_{Z_1}(\frac{1}{2}(1-w))-1\}} \\ &\quad + 3\lambda^2\left\{\frac{d^2}{dw^2}\left[G_{Z_1}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right]\right\}\left\{\frac{d}{dw}\left[G_{Z_1}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right]\right\} e^{\lambda\{G_{Z_1}(\frac{1}{2}(1-w))-1\}} \\ &\quad + \lambda^3\left\{\frac{d}{dw}\left[G_{Z_1}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right]\right\}^3 e^{\lambda\{G_{Z_1}(\frac{1}{2}(1-w))-1\}}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

由 (2.23)、(4.1)、(4.2) 和 (4.3)，可得

$$\gamma'(0) = \lambda\left\{\frac{d}{dw}\left[G_{Z_1}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right]\Big|_{w=0}\right\}, \tag{4.4}$$

$$\gamma^{(2)}(0) = \lambda\left\{\frac{d^2}{dw^2}\left[G_{Z_1}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right]\Big|_{w=0}\right\} + \lambda^2\left\{\frac{d}{dw}\left[G_{Z_1}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right]\Big|_{w=0}\right\}^2 \tag{4.5}$$

and

$$\begin{aligned}\gamma^{(3)}(0) &= \lambda\left\{\frac{d^3}{dw^3}\left[G_{Z_1}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right]\Big|_{w=0}\right\} \\ &\quad + 3\lambda^2\left\{\frac{d^2}{dw^2}\left[G_{Z_1}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right]\Big|_{w=0}\right\}\left\{\frac{d}{dw}\left[G_{Z_1}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right]\Big|_{w=0}\right\} \\ &\quad + \lambda^3\left\{\frac{d}{dw}\left[G_{Z_1}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right]\Big|_{w=0}\right\}^3.\end{aligned}$$

由于 $\frac{d^n}{dw^n}\left[G_{Z_1}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right]\big|_{w=0}$ 绝对收敛，我们得到

$$|\gamma^{(2)}(0) - \{\gamma'(0)\}^2 - \gamma'(0)| < \infty$$

and

$$|\gamma^{(3)}(0) - 3\gamma^{(2)}(0)\gamma'(0) + 2\{\gamma'(0)\}^3 - 2\gamma'(0)| < \infty.$$

因此，由 (4.4) 和 (4.5) 可得

$$\begin{aligned}\gamma^{(2)}(0)-\{\gamma^{'}(0)\}^2-\gamma^{'}(0)&=\lambda\left\{\frac{d^2}{dw^2}\left[G_{Z_1}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right]\Big|_{w=0}-\frac{d}{dw}\left[G_{Z_1}\left(\frac{1}{2}(1-w)\right)\right]\Big|_{w=0}\right\}\\&=\lambda\left\{\mathbb{E}\left[Z_1(Z_1-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{Z_1}\right]+\mathbb{E}\left[Z_1\left(\frac{1}{2}\right)^{Z_1}\right]\right\}\\&=\lambda\,\mathbb{E}\left[Z_1^2\left(\frac{1}{2}\right)^{Z_1}\right]\geq 0.\end{aligned}$$

证明至此完成。

5 渐近分析

本节中，在假设 2.11 和假设 2.16 下，我们对满足假设 2.1 的全不对称简单排斥过程取 KPZ 标度极限，并证明命题 2.24。之后，我们利用命题 2.24 证明定理 2.21。

5.1 命题 2.24 的证明

首先，我们证明 (2.48)。通过变量替换 $w=\frac{1}{2}(1-\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)$，得到

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^{\varepsilon}_{-t,x}(v,u)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\varepsilon}dy\frac{\{\frac{1}{2}(1+\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)\}^n}{2^{z-y'+1}\{\frac{1}{2}(1-\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)\}^{n+1+z-y'}}\left\{\frac{\mathcal{M}(\frac{1}{2}(1-\varepsilon^{\frac{1}{2}}y))}{\mathcal{M}\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}^t\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\varepsilon}dy\frac{(1+\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)^n}{(1-\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)^{n+1+z-y'}}\gamma\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}y\right)^t\end{aligned}\tag{5.1}$$

其中 C_ε 是以 $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ 为圆心、半径为 $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ 的圆。为使用鞍点法，我们将 (5.1) 改写为

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\varepsilon}e^{f(\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)+\varepsilon^{-1}F_2(\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}F_1(\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)+F_0(\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)}dy,\tag{5.2}$$

其中，函数 $f(x)$ 和 $F_i(x)$ $i=0$、1、2 定义为

$$f(x)=E\widehat{t}\log(1+x)-F\widehat{t}\log(1-x)+D\widehat{t}\log\gamma(x),\tag{5.3}$$

$$F_2(x)=-\mathbf{x}\log(1-x^2),\ F_1(x)=(v-u-\frac{1}{2}\mathbf{a})\log(1-x)-\frac{1}{2}\mathbf{a}\log(1+x),\ F_0(x):=\log(1+x)\tag{5.4}$$

其中 $\widehat{t}:=\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$t、 D、 E 和 F 分别在 (2.33)、(2.34) 和 (2.35) 中引入。计算 $f(x)$ 的导数直至三阶，我们得到

$$f^{'}(x)=E\widehat{t}\frac{1}{1+x}+F\widehat{t}\frac{1}{1-x}+D\widehat{t}\frac{\gamma^{'}(x)}{\gamma(x)},$$

$$f^{(2)}(x)=-E\widehat{t}\frac{1}{(1+x)^2}+F\widehat{t}\frac{1}{(1-x)^2}+D\widehat{t}\frac{\gamma^{(2)}(x)\gamma(x)-\{\gamma^{'}(x)\}^2}{\{\gamma(x)\}^2},$$

$$f^{(3)}(x)=2E\widehat{t}\frac{1}{(1+x)^3}+2F\widehat{t}\frac{1}{(1-x)^3}+D\widehat{t}\frac{\gamma^{(3)}(x)\{\gamma(x)\}^2-3\gamma^{(2)}(x)\gamma^{'}(x)\gamma(x)+2\{\gamma^{'}(x)\}^3}{\{\gamma(x)\}^3}.$$

因此，我们发现 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有双鞍点，

$$f(0)=0,\ f'(0)=0,\ f^{(2)}(0)=0 \text{ and } f^{(3)}(0)=2\widehat{t}.$$

因此，当 ε 较小时，我们得到

$$f(\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)\approx\frac{\mathbf{t}}{3}y^3. \tag{5.5}$$

对于 $F_i(x)$ $i=0$，1，2，我们容易看出

$$\varepsilon^{-1}F_2(\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)\approx\mathbf{x}y^2,\ \varepsilon^{-\frac{1}{2}}F_1(\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)\approx(u-v)y,\ F_0(\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)\approx 0. \tag{5.6}$$

$^{\pi}$现在，我们检查积分路径的收敛性。我们将 C_ε 分成两部分 $\langle_\varepsilon\cup C_\varepsilon^{\overline{3}}$，其中 $\langle_\varepsilon$ 是艾里轮廓 $\langle$ 中位于以 $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ 为中心、半径为 $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ 的球内的部分，而 $C_\varepsilon^{\frac{\pi}{3}}$ 是 C_ε 中位于 $\langle$ 右侧的部分。注意，$\mathrm{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}}(u,v)=\mathrm{S}_{-\mathbf{t},\mathbf{x}}(v,u)$，其中 $\mathrm{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}}(u,v)$ 由 (2.38) 引入。由 (5.5) 和 (5.6)，我们得到

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\langle_\varepsilon}e^{f(\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)+\varepsilon^{-1}F_2(\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}F_1(\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)+F_0(\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)}dy=\mathbf{S}_{-\mathbf{t},\mathbf{x}}(v,u)$$

$^{\pi}$接下来，我们证明来自 $C_\varepsilon^{\overline{3}}$ 的部分在 $\varepsilon\to 0$ 时趋于零。为此，注意到 (5.1) 中沿 C_ε 的积分（参数化为 $y=\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(1-e^{i\theta})$）的指数项实部为

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\mathbf{t}\left[\left(E+\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1}{2}})\right)\log|2-e^{i\theta}|+D\log|\gamma(1-e^{i\theta})|\right].$$

$^{\pi}$注意，$y\in C_\varepsilon^{\overline{3}}$对应于 $\frac{\pi}{3}<|\theta|\le\pi$。由假设 2.16 的 (2.31) 可知，

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\mathbf{t}\left[E\log|2-e^{i\theta}|+D\log|\gamma(1-e^{i\theta})|\right]<0.$$

因此，当 ε 足够小时，此处的指数小于某个 $\kappa>0$ 所对应的 $-\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\kappa\mathbf{t}$。因此，积分的 $_{\pi}C_\epsilon^{\overline{3}}$ 部分趋于零，从而完成了 (2.48) 的证明。

接下来，我们证明 (2.49)。通过变量替换 $w=\frac{1}{2}(1-\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)$，

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}}^{\varepsilon}_{-t,-x}(v,u)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\varepsilon}dy\frac{\{\frac{1}{2}(1+\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)\}^{z-y'+n-1}}{2^{y'-z+1}\{\frac{1}{2}(1-\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)\}^n}\left\{\frac{\mathcal{M}(\frac{1}{2}(1+\varepsilon^{\frac{1}{2}}y))}{\mathcal{M}\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}^{-t}\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\varepsilon}dy\frac{(1+\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)^{z-y'+n-1}}{(1-\varepsilon^{\frac{1}{2}}y)^n}\overline{\gamma}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}y\right)^{-t}\end{aligned}$$

其中，C_ε 是以 $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ 为中心、半径为 $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ 的圆，且

$$\overline{\gamma}(w)=\frac{\mathcal{M}(\frac{1}{2}(1+w))}{\mathcal{M}\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

我们指出，

$$\overline{\gamma}(0)=\gamma(0),\ \overline{\gamma}'(0)=-\gamma'(0),\ \overline{\gamma}^{(2)}(0)=\gamma^{(2)}(0),\ \overline{\gamma}^{(3)}(0)=-\gamma^{(3)}(0).$$

利用鞍点法和假设 2.16 的 (2.32)，我们也可以类似于证明 (2.48) 的方式证明 (2.49)。

对于 (2.50)，我们可以仿照 [16] 中引理 3.5 的 (3.17) 来证明。因此，这里只给出证明概要。我们令缩放随机游走 $\mathrm{B}^{\varepsilon}(x)=\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\mathrm{RW}_{\varepsilon^{-1}x}+2\varepsilon^{-1}x-1)$，其中 $x\in\varepsilon\mathbb{Z}_{\ge 0}$，并在中间作线性插值；再令 $\boldsymbol{\tau}^{\varepsilon}$ 为 B^{ε} 击中 $\mathrm{epi}(-h^{\varepsilon}(0,\cdot)^{-})$ 的击中时刻，其中 $h^{\varepsilon}(\mathrm{t},\mathrm{x})$ 由 (2.26) 引入，且 $h^{\varepsilon}(\mathrm{t},\mathrm{x})^{-}=h^{\varepsilon}(\mathrm{t},-\mathrm{x})$。根据 Donsker 不变性原理，[4], $\mathrm{B}^{\varepsilon}(x)$ 在分布意义下局部一致收敛到布朗运动 $\mathrm{B}(x)$，其扩散系数为 2。此外，结合 (2.42) 和 [16], 中的命题 3.2，我们可知击中时刻 $\boldsymbol{\tau}^{\varepsilon}$ 收敛到 $\boldsymbol{\tau}$。（更多细节见 [16] 中的引理 3.5。）由此得到 (2.50)。

5.2 定理 2.21 的证明

本小节中，我们通过命题 2.24 来证明定理 2.21。该证明与 [16] 中的命题 3.6 几乎相同。首先，我们按照命题 2.24 中的方法对核作变量代换。然后，对于 $z_i = G\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\mathbf{t} + 2\varepsilon^{-1}\mathbf{x}_i + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}(u_i + \mathbf{a}_i) - 2$，我们计算极限核

$$\mathbf{K}_{\lim}(\mathbf{x}_i, u_i; \mathbf{x}_j, u_j) := \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} (\bar{\chi}_{2\varepsilon^{-1}\mathbf{x}-2} K_t \bar{\chi}_{2\varepsilon^{-1}\mathbf{x}-2})(z_i, z_j)$$

其中

$$G = \frac{2[\{\gamma^{'}(0)\}^2 - \gamma^{(2)}(0)]}{\gamma^{(3)}(0) - 3\gamma^{(2)}(0)\gamma^{'}(0) + 2\{\gamma^{'}(0)\}^3 - 2\gamma^{'}(0)}$$

并且 $\gamma(w)$ 在 (2.23) 中定义。我们指出，变量代换将 $\bar{\chi}_{2\varepsilon^{-1}\mathbf{x}-2}(z)$ 变为 $\bar{\chi}_{-\mathbf{a}}(u)$。当且仅当 $\mathbf{x}_j < \mathbf{x}_i$ 时，对于较小的 ε，我们有 $n_i < n_j$；在这种情况下，我们得到

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} Q^{n_j - n_i}(z_i, z_j) = e^{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)\partial^2}(u_i, u_j). \tag{5.7}$$

对于 (2.14) 中的第二项，我们有

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-\frac{1}{2}} (\mathfrak{S}_{-t,-n_i})^* \bar{\mathfrak{S}}^{\mathrm{epi}(\mathrm{X}_0)}_{-t,n_j}(z_i, z_j) &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu (\mathfrak{S}_{-t,-n_i})^*(z_i, \nu) \bar{\mathfrak{S}}^{\mathrm{epi}(\mathrm{X}_0)}_{-t,n_j}(\nu, z_j) \\
&= \varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu (\mathfrak{S}_{-t,-n_i})^*(z_i, \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\nu) \bar{\mathfrak{S}}^{\mathrm{epi}(\mathrm{X}_0)}_{-t,n_j}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\nu, z_j) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\nu (\mathbf{S}^{\varepsilon}_{-t,x_i})^*(u_i, \nu) \bar{\mathbf{S}}^{\varepsilon, \mathrm{epi}(-\mathrm{h}_0^{\varepsilon,-})}_{-t,-x_j}(\nu, u_j) \\
&= (\mathbf{S}^{\varepsilon}_{-t,x_i})^* \bar{\mathbf{S}}^{\varepsilon, \mathrm{epi}(-\mathrm{h}_0^{\varepsilon,-})}_{-t,-x_j}(u_i, u_j).
\end{aligned}$$

由命题 2.24，得到

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} (\mathfrak{S}_{-t,-n_i})^* \bar{\mathfrak{S}}^{\mathrm{epi}(\mathrm{X}_0)}_{-t,n_j}(z_i, z_j) = (\mathbf{S}_{-\mathbf{t},\mathbf{x}_i})^* \mathbf{S}^{\mathrm{epi}(-\widehat{\mathrm{h}}_0^-)}_{-\mathbf{t},-\mathbf{x}_j}(u_i, u_j). \tag{5.8}$$

由 (5.7) 和 (5.8)，得到

$$\mathbf{K}_{\lim}(\mathbf{x}_i, u_i; \mathbf{x}_j, u_j) = -e^{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)\partial^2}(u_i, u_j)\mathbf{1}_{\mathbf{x}_i > \mathbf{x}_j} + (\mathbf{S}_{-\mathbf{t},\mathbf{x}_i})^* \mathbf{S}^{\mathrm{epi}(-\widehat{\mathrm{h}}_0^-)}_{-\mathbf{t},-\mathbf{x}_j}(u_i, u_j)$$

被投影算子 $\bar{\chi}_{-\mathbf{a}}$ 包围。采用投影算子 $\chi_{\mathbf{a}}$ 更为简洁，因此我们作变量替换 $u_i \mapsto -u_i$，并将核的 Fredholm 行列式替换为其伴随算子的行列式，得到 $\det\left(\mathrm{I} - \chi_{\mathbf{a}} \mathrm{K}_{\mathrm{hypo}(\widehat{h}_0)\,\mathbf{t},\ \mathrm{ext}}\,\chi_{\mathbf{a}}\right)_{\sim}$，其中 $\mathrm{K}^{\mathrm{hypo}(h_0)}_{\mathbf{t},\ \mathrm{ext}}(u_i, u_j) = \mathrm{K}_{\lim}(\mathrm{x}_j, -u_j; \mathrm{x}_i, -u_i)$。

利用 $(\mathrm{S}_{\mathbf{t},\ \mathbf{x}})^* \mathrm{S}_{\mathbf{t},\ -\mathbf{x}} = I$ 和 $\mathrm{S}^{\mathrm{epi}(\widehat{h})}_{-\mathbf{t},\ \mathbf{x}}(v, u) = \mathrm{S}^{\mathrm{hypo}(-\widehat{h})}_{\mathbf{t},\ \mathbf{x}}(-v, -u)$（有关这些方程的更多信息，见 [16]），我们得到

$$\mathbf{K}^{\mathrm{hypo}(\widehat{h}_0)}_{\mathbf{t},\mathrm{ext}}(\mathbf{x}_i, \cdot; \mathbf{x}_j, \cdot) = -e^{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)\partial^2}\mathbf{1}_{\mathbf{x}_i < \mathbf{x}_j} + \left(\mathbf{S}^{\mathrm{hypo}(\widehat{h}_0^-)}_{\mathbf{t},-\mathbf{x}_i}\right)^* \mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}_j}.$$

A 连续时间 TASEP（跳跃率为 β）的 KPZ 固定点

在本节中，我们运用我们的方法证明，在跳跃率为 $\beta \in (0, \infty)$ 的连续时间 TASEP 中，可以得到 KPZ 固定点。由 (2.3) 和命题 2.6 可得

$$\mathcal{M}(w) = e^{\beta(w-1)}.$$

此外，由 (2.23) 可得

$$\gamma(w) = e^{-\frac{\beta}{2}w}.$$

若 $\gamma(w)$ 满足假设 2.11 和假设 2.16，我们可以利用定理 2.8 和命题 2.24 证明定理 2.21。因此，我们证明 $\gamma(w)$ 满足假设 2.11 和假设 2.16。

首先，我们证明 $\gamma(w)$ 满足假设 2.11。计算 $\gamma(w)$ 的三阶及以下导数，得到

$$\gamma^{'}(w) = -\frac{\beta}{2}e^{-\frac{\beta}{2}w},\ \gamma^{(2)}(w) = \frac{\beta^2}{4}e^{-\frac{\beta}{2}w},\ \gamma^{(3)}(w) = -\frac{\beta^3}{8}e^{-\frac{\beta}{2}w}. \tag{A.1}$$

将 $w = 0$ 代入 (A.1) 得

$$\gamma^{'}(0) = -\frac{\beta}{2},\ \gamma^{(2)}(0) = \frac{\beta^2}{4},\ \gamma^{(3)}(0) = -\frac{\beta^3}{8}. \tag{A.2}$$

因此，我们得到

$$\gamma^{(3)}(0) - 3\gamma^{(2)}(0)\gamma^{'}(0) + 2\{\gamma^{'}(0)\}^3 - 2\gamma^{'}(0) = \beta > 0.$$

Next 我们证明 $\gamma(w)$ 满足假设 2.16。由 (2.33)、(2.34)、(2.35) 和 (A.2)，可得

$$D = \frac{2}{\beta},\ E = \frac{1}{2},\ F = \frac{1}{2}. \tag{A.3}$$

N注意，对于 $x \in (-1, \infty)$，当 $1 + x < x$ 时，log$(1 + x)$。对于 $\theta \in [-\pi, -\frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \pi]$，由 (A.3)，我们得到 in

$$E \log|2 - e^{i\theta}| + D \log|\gamma(1 - e^{i\theta})| < \frac{1}{4}(4 - 4\cos\theta) + \cos\theta - 1 = 0$$

and

$$F \log|2 - e^{i\theta}| - D \log|\gamma(e^{i\theta} - 1)| < \frac{1}{4}(4 - 4\cos\theta) + \cos\theta - 1 = 0.$$

证明至此完成。

参考文献

[1] Y. Arai, 《离散时间全非对称简单排斥过程的 KPZ 固定点》, J. Phys. A, 53, 415202, （2020年）。

[2] J. Baik, E. M. Rains, 《递增子序列的代数方面》, Duke Math. J., 109, 1-65, （2001）。

[3] J. Baik, E. M. Rains, 《对合的单调子序列的渐近分析》, Duke Math. J., 109, 205-281, （2001）。

[4] P. Billingsley, 《概率测度的收敛性》, Wiley 概率与统计丛书, 纽约: Wiley, （1999）。

[5] E. Bisi, Y. Liao, A. Saenz, N. Zygouras, 《具有非均匀速率的全不对称简单排斥过程与 KPZ 固定点的不相交路径构造》, arXiv:2208.13580, （2022年）。

[6]A. Borodin, P. L. Ferrari, 《类空路径上增长模型的大时间渐近 I: 推挤全非对称简单排斥过程》, Electron. J. Probab., 13, 1380-1418, (2008).[7] A. Borodin, P. L. Ferrari, 《$2+1$ 维随机曲面的各向异性生长》, Comm. Math. Phys., 325, 603-684, (2014).

[8] A. Borodin, P. L.Ferrari, M. Pr¨ahofer, 《周期初始构型下离散全不对称简单排斥过程的涨落与 Airy1 过程》, 《国际数学研究论文集》, 2007, 1-47, (2007).[9] A. Borodin, P. L.Ferrari, M. Pr¨ahofer, T. Sasamoto, 《周期初始构型下全不对称简单排斥过程的涨落性质》, 《统计物理学杂志》, 129, 1055-1080, (2007).[10] A. Borodin, P. L. Ferrari, T. Sasamoto, 《类空路径上增长模型的大时间渐近 II：多核苷酸生长与并行全不对称简单排斥过程》, Comm. Math. Phys., 283, 417-449, (2008).[11] I. Corwin, A. Hammond, M. Hegde, K. Matetski, 《KPZ 固定点违反 Johansson 关于最大化点唯一性的猜想的特殊时刻》, arXiv:2101.04205, (2021).[12] A. B. Dieker and J. Warren, 《直线上若干相互作用粒子的行列式转移核》, Ann. Inst. Henri Poincar´e Probab. Stat., 44, 1162-1172, (2008).[13] K. Johansson, 《形状涨落与随机矩阵》, Comm. Math. Phys., 209, 437-476, (2000).[14] K. Johansson, 《离散多核苷酸生长与行列式点过程》, Comm. Math. Phys., 242, 277-329, (2003).[15] M.Kardar, G. Parisi, Y-C. Zhang, 《生长界面的动态标度》, 《物理评论快报》, 56, 889-892,(1986).[16] K. Matetski, J. Quastel, D. Remenik, 《KPZ 固定点》, 《数学学报》, 227, 115-203, (2021).[17] K. Matetski, D. Remenik, 《全不对称简单排斥过程及其推广：精确求解方法》, Probab. Theory Related Fields, (2022). 即将出版。[18] M. Nica, J. Quastel, D. Remenik, 《单侧反射布朗运动与 KPZ 固定点》, 《数学论坛 Sigma》, 8, 1-16, (2020).[19] M. Pr¨ahofer, H. Spohn, 《 $1+1$ 维增长过程与随机矩阵的普适分布》, 《物理评论快报》84, 4882-4885, (2000).[20] M. Pr¨ahofer, H. Spohn, 《PNG 液滴与 Airy 过程的尺度不变性》, 《统计物理学杂志》, 108, 1071-1106, (2002).[21] J. Quastel, K. Matetski, 《从全不对称简单排斥过程到 KPZ 固定点》, arXiv:1710.02635, (2017).[22] J. Quastel, S. Sarkar, 《排斥过程与 KPZ 方程收敛至 KPZ 固定点》, 《美国数学会杂志》, 36, 251-289, (2023).[23] A. R*á*kos, G.M. Sch¨utz, 《可积非对称碎裂过程的电流分布与随机矩阵系综》, 《统计物理学杂志》, 118, 511-530, (2005).[24] S. Sarkar, B. Vir*á*g, 《任意初始条件下 KPZ 固定点的布朗绝对连续性》, 《概率年刊》, 49, 1718-1737, (2021).[25] T. Sasamoto, 《平坦基底上一维 KPZ 表面的空间相关性》, J. Phys. A, 38, 549-556, (2005).[26] G. M. Sch¨utz, 《非对称排斥过程主方程的精确解》, 《统计物理学杂志》, 88, 427-445, (1997).[27] F. Spitzer, 《马尔可夫过程的相互作用》, 《数学进展》, 5, 246-290, (1970).

[28] C. A. Tracy、H. Widom, 《间距分布与艾里核》, Comm. Math. Phys.，159，151-174, （1994）。[29] C. A. Tracy、H. Widom, 《论正交与辛矩阵系综》, Comm. Math. Phys.，177, 727-754, （1996）。[30] J. Warren、P. Windridge, 《Gelfand-Tsetlin 模式动力学的一些例子》, Electron. J. Probab.，14，1745-1769, （2009）。