arXiv:2301.03482v1 [math.ST] 9 Jan 2023

# 超球面均匀性检验的一般最大投影方法

Jaroslav Borodavka 和 Bruno Ebner

2023年1月10日

**摘要**

我们提出了一种基于最大投影、用于$d$维单位超球面 $\mathcal{S}^{d-1}$上均匀性检验的新方法。该方法为雷利和宾厄姆的经典均匀性检验提供了统一的视角，并与多元偏度和峰度的度量相联系。我们利用巴拿赫空间值随机过程的极限定理，推导出原假设下的极限分布；同时，根据球谐函数理论的相关结果，提出模拟极限过程的策略。我们考察该方法在相邻备择和固定备择下的表现，并证明该检验程序对若干类备择假设具有一致性。我们首次为球面均匀性检验推导出局部 Bahadur 效率结论。我们通过一项广泛的竞争性蒙特卡洛模拟研究，评估这些程序的理论发现和经验功效；最后，将新检验应用于一组关于月球大型陨石坑中点的数据集。

## 1 引言

圆、球面和超球面上的均匀性检验 $\mathcal{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$，$d \in \mathbb{N}$，$d \geq 2$，赋予欧几里得范数 $\|x\| = \sqrt{x^\top x}$，是方向统计学中经典且至今仍具研究价值的领域。此处及下文中，$^\top$ 表示矩阵或向量的转置。我们仅列举少数几个应用单位超球面$\mathcal{S}^{d-1}$ 表面数据的领域：气象学、地质学、古地磁学、政治学、文本挖掘和野火

*MSC 2010* 主题分类。主要分类 62G10 次要分类 62H15关键词和短语均匀性检验、最大投影、方向数据、巴拿赫空间中的随机过程、相邻备择、Bahadur 效率、蒙特卡洛模拟

方向；有关此类数据集的示例，请参见 [30] 及其中的相关研究。对 $\mathcal{S}^{d-1}$ 进行严肃统计推断的第一步，是检验单位向量样本是否来自均匀分布，因为这种分布表明方向数据中不存在结构。具体而言，我们用独立同分布（iid.）的列随机向量 $U$、$U_1, \ldots\ldots$、$U_n$ 对观测数据建模，这些向量取值于 $\mathcal{S}^{d-1}$。我们关注的检验问题是，假设是否

$$H_0 : \mathbb{P}^U = \mathcal{U}\left(\mathcal{S}^{d-1}\right)$$

在一般备择假设下成立。这里，$\mathbb{P}^U$ 表示$U$ 的分布，$\mathcal{U}(\cdot)$表示均匀分布。文献已对这一问题进行了广泛研究：瑞利在 [38] 中提出了首个基于算术平均数范数的均匀性检验。随后，出现了基于经典拟合优度度量的圆形检验，包括 [27] 中的柯尔莫哥洛夫–斯米尔诺夫型检验和 [43] 中的 Cram´er–von Mises 型检验。之后，宾厄姆在[9] 中提出了一种基于样本散布矩阵的均匀性检验，而 Gin´e（见 [21], ）则引入了所谓的索博列夫检验。关于这些检验的更多细节，参见 [25, 33] ；有关一些新进展，参见 [24]。近来，[10] 提出了一种基于随机投影的柯尔莫哥洛夫–斯米尔诺夫型检验，[16]提出了一种利用最近邻球体积的幂的程序，而 [19]则研究了 [10] 的 Cram´er–von Mises 型对应方法。有关这一方法的详细信息以及轴向数据均匀性检验的最新进展，参见 [29], 第 6 章。综述文章 [20] 的作者概述了超球面上的均匀性检验。 [14] 中针对$d = 3$ 以及 [17]中针对更高维度的比较性蒙特卡洛模拟研究均有介绍。

$\mathcal{U}\left(\mathcal{S}^{d-1}\right)$ 的一个众所周知的特征性性质是其在绕原点旋转时保持不变。因此，任何关于均匀性的检验（例如）$T_n$ 都应具有这一结构，从而在旋转下保持不变，即

$$T_n(AU_1, \ldots, AU_n) = T_n(U_1, \ldots, U_n) \quad \text{holds for all } A \in \mathrm{SO}(d), \tag{1.1}$$

其中，$\mathrm{SO}(d)$ 是$d$维旋转群，也就是说，对于$d \times d$矩阵 $A \in \mathrm{SO}(d)$，有 $AA^\top = A^\top A = I_d$ 且 $\det(A) = 1$。我们用$I_d$表示单位矩阵，而 $\det(\cdot)$ 是矩阵行列式的记法。下文将性质 (1.1) 称为检验统计量$T_n$的旋转不变性。

我们提出一类基于最大投影幂的新型统计量$T_{n,\beta}$ 本着这一思路，假设$U \sim \mathcal{U}\left(\mathcal{S}^{d-1}\right)$，并由 [7], ，利用均匀分布的旋转不变性，我们有

并通过对称性论证可知，对每个$b \in \mathcal{S}^{d-1}$和 $\beta \in \mathbb{N}$

$$\psi_d(\beta) = E(b^\top U)^\beta = \begin{cases} \dfrac{\Gamma((\beta+1)/2)\,\Gamma(d/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma((\beta+d)/2)}, & \text{if } \beta \text{ is even}, \\ 0, & \text{if } \beta \text{ is odd}, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 表示伽马函数。因此， $\psi_d(\beta)$ 与 $b$ 的选择无关；球面上的均匀分布具有旋转不变性，这一性质也可由此推出。接下来，我们定义统计量族

$$T_{n,\beta} = T_{n,\beta}(U_1, \ldots, U_n) = n \max_{b \in \mathcal{S}^{d-1}} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (b^\top U_j)^\beta - \psi_d(\beta) \right)^2, \quad \beta \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

显然，由于最大值泛函具有旋转不变性，对于每个 $\beta$， $T_{n,\beta}$ 都具有旋转不变性。

有趣的是，$T_{n,\beta}$ 与一些著名的经典检验密切相关，例如雷利检验、宾厄姆检验，以及 Malkovich 和 Afifi 提出的多元偏度和峰度度量。首先，注意到观测值的样本均值$U_n = {}^1{}_n \sum_{j=1}^n U_j$ 满足

$$T_{n,1} = n \max_{b \in \mathcal{S}^{d-1}} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} b^\top U_j \right)^2 = n\|\overline{U}_n\|^2 \max_{b \in \mathcal{S}^{d-1}} \left( b^\top \frac{\overline{U}_n}{\|\overline{U}_n\|} \right)^2 = n\|\overline{U}_n\|^2,$$

由于最大值中的标量积是两个单位向量夹角的余弦，而当 $b = U\| {}^n{}_{n\|U}$ 时，该余弦达到最大值。因此，我们得到一个与经典雷利检验等价的检验，参见 [38], ，其形式为$R_n = 2nd\|U_n\|^2$。

其次，对于样本散布矩阵 $S = {}^1{}_n \sum_{j=1}^n U_j U_j^\top$，我们有

$$T_{n,2} = n \max_{b \in \mathcal{S}^{d-1}} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (b^\top U_j)^2 - \frac{1}{d} \right)^2 = n \max_{b \in \mathcal{S}^{d-1}} \left( b^\top S\, b - \frac{1}{d} \right)^2 = n \max_{b \in \mathcal{S}^{d-1}} \left( b^\top \left( S - \frac{1}{d} I_d \right) b \right)^2,$$

注意，$T_{n,}2$ 是 $S - E(UU^\top)$ 在 $U \sim \mathcal{U}\left(\mathcal{S}^{d-1}\right)$下的平方谱范数，因此它将散布矩阵与 $U$ 的协方差矩阵进行比较，这与宾厄姆检验的思路相同，参见 [9]。注意，根据线性代数中的 Courant–Fischer–Weyl 极小极大原理，我们有

$$T_{n,2} = n(\max(|\lambda_{min}|, |\lambda_{max}|))^2,$$

其中， $\lambda_{min}$ 和 $\lambda_{max}$ 分别是对称矩阵 $S - {}^1{}_d I_d$ 的最小和最大特征值。

第三，我们有

$$T_{n,3} = n \max_{b \in \mathcal{S}^{d-1}} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (b^\top U_j)^3 \right)^2 \quad \text{and} \quad T_{n,4} = n \max_{b \in \mathcal{S}^{d-1}} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (b^\top U_j)^4 - \frac{3}{d(d+2)} \right)^2, \tag{1.4}$$

它们可以被解释为 Malkovich 和 Afifi 提出的多元样本偏度和样本峰度的类似量，定义见 [31]。对于 $T_{n,\ \beta}, \beta > 2$，目前尚无明确的闭式表达式或易于计算的公式。 [31] 的作者建议使用牛顿-拉夫森法，以获得 (1.3) 中最大值的良好近似。由于对于此类数值算法而言，选择合适的初始值并非易事，我们建议采用随机方法，见第 6 节；这一方法与 [10] 中提出的随机投影思想有关。

本文其余部分安排如下：第2节介绍零假设下的渐近理论。第3节推导$T_{n,\beta}$ 在相邻备择下的表现。第4节证明这些检验对于某些类别的固定备择具有一致性。随后，我们在第5节建立 Bahadur 意义下局部近似和精确渐近相对效率的结论。第 6 节通过蒙特卡罗模拟研究考察理论发现，第7节则给出一项真实数据应用，研究月球上大型陨石坑的中点。第8节总结全文并展望未来。最后，附录A、B和C介绍关于$d$维勒让德多项式和球谐函数的性质，以及一些技术引理与证明。

## 2 $T_{n,\beta}$的渐近零分布

令$C(\mathcal{S}^{d-1},\mathbb{R})$为连续函数$f:\ \mathcal{S}^{d-1}\to\mathbb{R}$构成的巴拿赫空间，并赋予范数$\|f\|_\infty=\sup_{b\in\mathcal{S}^{d-1}}|f(b)|$。我们引入随机过程

$$Z_{n,\beta}(b)=\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(b^\top U_j)^\beta-\psi_d(\beta)\right),\quad b\in\mathcal{S}^{d-1}.$$

对于下述定理中的协方差结构，我们记作

$$\eta_\beta(b,c)=\mathbb{E}(b^\top U)^\beta(c^\top U)^\beta=\sum_{j=0}^{\beta}\frac{(c_{j,d}(\beta))^2}{\nu_d(j)}P_j^d(b^\top c),\quad b,c\in\mathcal{S}^{d-1}. \tag{2.1}$$

这里，$P_j^d(\cdot)$ 是阶为 $j$ 的$d$维勒让德多项式，其定义见 (A.4)； $\nu_d(j)$ 是阶为 $j$ 的$d$维球谐函数空间的维数，见 (A.1)；而 $c_{j,d}(\beta)$ 是仅依赖于$j$、$d$ 和 $\beta$ 的常数，可与 (A.5) 和命题 A.8 对照。具体的计算方法见附录B。

**定理 2.1**。令 $U_1,\dots,U_n$ 为独立同分布，且 $U_1\sim\mathcal{U}\left(\mathcal{S}^{d-1}\right)$。对于固定的 $\beta\in\mathbb{N}$，存在一个中心

高斯过程 $Z_\beta(b)$，$b \in \mathcal{S}^{d-1}$，其具有连续样本路径和协方差核

$$\rho_\beta(b,c) = \eta_\beta(b,c) - \psi_d^2(\beta), \quad b,c \in \mathcal{S}^{d-1}. \tag{2.2}$$

将 $Z_\beta(\cdot)$ 视为 $C(\mathcal{S}^{d-1},\mathbb{R})$中的随机元素，我们有

$$Z_{n,\beta}(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z_\beta(\cdot).$$

**注 2.2.** 对于第 1 节中的特殊情形以及某些更高次幂 $\beta$，我们有

$$\begin{aligned}
\rho_1(b,c) &= \frac{1}{d}(b^\top c),\\
\rho_2(b,c) &= \frac{1}{d(d+2)}\left(2(b^\top c)^2+1\right) - \frac{1}{d^2},\\
\rho_3(b,c) &= \frac{1}{d(d+2)(d+4)}\left(6(b^\top c)^3 + 9(b^\top c)\right),\\
\rho_4(b,c) &= \left(24(b^\top c)^4 + 72(b^\top c)^2 + 9\right)\prod_{j=0}^{3}(d+2j)^{-1} - \frac{9}{d^2(d+2)^2},\\
\rho_5(b,c) &= \left(120(b^\top c)^5 + 600(b^\top c)^3 + 225(b^\top c)\right)\prod_{j=0}^{4}(d+2j)^{-1},\\
\rho_6(b,c) &= \left(720(b^\top c)^6 + 5400(b^\top c)^4 + 4050(b^\top c)^2 + 225\right)\prod_{j=0}^{5}(d+2j)^{-1} - \frac{225}{d^2(d+2)^2(d+4)^2},
\end{aligned}$$

从而得到定理 2.1 中协方差核的显式公式。

请注意，协方差核 $\rho_\beta(b,c)$ 仅取决于标量积 $b^\top c$，因此可以写成函数（记作）$\rho_\beta(b,c) = Q(b^\top c)$，其中 $Q \in C([-1,1],\mathbb{R})$ 是一个 $\beta$ 次多项式。这种特殊结构的核称为球对称核；关于具有球对称协方差核的高斯过程在机器学习中的应用，参见 [15]。根据柯西–施瓦茨不等式和波波维丘不等式，由于投影是有界随机变量，因此对所有 $\beta \in$, $|\rho_\beta(b,c)| \le 1$ 均成立。

定义积分算子$K_\beta$，其对应的 $\beta \in \mathbb{N}$ 为

$$K_\beta f(x) = \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\int_{\mathcal{S}^{d-1}} \rho_\beta(\omega,x) f(\omega)\,\mathrm{d}\sigma(\omega), \quad x \in \mathcal{S}^{d-1},\ f \in L^2(\mathcal{S}^{d-1},\mathrm{d}\sigma), \tag{2.3}$$

其中，积分是关于 $\sigma$ 在 $\mathcal{S}^{d-1}$上的唯一球面勒贝格测度进行的。由于$\rho_\beta$ 在 $\mathbb{R}^d$的一个紧致子集上连续，算子$K_\beta$是从$L^2(\mathcal{S}^{d-1},\mathrm{d}\sigma)$到$L^2(\mathcal{S}^{d-1},\mathrm{d}\sigma)$的紧算子。得益于分区协方差结构，我们甚至可以证明$K_\beta$ 是一个有限秩算子，即其值域为有限维的算子。后者及其他性质将在下一个

命题中给出并证明。下文中，我们用 $\mathcal{H}_k(\mathcal{S}^{d-1})$表示{k?}阶$d$维球谐函数空间，定义见 [22]。

**命题 2.3**。 令 $\beta \in \mathbb{N}$和 $K_\beta$ 如(2.3)中所定义。

*i)* 对任意阶为 $k \in \mathbb{N}_0$的球谐函数 $\phi \in \mathcal{H}_k(\mathcal{S}^{d-1})$，有 $K_\beta \phi = \lambda_k \phi$，其中

$$\lambda_k = \begin{cases} \left(\dfrac{c_{k,d}(\beta)}{\nu_d(k)}\right)^2, & for\ 0 < k \le \beta, \\ 0, & for\ k = 0\ or\ k > \beta, \end{cases} \tag{2.4}$$

常数 $c_{k,d}(\beta) \in \mathbb{R}$仅依赖于 $k, d$ 和 $\beta$；参见命题 *A.8*，并且$\nu_d(k) =$ 维$(\mathcal{H}_k(\mathcal{S}^{d-1}))$。

*ii)* $K_\beta$ 是一个有限秩算子。

*iii)* $K_\beta$ 的谱由0 以及(2.4)中的特征值构成。

*iv)* $K_\beta$ *is positive, i.e., we have* $\left\langle K_\beta f, f \right\rangle_{L^2} \ge 0$ *for all* $f \in L^2(\mathcal{S}^{d-1}, d\sigma)$.

受 [8], 的启发，我们因此得到了适用于这些特殊情形的极限高斯过程的其他表示。

**命题 2.4**。 令 $\nu_d(k)$ 表示阶为 $k$ 的 $d$ 维球面调和函数空间的维数 $\in \mathbb{N}$，见 (A.1)。

*i)* 若 $\beta$ 为奇数，则极限高斯过程 $Z_\beta(b)$，其中 $b \in \mathcal{S}^{d-1}$，可表示为以下形式

$$Z_\beta(b) = \sqrt{|\mathcal{S}^{d-1}|} \sum_{\substack{k=1 \\ k\ odd}}^{\beta} \sqrt{\lambda_k} \sum_{j=1}^{\nu_d(k)} \phi_{k,j}(b) N_{k,j}, \quad b \in \mathcal{S}^{d-1}.$$

这里，$N_{k,j}$，$k = 1, 3, \ldots$ 且 $j = 1, 2, \ldots, \nu_d(k)$ 是一组相互独立的标准正态随机变量，$\lambda_k$ 是 (2.4) 中的特征值，而 $\varphi_{k,j}$ 是 $j = 1, 2, \ldots, \nu_d(k)$ 个线性无关的 $k$ 阶曲面调和函数，并且关于 $\sigma/|\mathcal{S}^{d-1}|$ 正交归一；参见命题 *2.3 ii)* 的证明。

*ii)* 若 $\beta$ 为偶数时，极限高斯过程 $Z_\beta(b)$，$b \in \mathcal{S}^{d-1}$，可表示为 $m$

$$Z_\beta(b) = \sqrt{|\mathcal{S}^{d-1}|} \sum_{\substack{k=1 \\ k\ even}}^{\beta} \sqrt{\lambda_k} \sum_{j=1}^{\nu_d(k)} \phi_{k,j}(b) N_{k,j}, \quad b \in \mathcal{S}^{d-1}.$$

这里，$N_{k,j}$，$k = 0, 2, 4, \ldots$ 以及 $j = 1, 2, \ldots, \nu_d(k)$是由相互独立的标准正态随机变量构成的数组，$\lambda_k$ 是式(2.4)中的特征值，而 $\varphi_{k,j}$ 是 $j = 1, 2, \ldots, \nu_d(k)$ 个 $k$ 次线性无关的球谐函数，它们关于 $\sigma/|\mathcal{S}^{d-1}|$是正交归一的；参见命题 *2.3* 的证明 *ii)*。

命题 2.4 展示了一种在球面上模拟具有多项式协方差核的高斯随机过程的简便方法。所需的基本要素有三项：正特征值（可显式计算）、一组独立标准正态变量，以及球谐函数的实现，更多详情见第 6 节。关于如何生成合适的球谐函数基，见 [3], 第 2.11 节，或 [13], 定理 1.1.9。Mathematica 中的程序包 HFT.m，见 [23], ，提供了一种直接计算任意维数$d$ 和任意阶$k$ 的球谐函数标准正交基的方法，该方法基于 [4]中的定理 5.25。注意，任意维度下直至 4 阶的正交系的显式形式见 [32], 表 1 和表 2。

**注 2.5.** • 情形 $\beta = 1$：我们有 $\nu_d(1) = d$和 $u \mapsto u_k \in \mathcal{H}_1(\mathcal{S}^{d-1})$ 对所有 $k = 1, \ldots, d$ 均成立，其中$u = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathcal{S}^{d-1}$。这些函数构成一个 $\mathcal{H}_1(\mathcal{S}^{d-1})$ 的正交系，见 [22],引理 3.2.3。对 $\sigma$ 进行归一化可得标准正交基函数

$$u \mapsto \sqrt{\frac{d}{|\mathcal{S}^{d-1}|}} u_k \in \mathcal{H}_1(\mathcal{S}^{d-1}), \quad k = 1, \ldots, d.$$

我们有一个正特征值 $\lambda_1 = 1/d^2$。由命题 2.4 可得

$$Z_1(u) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=1}^{d} u_j N_j, \quad u \in \mathcal{S}^{d-1}, \quad N_1, \ldots, N_d \overset{\text{uiv}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1).$$

此外，令 $N = (N_1, \ldots, N_d) \sim \mathcal{N}_d(0, I_d)$，由柯西–施瓦茨不等式可得

$$Z_1^2(u) = \frac{1}{d} \sum_{j,k=1}^{d} u_j u_k N_j N_k = \frac{1}{d}(u^\top N)^2 \le \frac{1}{d}\|N\|^2.$$

因此我们得到

$$d \max_{u \in \mathcal{S}^{d-1}} Z_1^2(u) = \|N\|^2 \sim \chi_d^2,$$

从而重新得到了雷利检验的极限结果。

• 情形 $\beta = 2$：由 (A.1) 可知 $\nu_d(2) = (d + 2)(d - 1)/2$。经过直接计算可得唯一的正特征值

$$\lambda_2 = \left(\frac{2}{d(d+2)}\right)^2.$$

设 $\phi_{2,}1,\ldots,\phi_{2,\nu_d}(2)$ 是 $\mathcal{H}_2(\mathcal{S}^{d-1})$ 的一组标准正交基，显式表示见 [32], 表1，并令 $\phi_2(u) = (\phi_{2,}1(u),\ldots,\phi_{2,\nu_d}(2)(u)), u \in \mathcal{S}^{d-1}$。由命题 A.4 和 A.6 可得

$$\|\phi_2(u)\|^2 = \sum_{i=1}^{\nu_d(2)} \phi_{2,i}(u)\phi_{2,i}(u) = \frac{\nu_d(2)}{|\mathcal{S}^{d-1}|} P_2^d(u^\top u) = \frac{\nu_d(2)}{|\mathcal{S}^{d-1}|}, \quad u \in \mathcal{S}^{d-1}.$$

因此，令 $N = (N_1,\ldots,N_{\nu_d}(2)) \sim \mathcal{N}_{\nu_d}(2)\ (0, I_{\nu_d}(2))$，再次利用柯西–施瓦茨不等式可得

$$Z_2^2(u) = \frac{4|\mathcal{S}^{d-1}|}{d^2(d+2)^2}\left(\sum_{j=1}^{d}\phi_{2,j}(u)N_j\right)^2 \le \frac{4\nu_d(2)}{d^2(d+2)^2}\|N\|^2 = \frac{2(d-1)}{d^2(d+2)}\|N\|^2.$$

由于 $\|N\|^2 \sim \chi^2_{\nu_d}(2)$，将 $2(d-1)\|N\|^2/(d^2(d+2))$ 的 95% 分位数与表2进行比较可知，该上界仅在$d = 2$时是一个较好的近似。

下面列出（2.4）中对应于较大 $\beta$值的非零特征值 $\lambda_k, k = 0,\ldots,\beta$。

- 情形 $\beta = 3$: $\lambda_1 = (3/(d(d+2)))^2$ 和 $\lambda_3 = (6/(d(d+2)(d+4)))^2$。
- 情形 $\beta = 4$: $\lambda_2 = (12/(d(d+2)(d+4)))^2$ 和 $\lambda_4 = (24/(d(d+2)(d+4)(d+6)))^2$。
- 情形 $\beta = 5$: $\lambda_1 = (15/(d(d+2)(d+4)))^2$、$\lambda_3 = (60/(d(d+2)(d+4)(d+6)))2$，以及 $\lambda_5 =(120/(d(d+2)(d+4)(d+6)(d+8)))^2$。
- 情形 $\beta = 6$: $\lambda_2 = (90/(d(d+2)(d+4)(d+6)))^2$、$\lambda_4 = (360/(d(d+2)(d+4)(d+6)(d+8)))2$，以及 $\lambda_6 = (720/(d(d+2)(d+4)(d+6)(d+8)(d+10)))^2$。

由于 $\mathcal{S}^{d-1}$ 是紧致的，直接应用连续映射定理和定理 2.1，即可证明以下定理 2.1 的推论。

**推论 2.6**。设 $U_1,\ldots,U_n$ 独立同分布，且 $U_1 \sim \mathcal{U}\left(\mathcal{S}^{d-1}\right)$。则有

$$T_{n,\beta} \xrightarrow{\mathcal{D}} \max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} Z_\beta^2(b),$$

其中 $Z_\beta(\cdot)$ 是定理 *2.1* 的极限高斯过程。

推论 2.6 中得到的极限随机变量并非只有理论意义，因为其分布以及渐近临界值都可以近似计算，见第 6 节。

## 3 相邻备择

本节中，我们考虑一个三角阵列$U_{n1}, \ldots, U_{nn}$，其中各行内的随机向量相互独立且同分布，取值于 $\mathcal{S}^{d-1}$，其密度函数为$f_n(x) = \mu(x)\left(1 + h(x)/\sqrt{n}\right), x \in \mathcal{S}^{d-1}$。其中，$\mu(\cdot)$ 表示相对于球面勒贝格测度 $\sigma$ 的均匀分布密度，且$h$ 是一个满足条件 $\int_{\mathcal{S}^{d-1}} h(x)\mu(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = 0$ 的有界可测函数。我们取足够大的$n$，以确保$f_n$非负。

首先，定义

$$\mathbb{P}^{(n)} = \bigotimes_{j=1}^{n}(\mu\ \sigma) \quad \text{and} \quad \mathbb{A}^{(n)} = \bigotimes_{j=1}^{n}(f_n\ \sigma)$$

$_n$在可测空间 $(\mathrm{X}_n, \mathrm{B}_n) = \bigotimes_{j=1}(\mathcal{S}^{d-1}, \mathcal{M})$ 上，其中 $\mathcal{M}$ 表示 $\mathcal{S}^{d-1}$ 的子集类，这些子集$_{j=1}$关于 $\sigma$可测。此外，用 $L_n = d\mathbb{A}^{(n)}\, d\mathbb{P}^{(n)}$ 表示似然比，并记

$$S_\beta : \mathcal{S}^{d-1} \times \mathcal{S}^{d-1} \to \mathbb{R}, \quad (a, b) \mapsto S_\beta(a, b) = (a^\top b)^\beta - \psi_d(\beta),$$

其中 $\psi_d(\cdot)$定义于 (1.2) 式。

**定理 3.1**。 在上述假设下，对于三角阵列 $U_{n1}, \ldots, U_{nn}$

$$Z_{n,\beta}(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z_\beta(\cdot) + S^*_\beta(\cdot) \quad \textit{under}\ \ \mathbb{A}^{(n)}$$

取值于 $C(\mathcal{S}^{d-1}, \mathbb{R})$，其中 $Z_\beta(\cdot)$ 是 $C(\mathcal{S}^{d-1}, \mathbb{R})$ 中的中心高斯过程，其协方差核为定理 *2.1* 中的 $\rho_\beta$。位移函数 $S^*_\beta(\cdot)$ 为

$$S^*_\beta(b) = \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\int_{\mathcal{S}^{d-1}} S_\beta(u, b)h(u)\, d\sigma(u), \quad b \in \mathcal{S}^{d-1}. \tag{3.1}$$

由定理 3.1 和连续映射定理可直接得到以下推论。

**推论 3.2**。在定理 *3.1* 的条件下，我们有

$$T_{n,\beta} \xrightarrow{\mathcal{D}} \max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}}\left(Z_\beta(b) + S^*_\beta(b)\right)^2 \quad \textit{under}\ \ \mathbb{A}^{(n)}.$$

**例 3.3.** 例如，我们考虑如下备择假设:

$$h(x) = h_{m,\theta}(x) = P^d_m(\theta^\top x), \quad x \in \mathcal{S}^{d-1},\ m \geq 1,$$

是次数为$m$的勒让德多项式，且 $\theta \in \mathcal{S}^{d-1}$ 为固定值。注意，$x \mapsto P_{dm}(\theta^\top x)$ 是一个次数为$m$ 的球谐函数，根据球谐函数的正交性（参见 [22],第3.2节），可得

$$\int_{\mathcal{S}^{d-1}} h(x)\mathrm{d}\sigma(x) = \int_{\mathcal{S}^{d-1}} P_m^d(\theta^\top x) P_0^d(\theta^\top x)\, \mathrm{d}\sigma(x) = 0,$$

由于$P_0^d(\theta^\top \cdot) = 1$ 是 0 阶球谐函数。如果$X$服从由密度$f_n$给出的分布，则对于任意正交$d \times d$矩阵$A$，满足$A\theta = \theta$，都有$AX$ 的分布与$X$的分布相同，因此，这些类型的备择假设关于 $\theta$ 具有旋转对称性。应用 Funk–Hecke定理 A.3 可得，对于$b \in \mathcal{S}^{d-1}$

$$\begin{aligned} S_\beta^*(b) &= \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\int_{\mathcal{S}^{d-1}} S_\beta(u,b)h(u)\,\mathrm{d}\sigma(u) \\ &= \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\int_{\mathcal{S}^{d-1}} \left((b^\top u)^\beta - \psi_d(\beta)\right) P_m^d(\theta^\top u)\,\mathrm{d}\sigma(u) \\ &= \lambda_d(\beta,m) P_m^d(\theta^\top b), \end{aligned}$$

其中

$$\lambda_d(\beta,m) = \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\int_{-1}^{1} P_m^d(t)\left(t^\beta - \psi_d(\beta)\right)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}\mathrm{d}t.$$

结合 (A.5) 和命题 A.5 可知

$$\lambda_d(\beta,m) = \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\left[\sum_{j=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta)\langle P_m^d, P_j^d\rangle - \psi_d(\beta)\langle P_m^d, P_0^d\rangle\right] = \frac{c_{m,d}(\beta)}{\nu_d(m)},$$

从而

$$S_\beta^*(b) = \frac{c_{m,d}(\beta)}{\nu_d(m)} P_m^d(\theta^\top b), \quad b \in \mathcal{S}^{d-1}. \tag{3.2}$$

注意，若 $\beta + \mathrm{m}$ 为奇数或 $\mathrm{m} > \beta$，则 $\lambda_d(\beta, \mathrm{m}) = 0$，因为此时 (A.5) 中的系数 $\mathrm{c}_{m,d}(\beta)$ 等于零。因此，在这些情况下，相邻备择下的渐近行为与原假设下相同。由此可得，对于这样的 $\beta$ 与 m 的组合，检验 $\mathrm{T}_{n,\beta}$ 无法检测这些备择假设。对于位移函数，我们有 $\mathrm{S}_\beta^*(\theta) = \mathrm{c}_{m,d}(\beta)/\nu_d(\mathrm{m})$，因此，只要能够证明系数 $\mathrm{c}_{m,d}(\beta)$ 非负，相邻备择下的极限分布就会发生非负位移。我们猜想这一点确实成立，因为命题之后的所有例子都满足这一性质。这也意味着，在该猜想成立的前提下，若 $\beta + \mathrm{m}$ 为偶数且 $\mathrm{m} \le \beta$，就会出现正向位移。因此，$\mathrm{T}_{n,\beta}$ 是一族能够检测相邻备择的检验程序。如第2节所述，著名的冯·米塞斯–费舍尔分布（定义见第 9.3 节）具有平均方向 $\theta$ 和集中参数$\kappa \ge 0$，属于一类可比的相邻备择。我们预计，在模拟研究中，$\mathrm{T}_{n,\beta}$ 会表现出相当的检验效能，见第 6 节。

# 4 一致性

在本节中，我们考虑球面随机向量 $U$、$U_1, \ldots$、$U_n$，其分布相对于球面勒贝格测度 $\sigma$具有连续密度$f$。我们沿用 [8] 中的推理，论证所考虑的检验对于一大类备择假设具有一致性。若对于 $\beta \in \mathbb{N}$，存在一个单位向量（例如）$b_0 \in \mathcal{S}^{d-1}$，使得

$$\zeta(b_0) = \left(\mathbb{E}(b_0^\top U)^\beta - \psi_d(\beta)\right)^2 > 0,$$

强大数定律表明

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_n(b_0) = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (b_0^\top U_j)^\beta - \psi_d(\beta) \right)^2 = \zeta(b_0) \quad \text{a.s.}$$

并且由于 $T_{n,\beta}/n \geq \zeta_n(b_0)$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} T_{n,\beta} = \infty \quad \text{a.s.}$$

这一推理表明，检验 $T_{n,\beta}$ 针对每一个此类备择假设都是一致的。不过，正如我们在上一节中已经看到的，$T_{n,\beta}$ 并非对任意备择假设类都一致。对于 $\beta$ 和 $m$ 的某些组合，勒让德多项式的阶 $T_{n,\beta}$ 在备择假设下与在原假设下呈现相同的渐近行为。以 $\beta = 1$ 为例，也可以看出 $T_{n,\beta}$ 的不一致性，这本质上涉及雷利检验。 [18] 的作者已经证明，在相当一般的背景下，对于具有位置参数、集中参数和定义角函数的旋转对称备择假设，雷利检验无法检测某些局部备择假设。这些局部备择假设的集中参数以多项式速度趋于零（从而得到原假设），且其角函数的奇数阶导数在零点处均为零。沃森分布就是此类备择假设的一个著名例子。

# 5 Bahadur 效率

本节将介绍统计量（$T_{n,\beta}$）$_{\beta\in\mathbb{N}}$的 Bahadur 渐近相对效率（ARE）的一些有趣见解。关于 Bahadur 效率概念的详尽全面介绍，请参阅 [5] 和 [35]。

我们考虑由非负数 $\kappa \geq 0$ 参数化的备择类，其定义密度$f(\cdot\,|\,\kappa)$相对于 $\sigma$ 而言仅在极限情形下才得到 $\mathcal{S}^{d-1}$ 上的均匀分布

$\kappa \to 0^+$ 属于$L^1(\mathcal{S}^{d-1}, \mathrm{d}\sigma)$，即

$$\lim_{\kappa\to 0^+} \|f(\cdot\,|\,\kappa) - f(\cdot\,|\,0)\|_{L^1} = \lim_{\kappa\to 0^+} \int_{\mathcal{S}^{d-1}} |f(x\,|\,\kappa) - f(x\,|\,0)|\, \mathrm{d}\sigma(x) = 0. \tag{5.1}$$

因此，检验问题可以改写为

$$H_0 : \kappa = 0 \text{ against } H_1 : \kappa > 0. \tag{5.2}$$

为了正确应用 Bahadur理论，我们考虑等价检验统计量族$\widetilde{T}_{n,\beta} = \sqrt{T_{n,\beta}}, \beta \in \mathbb{N}$。下文主要关注局部近似和局部精确 Bahadur渐近相对效率。对于两个统计量 $T^{(1)}{}_n$和 $T_n^{(2)}$，其定义如下。

局部近似 Bahadur渐近相对效率定义为

$$\Lambda^{\mathrm{a}}_{T^{(1)},T^{(2)}} = \lim_{\kappa\to 0^+} \frac{c^{\,a}_{T^{(1)}}(\kappa)}{c^{\,a}_{T^{(2)}}(\kappa)},$$

其中，$c^{\,a}_T$表示统计量 $T_n$的近似Bahadur斜率，参见 [35], 第10页。
局部精确 Bahadur渐近相对效率定义为

$$\Lambda^{\mathrm{ex}}_{T^{(1)},T^{(2)}} = \lim_{\kappa\to 0^+} \frac{c_{T^{(1)}}(\kappa)}{c_{T^{(2)}}(\kappa)},$$

其中，$c_T$ 表示统计量 $T_n$的精确Bahadur斜率，参见 [35], 第1.2节。在许多情况下，近似Bahadur斜率和精确Bahadur斜率在原假设附近（即$\widetilde{\ }$情形下）相同。下一命题也将展示这一点，适用于（$T_{n,\beta}$）$_{\beta\in\mathbb{N}}$。

**$\widetilde{\ }$命题5.1**。 设 $\beta \in \mathbb{N}$。$T_{n,\ \beta}$ 的近似*Bahadur*斜率为

$$c^{\,a}_{\widetilde{T}_\beta}(\kappa) = \frac{\max\limits_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_\kappa^2(b)}{\max\limits_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \rho_\beta(b,b)} = \frac{\max\limits_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_\kappa^2(b)}{\sum_{j=1}^{\beta} \lambda_j \nu_d(j)}, \quad \kappa > 0,$$

其中特征值 $\lambda_j$来自命题 *2.3*，$\nu_d(j)$如 (A.1) 所示，且

$$\gamma_\kappa(b) = \mathbb{E}_\kappa (b^\top U)^\beta - \psi_d(\beta), \quad b \in \mathcal{S}^{d-1},$$

$\widetilde{\ }$其中 $U \ \sim f\ (\cdot\,|\,\kappa)$，$\kappa > 0$。此外，$T_{n,\ \beta}$的精确*Bahadur*斜率在 $\kappa > 0$ 足够小时由下式给出

$$c_{\widetilde{T}_\beta}(\kappa) = \frac{\max\limits_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_\kappa^2(b)}{\sum_{j=1}^{\beta} \lambda_j \nu_d(j)} + o\left(\max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_\kappa^2(b)\right).$$

$\widetilde{\mathrm{T}}_{n,\beta}$ 的Bahadur斜率在局部显然是一致的，因此我们不再对它们加以区分。下文中，我们考虑一些具体的备择类，并确定$\mathrm{T}_{n,\beta}$相对于$M_n = -2\log(\Lambda_n)$的局部Bahadur 渐近相对效率，其中 $\Lambda_n$ 为似然比检验。众所周知，$M_n$ 的精确Bahadur斜率和近似Bahadur斜率相同，且由下式给出

$$c_M^a(\kappa) = c_M(\kappa) = 2\mathrm{KL}(\kappa, 0), \quad \kappa > 0,$$

其中

$$\mathrm{KL}(\kappa, \kappa_0) = \mathbb{E}_\kappa\left[\log\left(\frac{f(U\,|\,\kappa)}{f(U\,|\,\kappa_0)}\right)\right], \quad \kappa, \kappa_0 \geq 0,$$

是 $U \sim f(\cdot\,|\,\kappa)$ 的 Kullback–Leibler信息数。以下较为技术性的计算证明见附录B。

**例5.2**。 取值于 $\mathcal{S}^{d-1}$ 的随机向量 $U$ 服从冯·米塞斯–费舍尔分布 vMF$(\theta, \kappa)$，其平均方向为 $\theta \in \mathcal{S}^{d-1}$，集中参数为 $\kappa \geq 0$，且关于 $\sigma$ 的密度为

$$f(x\,|\,\kappa) = \frac{(\kappa/2)^{d/2-1}}{2\pi^{d/2} I_{\frac{d}{2}-1}(\kappa)} \exp(\kappa x^\top \theta), \quad x \in \mathcal{S}^{d-1}, \tag{5.3}$$

其中 $I_{\frac{d}{2}-1}$ 是第一类修正贝塞尔函数，其阶为 $d/2 - 1$，见（B.2）。对于具有固定平均方向 $\theta \in \mathcal{S}^{d-1}$ 和 $\kappa > 0$ 的冯·米塞斯–费舍尔备择类 vMF$(\theta, \kappa)$，我们有

$$\lim_{\kappa \to 0^+} \frac{\max_{b \in \mathcal{S}^{d-1}} \gamma_\kappa^2(b)}{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)} = \lambda_1 \nu_d(1),$$

从而局部 Bahadur 渐近相对效率为

$$\Lambda^{\mathrm{ex}}_{\widetilde{T}_\beta, M} = \Lambda^{\mathrm{a}}_{\widetilde{T}_\beta, M} = \lim_{\kappa \to 0^+} \frac{c^a_{\widetilde{T}_\beta}(\kappa)}{c^a_M(\kappa)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{\beta} \lambda_j \nu_d(j)} \lim_{\kappa \to 0^+} \frac{\max_{b \in \mathcal{S}^{d-1}} \gamma_\kappa^2(b)}{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)} = \frac{\lambda_1 \nu_d(1)}{\sum_{j=1}^{\beta} \lambda_j \nu_d(j)}.$$

$\widetilde{\beta = 1}$ 的特殊情形给出了$T_1$ 在 Bahadur 意义下的局部渐近最优性（关于这一概念，见 [35],第9页）

$$\Lambda^{\mathrm{ex}}_{\widetilde{T}_1, \mathrm{M}} = \Lambda^{\mathrm{a}}_{\widetilde{T}_1, \mathrm{M}} = 1.$$

这并不令人意外，因为在 von Mises–Fisher 模型中，Rayleigh 检验恰好就是似然比检验。相反，如果 $\beta$ 是偶数，那么

$$\Lambda^{\mathrm{ex}}_{\widetilde{T}_\beta, \mathrm{M}} = \Lambda^{\mathrm{a}}_{\widetilde{T}_\beta, \mathrm{M}} = 0,$$

因为在这种情况下特征值 $\lambda_1$ 等于零。

| | $\beta$ \ $d$ | 2 | 3 | 5 | 10 | | $\beta$ \ $d$ | 2 | 3 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| vMF | 1 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | $LP_1$ | 1 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| | 3 | 0.90 | 0.84 | 0.77 | 0.70 | | 3 | 0.90 | 0.84 | 0.77 | 0.70 |
| | 5 | 0.79 | 0.67 | 0.54 | 0.41 | | 5 | 0.79 | 0.67 | 0.54 | 0.41 |
| W | 2 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | $LP_2$ | 2 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| | 4 | 0.94 | 0.92 | 0.89 | 0.84 | | 4 | 0.94 | 0.92 | 0.89 | 0.84 |
| | 6 | 0.86 | 0.80 | 0.72 | 0.61 | | 6 | 0.86 | 0.80 | 0.72 | 0.61 |
| $LP_3$ | 3 | 0.10 | 0.16 | 0.23 | 0.30 | $LP_4$ | 4 | 0.06 | 0.08 | 0.11 | 0.16 |
| | 5 | 0.20 | 0.31 | 0.43 | 0.54 | | 6 | 0.14 | 0.19 | 0.27 | 0.37 |
| $LP_5$ | 5 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.06 | $LP_6$ | 6 | 0.004 | 0.01 | 0.01 | 0.02 |

~**表1：** 对于示例 5.2 至 5.4 的备择类，维数为$d \in \{2,3,5,10\}$、阶为$m \in \{1,.....6\}$的 LP备择类中，$T_{n,\beta}$ 相对于$M_n$ 的非平凡局部巴哈杜尔渐近相对效率。

**例5.3.** 取值于 $\mathcal{S}^{d-1}$ 的随机向量 $U$ 服从沃森分布 $\mathrm{W}(\theta,\kappa)$，其平均方向为 $\theta \in \mathcal{S}^{d-1}$、集中参数为 $\kappa \in \mathbb{R}$，若其相对于 $\sigma$ 的密度为

$$f(x\,|\,\kappa) = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2} M(1/2, d/2, \kappa)} \exp(\kappa (x^\top \theta)^2), \quad x \in \mathcal{S}^{d-1}, \tag{5.4}$$

其中$M(\cdot,\cdot,\cdot)$是库默函数，参见 B.11。下文中，我们仅考虑情形 $\kappa \geq 0$。对于平均方向 $\theta \in \mathcal{S}^{d-1}$ 固定且满足 $\kappa > 0$ 的 Watson备择类 $\mathrm{W}(\theta,\kappa)$，有

$$\lim_{\kappa \to 0^+} \frac{\max_{b \in \mathcal{S}^{d-1}} \gamma_\kappa^2(b)}{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)} = \lambda_2 \nu_d(2).$$

因此，局部 Bahadur 渐近相对效率为

$$\Lambda^{\mathrm{ex}}_{\widetilde{T}_\beta, M} = \Lambda^{\mathrm{a}}_{\widetilde{T}_\beta, M} = \frac{\lambda_2 \nu_d(2)}{\sum_{j=1}^{\beta} \lambda_j \nu_d(j)}.$$

~这一次，$\beta = 2$ 的特殊情形给出了$T_2$ 在 Bahadur 意义下的局部渐近最优性

$$\Lambda^{\mathrm{ex}}_{\widetilde{T}_2, \mathrm{M}} = \Lambda^{\mathrm{a}}_{\widetilde{T}_2, \mathrm{M}} = 1,$$

而当$\beta$ 为奇数时，则

$$\Lambda^{\mathrm{ex}}_{\widetilde{T}_\beta, \mathrm{M}} = \Lambda^{\mathrm{a}}_{\widetilde{T}_\beta, \mathrm{M}} = 0.$$

**例 5.4.** 与例 3.3 一致，我们将定义阶为$m \in \mathbb{N}$、方向为 $\theta \in \mathcal{S}^{d-1}$ 且 $\kappa \in [0,1]$的备择假设类 $\mathrm{LP}_m(\theta,\kappa)$。在此语境中，LP 表示勒让德多项式。设该类的密度为

$$f(x\,|\,\kappa) = \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\left(1 + \kappa P_m^d(\theta^\top x)\right), \quad x \in \mathcal{S}^{d-1}. \tag{5.5}$$

对于固定的阶$m$和方向 $\theta$，我们有

$$\lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_\kappa^2(b)}{2\mathrm{KL}(\kappa,0)} = \lambda_m \nu_d(m),$$

因此，局部 Bahadur 渐近相对效率等于

$$\Lambda^{\mathrm{ex}}_{\widetilde{T}_\beta,\mathrm{M}} = \Lambda^{\mathrm{a}}_{\widetilde{T}_\beta,\mathrm{M}} = \frac{\lambda_m \nu_d(m)}{\sum_{j=1}^{\beta} \lambda_j \nu_d(j)}.$$

只有当 $\beta$ 与$m$满足特定组合条件时，才能得到非平凡的局部 Bahadur 渐近相对效率：其中$m \le \beta$ 且 $\beta + m$为偶数。特别地，特殊情形 $\beta = m = 1$ 或 $\beta = m = 2$ 分别给出$\widetilde{\ }\quad\widetilde{\ }T_1$ 或$T_2$, 在 Bahadur 意义下的局部渐近最优性。

# 6 模拟

我们展示一项具有竞争力的蒙特卡洛模拟研究，该研究在统计计算环境 R 中实现并完成，参见 [36]。(1.3) 中超球面上的最大值无法解析计算，因此必须采用计算速度快的方法进行近似。我们建议使用超球面的均匀随机覆盖：在 $\mathcal{S}^{d-1}$上模拟大量$m$ 个均匀分布点 $\mathcal{S}^{d-1}$，$B_1, \ldots,$ $B_m$（例如），计算据此选取的中心化平方投影$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(B_k^\top U_j)^{\beta} - \psi_d(\beta)\right)^2$，$k = 1, \ldots, m$，并用所有$k$上的离散最大值近似(1.3)中的最大值。在$H_0$ 下$T_{n,\beta}$ 的临界值通过20000次重复模拟以及含$m = 5000$ 个点的随机覆盖进行模拟，适用于$d = 2$、3；对于$d = 5$、10，则通过20000次重复模拟以及含$m = 20000$ 个点的随机覆盖进行模拟，参见表2。

表2中标记为“∞”和“$\infty^*$”的各行临界值，分别通过两种方法近似推论 2.6 中的极限随机元 $\max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \mathrm{Z}_\beta^2(\mathrm{b})$。第一种方法对应标记为“∞”的行，它模拟与上文相同的球面随机覆盖，并考虑大量（例如） $\ell$ 个随机变量 $\mathrm{Z}_j = \max(\mathrm{X}_j^2), \mathrm{j} = 1, \ldots, \ell$，其中 $\mathrm{X}_j \sim$ 独立同分布于 $\mathrm{N}_m(0, \Sigma_\beta)$; 这里 $\mathrm{N}_m$ 表示 m 维正态分布， $\Sigma_\beta = \left(\rho_\beta(\mathrm{B}_{k_1}, \mathrm{B}_{k_2})\right)_{k_1,k_2\in\{1,\ldots,m\}}$ 是一个奇异的 m $\times$m 维协方差矩阵（m $\ge$ d），而 $\rho_\beta$ 是 (2.2) 中的协方差核。关于该核，我们已在注 2.2 中汇总了显式公式。

这里，$x^2$ 是 x 的各分量平方组成的向量的简写。接下来，我们计算 $Z_1, \ldots, Z_\ell$ 的经验 95% 分位数；每个近似值的模拟均采用 $\ell = 100000$ 和 $m = 1000$ （$d = 2, 3$），以及 $\ell = 10000$ 和 $m = 5000$ （$d = 5, 10$）。第二种方法利用了命题 2.4 中高斯过程的另一种表示。为此，我们需要空间 $\mathcal{H}_k(\mathcal{S}^{d-1})$（$k = 0, \ldots, \beta$）的标准正交基及其对应的特征值 $\lambda_k$。在第2节末尾，我们已列出 $\beta = 1, \ldots, 6$ 对应特征值的显式清单。在蒙特卡洛模拟的每次重复中，我们生成数组 $N_{k,j}$, $j \in \{1, \ldots, \nu_d(k)\}$，其中包含相互独立的标准正态随机变量；再用 m 个均匀分布点 $B_1, \ldots, B_m$ 覆盖 $\mathcal{S}^{d-1}$，并计算 $Y_i = \sqrt{|\mathcal{S}^{d-1}|} \sum_{k=0}^{\beta} \sqrt{\lambda_k} \sum_{j=1}^{\nu_d(k)} \phi_{k,j}(b) N_{k,j}$, $i = 1, \ldots, m$。将这一步骤重复设定的重复模拟次数 $\ell$ 后，便可按与之前相同的方式得到 $T_{n,\beta}$ 极限分布的近似值。然而，目前尚无能够在更高维度和阶数下稳定实现标准正交球谐函数的程序库，因此我们将这种方法的模拟限制在 $d = 2$的情形。我们使用 Mathematica 中的 HFT.m 软件包，在 R 中实现了一组标准正交基。每个近似值均采用 $\ell = 20000$ 和 $m = 2500$计算。

表2展示了原假设下$T_{n,\beta}$ 的经验0.95分位数和近似0.95分位数。值得将近似临界值与$\chi^2_d/d$的0.95分位数进行比较，其中$T_{n,}1$（即雷利检验）对应的分位数分别为$d = 2$时的2.996、$d = 3$时的2.605、$d = 5$时的2.214，以及$d = 10$时的1.830。显然，对于维数$d = 2$、3、5，基于随机覆盖和极限过程的近似与理论渐近临界值较为接近，但维数大于5时，近似的准确性会有所下降。这种现象可以用维数灾难来解释，这表明应在随机覆盖中考虑单位球面上的更多点，以提高近似的准确性。对于 $\beta = 2$ 和$2(d-1)/(d^2(d+2))\chi^2_{\nu_d}(2)$，且 $\nu_d(2) = (d-1)(d+2)/2$，也可以观察到类似现象。当然，正如注 2.5 所述，后一个随机变量仅是$T_{n,}2$的极限分布的上界。尽管如此，这些数值结果支持第2节的理论发现。

我们考虑在单位圆 $\mathcal{S}^1$、单位球面 $\mathcal{S}^2$ 和超球面 $\mathcal{S}^5$ 上检验均匀性，并将模拟研究的介绍分为两部分，因为在这些情况下考虑的竞争检验不同。

在 $\mathcal{S}^{d-1}$ 上生成均匀分布随机数可以高效完成，因为对于随机向量 $N \sim \mathcal{N}_d(0, I_d)$，其中 $\mathcal{N}_d$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的 $d$ 维正态分布，我们有

$$\frac{N}{\|N\|} \sim \mathcal{U}\left(\mathcal{S}^{d-1}\right).$$

| | $n$ \ $\beta$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d = 2$ | 20 | 2.906 | 0.746 | 2.037 | 0.917 | 1.761 | 0.941 |
| | 50 | 2.968 | 0.730 | 2.051 | 0.914 | 1.734 | 0.934 |
| | 100 | 3.004 | 0.752 | 2.031 | 0.906 | 1.730 | 0.936 |
| | 500 | 3.033 | 0.735 | 2.081 | 0.923 | 1.724 | 0.939 |
| | $\infty$ | 2.986 | 0.750 | 2.050 | 0.924 | 1.729 | 0.944 |
| | $\infty^*$ | 2.944 | 0.753 | 2.047 | 0.923 | 1.735 | 0.945 |
| $d = 3$ | 20 | 2.582 | 0.864 | 1.306 | 0.794 | 0.994 | 0.738 |
| | 50 | 2.578 | 0.875 | 1.319 | 0.751 | 0.932 | 0.666 |
| | 100 | 2.562 | 0.881 | 1.293 | 0.734 | 0.922 | 0.632 |
| | 500 | 2.585 | 0.869 | 1.298 | 0.733 | 0.901 | 0.614 |
| | $\infty$ | 2.605 | 0.866 | 1.283 | 0.724 | 0.895 | 0.606 |
| $d = 5$ | 20 | 2.183 | 0.736 | 0.729 | 0.519 | 0.444 | 0.399 |
| | 50 | 2.157 | 0.695 | 0.674 | 0.451 | 0.378 | 0.318 |
| | 100 | 2.203 | 0.685 | 0.654 | 0.407 | 0.352 | 0.280 |
| | 500 | 2.173 | 0.663 | 0.632 | 0.363 | 0.324 | 0.232 |
| | $\infty$ | 2.161 | 0.638 | 0.620 | 0.340 | 0.306 | 0.206 |
| $d = 10$ | 20 | 1.567 | 0.419 | 0.252 | 0.165 | 0.107 | 0.090 |
| | 50 | 1.580 | 0.368 | 0.209 | 0.124 | 0.074 | 0.060 |
| | 100 | 1.586 | 0.342 | 0.190 | 0.105 | 0.059 | 0.046 |
| | 500 | 1.605 | 0.314 | 0.173 | 0.080 | 0.045 | 0.030 |
| | $\infty$ | 1.485 | 0.277 | 0.153 | 0.062 | 0.036 | 0.019 |

**表2：** $T_{n,\beta}$ 在维数$d \in \{2,3,5,10\}$、样本量$n \in \{20,50,100,500\}$以及 $\beta \in \{1,\ldots,6\}$下的 $H_0$ 对应的经验及近似0.95分位数。这里，$\infty$表示通过协方差核对$T_{n,\beta}$极限分布的近似，$\infty^*$ 表示通过球谐函数得到的近似。

这一性质仅仅是旋转不变性的结果$N$ 以及均匀分布是 $\mathcal{S}^{d-1}$上唯一旋转不变分布这一事实的推论。我们考虑以下关于均匀分布的备择假设：

- 冯·米塞斯–费舍尔分布：

  这一类备择假设已在例5.2中介绍。其密度为

$$\mathcal{S}^{d-1} \ni x \mapsto \frac{(\kappa/2)^{d/2-1}}{2\pi^{d/2} I_{\frac{d}{2}-1}(\kappa)} \exp(\kappa x^\top \theta),$$

  其中$I_{\frac{d}{2}-1}$是第一类修正贝塞尔函数，阶为$d/2-1$。该类分布记作 $\mathrm{vMF}(\theta, \kappa)$。

- 双中心冯·米塞斯–费舍尔混合分布：

  设$U$服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布，$p \in (0, 1)$，且$Y_i \sim$服从 $\mathrm{vMF}(\theta_i, \kappa_i)$，其位置参数和集中参数分别对应$i = 1$、$2$。设$U$、$Y_1$ 和$Y_2$ 相互随机独立。接下来，我们按照以下方式生成随机样本$X$

$$X = Y_1 \mathbb{1}_{\{U<p\}} + Y_2 \mathbb{1}_{\{U \geq p\}}.$$

  我们将这个备择假设类记为 $\text{Mix-vMF}(p, \theta_1, \theta_2, \kappa_1, \kappa_2)$。

- 三中心冯·米塞斯–费舍尔混合分布：

  设 $U$服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布，$p \in (0, 1/2)$，且 $Y_i \sim \mathrm{vMF}(\theta_i, \kappa_i)$，其位置参数和集中参数分别对应于 $i = 1$、$2$、$3$。设 $U$、$Y_1$, $Y_2$ 和$Y_3$ 随机独立。然后，我们按以下方式生成一个随机样本 $X$

$$X = Y_1 \mathbb{1}_{\{U<p\}} + Y_2 \mathbb{1}_{\{p \leq U<2p\}} + Y_3 \mathbb{1}_{\{U \geq 2p\}}.$$

  我们将这个备择假设类记为 $\text{Mix-vMF}(p, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$。

- 宾厄姆分布：

  密度

$$\mathcal{S}^{d-1} \ni x \mapsto \frac{1}{c(d, A)} \exp(x^\top A x)$$

  与一个对称$d \times d$ 阶矩阵 A 和归一化常数 $c(d,A)$ 得到宾厄姆模态 1.

  下文将这一备择假设类记作 Bing(A)。

- 勒让德多项式分布：

  我们在例 5.4 中定义了阶数为 $m \in \mathbb{N}$、方向为 $\theta \in \mathcal{S}^{d-1}$ 和 $\kappa \in [0, 1]$ 的勒让德多项式备择类 $\mathrm{LP}_m(\theta, \kappa)$。该类的密度为

$$f(x \mid \kappa) = \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|} \left(1 + \kappa P_m^d(\theta^\top x)\right), \quad x \in \mathcal{S}^{d-1}.$$

  由于 $f(x \mid \kappa) \leq (1 + \kappa)|\mathcal{S}^{d-1}|^{-1}$、$x \in \mathcal{S}^{d-1}$，接受-拒绝算法为我们提供了一种简单的方法来生成该备择类的随机数；有关该算法的说明，请参见 [26] 。对 $\mathcal{S}^1$ 的模拟（ $\kappa = 1$ ）表明，阶数$m$ 决定了恰好形成$m$ 个簇，这些簇以方向 $\theta$ 为中心，沿单位圆等距分布。因此，从数值上看，该类推广了单极和多极分布，其中包括冯·米塞斯–费希尔分布和沃森分布。

关于所介绍分布的更多细节和性质，可参见 [33], 第 9.3 节和第 10.3 节。在整章中，名义显著性水平均设为 0.05。竞争统计量的经验临界值也采用重复次数$l = 20000$ 计算得出。所有表格中的经验功效均基于 5000 次检验决策重复模拟，实际上表示拒绝频率。由于表格空间有限，下面进一步说明所考虑的备择假设。令

$$\theta_1 = (1, 0, \ldots, 0)^\top, \quad \theta_2 = (-1, \ldots, -1)^\top, \quad \theta_3 = (-1, 1, \ldots, 1)^\top,$$

$$A_1 = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, d), \quad A_2 = \mathrm{diag}(-d, 0, \ldots, 0, d).$$

如果方向不位于 $\mathcal{S}^{d-1}$ 上，那么 R 中的函数会使用到 $\mathcal{S}^{d-1}$ 的正交投影，以生成该备择假设的随机数。然后令

- $\mathrm{vMF1}(\kappa) =$ 冯·米塞斯-费舍尔分布 $(\theta_1, \kappa)$,
- $\mathrm{Mix\text{-}vMF1}(p) = \mathrm{Mix\text{-}vMF}(p, -\theta_1, \theta_1, 1, 1)$ 和 $\mathrm{Mix\text{-}vMF2}(p) = \mathrm{Mix\text{-}vMF}(p, -\theta_1, \theta_1, 1, 4)$,
- $\mathrm{Mix\text{-}vMF3}(p) = \mathrm{Mix\text{-}vMF}(p, \theta_2, \theta_3, \theta_1, 2, 3, 3)$ 和 $\mathrm{Mix\text{-}vMF4}(p) = \mathrm{Mix\text{-}vMF}(p, \theta_2, \theta_3, \theta_1, 2, 3, 4)$,
- $\mathrm{Bing1}(\kappa) = \mathrm{Bing}(\kappa A1)$ 和 $\mathrm{Bing2}(\kappa) = \mathrm{Bing}(\kappa A2)$，以及
- $\mathrm{LP}_m(\kappa) = \mathrm{LP}_m(\theta_1, \kappa)$。

## 6.1 单位圆 $\mathcal{S}^1$

在本小节中， $\mathcal{S}^{d-1}$ 上的随机向量样本用极坐标表示，即对于$U_i \in \mathcal{S}^{d-1}$、$i = 1$、.....、$n$，我们将$U_i$ =写作$(\cos(\vartheta_i), \sin(\vartheta_i))^\top$，其中 $\vartheta_i \in [0, 2\pi$为一个随机角。我们考虑单位球面上的以下竞争性检验方法。其旁边的参考文献指向有关相应统计量的更多信息。请注意，对于所列出的所有检验统计量，较大的值都具有显著性，但 [10]中的 Cuesta-Albertos 等人的统计量除外。

- Kuiper 检验， [27]:
  令 $F_n(\vartheta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\vartheta_i \le \vartheta\}}$为基于角度 $\vartheta_1$、.....、 $\vartheta_n$的经验分布函数，且$F(\vartheta) = \frac{\vartheta}{2\pi}\mathbb{1}_{[0,2\pi)}(\vartheta) + \mathbb{1}_{[2\pi,\infty)}(\vartheta)$为 $\mathcal{S}^1$上均匀分布的分布函数，其中 $\vartheta \in \mathbb{R}$。Kuiper 检验考察以下量

$$D_n^+ = \sqrt{n} \sup_{\vartheta\in[0,2\pi)} (F_n(\vartheta) - F(\vartheta)) = \sqrt{n} \max_{i=1,\dots,n} \left(\frac{i}{n} - X_i\right),$$
$$D_n^- = \sqrt{n} \sup_{\vartheta\in[0,2\pi)} (F(\vartheta) - F_n(\vartheta)) = \sqrt{n} \max_{i=1,\dots,n} \left(X_i - \frac{i-1}{n}\right),$$

  其中$X_i = \frac{\vartheta_{(i)}}{2\pi}$对应$i = 1$、.....、$n$， $\vartheta_{(1)}$、.....、 $\vartheta_{(n)}$为随机角的次序样本。
  然后，该检验使用统计量

$$V_n = D_n^+ + D_n^-.$$

- Watson 检验， [43]:
  根据前述定义，Watson 检验为

$$U_n^2 = n \int_0^{2\pi} \left[F_n(\vartheta) - F(\vartheta) - \int_0^{2\pi} F_n(\omega) - F(\omega)\, \mathrm{d}F(\omega)\right]^2 \mathrm{d}F(\vartheta)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(X_i - \frac{i-1/2}{n}\right) - \left(\bar{X} - \frac{1}{2}\right)\right]^2 + \frac{1}{12n},$$

  其中 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$。

- Ajne 检验 [1]:
  $\mathcal{S}^1$ 上的 Ajne 检验基于统计量

$$A_n = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \left[N(\alpha) - \frac{n}{2}\right]^2 \mathrm{d}\alpha = \frac{n}{4} - \frac{1}{n\pi} \sum_{1\le i<j\le n} d_c(\vartheta_i, \vartheta_j).$$

  这里，

$$N(\alpha) = \#\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n \,|\, d_c(\alpha, \vartheta_i) < \pi/2,\ i = 1, \dots, n\}, \quad \alpha \in [0, 2\pi),$$

  其中 $d_c(\alpha, \vartheta) = \min(|\alpha - \vartheta|, 2\pi - |\alpha - \vartheta|),\ \vartheta \in [0, 2\pi)$。

- 雷利 Test, [38]:
  经典的雷利检验 $\mathcal{S}^1$ 定义为

$$R_n = 2n\|\bar{U}\|^2 = \frac{2}{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\cos(\vartheta_i)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\sin(\vartheta_i)\right)^2\right].$$

  然而，在模拟中，我们将采用 [33], 第 6.3.1 节中的修正方法，该方法可以得到更好的 $\chi^2_2$ 近似；也就是说，我们使用以下统计量

$$R_n^{\text{mod}} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)R_n + \frac{n\|\bar{U}\|^4}{2}.$$

- Cuesta-Albertos 等人的检验 [10]:

  Cuesta-Albertos 等人的检验基于样本 $U_1, \ldots, U_n$ 的随机投影。为此，选取一个方向 $H \sim \mathcal{U}\left(\mathcal{S}^{d-1}\right)$，该方向独立于 $U_1, \ldots, U_n$，并考察投影后的随机变量 $Y_1 = U_1{}^\top H, \ldots, Y_n = U_n{}^\top H$。在 [10], 定理 2.2 中，已证明 $Y_1$ 的分布以概率 1 刻画了 $U_1$ 的分布。为此，$H_0$ 几乎必然等价于

$$H_0^* : U^\top H \sim F_1,$$

  其中，$U$ 是一个取值于 $\mathcal{S}^1$ 的随机向量，$F_1$ 是随机投影$Y_1 = U_1{}^\top H$的分布。在$d = 2$的情况下

$$F_1(y) = \left(1 - \frac{1}{\pi}\arccos(y)\right)\mathbb{1}_{[-1,1]}(y) + \mathbb{1}_{(1,\infty)}(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

  检验过程如下:

  i) 选择$q \in \mathbb{N}$ 个随机投影$H_1, \ldots, H_q \sim \mathcal{U}\left(\mathcal{S}^{d-1}\right)$。

  ii) 对$m = 1, \ldots, q$，计算柯尔莫哥洛夫–斯米尔诺夫统计量的p值$p_m$

$$K_{n,m} = \sup_{y\in[-1,1]} |F_{n,m}(y) - F_1(y)|,$$

  其中，$F_{n,m}$是基于$U_1{}^\top H_m, \ldots, U_n{}^\top H_m$得到的经验分布函数。

  iii) 当聚合检验统计量较小时，拒绝$H_0^*$，因此也拒绝$H_0$,

$$CA_n^q = \min\{p_1, \ldots, p_q\}.$$

  该检验程序是对一种检验的改进：该检验只选择一个随机方向，以减轻因所选随机方向可能不利而导致的功效不足。

| 备择假设 \ Test | $T_{n,1}$ | $T_{n,2}$ | $T_{n,3}$ | $T_{n,4}$ | $T_{n,5}$ | $T_{n,6}$ | $K_n$ | $U_n^2$ | $A_n$ | $R_n^{模}$ | $CA_n^{25}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{U}\left(\mathcal{S}^{d-1}\right)$ | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.05) | **6** | 5 | **6** | 5 | **6** | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.1) | **9** | 5 | **9** | 5 | 8 | 6 | 7 | 7 | **9** | **9** | 8 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.25) | 32 | 5 | 31 | 6 | 27 | 5 | 29 | 32 | 32 | **33** | 29 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.5) | 88 | 6 | 86 | 6 | 82 | 7 | 84 | 88 | 88 | **89** | 84 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.75) | **100** | 12 | **100** | 12 | 99 | 11 | 99 | **100** | **100** | **100** | 99 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(1) | **100** | 25 | **100** | 25 | **100** | 23 | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(2) | **100** | 98 | **100** | 98 | **100** | 98 | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.25) | 81 | 25 | 80 | 26 | 75 | 24 | 80 | **82** | 81 | 81 | 79 |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.5) | 5 | **26** | 6 | 25 | 5 | 25 | 8 | 7 | 5 | 5 | 8 |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_2$(0.5) | 72 | **100** | 80 | 99 | 82 | 99 | 97 | 96 | 74 | 73 | 97 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布混合$_2$(0.75) | 29 | **82** | 30 | 81 | 29 | 81 | 56 | 52 | 32 | 31 | 57 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布混合$_3$(0.25) | 39 | **85** | 54 | **85** | 59 | 83 | 73 | 66 | 45 | 40 | 73 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布混合$_4$(0.33) | 14 | 69 | 23 | **70** | 32 | 67 | 39 | 34 | 17 | 14 | 39 |
| Bing$_1$(0.25) | 5 | **12** | 5 | 11 | 5 | 11 | 6 | 6 | 5 | 5 | 6 |
| Bing$_1$(0.5) | 5 | **33** | 6 | 32 | 6 | 30 | 10 | 8 | 5 | 5 | 10 |
| Bing$_1$(1) | 5 | **88** | 6 | 87 | 6 | 86 | 34 | 28 | 5 | 6 | 34 |
| Bing$_2$(0.1) | 5 | **22** | 6 | **22** | 5 | **22** | 9 | 7 | 5 | 5 | 8 |
| Bing$_2$(0.25) | 5 | **88** | 6 | **88** | 6 | 87 | 34 | 28 | 6 | 5 | 35 |
| LP$_3$(0.1) | 5 | 5 | **6** | **6** | **6** | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 |
| LP$_4$(0.1) | 5 | **6** | 5 | 5 | 5 | **6** | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| LP$_3$(0.5) | 5 | 5 | 25 | 6 | **43** | 5 | 18 | 10 | 11 | 4 | 18 |
| LP$_4$(0.5) | 5 | 5 | 5 | 18 | 6 | **31** | 12 | 8 | 5 | 5 | 13 |
| LP$_3$(1) | 5 | 6 | 90 | 5 | **100** | 5 | 75 | 69 | 75 | 5 | 74 |
| LP$_4$(1) | 5 | 6 | 6 | 58 | 6 | **96** | 47 | 25 | 5 | 6 | 46 |

**表3：** $n = 100$ 和$d = 2$的经验功效。

表3列出了样本量为$n = 100$时所有纳入考察的检验统计量的经验功效。粗体数字表示针对给定备择假设的最高功效。可以立即看出，显著性水平得到了保持；而在$T_{n,}$6的情况下，也仅略有超出。对于单极 von Mises–Fisher 备择假设，经典检验和$T_{n,\beta}$ 在 $\beta$ 为奇数时优于其他检验。对于 von Mises–Fisher 分布混合，$T_{n,\beta}$ 在 $\beta$ 为偶数时表现出更高的功效。Bingham 备择假设下也是如此。无论如何，$T_{n,}$2显然表现最佳。对于 LP$_m$ 备择假设类，值得注意的是，当$m = 3$ 时，检验统计量$T_{n,}$3和$T_{n,}$5以及

$m = 4$ 检验统计量 $T_{n,}4$ 和 $T_{n,}6$ 占主导地位。看起来，通过 $\beta$ 进行更高次幂运算，即在 $T_{n,\beta}$ 的定义中使用更高阶的矩，只要簇的数量与 $\beta$ 具有相同的奇偶性，就能在多极分布下取得更好的结果。这一观察与第4章和第5章的理论发现相符。

## 6.2 单位球面 $\mathcal{S}^2$ 和单位超球面 $\mathcal{S}^5$

Ajne 和雷利检验统计量可以直接推广到 $\mathcal{S}^{d-1}$、$d \geq 2$，因为它们是富有成效的 Sobolev检验类的特例，参见 [20], 第3节。此外，我们还考虑另外三种均匀性检验。除 Cuesta-Albertos 等人在 [10], 提出的检验外，$H_0$, 再次会在相应统计量取较大值时被拒绝。

- Ajne 检验:

  Ajne 检验向高维的推广通过以下方式实现

$$A_n = \frac{\Gamma(d/2-1)}{2n\pi^{d/2}} \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \left[ N(\omega) - \frac{n}{2} \right]^2 \mathrm{d}\sigma(\omega) = \frac{n}{4} - \frac{1}{n\pi} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \arccos(U_i{}^\top U_j),$$

  其中

$$N(\omega) = \#\{U_1, \ldots, U_n \,|\, \omega^\top U_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}, \quad \omega \in \mathcal{S}^{d-1}.$$

- 雷利 检验:

  对 $\mathcal{S}^{d-1}$ 进行的雷利 检验为

$$R_n = dn\|\bar{U}\|^2$$

  而 [33], 第 10.4.1 节中的修正为

$$R_n^{\mathrm{mod}} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) R_n + \frac{1}{2n(d+2)} R_n^2.$$

- 宾厄姆检验， [9]:

  宾厄姆检验使用样本 $S = {}^1{}_n \sum_{j=1}^n U_j U_j^\top$的经验协方差矩阵，并基于以下量

$$B_n = \frac{nd(d+2)}{2} \left( \mathrm{trace}(S^2) - \frac{1}{d} \right).$$

- Gin´e 的 Sobolev Test， [21]:

  我们考虑 Gin´e 的$G_n$ Test，其由以下统计量给出

$$G_n = \frac{n}{2} - \frac{(d-1)\Gamma(d/2-1)^2}{2n\Gamma(d/2)^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sin(\arccos(U_i{}^\top U_j)).$$

- Cuesta-Albertos 等人的检验， [10]:

  主要思路和检验程序与$d = 2$的情形相同。在更高维度中，唯一改变的量是随机投影的分布函数$F_1$。对于一般情形，可根据投影密度，按照 [33],第 9.3.1 节中的方法求得该分布函数：

$$\begin{aligned} F_{d-1}(y) &= B\left(\frac{1}{2}, \frac{d-1}{2}\right)^{-1} \int_{-1}^{y} (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} \, \mathrm{d}t \, \mathbb{1}_{[-1,1]}(y) + \mathbb{1}_{(1,\infty)}(y) \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{sign}(y) B_{y^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{d-1}{2}\right)\right] \mathbb{1}_{[-1,1]}(y) + \mathbb{1}_{(1,\infty)}(y), \quad y \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

  其中$B_x(a, b) = B(a, b)^{-1} \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1} \, \mathrm{d}t$, $x \geq 0$, $a, b > 0$是正则化不完全贝塔函数，而 sign(·) 是 $\mathbb{R}$上的通常符号函数。

- Cram´er-von Mises 型检验， [19]:

  最后，我们介绍另一种基于投影方法的检验，该检验出自 Garc´ıa- Portugu´es 等人，见 [19]。在某种程度上，它是 Cuesta-Albertos 等人提出的检验所对应的 Cram´er-von Mises 检验，因此考虑期望值

$$\mathrm{CvM}_n = n \, \mathbb{E}_H \left[ \int_{-1}^{1} |F_{n,H}(y) - F_{d-1}(y)|^2 \, \mathrm{d}F_{d-1}(y) \right].$$

  这里，$H \sim \mathcal{U}\left(\mathcal{S}^{d-1}\right)$，$F_{n,\,H}$是基于$U_1{}^\top H, \ldots, U_n{}^\top H$的经验分布函数，而$F_{d-1}$ 是式（6.1）中的分布函数。根据以下内容，该检验统计量可写成 U 统计量，以便在 R 中实际实现

$$\mathrm{CvM}_n = \frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \zeta_{d-1}(\arccos(U_i{}^\top U_j)) + \frac{3n-2}{6},$$

  其中，对于 $\vartheta \in [0, \pi]$

$$\zeta_{d-1}(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{\vartheta}{2\pi}\left(\dfrac{\vartheta}{2\pi} - 1\right) & , \text{ for } d = 2, \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{\vartheta}{2}\right) & , \text{ for } d = 3, \\ \zeta_1(\vartheta) + \dfrac{1}{4\pi^2}\left((\pi - \vartheta)\tan\left(\dfrac{\vartheta}{2}\right) - 2\sin^2\left(\dfrac{\vartheta}{2}\right)\right) & , \text{ for } d = 4, \\ -4 \displaystyle\int_0^{\cos(\vartheta/2)} F_{d-1}(y) F_{d-2}\left(\dfrac{y\tan(\vartheta/2)}{\sqrt{1-y^2}}\right) \mathrm{d}F_{d-1}(y) & \\ \quad - \dfrac{3}{4} + \dfrac{\vartheta}{2\pi} + 2F_{d-1}^2\left(\cos\left(\dfrac{\vartheta}{2}\right)\right) & , \text{ for } d \geq 5. \end{cases}$$

表4、表5和表6展示了更高维度下、样本量为 $n = 100$ 时的经验功效。所有情况下，显著性水平均得到控制。这里基本可以观察到与 $d = 2$ 情形类似的模式；只是功效较低，并且随着维度增加而趋于下降。对于某些备择假设，检验$CA_n^{100}$和 $\mathrm{CvM}_n$ 表现出相对较高的功效。我们还注意到，在 Bingham 备择假设下，宾厄姆检验和 Gin´e 检验的表现优于其他检验。然而，尤其值得注意的是，随着维度增加，几乎所有检验都无法识别勒让德多项式备择类。

| 备择假设 \ Test | $T_{n,1}$ | $T_{n,2}$ | $T_{n,3}$ | $T_{n,4}$ | $T_{n,5}$ | $T_{n,6}$ | $A_n$ | $R_n^{\text{模}}$ | $B_n$ | $G_n$ | $CA_n^{100}$ | $\mathrm{CvM}_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{U}(\mathcal{S}^{d-1})$ | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.05) | **7** | 5 | 5 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 5 | 5 | 4 | 5 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.1) | **8** | 5 | 7 | 6 | 7 | 5 | 6 | 7 | 5 | 5 | 5 | 6 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.25) | **21** | 5 | 18 | 5 | 15 | 6 | 18 | 19 | 4 | 5 | 16 | 19 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.5) | **68** | 6 | 61 | 6 | 53 | 6 | 65 | 67 | 5 | 5 | 59 | 64 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.75) | **96** | 8 | 93 | 8 | 90 | 7 | **96** | **96** | 8 | 7 | 94 | **96** |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(1) | **100** | 15 | **100** | 14 | 99 | 14 | **100** | **100** | 15 | 14 | **100** | **100** |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(2) | **100** | 93 | **100** | 91 | **100** | 87 | **100** | **100** | 92 | 92 | **100** | **100** |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.25) | **61** | 14 | 55 | 15 | 51 | 14 | 59 | **61** | 15 | 14 | 57 | **61** |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.5) | 6 | **15** | 5 | **15** | 5 | 13 | 5 | 5 | 14 | 14 | 6 | 5 |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_2$(0.5) | 86 | **100** | 91 | 99 | 92 | 98 | 86 | 86 | 99 | 99 | 97 | 95 |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_2$(0.75) | 10 | **75** | 11 | **75** | 12 | 70 | 8 | 11 | 74 | 73 | 22 | 18 |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_3$(0.25) | 64 | 90 | 73 | 88 | 73 | 82 | 65 | 65 | **92** | 91 | 78 | 77 |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_4$(0.33) | 9 | 90 | 21 | 87 | 29 | 83 | 10 | 8 | **93** | 91 | 27 | 23 |
| 宾$_1$(0.25) | 6 | 13 | 6 | 13 | 5 | 12 | 5 | 6 | **14** | **14** | 6 | 6 |
| 宾$_1$(0.5) | 5 | 45 | 6 | 44 | 6 | 39 | 5 | 5 | **48** | 47 | 10 | 7 |
| $\mathrm{Bing}_1$(1) | 6 | 98 | 8 | 98 | 9 | 96 | 5 | 6 | **99** | **99** | 37 | 26 |
| $\mathrm{Bing}_2$(0.1) | 5 | **17** | 6 | **17** | 5 | 16 | 5 | 5 | **17** | **17** | 6 | 6 |
| $\mathrm{Bing}_2$(0.25) | 6 | 84 | 7 | 82 | 7 | 76 | 5 | 6 | **86** | 85 | 19 | 13 |
| $\mathrm{LP}_3$(0.1) | 5 | 5 | 5 | **6** | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| $\mathrm{LP}_4$(0.1) | 4 | **5** | **5** | **5** | 4 | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** |
| $\mathrm{LP}_3$(0.5) | 5 | 4 | 8 | 6 | **10** | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 |
| $\mathrm{LP}_4$(0.5) | 6 | 5 | 6 | **7** | 6 | **7** | 5 | 5 | 5 | 6 | 5 | 5 |
| $\mathrm{LP}_3$(1) | 5 | 5 | 20 | 5 | **33** | 5 | 7 | 5 | 5 | 5 | 10 | 7 |
| $\mathrm{LP}_4$(1) | 5 | 4 | 6 | 10 | 6 | **17** | 5 | 6 | 5 | 9 | 7 | 5 |

**表4：** $= 100$ 的经验功效，其中$n$ 和$d = 3$。

| 备择假设 \ Test | $T_{n,1}$ | $T_{n,2}$ | $T_{n,3}$ | $T_{n,4}$ | $T_{n,5}$ | $T_{n,6}$ | $A_n$ | $R_n^{模}$ | $B_n$ | $G_n$ | $CA_n^{100}$ | $\mathrm{CvM}_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{U}\left(\mathcal{S}^{d-1}\right)$ | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.05) | 5 | 4 | **6** | 4 | 5 | 5 | 4 | 4 | **6** | **6** | 5 | 5 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.1) | **6** | 4 | **6** | 4 | **6** | 4 | 5 | 5 | **6** | **6** | **6** | 5 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.25) | **11** | 4 | **11** | 5 | 8 | 5 | 10 | **11** | 6 | 6 | 9 | 10 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.5) | **37** | 5 | 31 | 6 | 22 | 4 | 34 | 33 | 6 | 6 | 28 | 33 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.75) | **73** | 5 | 63 | 5 | 49 | 5 | 71 | 72 | 7 | 7 | 60 | 71 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(1) | **94** | 7 | 89 | 7 | 78 | 7 | **94** | **94** | 8 | 9 | 88 | **94** |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(2) | **100** | 66 | **100** | 58 | **100** | 50 | **100** | **100** | 58 | 57 | **100** | **100** |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.25) | 33 | 7 | 30 | 8 | 24 | 8 | 33 | **34** | 8 | 8 | 28 | **34** |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.5) | 4 | **7** | 5 | **7** | 5 | **7** | 5 | 6 | **7** | **7** | 4 | 4 |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_2$(0.5) | 89 | **96** | 94 | 95 | 92 | 92 | 90 | 90 | 94 | 94 | 92 | 93 |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_2$(0.75) | 6 | **54** | 7 | 53 | 10 | 46 | 5 | 5 | 50 | 51 | 7 | 7 |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_3$(0.25) | 72 | 65 | **77** | 61 | 72 | 52 | 73 | 72 | 72 | 71 | 69 | **77** |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_4$(0.33) | 23 | 71 | 36 | 66 | 40 | 59 | 24 | 23 | 81 | **82** | 27 | 32 |
| $\mathrm{Bing}_1(0.25)$ | 5 | 14 | 5 | 14 | 6 | 13 | 5 | 5 | 16 | **17** | 5 | 5 |
| $\mathrm{Bing}_1(0.5)$ | 5 | 55 | 7 | 48 | 8 | 42 | 5 | 5 | **65** | **65** | 7 | 10 |
| $\mathrm{Bing}_1(1)$ | 5 | **100** | 12 | **100** | 18 | 99 | 6 | 6 | **100** | **100** | 25 | 25 |
| $\mathrm{Bing}_2(0.1)$ | 4 | 13 | 6 | 11 | 5 | 10 | 5 | 5 | 14 | **15** | 5 | 6 |
| $\mathrm{Bing}_2(0.25)$ | 6 | 76 | 8 | 70 | 10 | 62 | 6 | 5 | 79 | **80** | 9 | 9 |
| $\mathrm{LP}_3(0.1)$ | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** |
| $\mathrm{LP}_4(0.1)$ | **5** | 4 | **5** | 4 | 4 | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** |
| $\mathrm{LP}_3(0.5)$ | **5** | 4 | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** |
| $\mathrm{LP}_4(0.5)$ | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** |
| $\mathrm{LP}_3(1)$ | 5 | 5 | **7** | 5 | **7** | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| $\mathrm{LP}_4(1)$ | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | **6** | 5 | 5 | 4 | 4 | 5 | 5 |

**表5:** $= 100$ 和$d = 5$的经验功效。

| 备择假设 \ Test | $T_{n,1}$ | $T_{n,2}$ | $T_{n,3}$ | $T_{n,4}$ | $T_{n,5}$ | $T_{n,6}$ | $A_n$ | $R_n^{\text{模}}$ | $B_n$ | $G_n$ | $CA_n^{100}$ | $\text{CvM}_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{U}\left(\mathcal{S}^{d-1}\right)$ | 5 | 5 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 4 | 5 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.05) | 5 | 5 | **6** | **6** | 5 | **6** | 4 | **6** | 4 | 4 | 3 | 4 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.1) | 5 | 5 | 5 | **6** | 5 | **6** | 5 | **6** | 4 | 5 | 4 | 5 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.25) | **7** | 6 | **7** | 6 | 6 | 6 | 6 | **7** | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.5) | 14 | 5 | 12 | 6 | 9 | 6 | 13 | **15** | 4 | 4 | 9 | 12 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.75) | 28 | 6 | 23 | 6 | 15 | 6 | 29 | **30** | 4 | 4 | 18 | 27 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(1) | 53 | 5 | 40 | 6 | 25 | 7 | 51 | **54** | 5 | 5 | 33 | 51 |
| 冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(2) | **100** | 15 | 98 | 13 | 88 | 11 | **100** | **100** | 12 | 12 | 96 | **100** |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.25) | 14 | 5 | 12 | 5 | 9 | 6 | 12 | **15** | 6 | 6 | 10 | 14 |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_1$(0.5) | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | **6** | 4 | 4 |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_2$(0.5) | 77 | 56 | **80** | 47 | 68 | 33 | 76 | 77 | 47 | 47 | 61 | 78 |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_2$(0.75) | 6 | **16** | 8 | 14 | 9 | 11 | 5 | 7 | 14 | 14 | 5 | 6 |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_3$(0.25) | 57 | 21 | 56 | 18 | 40 | 14 | 56 | **60** | 19 | 19 | 39 | 58 |
| 混合冯·米塞斯-费舍尔分布$_4$(0.33) | 29 | 29 | 32 | 24 | 26 | 19 | 28 | **33** | 29 | 28 | 20 | 30 |
| $\text{Bing}_1$(0.25) | 5 | 14 | 7 | 13 | 6 | 11 | 5 | 6 | **20** | **20** | 5 | 6 |
| $\text{Bing}_1$(0.5) | 5 | 61 | 10 | 55 | 12 | 42 | 6 | 5 | **84** | **84** | 6 | 8 |
| $\text{Bing}_1$(1) | 6 | **100** | 26 | **100** | 38 | **100** | 6 | 6 | **100** | **100** | 10 | 21 |
| $\text{Bing}_2$(0.1) | 5 | 9 | 5 | 8 | 6 | 8 | 5 | 6 | **10** | **10** | 5 | 6 |
| $\text{Bing}_2$(0.25) | 5 | 65 | 9 | 56 | 11 | 43 | 5 | 5 | **66** | 65 | 5 | 7 |
| $\text{LP}_3$(0.1) | 5 | **6** | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | **6** | 5 | 4 | 5 |
| $\text{LP}_4$(0.1) | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | **6** |
| $\text{LP}_3$(0.5) | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | 4 | **5** |
| $\text{LP}_4$(0.5) | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | 4 | **5** | **5** |
| $\text{LP}_3$(1) | 5 | 5 | **6** | 5 | 5 | **6** | **6** | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| $\text{LP}_4$(1) | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | 4 | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** |

**表 6：** $n = 100$ 和 $d = 10$ 的经验功效。

# 7 数据示例

作为一个真实数据示例，我们考虑月球表面陨石坑的中点。分析的数据包含在月球陨石坑数据库 *v1 Salamuni´ccar* 中，数据库由以下机构提供:

> https://astrogeology.usgs.gov/search/map/Moon/Research/Craters/GoranSalamuniccar_MoonCraters,

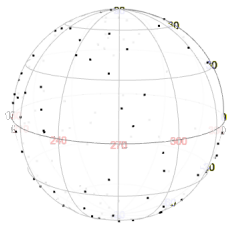

**图1：** 直径至少为150千米的陨石坑中点

| Test | $T_{n,1}$ | $T_{n,2}$ | $T_{n,3}$ | $T_{n,4}$ | $T_{n,5}$ | $T_{n,6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p值 | 0.001 | 0.364 | 0.001 | 0.272 | 0.004 | 0.230 |

**表7：** 检验统计量 $p$值 $T_{n,\beta}$ 在多个参数 $\beta$ 下的经验值（1000次蒙特卡罗运行）。

另请参见 [39, 40] 网页，了解有关该数据集来源的更多信息。目前，所采用的 LU78287GT 目录包含 78287 个陨石坑，是最完整的月球撞击陨石坑目录。该目录对直径大于 8 km 的陨石坑实现了全球完整收录，且每个陨石坑至少提供纬度、经度和直径信息。由于如此大量的数据显然会导致均匀性假设被拒绝，我们通过将陨石坑的直径限制为至少 150千米，选取这些陨石坑的中点作为子集。所得数据集包含 119 个数据点，见图1。我们按照第 6 节中的相同流程，对球面上的$m = 5000$个点实施了 (1.3) 中介绍的检验。为了给出 $p$ 值，我们在球面上模拟了 1000 组均匀分布的数据，每组样本量相同，并计算了$T_{n,\beta}$ 低于一次模拟所得检验值的频率。由此可估计该检验的$p$值。计算结果列于表7。可以看出，对于 $\beta$的奇数取值，这些检验在 1% 的显著性水平下明确拒绝均匀性假设；而对于偶数取值，则未能拒绝。结合第5节和第6节的模拟结果，单峰分布（如 vMF分布）似乎是一个值得考虑的合适模型。

# 8 结论与展望

我们提出了一类针对$d$维超球面的均匀性检验，这类检验基于最大投影的幂次，并涵盖了雷利和宾厄姆的经典均匀性检验，以及 Malkovich 和 Afifi 意义下的多元偏度与峰度度量。我们证明，这些检验在连续函数空间中弱收敛于具有分区协方差结构的中心高斯过程的平方最大值。我们推导了相应积分算子的特征值，并利用最大特征值推导出局部 Bahadur 效率。我们证明了这些检验具有一致性，并研究了其在相邻备择假设下的表现如何随幂参数的奇偶性而变化。模拟结果表明，这些新检验足以与经典方法相抗衡。

我们在文章结尾指出尚未解决的问题和未来研究的新方向。目前的工作并未涉及熟知备择假设（如冯·米塞斯–费舍尔分布或沃森分布）下 $(T_{n,\beta})_{\beta\in\mathbb{N}}$ 的极限分布问题。在这一背景下，我们仅推导了局部 Bahadur 效率，而这有一个主要缺陷：平凡的局部 Bahadur 效率（例如 $T_{n,}2$ 与冯·米塞斯–费舍尔分布的情形）并不能说明该统计量无法识别相应的备择假设。这主要是因为局部 Bahadur 效率并未说明一致性的速率，而统计量仍可能以某种速率识别出备择假设。例如， [18] 的作者证明，具有与 $T_{n,}2$ 相似结构的宾厄姆检验，在某些一致性速率下能够可靠地识别冯·米塞斯–费舍尔分布。因此，探讨一致性速率这一问题可能颇有意义，甚至可以考虑非常一般的备择假设，例如旋转对称分布。未来研究的另一个方向可以是 Le Cam 意义下的局部渐近正态性问题。具有这一性质的统计模型可以构造某类最优检验。对于某些旋转对称分布，这一点已在雷利检验中实现，参见 [11]。既然我们为第 3 节中的统计模型建立了 Le Cam 理论的一些结果，便可以在此基础上继续研究。在第 6 节中，我们提出了一种新的球面分布参数族，即勒让德多项式分布；数值模拟显示它具有一些有趣的性质。由于其参数化方式简单，使用和模拟都相对容易。不过，目前我们对这种分布的性质和实用性还缺乏足够深入的认识，尤其是在高维情形下，因此这也是一个值得进一步研究的方向。针对单调旋转对称备择假设检验均匀性的高维结果

在 [11] 中，给出了 $T_{n,}1$ 的首批结果，因为该检验等价于雷利检验。关于$\beta = 2$ 的类似结果可能与 [12], 有关，而对于更大的$\beta$，问题仍未解决。

## 致谢

作者感谢 Norbert Henze 进行了富有成效的讨论并提出了许多建议，这些建议促使本文得以改进。此外，作者感谢 Michael A. Klatt 建议分析月球陨石坑的位置，并提供了必要的参考文献。

## 参考文献

[1] B. Ajne. 圆周分布均匀性的一个简单检验。*Biometrika*，55(2):343–354，1968。[2] A. Araujo 和 E. Gin´e。实值与巴拿赫空间值随机变量的中心极限定理。Wiley 概率与数理统计丛书。John Wiley & Sons, Inc.，1980。[3] K. E. Atkinson 和 W. Han。单位球面上的球谐函数与逼近：导论。数学讲义；2044。Springer，2012。[4] S. J. Axler、P. Bourdon 和 W. Ramey。调和函数理论。数学研究生教材；137。Springer，2001。[5] R. R. Bahadur。估计量与检验统计量的收敛速率。《数学统计年刊》，38(2):303–324，1967。[6] R. R. Bahadur。统计学中的一些极限定理。CBMS-NSF 应用数学区域会议丛书；4。工业与应用数学学会，1971。[7] J. A. Baker。球体上的积分与散度定理。*The American Math-ematical Monthly*，104(1):36–47，1997。[8] L. Baringhaus 和 N. Henze。基于投影的多元偏度与峰度测度的极限分布。*JournalofMultivariateAnalysis*，38(1):51–69，1991。[9] C. Bingham。球面上的一种对跖对称分布。*The Annals ofStatistics*，2(6):1201–1225，1974。

[10] J. A. Cuesta-Albertos、A. Cuevas 和 R. Fraiman。方向数据与组成数据的投影检验。*Statistics andComputing*，19(4):367–380，2009。[11] C. Cutting、D. Paindaveine 和 T. Verdebout。检验高维球面上的均匀性，以单调旋转对称备择假设为对立。*The Annalsof Statistics*，45(3):1024–1058，2017。[12] C. Cutting、D. Paindaveine 和 T. Verdebout。检验高维球面上的均匀性：宾厄姆检验在非零假设下的表现。*Annalesde l'InstitutHenri Poincar´e, Probabilit´eset Statistiques*，58(1):567–602，2022。[13] F. Dai 和 Y. Xu。球面与球体上的逼近理论与调和分析。Springer 数学专著丛书。Springer，2013。[14] P. J. Diggle、N. I. Fisher 和 A. J. Lee。球面数据均匀性检验的比较。*AustralianJournalof Statistics*，27(1):53–59，1985。[15] V. Dutordoir、N. Durrande 和 J. Hensman。采用球谐特征的稀疏高斯过程。载于 H. D. III 和 A. Singh（编），第*37*届国际机器学习大会论文集，《Proceedings of Machine Learning Research》；119，2793–2802页。PMLR，2020。[16] B. Ebner、N. Henze 和 J. E. Yukich。通过最近邻距离在平坦与弯曲空间上进行多元拟合优度检验。*JournalofMultivariateAnalysis*，165:231–242，2018。[17] A. Figueiredo。超球面上均匀性检验的比较。*Statistics* & *Prob-ability Letters*，77(3):329–334，2007。[18] E. Garc´ıa-Portugu´es、D. Paindaveine 和 T. Verdebout。局部旋转对称备择假设下用于检验各向同性的 Sobolev 检验的功效，2021。arXiv:2108.09874v1。[19] E. Garc´ıa-Portugu´es、P. Navarro-Esteban 和 J. A. Cuesta-Albertos。超球面上的一种 Cram´ér–von Mises 均匀性检验，2020。arXiv:2008.10767。[20] E. Garc´ıa-Portugu´es 和 T. Verdebout。超球面均匀性检验综述，2018。arXiv:1804.00286。[21] E. M. Gin´e。基于 Sobolev 范数的紧黎曼流形均匀性不变检验。*The Annals of Statistics*，3:1243–1266，1975。

[22] H. Groemer. 傅里叶级数与球谐函数的几何应用. 数学及其应用百科全书；61. 剑桥大学出版社，1996。[23] W. R. Inc. Mathematica，版本 12.0. 伊利诺伊州尚佩恩，2019。[24] S. R. Jammalamadaka、S. Meintanis 和 T. Verdebout. 关于圆上的一致性索伯列夫检验及其在球面上的推广. 伯努利，26(3):2226 – 2252，2020。[25] S. R. Jammalamadaka 和 A. Sen Gupta. 圆周统计学专题，第 5 卷. 新加坡：世界科学出版社，2001。[26] J. T. Kent、A. M. Ganeiber 和 K. V. Mardia. 方向数据分析中模拟宾厄姆分布及相关分布的新方法及其应用，2013. arXiv:1310.8110v1。[27] N. H. Kuiper. 关于圆上随机点的检验. 荷兰皇家科学院. 论文集. *A*辑. 数学探究，63:38–47，1960。[28] M. Ledoux 和 M. Talagrand. 巴拿赫空间中的概率 – 等周问题与随机过程. 现代数学综述系列；23. Springer，2002。[29] C. Ley 和 T. Verdebout. 现代方向统计学. Chapmann & Hall/CRC 跨学科统计学系列. CRC 出版社，2017。[30] C. Ley 和 T. Verdebout，编. 应用方向统计学：现代方法与案例研究. 佛罗里达州博卡拉顿：CRC 出版社，2019。[31] J. F. Malkovich 和 A. A. Afifi. 关于多元正态性的检验. 美国统计学会会刊，68(341):176–179，1973。[32] A. Manzotti 和 A. J. Quiroz. 用于检验多元正态性的二次型中的球谐函数. *Test*，10(1):87–104，2001。[33] K. V. Mardia 和 P. E. Jupp. 方向统计学. 约翰·威立父子公司有限公司，第 2 版，2000。[34] C. M¨uller. 欧几里得空间中的球面对称性分析. 应用数学科学；129. Springer，1998。[35] J. Nikitin. 非参数检验的渐近效ffi率. 剑桥大学出版社，1995。

[36] R 核心团队. *R*：统计计算语言与环境. R 统计计算基金会，维也纳，奥地利，2019。

[37] J. Rao. 圆上的若干均匀性检验的Bahadur效率。《数学统计年鉴》，43(2):468–479，1972。

[38] L. Rayleigh. 关于一维、二维或三维中的随机振动和随机飞行问题。《伦敦、爱丁堡和都柏林哲学杂志与科学期刊》，37(220):321–347，1919。

[39] G. Salamuni´ccar、S. Lonˇcari´c 和 E. Mazarico。利用基于撞击坑形状的插值撞击坑检测算法处理地形数据，编制了月球和火星撞击坑目录 LU60645GT 和 MA132843GT。《行星与空间科学》，60(1):236–247，2012。

[40] G. Salamuni´ccar、S. Lonˇcari´c、P. Pina、L. Bandeira 和 J. Saraiva。结合地形和光学图像进行撞击坑检测的综合方法，以及新的 PH9224GT 火卫一撞击坑目录。《空间研究进展》，53(12):1798–1809，2014。

[41] B. Sch¨olkopf 和 A. J. Smola。《核方法学习——支持向量机、正则化、优化及其他》。自适应计算与机器学习。麻省理工学院出版社，2010 年。

[42] E. M. Stein 和 G. Weiss。《欧几里得空间上的傅里叶分析导论》。普林斯顿大学出版社，1971 年。

[43] G. S. Watson。圆上的拟合优度检验。*Biometrika*，48:109–114，1961 年。

# A 关于$d$维勒让德多项式与球谐函数的一些事实

一个$d$维的$k \in \mathbb{N}_0$阶球谐函数，是将一个$d$维$k$ $\mathcal{S}^{d-1}$阶调和多项式限制在 $\mathcal{S}^{d-1}$ 上得到的。令 $\mathcal{H}_k(\mathcal{S}^{d-1})$ 表示$d$维$k \in \mathbb{N}_0$阶球谐函数构成的空间，并令 $\nu_d(k) = \dim(\mathcal{H}_k(\mathcal{S}^{d-1}))$。我们有

$$\nu_d(k) = \binom{d+k-1}{k} - \binom{d+k-3}{k-2} = \frac{d+2k-2}{d+k-2}\binom{d+k-2}{d-2}, \tag{A.1}$$

其中，第一个方程后的第二个二项式系数在$k-2<0$时为 0，而第二个方程后的分数在$d=2$且$k=0$时为 1。$\nu_d(k)$ 有几个值得注意的特例：

$$\nu_d(0)=1,\quad \nu_d(1)=d,\quad \nu_d(2)=\frac{(d+2)(d-1)}{2},\quad \nu_2(k)=2\,(k>0),\quad \nu_3(k)=2k+1, \tag{A.2}$$

关于球谐函数的详细信息，参见 [22], 第 3 节。球谐函数理论中的两个重要理论结果是：球谐函数有限线性组合在$L^2(\mathcal{S}^{d-1},\mathrm{d}\sigma)$中的密度，以及不同阶球谐函数的正交性，可表述如下。

**定理 A.1** ([42], 第4章，推论 2.3)。由$\bigcup_{k=0}^{\infty}\mathcal{H}_k(\mathcal{S}^{d-1})$ 中的元素构成的有限线性组合所组成的集合在 $L^2(\mathcal{S}^{d-1},d\sigma)$中稠密。

**命题 A.2** ([42], 第4章，推论 2.4)。对于 $\Phi\in\mathcal{H}_k(\mathcal{S}^{d-1}),\Psi\in\mathcal{H}_l(\mathcal{S}^{d-1})$，当 $k\neq l$ 时，有

$$\langle\Phi,\Psi\rangle_{L^2}=\int_{\mathcal{S}^{d-1}}\Phi(\omega)\Psi(\omega)\,d\sigma(\omega)=0.$$

根据这些结论，可以将函数$f\in L^2(\mathcal{S}^{d-1},\mathrm{d}\sigma)$唯一地表示为球谐函数级数。为此，对于每个$k\in\mathbb{N}_0$，我们考虑 $\mathcal{H}_k(\mathcal{S}^{d-1})$ 的一组标准正交基 $\{\phi_{k,1},\ldots,\phi_{k,\nu_d(k)}\}$。那么 $\bigcup_{k=0}^{\infty}\{\phi_{k,1},\ldots,\phi_{k,\nu_d(k)}\}$是$L^2(\mathcal{S}^{d-1},\mathrm{d}\sigma)$的一组标准正交基，并且我们可以写成

$$f\overset{L^2}{=}\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_k \tag{A.3}$$

其中 $\Psi_k=\sum_{j=1}^{\nu_d(k)}\langle f,\phi_{k,j}\rangle_{L^2}\phi_{k,j}\in\mathcal{H}_k(\mathcal{S}^{d-1})$。以下定理称为 Funk–Hecke 定理，并且经常使用。

**定理 A.3** (Funk–Hecke 定理，[22], 定理 3.4.1)。设 $k\in\mathbb{N}_0$ 且 $u\in\mathcal{S}^{d-1}$。若 $\Lambda$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的有界可积函数，且 $\phi\in\mathcal{H}_k(\mathcal{S}^{d-1})$，则函数 $\Lambda(u^\top\cdot)\colon\mathcal{S}^{d-1}\to\mathbb{R}$；$x\mapsto\Lambda(u^\top x)$ 可积，并且

$$\int_{\mathcal{S}^{d-1}}\Lambda(u^\top x)\,\phi(x)\,d\sigma(x)=\lambda_k\phi(u)$$

*with*

$$\lambda_k=|\mathcal{S}^{d-2}|\int_{-1}^{1}P_k^d(t)\Lambda(t)(1-t^2)^{(d-3)/2}\,dt,$$

其中 $P_k^d$是 $d$ 维、阶为 $k$ 的勒让德多项式。

高维勒让德多项式的存在性和唯一性由下述定理给出。

**定理 A.4** ([22], 定理 3.3.3)。 对于每个 $k \in \mathbb{N}_0$，都恰有一个多项式 $P_k^d$定义在 $[-1,1]$上，具有如下性质：如果 $\{\phi_1,\ldots,\phi_{\nu_d(k)}\}$是 $\mathcal{H}_k(\mathcal{S}^{d-1})$的标准正交基，那么

$$\sum_{i=1}^{\nu_d(k)} \phi_i(u)\phi_i(v) = \frac{\nu_d(k)}{|\mathcal{S}^{d-1}|} P_k^d(u^\top v), \quad u,v \in \mathcal{S}^{d-1}.$$

$P\,dk$ 的次数为 $k$，且函数 $P\,dk\,(u^\top\cdot)\colon \mathcal{S}^{d-1} \to \mathbb{R}; v \mapsto P\,dk\,(u^\top v)$ 在 $u$ 固定时是一个 $k$ 阶 $d$ 维球谐函数。此外，当 $k$ 为偶数时，$P_k^d$是偶函数；当 $k$ 为奇数时，$P_k^d$是奇函数。

多项式 $P_k^d$称为 k 阶$d$维勒让德多项式。不同阶的勒让德多项式满足某些正交性质。为陈述这些性质，我们引入加权内积

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)^{(d-3)/2}\,\mathrm{d}t \tag{A.4}$$

对于有界且可积函数$f$、g，定义在 $[-1,1]$ 上。下面的命题表明，勒让德多项式关于此标量积是正交的。

**命题 A.5** ([22], 命题 3.3.6)。 设 $k,l \in \mathbb{N}_0$。若 $P\,dk$ 和 $P_l^d$分别是 $k$ 阶和 $l$ 阶 $d$ 维勒让德多项式，则

$$\left\langle P_k^d, P_l^d \right\rangle = \delta_{kl}\frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{\nu_d(k)\,|\mathcal{S}^{d-2}|} = \delta_{kl}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma((d-1)/2)}{\nu_d(k)\,\Gamma(d/2)}.$$

**注 A.6** ([22], 引理 3.3.5)。 设$k \in \mathbb{N}_0$。对于$d$维、阶为$k$的勒让德多项式，有 $|P\,dk(t)| \le 1$，对所有$t \in [-1,1]$均成立，且$P_k^d(1) = 1$。

下面的结果给出了计算任意维数和阶的勒让德多项式的两个显式公式。

**命题 A.7** ([34], 第 1.2 节，S.16 和引理 1.6.1)。 对于 $k \in \mathbb{N}_0$，有

$$P_k^d(t) = k!\,\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2}\rfloor}\left(-\frac{1}{4}\right)^l \frac{(1-t^2)^l t^{k-2l}}{l!\,(k-2l)!\,\Gamma(l+\frac{d-1}{2})} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2}\rfloor} a_{2l,k}\,t^{k-2l}, \quad t \in [-1,1],$$

*with*

$$a_{0,0} = 1,$$
$$a_{2l,k} = \left(-\frac{1}{4}\right)^l \frac{\Gamma(d-1)}{\Gamma(d/2)}\frac{2^{k-1}k!}{(k+d-3)!}\frac{\Gamma(k-l+(d-2)/2)}{l!(k-2l)!}, \quad l \in \{0,\ldots,\lfloor k/2\rfloor\},\ k>0,$$

其中，$\lfloor\cdot\rfloor$是下高斯取整符号。

利用这些公式，可以直接求出前七个勒让德多项式，如下所示：

$$P_0^d(t) = 1, \quad P_1^d(t) = t,$$

$$P_2^d(t) = \frac{1}{d-1}[dt^2 - 1],$$

$$P_3^d(t) = \frac{1}{d-1}[(d+2)t^3 - 3t],$$

$$P_4^d(t) = \frac{1}{(d-1)(d+1)}[(d+2)(d+4)t^4 - 6(d+2)t^2 + 3],$$

$$P_5^d(t) = \frac{1}{(d-1)(d+1)}[(d+4)(d+6)t^5 - 10(d+4)t^3 + 15t],$$

$$P_6^d(t) = \frac{1}{(d-1)(d+1)(d+3)}[(d+4)(d+6)(d+8)t^6 - 15(d+4)(d+6)t^4 + 45(d+4)t^2 - 15].$$

反过来，我们可以将数 $t \in [-1,1]$ 的任意$m$次幂，即$m \in \mathbb{N}_0$，表示为勒让德多项式的线性组合

$$t^m = \sum_{j=0}^{m} c_{j,d}(m) P_j^d(t), \quad t \in [-1,1], \tag{A.5}$$

其系数为$c_{j,\,d}(m)$，它们仅取决于$j$、$d$和$m$。经过繁复计算，可得这些系数的显式形式。

**命题 A.8.** 设 $k$，$l \in \mathbb{N}_0$满足 $k \geq 2l$ 且 $[l] = 1, \ldots, l$。那么，利用命题 *A.7* 中的系数 $a_{2l,\,k}$，有

$$c_{k-2l,d}(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{a_{0,k}}, & \text{for } l = 0, \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{l} \sum_{\substack{(l_1,\ldots,l_r)\in[l]^r \\ l_1+\cdots+l_r=l}} (-1)^r \frac{a_{2l_1,k} a_{2l_2,k-2l_1} \cdots a_{2l_r,k-2(l_1+\cdots+l_{r-1})}}{a_{0,k} a_{0,k-2l_1} \cdots a_{0,k-2l}}, & \text{for } l > 0, \end{cases}$$

其中 $l_0 = 0$。对于给定的 $k \in \mathbb{N}_0$，这些是式(A.5) 中唯一非零的系数。由命题 *2.3 i)* 的证明，特别可得，对于所有 $\beta \in \mathbb{N}$，$c_{0,\,d}(\beta) = \psi_d(\beta)$。

证明。当 $k = 0$ 时，该结论显然成立，因此设 $k \in \mathbb{N}$。若 $l = 0$，则命题 A.7 中的第二种表示给出

$$t^k = \frac{1}{a_{0,k}} P_k^d(t) - \frac{a_{2,k}}{a_{0,k}} t^{k-2} - \cdots - \frac{a_{2g(k),k}}{a_{0,k}}, \tag{A.6}$$

其中 $g(k) = \lfloor k/2 \rfloor$。由此可得 $c_{k,d}(k) = 1/a_{0,k}$，因为根据 (A.5)，次数较低的单项式不含阶为 $k$ 的勒让德多项式。设对于某个满足 $k \geq 2l$ 的 $l \in \mathbb{N}$，该结论对所有 $j \in \{0, 1, ..., l-1\}$ 均成立。接下来，我们将证明该结论对这个 $l$ 成立，并借助强归纳原理得出结论。为便于阅读，偶尔使用省略号 $\cdots$。

我们反复将较低次幂对应的方程 (A.6) 代入方程 (A.6) 中。由归纳假设可得

$$\begin{aligned} t^k &= c_{k,d}(k)P_k^d(t) - \frac{a_{2,k}}{a_{0,k}}\left[\frac{1}{a_{0,k-2}}P_{k-2}^d(t) - \frac{a_{2,k-2}}{a_{0,k-2}}t^{k-4} - \cdots - \frac{a_{2(l-1),k-2}}{a_{0,k-2}}t^{k-2l} - \cdots - \frac{a_{2g(k-2),k-2}}{a_{0,k-2}}\right] \\ &\quad - \frac{a_{4,k}}{a_{0,k}}t^{k-4} - \cdots - \frac{a_{2l,k}}{a_{0,k}}t^{k-2l} - \cdots - \frac{a_{2g(k),k}}{a_{0,k}} \\ &= c_{k,d}(k)P_k^d(t) + c_{k-2,d}(k)P_{k-2}^d(t) - \left(\frac{a_{4,k}}{a_{0,k}} + c_{k-2,d}(k)a_{2,k-2}\right)t^{k-4} \\ &\quad - \cdots - \left(\frac{a_{2l,k}}{a_{0,k}} + c_{k-2,d}(k)a_{2(l-1),k-2}\right)t^{k-2l} - \cdots, \end{aligned}$$

因为

$$c_{k-2,d}(k) = \sum_{r=1}^{1}\sum_{\substack{(l_1,\ldots,l_r)\in[1]^r \\ l_1+\cdots+l_r=1}}(-1)^r\frac{a_{2l_1,k}a_{2l_2,k-2l_1}\cdots a_{2l_r,k-2(l_1+\cdots+l_{r-1})}}{a_{0,k}a_{0,k-2l_1}\cdots a_{0,k-2l}} = -\frac{a_{2,k}}{a_{0,k}a_{0,k-2}}.$$

此外，我们有

$$\begin{aligned} c_{k-4,d}(k) &= \sum_{r=1}^{2}\sum_{\substack{(l_1,\ldots,l_r)\in[2]^r \\ l_1+\cdots+l_r=2}}(-1)^r\frac{a_{2l_1,k}a_{2l_2,k-2l_1}\cdots a_{2l_r,k-2(l_1+\cdots+l_{r-1})}}{a_{0,k}a_{0,k-2l_1}\cdots a_{0,k-2l}} = -\frac{a_{4,k}}{a_{0,k}a_{0,k-4}} + \frac{a_{2,k}a_{2,k-2}}{a_{0,k}a_{0,k-2}a_{0,k-4}} \\ &= -\left(\frac{a_{4,k}}{a_{0,k}} + c_{k-2,d}(k)a_{2,k-2}\right)\frac{1}{a_{0,k-4}}, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} t^k &= c_{k,d}(k)P_k^d(t) + c_{k-2,d}(k)P_{k-2}^d(t) + c_{k-4,d}(k)P_{k-4}^d(t) \\ &\quad - \cdots - \left(\frac{a_{2l,k}}{a_{0,k}} + c_{k-2,d}(k)a_{2(l-1),k-2} + c_{k-4,d}(k)a_{2(l-2),k-4}\right)t^{k-2l} - \cdots \end{aligned}$$

若我们继续迭代这一过程，则可得到

$$t^k = c_{k,d}(k)P_k^d(t) + \cdots - \left(\frac{a_{2l,k}}{a_{0,k}a_{0,k-2l}} + \sum_{i=1}^{l-1}c_{k-2i,d}(k)\frac{a_{2(l-i),k-2i}}{a_{0,k-2l}}\right)P_{k-2l}^d(t) - \cdots.$$

对于下文，我们将命题中的商简记为

$$q_l(l_1,\ldots,l_r) = \frac{a_{2l_1,k}a_{2l_2,k-2l_1}\cdots a_{2l_r,k-2(l_1+\cdots+l_{r-1})}}{a_{0,k}a_{0,k-2l_1}\cdots a_{0,k-2l}}.$$

再次利用归纳假设可得，对于每个$i \in \mathbb{N}$满足$i \leq l-1$

$$c_{k-2i,d}(k)\frac{a_{2(l-i),k-2i}}{a_{0,k-2l}} = \sum_{s=1}^{i} \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_s)\in[i]^s \\ i_1+\cdots+i_s=i}} (-1)^s q_i(i_1,\dots,i_s)\frac{a_{2(l-i),k-2i}}{a_{0,k-2l}}$$

$$= \sum_{s=1}^{i} \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_s)\in[i]^s\times\{l-i\} \\ i_1+\cdots+i_{s+1}=l}} (-1)^s q_l(i_1,\dots,i_{s+1})$$

因此，最终

$$c_{k-2l,d}(k) = -\left(\frac{a_{2l,k}}{a_{0,k}a_{0,k-2l}} + \sum_{i=1}^{l-1} c_{k-2i,d}(k)\frac{a_{2(l-i),k-2i}}{a_{0,k-2l}}\right)$$

$$= -\left(\frac{a_{2l,k}}{a_{0,k}a_{0,k-2l}} + \sum_{i=1}^{l-1}\sum_{s=1}^{i} \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_s)\in[i]^s\times\{l-i\} \\ i_1+\cdots+i_{s+1}=l}} (-1)^s q_l(i_1,\dots,i_{s+1})\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{l} \sum_{\substack{(l_1,\dots,l_r)\in[l]^r \\ l_1+\cdots+l_r=l}} (-1)^r q_l(l_1,\dots,l_r),$$

由于第一项满足

$$-\frac{a_{2l,k}}{a_{0,k}a_{0,k-2l}} = \sum_{\substack{(l_1)\in[l]^1 \\ l_1=l}} (-1)^1 q_l(l_1).$$

在第二项中，我们对所有满足条件的元组求和：$(i_1,\dots,i_{s+1}) \in [i]^s \times \{l-i\}$满足$i_1+\cdots+i_{s+1}=l$对于$s=1,\dots,i; i=1,\dots,l-1$。这恰好等同于对所有满足条件的元组求和：$(l_1,\dots,l_r) \in [l]^r$满足$l_1+\cdots+l_r=l$对于$r=2,\dots,l$。□

对于最初的几次幂，我们有

$$t^0 = P_0^d(t), \quad t = P_1^d(t),$$

$$t^2 = \frac{d-1}{d}P_2^d(t) + \frac{1}{d},$$

$$t^3 = \frac{d-1}{d+2}P_3^d(t) + \frac{3}{d+2}P_1^d(t),$$

$$t^4 = \frac{(d-1)(d+1)}{(d+2)(d+4)}P_4^d(t) + \frac{6(d-1)}{d(d+4)}P_2^d(t) + \frac{3}{d(d+2)},$$

$$
\begin{aligned}
t^5 &= \frac{(d-1)(d+1)}{(d+4)(d+6)} P_5^d(t) + \frac{10(d-1)}{(d+2)(d+6)} P_3^d(t) + \frac{15}{(d+2)(d+4)} P_1^d(t), \\
t^6 &= \frac{(d-1)(d+1)(d+3)}{(d+4)(d+6)(d+8)} P_6^d(t) + \frac{15(d-1)(d+1)}{(d+2)(d+4)(d+8)} P_4^d(t) \\
&\quad + \frac{45(d-1)}{d(d+4)(d+6)} P_2^d(t) + \frac{15}{d(d+2)(d+4)}.
\end{aligned}
$$

# B 技术引理与证明

**引理 B.1**。如果 $U \sim \mathcal{U}\left(\mathcal{S}^{d-1}\right)$，那么

$$
\eta_\beta(b,c) = \mathbb{E}(b^\top U)^\beta (c^\top U)^\beta = \sum_{j=0}^{\beta} \frac{(c_{j,d}(\beta))^2}{\nu_d(j)} P_j^d(b^\top c), \quad b, c \in \mathcal{S}^{d-1}, \beta \in \mathbb{N}.
$$

证明。 由 Funk–Hecke 定理（定理 A.3）应用于球谐函数 $P_{dj}(c^\top \cdot)$: $\mathcal{S}^{d-1} \to \mathbb{R}$, $c \in \mathcal{S}^{d-1}$，以及单项式的表示式 (A.5)，即可得出

$$
\begin{aligned}
\eta_\beta(b,c) = \mathbb{E}(b^\top U)^\beta (c^\top U)^\beta &= \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|} \int_{\mathcal{S}^{d-1}} (b^\top \omega)^\beta (c^\top \omega)^\beta \, \mathrm{d}\sigma(\omega) \\
&= \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|} \int_{\mathcal{S}^{d-1}} (b^\top \omega)^\beta \sum_{j=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta) \, P_j^d(\omega^\top c) \, \mathrm{d}\sigma(\omega) \\
&= \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{|\mathcal{S}^{d-1}|} \sum_{j=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta) \, P_j^d(b^\top c) \int_{-1}^{1} t^\beta P_j^d(t) (1-t^2)^{(d-3)/2} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{|\mathcal{S}^{d-1}|} \sum_{j=0}^{\beta} \sum_{l=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta) \, c_{l,d}(\beta) \, P_j^d(b^\top c) \int_{-1}^{1} P_l^d(t) P_j^d(t) (1-t^2)^{(d-3)/2} \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

由于$d$维勒让德多项式的正交性质（见命题 A.5），我们可以得出

$$
\begin{aligned}
\eta_\beta(b,c) &= \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{|\mathcal{S}^{d-1}|} \sum_{j=0}^{\beta} \sum_{l=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta) \, c_{l,d}(\beta) \, P_j^d(b^\top c) \left\langle P_l^d, P_j^d \right\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{\beta} \sum_{l=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta) \, c_{l,d}(\beta) \, P_j^d(b^\top c) \, \frac{\delta_{jl}}{\nu_d(j)} = \sum_{j=0}^{\beta} \frac{(c_{j,d}(\beta))^2}{\nu_d(j)} P_j^d(b^\top c).
\end{aligned}
$$

□

**引理 B.2**。在$(\mathbb{P}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ 条件下，对于 $n \to \infty$

$$\log L_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(-\frac{\tau^2}{2}, \tau^2\right),$$

其中 $\tau^2 = \int_{\mathcal{S}^{d-1}} h^2(x)\sigma(x)\, dx < \infty$。

证明。 在$x_0 = 1$ 附近对对数进行泰勒展开，我们得到

$$\begin{aligned}\log L_n(U_{n1}, \ldots, U_{nn}) &= \sum_{j=1}^{n} \log\left(1 + \frac{h(U_{nj})}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left\{\frac{h(U_{nj})}{\sqrt{n}} - \frac{h^2(U_{nj})}{2n} + R_{n,j}\right\},\end{aligned}$$

with

$$R_{n,j} = \frac{1}{3!}\frac{2}{\left(1+\eta_{n,j}\right)^3}\frac{h^3(U_{n,j})}{n^{\frac{3}{2}}}, \tag{B.1}$$

其中 $|\eta_{n,j}| \le \frac{|h(U_{nj})|}{\sqrt{n}}$。由于$h$有界，我们有$\sum_{j=1}^{n} R_{n,j} = o_{\mathbb{P}^{(n)}}(1)$，且

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h^2\left(U_{n,j}\right)\right) \longrightarrow \tau^2 \text{ as well as } V\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h^2\left(U_{n,j}\right)\right) \longrightarrow 0$$

当$n \to \infty$时。该结论是林德伯格–费勒中心极限定理的推论。 □

接下来的命题将处理例 5.2、5.3 和 5.4 中的技术性计算。在给出证明之前，我们先介绍一些特殊函数及其性质，参见 [33], 附录 1。

第一类修正贝塞尔函数，阶为$p \ge 0$:

$$I_p(\kappa) = \frac{(\kappa/2)^p}{\Gamma(p+1/2)\Gamma(1/2)}\int_{-1}^{1} e^{\kappa t}(1-t^2)^{p-1/2}\,\mathrm{d}t, \quad \kappa > 0. \tag{B.2}$$

函数 $I_p$ 满足

$$I_p(\kappa) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(p+r+1)\Gamma(r+1)}\left(\frac{\kappa}{2}\right)^{2r+p}, \quad p \ge 0,\ \kappa > 0. \tag{B.3}$$

对于 $\kappa > 0$ 和 $p \ge 1$，我们有

$$\kappa I_p'(\kappa) = pI_p(\kappa) + \kappa I_{p+1}(\kappa), \quad I_0'(\kappa) = I_1(\kappa). \tag{B.4}$$

对于 $\kappa > 0$，令

$$A_d(\kappa) = \frac{I_{d/2}(\kappa)}{I_{d/2-1}(\kappa)}. \tag{B.5}$$

对于充分小的 $\kappa > 0$，我们有

$$A_d(\kappa) = \frac{\kappa}{d} - \frac{\kappa^3}{d^2(d+2)} + O(\kappa^5). \tag{B.6}$$

对于 $\kappa > 0$，我们有

$$A_d'(\kappa) = 1 - A_d^2(\kappa) - \frac{d-1}{\kappa} A_d(\kappa). \tag{B.7}$$

对于 $\kappa > 0$，令

$$a_d(\kappa) = 2\pi^{d/2} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{1-d/2} I_{d/2-1}(\kappa). \tag{B.8}$$

利用（B.3）中的级数展开，我们得到

$$a_d(\kappa) = 2\pi^{d/2} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{1-d/2} \left[\frac{1}{\Gamma(d/2)\Gamma(1)} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{d/2-1} + O(\kappa^{d/2+1})\right] \overset{\kappa\to 0^+}{\to} |\mathcal{S}^{d-1}|^+. \tag{B.9}$$

应用（B.4）可得，对于 $\kappa > 0$

$$\partial_\kappa[\log a_d(\kappa)] = \frac{a_d'(\kappa)}{a_d(\kappa)} = A_d(\kappa). \tag{B.10}$$

非负 $\kappa$对应的库默函数：

$$M(a, b, \kappa) = \frac{1}{B(a, b-a)} \int_{-1}^{1} e^{\kappa t^2} t^{2a-1} (1-t^2)^{b-a-1} \, \mathrm{d}t, \quad b > a > 0, \ \kappa \geq 0. \tag{B.11}$$

我们有

$$M(a, b, \kappa) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+r)\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b+r)} \frac{\kappa^r}{r!}, \quad b > a > 0, \ \kappa \geq 0. \tag{B.12}$$

对于 $\kappa \geq 0$ 以及$b > a > 0$，我们有

$$M'(a, b, \kappa) = \frac{a}{b} M(a+1, b+1, \kappa). \tag{B.13}$$

利用（B.12）中的级数展开，我们得到$b > a > 0$

$$M(a, b, \kappa) = 1 + O(\kappa) \overset{\kappa\to 0^+}{\to} 1^+. \tag{B.14}$$

对于 $\kappa \geq 0$，令

$$D_d(\kappa) = \frac{M(3/2, d/2+1, \kappa)}{dM(1/2, d/2, \kappa)}. \tag{B.15}$$

对于足够小的 $\kappa \geq 0$，我们有

$$D_d(\kappa) = \frac{1}{d} + \frac{2(d-1)}{d^2(d+2)}\kappa + O(\kappa^2). \tag{B.16}$$

对于 $\kappa > 0$，我们有

$$D'_d(\kappa) = \frac{\frac{3}{d+2}M(5/2, d/2+2, \kappa)M(1/2, d/2, \kappa) - \frac{1}{d}M(3/2, d/2+1, \kappa)}{dM^2(1/2, d/2, \kappa)}. \tag{B.17}$$

利用 (B.14)，我们得到

$$\lim_{\kappa \to 0^+} D'_d(\kappa) = \frac{2(d-1)}{d^2(d+2)} \tag{B.18}$$

对于 $\kappa \geq 0$，令

$$d_d(\kappa) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}M(1/2, d/2, \kappa). \tag{B.19}$$

由 (B.12) 中的级数展开可知，对于 $\kappa > 0$

$$1 - M(1/2, d/2, \kappa) = -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2+r)\Gamma(d/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(d/2+r)} \frac{\kappa^r}{r!} < 0. \tag{B.20}$$

应用 (B.13) 可立即得到，对于 $\kappa > 0$

$$\partial_\kappa[\log d_d(\kappa)] = \frac{d'_d(\kappa)}{d_d(\kappa)} = D_d(\kappa). \tag{B.21}$$

下面给出前述命题。记号尽可能与第5章中的记号保持一致。

**命题 B.3.** 设 $\kappa > 0$，并设 $f(\cdot\,|\,\kappa)$ 是关于曲面测度 $\sigma$ 的连续密度，该测度通过 $\kappa$ 参数化。假设极限情形 $\kappa \to 0^+$ 给出 $\mathcal{S}^{d-1}$ 上的均匀分布。此外，设 $U$ 为一个服从 $f(\cdot\,|\,\kappa)$ 分布的随机向量。于是

*i)* 对于冯·米塞斯–费舍尔备择 vMF$(\theta, \kappa)$，其中 $\theta \in \mathcal{S}^{d-1}$ 固定：

*(a)*

$$\mathrm{KL}(\kappa, 0) = A_d(\kappa)\kappa - \log a_d(\kappa) + \log|\mathcal{S}^{d-1}|,$$

*(b)*

$$\gamma_\kappa(b) = \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{a_d(\kappa)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\kappa^l}{l!} \sum_{j=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta)\Delta_j(l)P_j^d(\theta^\top b) - \psi_d(\beta), \quad b \in \mathcal{S}^{d-1},$$

$$\Delta_j(l) = \int_{-1}^{1} P_j^d(t)t^l(1-t^2)^{(d-3)/2}\,dt, \quad j = 1, \ldots, \beta,\ l \in \mathbb{N}_0.$$

*(c)*

$$\lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_\kappa^2(b)}{2\mathrm{KL}(\kappa,0)} = \lambda_1 \nu_d(1).$$

*ii)* 对于 *Watson*备择项 $\mathrm{W}(\theta,\kappa)$，其中 $\theta\in\mathcal{S}^{d-1}$ 固定：

*(a)*

$$\mathrm{KL}(\kappa,0) = D_d(\kappa)\kappa - \log d_d(\kappa) + \log|\mathcal{S}^{d-1}|,$$

*(b)*

$$\gamma_\kappa(b) = \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{d_d(\kappa)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\kappa^l}{l!} \sum_{j=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta)\Delta_j(2l) P_j^d(\theta^\top b) - \psi_d(\beta), \quad b\in\mathcal{S}^{d-1},$$

*(c)*

$$\lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_\kappa^2(b)}{2\mathrm{KL}(\kappa,0)} = \lambda_2 \nu_d(2).$$

*iii)* 对于勒让德多项式备择假设 $\mathrm{LP}_m(\theta,\ \kappa)$，在 $m\in\mathbb{N}$ 和 $\theta\in\mathcal{S}^{d-1}$ 固定且 $\kappa\in[0,1]$ 时：

*(a)*

$$\mathrm{KL}(\kappa,0) = \frac{\kappa^2}{\nu_d(m)}\left(1 - \frac{1}{2(1+\xi_\kappa)^2}\right) - \frac{\kappa^3}{2(1+\xi_\kappa)^2}\frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\int_{-1}^{1} (P_m^d(t))^3 (1-t^2)^{(d-3)/2}\, dt,$$

其中，中间点 $\xi_\kappa$ 满足 $|\xi_\kappa|\le\kappa$。

*(b)*

$$\gamma_\kappa(b) = \kappa^2 \frac{\lambda_m}{\nu_d(m)} P_m^d(\theta^\top b), \quad b\in\mathcal{S}^{d-1},$$

*(c)*

$$\lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_\kappa^2(b)}{2\mathrm{KL}(\kappa,0)} = \lambda_m \nu_m(2).$$

证明。 i) 根据冯·米塞斯–费舍尔分布的定义，见 (5.3)，对于固定的 $\theta\in\mathcal{S}^{d-}$，我们有 [1]

$$f(x\,|\,\kappa) = \frac{1}{a_d(\kappa)}\exp(\kappa\theta^\top x), \quad x\in\mathcal{S}^{d-1}.$$

我们计算得到 $\kappa>0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{KL}(\kappa,0) = \mathbb{E}_\kappa\left[\log\left(\frac{f(U\,|\,\kappa)}{f(U\,|\,0)}\right)\right] &= \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \log\left(|\mathcal{S}^{d-1}| f(x\,|\,\kappa)\right) f(x\,|\,\kappa)\, d\sigma(x) \\
&= \frac{\kappa}{a_d(\kappa)}\int_{\mathcal{S}^{d-1}} \theta^\top x \exp(\kappa\,\theta^\top x)\, d\sigma(x) - \log a_d(\kappa) + \log|\mathcal{S}^{d-1}| \\
&= \kappa\frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{a_d(\kappa)}\int_{\mathcal{S}^{d-1}} t e^{\kappa t}(1-t^2)^{(d-3)/2}\, dt - \log a_d(\kappa) + \log|\mathcal{S}^{d-1}|,
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 Funk–Hecke 定理对 $P_0^d \equiv 1$ 得出。此外，利用 $\Gamma((d+1)/2) = \Gamma((d-1)/2)(d-1)/2$ 以及分部积分，我们得到

$$\begin{aligned} I_{d/2}(\kappa) &= \frac{(\kappa/2)^{d/2}}{\Gamma((d+1)/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^{1} e^{\kappa t}(1-t^2)^{(d-1)/2}\, dt \\ &= \frac{(\kappa/2)^{d/2-1}}{\Gamma((d-1)/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^{1} t e^{\kappa t}(1-t^2)^{(d-3)/2}\, dt, \end{aligned}$$

因此，结论 a) 可由此得出

$$\begin{aligned} \mathrm{KL}(\kappa, 0) &= \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{a_d(\kappa)} \frac{\Gamma((d-1)/2)\Gamma(1/2)}{(\kappa/2)^{d/2-1}} I_{d/2}(\kappa)\kappa - \log a_d(\kappa) + \log|\mathcal{S}^{d-1}| \\ &= \frac{2\pi^{d/2}\Gamma((d-1)/2)^{-1}}{2\pi^{d/2}(\kappa/2)^{1-d/2} I_{d/2-1}(\kappa)} \frac{\Gamma((d-1)/2)}{(\kappa/2)^{d/2-1}} I_{d/2}(\kappa)\kappa - \log a_d(\kappa) + \log|\mathcal{S}^{d-1}| \\ &= \frac{I_{d/2}(\kappa)}{I_{d/2-1}(\kappa)}\kappa - \log a_d(\kappa) + \log|\mathcal{S}^{d-1}| \\ &= A_d(\kappa)\kappa - \log a_d(\kappa) + \log|\mathcal{S}^{d-1}|. \end{aligned}$$

对于结论 b)，我们注意到，对于 $\kappa > 0$ 和 $b \in \mathcal{S}^{d-1}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\kappa (b^\top U)^\beta &= \frac{1}{a_d(\kappa)} \int_{\mathcal{S}^{d-1}} (b^\top x)^\beta \exp(\kappa\, \theta^\top x)\, \mathrm{d}\sigma(x) \\ &= \frac{1}{a_d(\kappa)} \sum_{j=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta) \int_{\mathcal{S}^{d-1}} P_j^d(b^\top x) \exp(\kappa\, \theta^\top x)\, \mathrm{d}\sigma(x), \end{aligned}$$

其中，最后一个等号由 (A.5) 得出。函数 $\mathcal{S}^{d-1} \ni x \mapsto P_j^d(b^\top x)$ 是一个 $d$ 维的 $j$ 阶球谐函数，因此，Funk–Hecke 定理再次给出

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\kappa (b^\top U)^\beta &= \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{a_d(\kappa)} \sum_{j=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta) P_j^d(\theta^\top b) \int_{-1}^{1} P_j^d(t) e^{\kappa t}(1-t^2)^{(d-3)/2}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{a_d(\kappa)} \sum_{j=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta) P_j^d(\theta^\top b) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\kappa^l}{l!} \Delta_j(l) \\ &= \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{a_d(\kappa)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\kappa^l}{l!} \sum_{j=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta) \Delta_j(l) P_j^d(\theta^\top b). \end{aligned}$$

由于 $\gamma_\kappa(b) = \mathbb{E}_\kappa(b^\top U)^\beta - \psi_d(\beta)$，公式 b) 随即成立。特别地，命题 A.5 和 th e

命题 A.8 后的示例对于 $j = 1, \ldots, \beta$ 给出

$$\Delta_j(0) = \left\langle P_j^d, P_0^d \right\rangle = \delta_{j0} \frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{\nu_d(0)\,|\mathcal{S}^{d-2}|} = \delta_{j0} \frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{|\mathcal{S}^{d-2}|}, \tag{B.22}$$

$$\Delta_j(1) = \left\langle P_j^d, P_1^d \right\rangle = \delta_{j1} \frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{\nu_d(1)\,|\mathcal{S}^{d-2}|}, \tag{B.23}$$

$$\Delta_j(2) = \frac{1}{d}\left\langle P_j^d, P_0^d \right\rangle + \frac{d-1}{d}\left\langle P_j^d, P_2^d \right\rangle = \delta_{j0}\frac{1}{d}\frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{|\mathcal{S}^{d-2}|} + \delta_{j2}\frac{d-1}{d}\frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{\nu_d(2)\,|\mathcal{S}^{d-2}|}. \tag{B.24}$$

W利用 $c0,d(\beta) = \psi_d(\beta)$ 这一事实，参见命题 2.3 i) 的证明，经过简短计算可得 s

$$\begin{aligned}\gamma_\kappa(b) = &\left(\frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{a_d(\kappa)} - 1\right)\psi_d(\beta) + \kappa\frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{a_d(\kappa)}\frac{c_{1,d}(\beta)}{\nu_d(1)}P_1^d(\theta^\top b)\\ &+ \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{a_d(\kappa)}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{\kappa^l}{l!}\sum_{j=0}^{\beta}c_{j,d}(\beta)\Delta_j(l)P_j^d(\theta^\top b).\end{aligned} \tag{B.25}$$

为证明 i) 中的最后一个结论，我们假设对于某个 $R > 0$， $\kappa \in (0,R)$。这并非严格限制，因为我们只关心 0 附近的渐近行为。作为第一步，我们希望确定

$$\lim_{\kappa\to 0^+}\frac{\gamma_\kappa(b)}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa,0)}}, \quad b \in \mathcal{S}^{d-1}.$$

为此，我们按照方程 (B.25) 区分$l = 0$、$l = 1$ 和$l \geq 2$ 这几种情形。
考虑$l = 0$，并定义 $\alpha_d(\kappa) = \left(\frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{d\,\kappa}\underline{a(\ )} - 1\right)$。由 (B.9) 可知 $\lim_{\kappa\to 0^+}\alpha_d(\kappa) = 0$。应用洛必达法则，我们计算得

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa\to 0^+}\frac{2\mathrm{KL}(\kappa,0)}{\alpha_d^2(\kappa)} &= \lim_{\kappa\to 0^+}\frac{2\left[A_d(\kappa)\kappa - \log a_d(\kappa) + \log|\mathcal{S}^{d-1}|\right]}{\alpha_d^2(\kappa)} = \lim_{\kappa\to 0^+}\frac{2[A_d'(\kappa)\kappa + A_d(\kappa) - A_d(\kappa)]}{2\alpha_d'(\kappa)\alpha_d(\kappa)}\\ &= \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\lim_{\kappa\to 0^+}\frac{A_d'(\kappa)\kappa}{-\frac{a_d'(\kappa)}{a_d^2(\kappa)}\alpha_d(\kappa)} = \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\lim_{\kappa\to 0^+}\frac{A_d'(\kappa)\kappa}{\frac{A_d(\kappa)}{a_d^2(\kappa)}[a_d(\kappa) - |\mathcal{S}^{d-1}|]}\\ &= \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\lim_{\kappa\to 0^+}\frac{a_d^2(\kappa)\left[\frac{\kappa}{A_d(\kappa)} - A_d(\kappa)\kappa - d + 1\right]}{a_d(\kappa) - |\mathcal{S}^{d-1}|} = \infty.\end{aligned}$$

这里，第二个等式和倒数第二个等式由 (B.10) 得出，最后一个方程由 (B.7) 得出。然后，由于 $\lim_{\kappa\to 0^+}A_d(\kappa)\kappa = 0$ 以及根据 (B.6) 可知，分子收敛到 $|\mathcal{S}^{d-1}|^2$，因为

$$\lim_{\kappa\to 0^+}\frac{A_d(\kappa)}{\kappa} = \lim_{\kappa\to 0^+}\left(\frac{1}{d} - \frac{\kappa^2}{d^2(d+2)} + O(\kappa^4)\right) = \frac{1}{d}.$$

另一方面，由于 (B.9)，分母收敛到 $0^+$。因此，对于$l = 0$，可得

$$\lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\left(\frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{a_d(\kappa)} - 1\right)\psi_d(\beta)}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)}} = -\lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\psi_d(\beta)}{\sqrt{\frac{2\mathrm{KL}(\kappa,0)}{\alpha_d^2(\kappa)}}} = 0.$$

考虑$l = 1$。我们有

$$\lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\kappa}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)}} = \lim_{\kappa\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\frac{2\left[A_d(\kappa)\kappa - \log a_d(\kappa) + \log|\mathcal{S}^{d-1}|\right]}{\kappa^2}}} = \sqrt{d}.$$

由洛必达法则和 (B.7) 得

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa\to 0^+} \frac{2\left[A_d(\kappa)\kappa - \log a_d(\kappa) + \log|\mathcal{S}^{d-1}|\right]}{\kappa^2} &= \lim_{\kappa\to 0^+} A_d'(\kappa) \\ &= \lim_{\kappa\to 0^+}\left(1 - A_d^2(\kappa) - \frac{d-1}{\kappa}A_d(\kappa)\right) = \frac{1}{d}.\end{aligned}$$

结合 $\nu_d(1) = d$，可得

$$\lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\kappa}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)}} \frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{a_d(\kappa)} \frac{c_{1,d}(\beta)}{\nu_d(1)} P_1^d(\theta^\top b) = \frac{c_{1,d}(\beta)}{\sqrt{\nu_d(1)}} P_1^d(\theta^\top b), \quad b \in \mathcal{S}^{d-1}.$$

考虑$l \geq 2$。于是立即得到

$$\lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\kappa^l}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)}} = \lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\kappa}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)}} \kappa^{l-1} = 0,$$

因为第一个因子有界。下面定义函数 serie s

$$S_N : (0, R) \times \mathcal{S}^{d-1} \to \mathbb{R}; \quad (\kappa, b) \mapsto \sum_{l=2}^{N} \frac{1}{l!} \frac{\kappa^l}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)}} \sum_{j=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta)\Delta_j(l) P_j^d(\theta^\top b)$$

当 $N \in \mathbb{N}$、$N \geq 2$ 时。对于固定的 $\kappa \in (0,R)$，该级数在 $\mathcal{S}^{d-1}$ 上连续。此外，当$N \to \infty$ 时，它在 $(0, R)$ 上一致收敛；对于固定的 $b \in \mathcal{S}^{d-1}$，这是因为对 $\kappa \in (0,R)$，我们有

$$\frac{\kappa^l}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)}} = \frac{\kappa}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)}} \kappa^{l-1} \leq \max\{C, R\}^l$$

其中常数 $C > 0$ 从上方界定 $\kappa/\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)}$。由于 $|P_j^d| \leq 1$（见命题 A.6），且对$l \geq |\mathcal{S}^{d-1}|/|\mathcal{S}^{d-2}|$ 中的$j = 1, \ldots, \beta$, $l \in \mathbb{N}_0$，因此可得

$$\left|\sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{\kappa^l}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)}} \sum_{j=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta)\Delta_j(l) P_j^d(\theta^\top b)\right| \leq \beta \max_{j=1,\ldots\beta} |c_{j,d}(\beta)| \frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{|\mathcal{S}^{d-2}|} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\max\{C, R\}^l}{l!},$$

并且最后一个级数收敛。一致收敛意味着对$b \in \mathcal{S}^{d-1}$

$$\lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\gamma_\kappa(b)}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa,0)}} = \lim_{\kappa\to 0^+} \left( \frac{\left( \frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{a_d(\kappa)} - 1 \right) \psi_d(\beta)}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa,0)}} + \frac{\kappa}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa,0)}} \frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{a_d(\kappa)} \frac{c_{1,d}(\beta)}{\nu_d(1)} P_1^d(\theta^\top b) \right)$$

$$+ \lim_{\kappa\to 0^+} \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{a_d(\kappa)} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{\kappa^l}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa,0)}} \sum_{j=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta) \Delta_j(l) P_j^d(\theta^\top b)$$

$$= 0 + \frac{c_{1,d}(\beta)}{\sqrt{\nu_d(1)}} P_1^d(\theta^\top b) + 0 = \frac{c_{1,d}(\beta)}{\sqrt{\nu_d(1)}} P_1^d(\theta^\top b).$$

我们尤其可以看到，$\gamma_\kappa(\cdot)/\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa,0)}$逐点收敛到$c_{1,d}(\beta)/\sqrt{\nu_d(1)} P_1^d(\theta^\top \cdot)$，其中$\kappa \to 0^+$。事实上，该收敛在$\mathcal{S}^{d-1}$上甚至是一致的，因为$|P_j^d| \le 1$。因此我们最终可以得出结论

$$\lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_\kappa^2(b)}{2\mathrm{KL}(\kappa,0)} = \lim_{\kappa\to 0^+} \max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \left( \frac{\gamma_\kappa(b)}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa,0)}} \right)^2 = \max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \left( \lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\gamma_\kappa(b)}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa,0)}} \right)^2$$

$$= \frac{(c_{1,d}(\beta))^2}{\nu_d(1)} \max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} |P_1^d(\theta^\top b)|^2 = \lambda_1 \nu_d(1).$$

这里，最后一个等式由 (2.4) 以及$\max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} |P_1^d(\theta^\top b)|^2 = 1$这一事实得出，参见注 A.6。

ii) 对于 Watson 备择项，我们不打算像之前那样进行如此详尽的证明，因为相关量与 i) 中的量十分相似；否则，许多论证都将重复。回顾一下，参数$\theta \in \mathcal{S}^{d-1}$固定时，沃森分布的密度为

$$f(x \mid \kappa) = \frac{1}{d_d(\kappa)} \exp(\kappa \theta^\top x), \quad x \in \mathcal{S}^{d-1}.$$

令$\kappa > 0$。首先，Kullback–Leibler信息数满足

$$\mathrm{KL}(\kappa,0) = \kappa \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{d_d(\kappa)} \int_{\mathcal{S}^{d-1}} t^2 \exp(\kappa t^2)(1-t^2)^{(d-3)/2}\,\mathrm{d}t - \log d_d(\kappa) + \log|\mathcal{S}^{d-1}|.$$

根据库默函数的定义

$$M(3/2, d/2+1, \kappa) = \frac{1}{B(3/2,(d-1)/2)} \int_{-1}^{1} t^2 e^{\kappa t^2} (1-t^2)^{(d-3)/2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{d\,\Gamma(d/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma((d-1)/2)} \int_{-1}^{1} t^2 e^{\kappa t^2} (1-t^2)^{(d-3)/2}\,\mathrm{d}t,$$

经过简短计算可得

$$\begin{aligned}\mathrm{KL}(\kappa,0) &= \kappa\frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{d_d(\kappa)}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma((d-1)/2)}{d\,\Gamma(d/2)}M(3/2,d/2+1,\kappa)-\log d_d(\kappa)+\log|\mathcal{S}^{d-1}|\\ &= D_d(\kappa)\kappa-\log d_d(\kappa)+\log|\mathcal{S}^{d-1}|.\end{aligned}$$

对于 $\gamma_\kappa$，与 i) 中完全相同的论证可得公式

$$\gamma_\kappa(b)=\frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{d_d(\kappa)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\kappa^l}{l!}\sum_{j=0}^{\beta}c_{j,d}(\beta)\Delta_j(2l)P_j^d(\theta^\top b)-\psi_d(\beta),\quad b\in\mathcal{S}^{d-1}.$$

因此,

$$\begin{aligned}\gamma_\kappa(b) &= \left(\frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{d_d(\kappa)}-1\right)\psi_d(\beta)+\kappa\frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{d_d(\kappa)}\sum_{j=0}^{\beta}c_{j,d}(\beta)\Delta_j(2)P_j^d(\theta^\top b)\\ &\quad+\frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{d_d(\kappa)}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{\kappa^l}{l!}\sum_{j=0}^{\beta}c_{j,d}(\beta)\Delta_j(2l)P_j^d(\theta^\top b)\\ &= \left(\frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{d_d(\kappa)}-1\right)\psi_d(\beta)+\kappa\frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{d_d(\kappa)}\left[\frac{\psi_d(\beta)}{d}+\frac{c_{2,d}(\beta)}{\nu_d(2)}\frac{d-1}{d}P_2^d(\theta^\top b)\right]\\ &\quad+\frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{d_d(\kappa)}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{\kappa^l}{l!}\sum_{j=0}^{\beta}c_{j,d}(\beta)\Delta_j(2l)P_j^d(\theta^\top b).\end{aligned}$$

最后一个等式由 (B.22) 得出。再次区分$l=0$、$l=1$ 和$l\geq 2$ 这几种情况，并假设 $\kappa>0$ 足够小。考虑$l=0$，并定义 $\delta_d(\kappa)=\left(\frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{d_d(\kappa)}-1\right)$。由 (B.20) 可得 $\delta_d(\kappa)=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{M(1/2,d/2,\kappa)}}-1\right)<0$。因此，我们计算得

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa\to0^+}\frac{2\mathrm{KL}(\kappa,0)}{\left(1-\frac{1}{M(1/2,d/2,\kappa)}\right)^2} &= \lim_{\kappa\to0^+}\frac{2\left[D_d(\kappa)\kappa-\log d_d(\kappa)+\log|\mathcal{S}^{d-1}|\right]}{\left(1-\frac{1}{M(1/2,d/2,\kappa)}\right)^2}\\ &= \lim_{\kappa\to0^+}\frac{D_d'(\kappa)\kappa}{\frac{M'(1/2,d/2,\kappa)}{M^2(1/2,d/2,\kappa)}\frac{M(1/2,d/2,\kappa)-1}{M(1/2,d/2,\kappa)}}\\ &= \lim_{\kappa\to0^+}M^2(1/2,d/2,\kappa)\frac{D_d'(\kappa)\kappa}{D_d(\kappa)(M(1/2,d/2,\kappa)-1)}\\ &= \lim_{\kappa\to0^+}\frac{D_d'(\kappa)}{D_d(\kappa)}\lim_{\kappa\to0^+}\frac{\kappa}{M(1/2,d/2,\kappa)-1}\end{aligned}$$

$$= \lim_{\kappa\to 0^+} \frac{D_d'(\kappa)}{D_d(\kappa)} \lim_{\kappa\to 0^+} \frac{1}{M'(1/2, d/2, \kappa)}.$$

这里，第二个和最后一个等式由洛必达法则得出，第三个和第四个等式分别由 (B.21) 和 (B.14) 得出。由 (B.13) 、 (B.14) 、 (B.16) 和 (B.18) 可知

$$\lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\left(\frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{d_d(\kappa)} - 1\right)\psi_d(\beta)}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)}} = -\lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\psi_d(\beta)}{\sqrt{\frac{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)}{\left(1 - \frac{1}{M(1/2, d/2, \kappa)}\right)^2}}} = -\frac{\psi_d(\beta)}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{d+2}{d-1}}.$$

若 $l = 1$，则

$$\lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\kappa}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)}} = \lim_{\kappa\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\frac{2\left[D_d(\kappa)\kappa - \log d_d(\kappa) + \log|\mathcal{S}^{d-1}|\right]}{\kappa^2}}} = \frac{d}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{d+2}{d-1}},$$

因为

$$\lim_{\kappa\to 0^+} \frac{2\left[D_d(\kappa)\kappa - \log a_d(\kappa) + \log|\mathcal{S}^{d-1}|\right]}{\kappa^2} = \lim_{\kappa\to 0^+} D_d'(\kappa) = \frac{2(d-1)}{d^2(d+2)},$$

其中最后一个方程由 (B.18) 得出。对于 $\kappa \to 0^+$ , $l \geq 2$ 的表达式由

与 i) 中相同的论证可知为零。

这些结果对 $b \in \mathcal{S}^{d-1}$ 给出

$$\begin{aligned}
\lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\gamma_\kappa(b)}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)}} &= \lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\left(\frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{d_d(\kappa)} - 1\right)\psi_d(\beta)}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)}} \\
&\quad + \lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\kappa}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)}} \frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{d_d(\kappa)} \left[\frac{\psi_d(\beta)}{d} + \frac{c_{2,d}(\beta)}{\nu_d(2)} \frac{d-1}{d} P_2^d(\theta^\top b)\right] \\
&\quad + \lim_{\kappa\to 0^+} \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{d_d(\kappa)} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{\kappa^l}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)}} \sum_{j=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta)\Delta_j(2l) P_j^d(\theta^\top b) \\
&= -\frac{\psi_d(\beta)}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{d+2}{d-1}} + \frac{d}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{d+2}{d-1}}\left[\frac{\psi_d(\beta)}{d} + \frac{c_{2,d}(\beta)}{\nu_d(2)} \frac{d-1}{d} P_2^d(\theta^\top b)\right] + 0
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{(d+2)(d-1)}{2}} \frac{c_{2,d}(\beta)}{\nu_d(2)} P_2^d(\theta^\top b) = \frac{c_{2,d}(\beta)}{\sqrt{\nu_d(2)}} P_2^d(\theta^\top b).$$

再次使用 (2.4)，可得

$$\lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_\kappa^2(b)}{2\mathrm{KL}(\kappa,0)} = \lim_{\kappa\to 0^+} \max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \left(\frac{\gamma_\kappa(b)}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa,0)}}\right)^2 = \max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \left(\lim_{\kappa\to 0^+} \frac{\gamma_\kappa(b)}{\sqrt{2\mathrm{KL}(\kappa,0)}}\right)^2$$

$$= \frac{(c_{2,d}(\beta))^2}{\nu_d(2)} \max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} |P_2^d(\theta^\top b)|^2 = \lambda_2 \nu_d(2).$$

iii) 回顾密度

$$f(x\,|\,\kappa) = \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\left(1+\kappa P_m^d(\theta^\top x)\right), \quad x\in\mathcal{S}^{d-1},$$

Legendre多项式备择假设的密度，其中 $m\in\mathbb{N}$ 和 $\theta\in\mathcal{S}^{d-1}$固定。我们对 $\kappa\in[0,1]$进行计算

$$\mathrm{KL}(\kappa,0) = \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\int_{\mathcal{S}^{d-1}} \log\left(1+\kappa P_m^d(\theta^\top x)\right)\left(1+\kappa P_m^d(\theta^\top x)\right) \mathrm{d}\sigma(x)$$

$$= \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\int_{-1}^1 \log\left(1+\kappa P_m^d(t)\right)\left(1+\kappa P_m^d(t)\right)(1-t^2)^{(d-3)/2}\,\mathrm{d}t.$$

在 0 处对 $t\mapsto\log(1+t)$ 作一阶泰勒展开，得到

$$\mathrm{KL}(\kappa,0) = \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\int_{-1}^1 \left(\kappa P_m^d(t) - \frac{\left(\kappa P_m^d(t)\right)^2}{2(1+\xi_\kappa)^2}\right)\left(1+\kappa P_m^d(t)\right)(1-t^2)^{(d-3)/2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\left[\kappa\left\langle P_m^d, P_0^d\right\rangle + \kappa^2\left\langle P_m^d, P_m^d\right\rangle - \frac{\kappa^2}{2(1+\xi_\kappa)^2}\left\langle P_m^d, P_m^d\right\rangle - \frac{\kappa^3}{2(1+\xi_\kappa)^2}\left\langle \left(P_m^d\right)^2, P_m^d\right\rangle\right]$$

$$= \frac{\kappa^2}{\nu_d(m)}\left(1-\frac{1}{2(1+\xi_\kappa)^2}\right) - \frac{\kappa^3}{2(1+\xi_\kappa)^2}\frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\int_{-1}^1 \left(P_m^d(t)\right)^3(1-t^2)^{(d-3)/2}\,\mathrm{d}t.$$

这里，$\xi_\kappa$是一个中间点，满足 $|\xi_\kappa|\le\kappa|P_m^d(t)|\le\kappa$，其中 $t\in[-1,1]$。因此，我们有

$$\mathrm{KL}(\kappa,0) = \frac{\kappa^2}{\nu_d(m)}\left(1-\frac{1}{2(1+\xi_\kappa)^2}\right) + O(\kappa^3), \quad \kappa\to 0^+.$$

对于 $\gamma_\kappa$，我们计算$b\in\mathcal{S}^{d-1}$

$$\mathbb{E}_\kappa(b^\top U)^\beta = \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\int_{\mathcal{S}^{d-1}} (b^\top x)^\beta\left(1+\kappa P_m^d(\theta^\top x)\right) d\sigma(x)$$

$$= \psi_d(\beta) + \kappa P_m^d(\theta^\top b)\frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\int_{-1}^1 P_m^d(t)t^\beta(1-t^2)^{(d-3)/2}\,dt$$

$$= \psi_d(\beta) + \kappa P_m^d(\theta^\top b) \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{|\mathcal{S}^{d-1}|} \sum_{j=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta) \left\langle P_j^d, P_m^d \right\rangle$$

$$= \psi_d(\beta) + \kappa \frac{c_{m,d}(\beta)}{\nu_d(m)} P_m^d(\theta^\top b),$$

其中，第二个和第三个等式分别由 (1.2) 和 (A.5) 得出。因此，

$$\max_{b \in \mathcal{S}^{d-1}} \gamma_\kappa^2(b) = \kappa^2 \lambda_m \max_{b \in \mathcal{S}^{d-1}} |\, P_m^d(\theta^\top b)\,|^2 = \kappa^2 \lambda_m.$$

鉴于这些结果以及 $\lim_{\kappa \to 0^+} \xi_\kappa = 0$ 这一事实，我们得出结论

$$\lim_{\kappa \to 0^+} \frac{\max_{b \in \mathcal{S}^{d-1}} \gamma_\kappa^2(b)}{2\mathrm{KL}(\kappa, 0)} = \lim_{\kappa \to 0^+} \frac{\kappa^2 \lambda_m}{\dfrac{2\kappa^2}{\nu_d(m)} \left( 1 - \dfrac{1}{2(1+\xi_\kappa)^2} \right) + O(\kappa^3)}$$

$$= \lim_{\kappa \to 0^+} \frac{\lambda_m}{\dfrac{2}{\nu_d(m)} \left( 1 - \dfrac{1}{2(1+\xi_\kappa)^2} \right) + O(\kappa)} = \frac{\lambda_m}{\dfrac{2}{\nu_d(m)} \left( 1 - \dfrac{1}{2} \right)} = \lambda_m \nu_d(m).$$

□

# C 主要结果的证明

**定理 2.1 的证明。**

证明。 证明采用了 [8], 中定理 2.1 证明所介绍的方法，尽管协方差结构是其推广。令 $W(b) = (b^\top U_1)^\beta - \psi_d(\beta)$，$b \in \mathcal{S}^{d-1}$，则有（利用$x^\beta - \mathrm{y}^\beta = (x - \mathrm{y}) \sum_{j=0}^{\beta-1} x_j \mathrm{y}^{\beta-1-j}$，$x$、$\mathrm{y} \in \mathbb{R}$，$\beta \in \mathbb{N}$）根据柯西–施瓦茨不等式

$$|W(b) - W(c)| \le \beta \|b - c\|, \quad b, c \in \mathcal{S}^{d-1},$$

并直接应用巴拿赫空间中的中心极限定理（见 [2], 推论 7.17），即可得到结论。该推论适用，因为度量空间 $\left(\mathcal{S}^{d-1}, \|\cdot\|\right)$ 显然满足所述熵条件。为完成证明，只需利用引理 B.1 计算协方差结构 $E(W(b)W(c))$。□

**命题 2.3 的证明。**

证明。 i) 令 $\beta \in \mathbb{N}$ 且 $k \in \mathbb{N}_0$。由于对所有 $b$、$c \in \mathcal{S}^{d-1}$，都有 $\rho_\beta(b,c) = Q(b^\top c)$，因此由 Funk–Hecke 定理 A.3 可知，对于 $x \in \mathcal{S}^{d-1}$ and $\phi \in \mathcal{H}_k(\mathcal{S}^{d-1})$

$$K_\beta \phi(x) = \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|} \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \rho_\beta(\omega, x)\phi(\omega)\,\mathrm{d}\sigma(\omega) = \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|} \int_{\mathcal{S}^{d-1}} Q(\omega^\top x)\phi(\omega)\,\mathrm{d}\sigma(\omega) = \lambda_k \phi(x)$$

with

$$\lambda_k = \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{|\mathcal{S}^{d-1}|} \int_{-1}^{1} P_k^d(t) Q(t)(1-t^2)^{(d-3)/2} dt,$$

其中， $\lambda_k$ 的表达式由 Funk–Hecke 定理推导得出。根据命题 A.5，关于式 (A.4) 中的标量积，勒让德多项式具有如下正交性

$$\left\langle P_k^d, P_j^d \right\rangle = \delta_{kj} \frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{\nu_d(k)\,|\mathcal{S}^{d-2}|}, \quad \forall k, j \in \mathbb{N}_0.$$

根据 (2.1) 和 (2.2)，我们有

$$Q(t) = \sum_{j=0}^{\beta} \frac{(c_{j,d}(\beta))^2}{\nu_d(j)} P_j^d(t) - \psi_d^2(\beta), \quad t \in [-1, 1].$$

我们对 $k \le \beta$ 且 $P_0^d \equiv 1$进行计算

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_k^d(t) Q(t)(1-t^2)^{(d-3)/2} &= \sum_{j=0}^{\beta} \frac{(c_{j,d}(\beta))^2}{\nu_d(j)} \left\langle P_k^d, P_j^d \right\rangle - \int_{-1}^{1} P_k^d(t)\psi_d^2(\beta)(1-t^2)^{(d-3)/2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{|\mathcal{S}^{d-2}|} \sum_{j=0}^{\beta} \left(\frac{c_{j,d}(\beta)}{\nu_d(j)}\right)^2 \delta_{kj} - \psi_d^2(\beta) \left\langle P_k^d, P_0^d \right\rangle \\
&= \frac{|\mathcal{S}^{d-1}|}{|\mathcal{S}^{d-2}|} \left[ \left(\frac{c_{k,d}(\beta)}{\nu_d(k)}\right)^2 - \delta_{k0}\psi_d^2(\beta) \right].
\end{aligned}$$

由此可得

$$\lambda_k = \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{|\mathcal{S}^{d-1}|} \int_{-1}^{1} P_k^d(t) Q(t)(1-t^2)^{(d-3)/2}\mathrm{d}t = \left(\frac{c_{k,d}(\beta)}{\nu_d(k)}\right)^2 - \delta_{k0}\psi_d^2(\beta), \quad k \le \beta.$$

显然，根据勒让德多项式的正交性， $\lambda_k = 0$ 对于$k > \beta$ 成立。考虑$k = 0$的情形。由 $\nu_d(0) = 1$ 我们已经知道

$$\lambda_k = (c_{0,d}(\beta))^2 - \psi_d^2(\beta) = (c_{0,d}(\beta) - \psi_d(\beta))(c_{0,d}(\beta) + \psi_d(\beta)).$$

如果 $\beta$ 为奇数，则根据(2.1)和命题 A.8，$\psi_d(\beta) = c0,\ _d(\beta) = 0$ 。因此令 $\beta$ 为偶数。然后，对 $1 \in \mathcal{H}_0(\mathcal{S}^{d-1})$应用 Funk–Hecke 定理、方程 (A.5)以及勒让德多项式的正交性，可得

$$\begin{aligned}\psi_d(\beta) = \mathbb{E}(b^\top U)^\beta &= \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\int_{\mathcal{S}^{d-1}} (b^\top \omega)^\beta \,\mathrm{d}\sigma(\omega) = \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\int_{-1}^{1} t^\beta (1-t^2)^{(d-3)/2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\sum_{j=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta)\int_{-1}^{1} P_j^d(t)(1-t^2)^{(d-3)/2}\,\mathrm{d}t = \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\sum_{j=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta)\left\langle P_j^d, P_0^d\right\rangle \\ &= \frac{|\mathcal{S}^{d-2}|}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\sum_{j=0}^{\beta} c_{j,d}(\beta)\frac{\delta_{j0}|\mathcal{S}^{d-1}|}{\nu_d(0)\,|\mathcal{S}^{d-2}|} = c_{0,d}(\beta).\end{aligned}$$

ii) 设 $\{\phi_{k,1}, \ldots, \phi_{k,\nu_d}(k)\}$ 是 $\mathcal{H}_k(\mathcal{S}^{d-1})$ 的标准正交基。那么 $\bigcup_{k=0}^{\infty}\{\phi_{k,1}, \ldots, \phi_{k,\nu_d}(k)\}$ 是 $L^2($ $\mathcal{S}^{d-1}, \mathrm{d}\sigma)$ 的标准正交基，并且我们得到 $f \in L^2(\mathcal{S}^{d-1}, \mathrm{d}\sigma)$ 的唯一级数展开

$$f \overset{L^2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k, \tag{C.1}$$

其中 $\Psi_k = \sum^{\nu_d}(k)\ _{j=1} \left\langle f, \phi_{k,j}\right\rangle_{L_2} \phi_{k,j} \in \mathcal{H}_k(\mathcal{S}^{d-1})$，与 (A.3) 比较。令 $a_{k,j} = \left\langle f, \phi_{k,j}\right\rangle_{L^2}$，对所有 $j \in \{1, \ldots, \nu_d(k)\}, k \in \mathbb{N}_0$ 均成立。由此可得，对于 $x \in \mathcal{S}^{d-1}$

$$\begin{aligned}K_\beta f(x) &= \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\int_{\mathcal{S}^{d-1}} \rho_\beta(\omega, x) f(\omega)\,\mathrm{d}\sigma(\omega) = \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\left\langle \rho_\beta(\cdot, x), f\right\rangle_{L^2} \\ &= \frac{1}{|\mathcal{S}^{d-1}|}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\nu_d(k)} a_{k,j}\left\langle \rho_\beta(\cdot, x), \phi_{k,j}\right\rangle_{L^2} \overset{i)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\nu_d(k)} a_{k,j}\lambda_k\phi_{k,j}(x)\mathbb{1}_{\{k \le \beta\}} \\ &= \sum_{k=1}^{\beta}\lambda_k\sum_{j=1}^{\nu_d(k)} a_{k,j}\phi_{k,j}(x).\end{aligned}$$

因此，$K\beta$ 是一个有限秩算子，并且它具有如下表示

$$K_\beta f(x) = \sum_{k=1}^{\beta}\lambda_k\sum_{j=1}^{\nu_d(k)} a_{k,j}\phi_{k,j}(x), \quad x \in \mathcal{S}^{d-1}. \tag{C.2}$$

iii) 令 $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \notin \{0\} \cup \{\lambda_k \mid k = 1, \ldots, \beta\}$，并考虑方程 $\lambda f - K\beta f = 0\,\mathrm{f}\ddot{\mathrm{u}}\mathrm{r}\ f \in L^2(\mathcal{S}^{d-1},$ $\mathrm{d}\sigma)$，如 (C.1) 中所示。注意，对于 $i \in \{1, \ldots, \nu_d(m)\}, m \in \{1, \ldots, \beta\}$

$$\begin{aligned}\lambda\left\langle f, \phi_{m,i}\right\rangle_{L^2} = \left\langle K_\beta f, \phi_{m,i}\right\rangle_{L^2} &= \sum_{k=1}^{\beta}\lambda_k\sum_{j=1}^{\nu_d(k)} a_{k,j}\left\langle \phi_{k,j}, \phi_{m,i}\right\rangle_{L^2} \\ &= \sum_{k=1}^{\beta}\lambda_k\sum_{j=1}^{\nu_d(k)} a_{k,j}\delta_{mk}\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{\beta}\lambda_k\delta_{mk}a_{k,i} = \lambda_m a_{m,i} = \lambda_m\left\langle f, \phi_{m,i}\right\rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

由于 $\lambda \neq \lambda_m$，可立即推出 $\langle f, \phi_{m,i}\rangle_{L_2} = 0$。因此，对于所有 $i \in \{1, \ldots, \nu_d(m)\}$，$m \in \{1, \ldots, \beta\}$，有 $\langle f, \phi_{m,i}\rangle_{L_2} = 0$，进而 $K_\beta f = 0$。我们得出 $\lambda f = 0$；又由于 $\lambda \neq 0$，可知 $f = 0$。这反过来意味着 $\lambda$ 是一个预解点。

iv) 令 $f \in L^2(\mathcal{S}^{d-1}, \mathrm{d}\sigma)$ 如 (C.1) 中所示，由 (C.2) 可得

$$\langle K_\beta f, f\rangle_{L^2} = \sum_{k=1}^{\beta} \lambda_k \sum_{j=1}^{\nu_d(k)} a_{k,j} \langle \phi_{k,j}, f\rangle_{L^2} = \sum_{k=1}^{\beta} \lambda_k \sum_{j=1}^{\nu_d(k)} a_{k,j}^2 \geq 0,$$

因为所有特征值均非负。

□

**命题 2.4 的证明。**

证明。 我们只证明 $\beta$ 为奇数的情形，另一种情形可用类似方法处理。由于中心高斯过程由协方差核确定，我们只需证明 $Z_\beta(\cdot)$ 与右侧的过程（记为 $Y(\cdot)$）的协方差核相同。显然，经过一些计算，首先可知 $Y(\cdot)$ 是一个中心高斯过程。此外，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y(b)Y(c) &= |\mathcal{S}^{d-1}| \sum_{\substack{k,m=1 \\ k,m \text{ odd}}}^{\beta} \sqrt{\lambda_k \lambda_m} \sum_{j=1}^{\nu_d(k)} \sum_{i=1}^{\nu_d(m)} \phi_{k,j}(b)\, \phi_{m,i}(c)\, \mathbb{E}N_{k,j} N_{m,i} \\
&= |\mathcal{S}^{d-1}| \sum_{\substack{k,m=1 \\ k,m \text{ odd}}}^{\beta} \sqrt{\lambda_k \lambda_m} \sum_{j=1}^{\nu_d(k)} \sum_{i=1}^{\nu_d(m)} \phi_{k,j}(b)\, \phi_{m,i}(c)\, \delta_{km} \delta_{ij} \\
&= |\mathcal{S}^{d-1}| \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ odd}}}^{\beta} \lambda_k \sum_{j=1}^{\nu_d(k)} \phi_{k,j}(b)\, \phi_{k,j}(c) = \rho_\beta(b, c),
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 Mercer 定理得出，参见 [41], 定理 2.10；由于我们先前得到的结果，该定理适用于此处。注意，若 $\beta$ 为奇数，则 (2.4) 中偶数指标对应的特征值为零，因为这些情形下出现的常数 $c_{k,d}(\beta)$ 为零。另请参见命题 A.8。 □

**定理 3.1 的证明。**

证明。 由引理 B.2 和 Le Cam 第一引理（见 [29] 命题 5.2.1）可知，$\mathbb{P}^{(n)}$ 与 $\mathbb{A}^{(n)}$ 相互紧。直接计算可得，在 $\mathbb{P}^{(n)}$ 下 $b \in \mathcal{S}^{d-1}$

i) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Cov}\left(Z_{n,\beta}(b), \log L_n\right) = S^*_\beta(b),$

ii) 对于$l \in \mathbb{N}$、$a_1, \ldots\ldots a_l \in \mathcal{S}^{d-1}$，$(Z_{n,\beta}(a_1), \ldots\ldots, Z_{n,\beta}(a_l), \log L_n)^\top$的分布收敛至

$$\mathrm{N}_{l+1}\left(\left(0, \ldots, 0, -\frac{\tau^2}{2}\right)^\top, \begin{pmatrix} \Sigma_{a_1,\ldots,a_l} & z \\ z^\top & \tau^2 \end{pmatrix}\right),$$

其中$\Sigma_{a_1,\ldots,a_l} = \left(\rho_\beta\left(a_{j_1}, a_{j_2}\right)\right)_{1\le j_1, j_2 \le l}$是一个$l \times l$-矩阵，$z = \left(S^*_\beta(a_1), \ldots, S^*_\beta(a_l)\right)^\top$是一个$l$维向量，而$\tau$在引理 B.2 中定义。

勒卡姆第三引理表明，在 $\mathbb{A}^{(n)}$ $Z_{n,\beta}$ 的有限维分布下，它们弱收敛到移位高斯过程 $Z_\beta + S^*_\beta$的相应分布。由于$Z_{n,\beta}$在 $\mathbb{P}^{(n)}$ 下是紧的，且 $\mathbb{A}^{(n)}$ 相对于 $\mathbb{P}^{(n)}$ 连续，因此 $\mathbb{A}^{(n)}$下$Z_{n,\beta}$和$Z_{n,\beta} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z_\beta + S^*_\beta$是紧的。□

**定理 5.1 的证明。**

证明。 对于第一个结论，我们使用 [6], 定理 7.2，并针对近似Bahadur斜率的情形验证其中的两个条件，参见 [5], 第 6 节。首先，由于强大数定律，我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(b^\top U_j)^\beta - \psi_d(\beta) \overset{\mathbb{P}_\kappa\text{-f.s.}}{\to} \gamma_\kappa(b), \quad b \in \mathcal{S}^{d-1}.$$

因此，我们立即得到

$$\frac{\widetilde{T}_{n,\beta}}{\sqrt{n}} \overset{\mathbb{P}_\kappa}{\to} \max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \gamma^2_\kappa(b), \quad \kappa > 0.$$

在 $H_0$, 推论 2.6 下可得

$$\widetilde{T}_{n,\beta} = \sqrt{T_{n,\beta}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} |Z_\beta(b)|.$$

当 $F(t) = \mathbb{P}(\max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} |Z_\beta(b)| < t)$，$t \in \mathbb{R}$时，应用 [28], 推论 3.2，可得 s

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{\log(1-F(t))}{t^2} &= \lim_{t\to\infty}\frac{\log\mathbb{P}\left(\max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}}|Z_\beta(b)| \ge t\right)}{t^2} \\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{\log\mathbb{P}\left(\|Z_\beta(\cdot)\|_\infty \ge t\right)}{t^2} = -\frac{1}{2\max\limits_{b\in\mathcal{S}^{d-1}}\rho_\beta(b,b)}.\end{aligned}$$

因此，近似Bahadur斜率为

$$c^a_{\widetilde{T}_\beta}(\kappa) = \frac{\max\limits_{b\in\mathcal{S}^{d-1}}\gamma^2_\kappa(b)}{\max\limits_{b\in\mathcal{S}^{d-1}}\rho_\beta(b,b)}, \quad \kappa > 0.$$

对于第二个结论，我们再次利用 [6] 中的定理 7.2，并借助 [37], 引理 2.1 和引理 2.2，证明当 $\kappa > 0$ 足够小时满足第二个条件。我们再次考虑取值于$C(\mathcal{S}^{d-1}, \mathbb{R})$ 的随机元素$W_j(b) = (b^\top U_j)^\beta - \psi_d(\beta), b \in \mathcal{S}^{d-1}$，它们在$H_0$ 下均值为零，并且由于具有紧支撑，满足 [37], 引理 2.1 的可积性条件。因此，令$F_n(t) = \mathbb{P}_0\left(\widetilde{T}_{n,\beta} < t\right), t \in \mathbb{R}$，当 $\epsilon > 0$ 足够小时，我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 - F_n(\sqrt{n}\epsilon))}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \mathbb{P}_0\left(\widetilde{T}_{n,\beta} \geq \sqrt{n}\epsilon\right)}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log \mathbb{P}_0\left(\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n W_j(\cdot)\right\|_\infty \geq \epsilon\right)}{n} = -\frac{\epsilon^2}{2\sup_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \mathbb{E}W_1^2(b)} + o(\epsilon^2).$$

根据定理 2.1 的证明，$W_1(\cdot)$ 定义了高斯过程$Z^\beta(\cdot)$ 的协方差核$\rho_\beta$，因此确实有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 - F_n(\sqrt{n}\epsilon))}{n} = -\frac{\epsilon^2}{2\max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \rho_\beta(b,b)} + o(\epsilon^2)$$

当 $\epsilon > 0$充分小时。由假设的条件 (5.1) 可知,

$$|\gamma_\kappa(b)| = \left|\int_{\mathcal{S}^{d-1}} (b^\top x)^\beta f(x\,|\,\kappa)\, d\sigma(x) - \psi_d(\beta)\right| = \left|\int_{\mathcal{S}^{d-1}} (b^\top x)^\beta \left(f(x\,|\,\kappa) - f(x\,|\,0)\right)\, d\sigma(x)\right|$$
$$\leq \|f(\cdot\,|\,\kappa) - f(\cdot\,|\,0)\|_{L^1} \overset{\kappa\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

勒贝格控制收敛定理表明，对于每个 $\kappa > 0$，$\gamma_\kappa \in C(\mathcal{S}^{d-1}; \mathbb{R})$，且最后的计算证明，当 $\kappa \to 0^+$时，$\gamma_\kappa$ 在 $\mathcal{S}^{d-1}$ 上一致收敛于 0。这意味着 $\lim_{\kappa\to 0^+} \max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_\kappa^2(b) = 0$。因此，精确 Bahadur斜率为

$$c_{\widetilde{T}_\beta}(\kappa) = \frac{\max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_\kappa^2(b)}{\max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \rho_\beta(b,b)} + o\left(\max_{b\in\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_\kappa^2(b)\right)$$

当 $\kappa > 0$充分小时。最后请注意，对于每个 $b \in \mathcal{S}^{d-1}$，我们有

$$\rho_\beta(b,b) = \eta_\beta(b,b) - \psi_d^2(\beta) = \sum_{j=0}^{\beta} \frac{(c_{j,d}(\beta))^2}{\nu_d(j)} P_j^d(b^\top b) - \psi_d^2(\beta) = \sum_{j=0}^{\beta} \frac{(c_{j,d}(\beta))^2}{\nu_d(j)} - \psi_d^2(\beta)$$
$$= \frac{(c_{0,d}(\beta))^2}{\nu_d(0)} + \sum_{j=1}^{\beta} \lambda_j \nu_d(j) - \psi_d^2(\beta) = \sum_{j=1}^{\beta} \lambda_j \nu_d(j).$$

这里，第二个和第三个等式分别由 (2.1) 和注 A.6 得出。 . □

J. Borodavka，卡尔斯鲁厄理工学院（KIT）施泰因布赫计算中心，Zirkel 2，D-76131 卡尔斯鲁厄。电子邮箱：Jaroslav.Borodavka@kit.edu

B. Ebner，卡尔斯鲁厄理工学院（KIT）随机学研究所，Englerstr. 2，D-76128卡尔斯鲁厄。电子邮箱：Bruno.Ebner@kit.edu