arXiv:2301.03493v1 [math.PR] 9 Jan 2023

Me空间图上的负载均衡的平均场分析 hs

Daan Rutten*, 1 和 Debankur Mukherjee[1]

[1]佐治亚理工学院

2023年1月10日

关键词 — 平均场近似、power-of-d、随机耦合、网络负载均衡、数据局部性、多服务器渐近分析、排队论

摘要

对大规模并行服务器负载均衡系统的分析，很大程度上依赖于平均场分析。该框架的一个关键假设是服务器可交换。然而，现代数据中心需要处理各种各样的任务类型，而处理某一类型任务所需的数据存储在服务器本地。这就产生了数据局部性约束：特定类型的任务只能路由到一小部分服务器。因而，一个新兴的研究方向是考察二部图上的负载均衡算法，其中两个划分中的顶点分别表示任务类型和服务器，而边表示服务器能够处理相应类型的任务。由于该模型不具备可交换性，平均场技术从根本上失效了。近期的研究通过考察具有强边扩展性质的图取得了进展，即其中任意两个较大的顶点子集都良好连通。然而，数据局部性往往会带来空间约束，使边仅连接相邻位置。因此，这些二部图不具备强扩展性质。

本文研究了 power-of-d choices 算法，并提出一种新颖的基于耦合的方法，为包括空间图在内的一大类图建立平均场近似。作为推论，我们还证明，随着系统规模增大，对于度不断增大的任意正则二分图，其稳态占用过程与完全二部图上的完全灵活系统无法区分。该方法将平均场分析的适用范围远远拓展到了经典的完全灵活配置之外。此外，我们证明，从适当的状态出发，经过一段与 N 无关的时间后，占用过程便会接近其稳态。这种大规模混合时间结果本身可能也具有独立的研究价值。我们还进行了数值实验，结果有力地支持了理论结果。

1 引言

背景与研究动机。 针对大规模系统的负载均衡算法研究始于 Mitzenmacher [23]和 Vvedenskaya 等人 [35]的开创性工作。此后，我们对各种负载均衡策略的性能，以及它们在用户感知延迟、通信开销、实现复杂度和能耗等指标之间的权衡，已有了显著深入的认识；例如，[1, 2, 7, 8, 11, 13,18, 28, 33, 34, 36] 可参见来自不同研究领域的几篇近期代表性成果。一项关键的

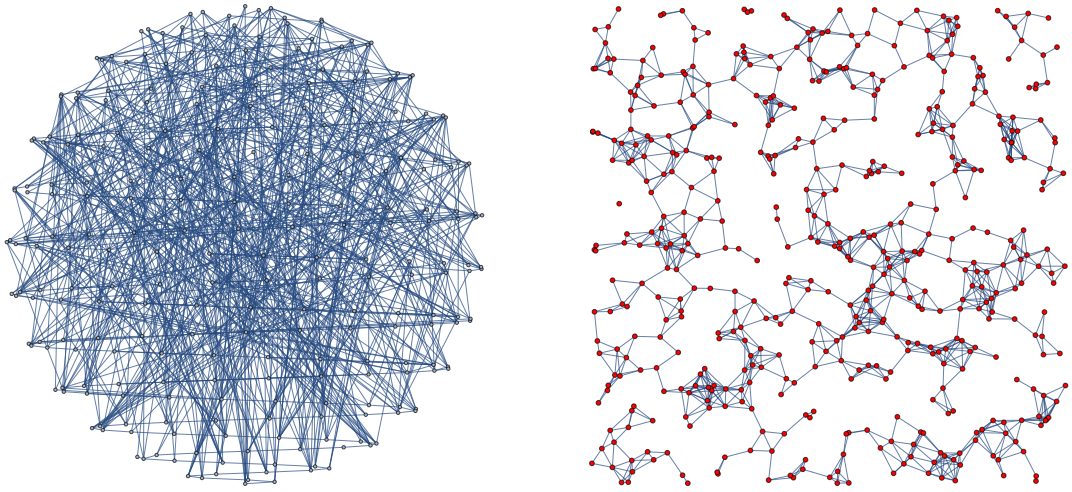
*电子邮箱： drutten@gatech.edu

推动这项研究取得成功的方法工具是平均场分析。现代形式的平均场分析可追溯至 Kurtz [14–16], Norman [26, 27]和 Barbour [3]的奠基性工作。其核心思想是用汇总的马尔可夫量表示系统状态，并刻画系统规模增大时这些量的变化速率。在负载均衡的背景下，这种表示就是占用过程 $\boldsymbol{q}^N(t) = (q_i^N(t))_{i\geq 1}$，其中，$q_i^N(t)$ 表示在时间t，一个拥有 N 台服务器的系统中队列长度至少为 i 的服务器所占比例。随着 $N \to \infty$ 增大， $\boldsymbol{q}^N(t)$ 往往表现为一个由常微分方程（ODE）描述、且易于进行解析处理的确定性连续系统。上述方法得以成立的一个关键假设是，汇总量 $\boldsymbol{q}^N(t)$ 具有马尔可夫性，因此其变化速率可以表示为当前状态的函数。如果 $\boldsymbol{q}^N(t)$ 不具有马尔可夫性，那么这种方法不仅会失效，平均场近似甚至可能变得极不准确。

在负载均衡系统中，如果服务器可交换，那么 $\boldsymbol{q}^N(t)$ 确实是马尔可夫过程。然而，现代数据中心所处理任务类型日益增多的异质性，促使研究界近年来开始考虑不满足可交换性假设的系统。其主要原因在于数据局部性，也就是说，服务器需要存储资源，以便在本地处理特定类型的任务，而且存储空间有限。这些资源可能包括特定任务所需的数据库或机器学习模型。这限制了将任务分配到队列时的灵活性，因为现在必须确保相应的服务器能够处理分配给它的任务。事实上，在更广泛的情境中也会出现灵活性不足的情况，例如受空间限制的网络架构（如共享单车），参见 [10, 21, 29], ；或地理分布式数据中心的情境，参见 [17, 20]。因此，一种新兴的研究方向是考虑任务类型与服务器之间的二部图；例如参见 [5, 6, 25, 31, 32, 37]。在此兼容图中，服务器与任务类型之间的一条边表示该服务器能够处理这类任务。在这一模型中，如果该图是完全二部图，那么问题就简化为完全灵活系统的经典情形。实际上，存储容量或地理限制会迫使服务器只能处理所有任务类型中的一小部分，从而形成更稀疏的网络拓扑。这促使人们研究具有适当稀疏二部兼容图的系统中的负载均衡。

根本性障碍。 稀疏系统的分析面临重大挑战，主要原因在于向量 $\boldsymbol{q}^N(t)$ 不再具有马尔可夫性。事实上，对于一般图，不仅不存在以 $\boldsymbol{q}^N(t)$ 这类聚合量为基础的马尔可夫状态描述符，而且为了掌握瞬时转移率，还必须跟踪整个系统的演化。正如 Mitzenmacher 早在其学位论文 [23], 中所指出的那样，这些障碍正是网络拓扑成为一个“非常有趣的问题.....（但）似乎需要采用不同的技术”的原因。这里一个关键问题是：在稀疏兼容图满足什么条件时，系统行为才能保留完全灵活系统在性能上的优势（就队列长度行为而言）？从更基础的角度来看，这等价于弄清楚平均场近似的有效性能够推广到多大范围的非平凡图。

近期有一些研究成功分析了具备适当边扩展性质的兼容图 [25, 31, 37], , 其中 [31] 与当前研究最为相关。该研究考虑了 JSQ(d) 策略，即每个到达的任务都会加入从 d 个随机选取的兼容队列中队列长度最短的一个。作者证明，如果图是“良好连通”的，那么无论在暂态极限还是稳态下，极限占用过程都与完全灵活系统无法区分。尽管良好连通条件允许图是稀疏的，但它要求图具有以下意义上的强边扩展性质：任取一个大小为 δN 的服务器子集，其中 $\delta > 0$ 无论多小。从渐近意义上看，几乎所有任务类型都应与该集合相连，且其兼容服务器中有 δ 的比例位于该集合中。这



(a) Erd˝os–R´enyi 图　　(b) 随机几何图

图 1：Erd˝os-R´enyi 图和随机几何图生成的图拓扑示例，两者的平均度均为 ln N，其中 N为顶点数。该图展示了这两种图中全局连接与局部连接在性质上的根本差异。

一条件使 [31] 中的作者能够确保，对于任意占用测度，每种任务类型在其兼容服务器集合中观察到的队列长度分布都近似相同。因此，任何邻域中的队列长度分布都以相同的方式演化，从而确保该过程渐近地以与完全灵活系统相同的方式演化。

空间图（例如随机几何图 [30]）不具备良好连通性。空间图中的边是“局部的”，因此某一位置的调度器无法将任务分配给位于空间距离较远位置的服务器。然而，正如 [31]，中通过稳态数值模拟所指出的，尽管基于邻域耦合的方法在 [31] 中对这些图失效，稀疏图仍保留了完全灵活系统的性能优势。

除了技术上的困难之外，还存在一个根本性障碍，使得平均场近似无法应用于空间图。这一点可以通过一个简单的反例来理解：如果系统中的所有长队列都位于一个较小的空间区域内，那么系统的行为将与这些长队列分散在整个系统中的情况存在质的差异，因为拥塞需要更多时间才能扩散到图的其余部分。一般而言，在这些情况下，图的局部邻域中的系统行为可能与全局行为大相径庭。因此，不能期待具有空间兼容性约束的系统的瞬态行为与完全灵活系统一致。然而，在稳态下，上述反例所描述的情况可能不会以高概率发生，从而使稳态仍表现得类似于完全灵活系统。因此，需要刻画稳态分布的极限，而不能通过过程级平均场极限来进行，因为暂态极限已被证明会有所不同。矩母函数（MGF）方法和李雅普诺夫方法等替代技术，或许可以通过斯坦因方法得到稳态下的矩界，但通常无法用于精确刻画平稳分布的极限。尽管斯坦因方法已成功用于分析加入最短队列（JSQ）策略 [37]，这些结果关键依赖于状态空间塌缩或稳态的退化性，而这被视为以下因素所导致的结果

JSQ（即渐近地看，所有队列的长度都为零或一）。当平稳分布的极限是非退化的（如本文所述情形）时，我们便进入了平均场近似文献中尚未探索的领域，而将一种能够处理上述困难的新方法形式化，正是本文的主要贡献之一。

2 主要贡献

设 $G_N = (V_N, W_N, E_N)$ 为一个二部图，其中 V_N 表示服务器集合， W_N 表示任务类型集合， $E_N \subseteq V_N \times W_N$ 表示兼容性约束。下文中，任务类型和调度器这两个词将交替使用。这里， $N := |V_N|$ 等于服务器数量， $M(N) := |W_N|$ 等于任务类型数量。设 $\mathcal{N}_v := \{w \in W_N : (v, w) \in E_N\}$ 为服务器 $v \in V_N$ 的兼容任务类型集合， $\mathcal{N}_w := \{v \in V_N : (v, w) \in E_N\}$ 为任务类型 $w \in W_N$ 的兼容服务器集合。记 $d_v^N = |\mathcal{N}_v|$ 和 $d_w^N = |\mathcal{N}_w|$。每种类型的任务以速率 $\lambda N/M(N)$ 按相互独立的泊松过程到达，且每个任务所需的服务时间相互独立并服从均值为一的指数分布。因此，总到达率为 λN，并假设 $\lambda < 1$，以确保系统稳定性。若任务到达调度器 $w \in W_N$，则从 $\mathcal{N}_w$ 中均匀随机地、有放回地抽取 $d \geq 2$ 台服务器，并将任务分配到所选服务器中队列最短的服务器；若队列长度相同，则随机打破平局。队列中的任务按照先到先服务的顺序逐个处理。

此类系统中队列长度过程遍历性的判据已为人所知，并已由 Bramson 等人 [4] 以及 Cardinaels 等人 [6]等加以发展。不过，本文采用一个稍强但更简化的图条件，具体如下。设

$$\rho(G_N) := \max_{v \in V_N} \frac{\lambda N}{M(N)} \sum_{w \in \mathcal{N}_v} \frac{1}{d_w^N}. \tag{2.1}$$

利用李雅普诺夫论证，不难证明 $\rho(G_N) < 1$ 意味着，对于任意 $d \geq 2$，该系统的队列长度过程都是遍历的（命题 4.1）。从概念上讲， $\rho(G_N)$ 表示每个调度器都采用随机路由（$d = 1$）时服务器的最大负载，因此这一条件自然也应意味着 $d \geq 2$的稳定性。为避免重交通行为，当$N \to \infty$ 时，我们将始终假设 $\rho(G_N) \leq \rho_0$ 对所有 $N \geq 1$ 均成立，其中 $\rho_0 < 1$ 为常数。

注 2.1。 相比之下， [6] 中的稳定性条件可简化为：对于所有 $w \in W_N$和 $U \subseteq V_N$，若存在定义在 U上的概率分布 $p_{w,U}(\cdot)$，使得

$$\max_{v \in V_N} \frac{\lambda N}{M(N)} \sum_{w \in W_N} \binom{|\mathcal{N}_w|}{d}^{-1} \sum_{\substack{U \subseteq \mathcal{N}_w \\ |U| = \min(d, |\mathcal{N}_w|)}} p_{w,U}(v) < 1. \tag{2.2}$$

然而，为了证明平均场近似，我们还需要在后文证明$\frac{N}{M(N)} \sum_{w \in \mathcal{N}_v} \frac{1}{d_w^N} \approx 1$ 对所有$v \in V_N$成立（见（ $\gamma(G_N)$ 在（2.3）中的定义以及推论3.2），因此 $\rho(G_N) \approx \lambda < 1$便可立即得出。因此，我们将采用（2.1）中的简化稳定性条件。

我们从四个方面作出贡献：（a）我们为底层马尔可夫过程建立了大规模混合时间界；（b）我们根据某些图参数，量化仅从空队列出发时，瞬态行为与平均场常微分方程之间的偏差；（c）我们结合（a）和（b），提出一个判据，用以判断全局量 $\boldsymbol{q}^N(t)$ 在稳态下何时与完全灵活系统渐近地无法区分；最后，（d）我们展示标准的稀疏空间图生成模型以及一大类稀疏正则图如何满足

这一收敛判据。

（a）大规模混合时间界。大规模系统的混合时间界很难得到。即使不存在任何兼容性约束，为大规模 d 下的 JSQ(N) 策略推导混合时间界也需要大量工作 [19]。首先，正如 [19], 中所讨论的，初始状态的影响构成了一项重大挑战。由于状态空间是无限的，如果系统从状态空间中一个不利的角落出发，可能需要很长时间才能回到“规则状态”，这甚至可能使混合时间界无法满足我们的目的。其次，在存在兼容图结构时，再生论证（例如界定马尔可夫过程到达某个固定状态所需的时间） [9], 也无法使用，因为再生间隔通常随 N呈指数级增长。事实上，对于大规模分析，我们并不需要传统意义上的混合时间。相反，我们引入如下大规模混合时间概念：从一组适当的状态出发，将 $\boldsymbol{q}^N(t)$ 的分布与其稳态分布进行比较时，在什么条件下可以认为二者在某种适当意义下“接近”? 这里值得指出的是，由于 $\boldsymbol{q}^N(t)$ 不是马尔可夫过程，我们所说的其稳态分布，是指系统处于稳态时对泛函 $\boldsymbol{q}^N(t)$ 求得的值。我们证明，这一混合时间不会随 N 变化（定理 3.10）。这意味着，从适当的状态集合出发，在这一混合时间观察系统，便能很好地近似稳态。上述“适当状态”集合尤其包含空状态。定理 3.10 证明中的一个关键论证依赖于一种新颖的随机耦合。如果系统的一个副本从某个状态出发，且每台服务器的队列长度都不超过系统另一副本中对应服务器的队列长度，那么就存在一种随机耦合，使得对任意样本路径，这一序关系始终保持（命题3.11）。我们认为，命题 3.11 和定理 3.10 适用于一大类此类单调系统，这一点本身也可能具有独立的研究价值。

(b) 从空状态出发的过程级极限。 由于系统从任意一个合适状态集合中的状态出发，都能迅速收敛至稳态，因此只需刻画其中一个状态的样本路径。接下来，我们刻画从仅有空队列的系统出发时， $\boldsymbol{q}^N(t)$ 的样本路径渐近行为。先引入底层图的两个量：

$$\phi(G_N) := \max_{v \in V_N} \left| \frac{N}{M(N)} \sum_{w \in \mathcal{N}_v} \frac{1}{d_w^N} - 1 \right| \qquad \text{and} \qquad \gamma(G_N) := \frac{1}{M(N)} \sum_{w \in W_N} \frac{1}{d_w^N}. \tag{2.3}$$

粗略地说， $\phi(G_N)$ 衡量二部图的正则程度，而 $\gamma(G_N)$ 描述任务类型的平均逆度。例如，若对所有 $w \in W_N$， $d_w^N = d_{\text{task}}^N$ ，且对所有 $v \in V_N$， $d_v^N = d_{\text{server}}^N$，则 $\phi(G_N) = 0$，而 $\gamma(G_N) = 1/d_{\text{task}}^N$（另见定义 3.7）。我们证明，若 $\phi(G_N)$ 和 $\gamma(G_N)$ 足够小，且系统从队列分布“足够分散”的状态出发（定理 3.12），那么过程级极限在 ℓ_2-距离意义下仍与完全灵活系统的常微分方程系统接近。这尤其包括仅有空队列的状态。最重要的是，定理 3.12 中的结果是非渐近的。

（c）平均场近似。利用定理3.12 和混合时间界，我们根据局部性质确定任意兼容图适用平均场近似的条件 ϕ（G_N）和 γ（G_N）。特别地，在定理 3.1中，我们给出一个有限 N保证：对于任意图 G_N，稳态与 ℓ_2系统的常微分方程不动点之间的距离不超过

常微分方程组的

$$\frac{c}{\ln\left(1/\max\{\phi(G_N)^2, \gamma(G_N)\}\right)^{\alpha}} \tag{2.4}$$

对于仅取决于 λ、ρ_0 和 d 的常数 c，$\alpha > 0$。特别地，如果 $\max\{\phi(G_N)^2, \gamma(G_N)\} \to 0$当 $N \to \infty$ 时成立，那么在稳态下，$\boldsymbol{q}^N(t)$ 的分布将弱收敛到与完全灵活系统对应的常微分方程的不动点处的狄拉克δ分布。

(d) 对特定图类的启示。 为了说明常见图满足关于图序列的条件，我们考察两个稀疏 图序列，它们满足条件 $\max\{\phi(G_N)^2, \gamma(G_N)\} \to 0$当 $N \to \infty$ 时成立。

首先，令 $(G_N)_{N\geq 1}$ 为随机二部几何图序列。从宏观上看，这些图是通过将调度器和服务器放置在均匀随机的位置，并在调度器与服务器之间的距离至多为固定距离 $r(N) > 0$时连接一条边而构造的；精确定义见第3.2节。回顾一下，d_v^N 和 d_w^N 分别表示 $v \in V_N$ 和 $w \in W_N$ 的度。我们证明，若 $r(N)$ 满足 $\liminf_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[d_v^N\right]/\ln N = \infty$ 且 $\liminf_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[d_w^N\right]/\max(\ln M(N), \ln N) = \infty$，那么 $\max\{\phi(G_N)^2、\gamma(G_N)\} \to 0$ 和 $\boldsymbol{q}^N(t)$ 在稳态下确实会渐近地与完全灵活系统无法区分（推论 3.5）。注意，这些条件仍保证图的稀疏性：与度为 $M(N)$ 的完全二部图相比，服务器的度几乎小了因子 $M(N)/\ln N$。

其次，对于一列正则二分图，上述收敛性在更一般的条件下仍然成立。也就是说，d_v^N 对所有 v 和 d_w^N 对所有 w 在图的每个连通分量内都相同；精确定义见第 3.2 节。我们证明，只要 $\gamma(G_N) \to 0$，收敛性就成立；例如，当 $\min_{w\in W_N} d_w^N$ 随 $N \to \infty$ 以任意速度发散时，这一条件便成立（推论 3.8），从而保证图的稀疏性。这涵盖了任意确定性图序列，因此显著拓宽了平均场近似的适用范围。

3 主要结果

下文中，所有图均指第 2 节开头所述的二部图 $G_N = (V_N, W_N, E_N)$。我们用 $X_v(t)$表示服务器 $v \in V_N$ 在时刻t的队列长度。令 $Q_i^N(t) := \sum_{v\in V_N} \mathbb{1}\{X_v(t) \geq i\}$ 表示整个系统中队列长度至少为$i \in \mathbb{N}$ 的服务器数量。我们将这些称为全局量。从任务类型 $w \in W_N$的视角观察，队列长度至少为 $i \in \mathbb{N}$的服务器局部数量记为 $Q^{N,w}_i(t) := \sum_{v\in\mathcal{N}_w} \mathbb{1}\{X_v(t) \geq i\}$。定义它们的缩放版本为 $q_i^N(t) := Q_i^N(t)/N$以及 $q^{N,w}_i(t) := Q^{N,w}_i(t)/d_w^N$。注意，$\{X_v(t) : v \in V_N\}$ 是一个马尔可夫过程，向量 $(q_i^N(\infty))_{i\geq 1}$ 表示该马尔可夫过程相应的稳态泛函。

3.1 任意图的稳态近似

JSQ(d) 策略以其相较于随机路由显著提升延迟性能而闻名。众所周知，在具有完全灵活性的完全二部图上，稳态量$q_i^N(\infty)$ 趋近于 $q_i^* := \lambda^{\frac{d^i-1}{d-1}}$ 当 $N \to \infty$ [23, 35]时。这通常被称为“二选一效应”，意指队列长度分布的尾部以双指数速度衰减（而随机路由下仅以指数速度衰减）。回顾 ($\phi(G_N)$ 和 $\gamma(G_N)$ 的定义，见 (2.3)。对于任意兼容图 G_N，本文的一个核心结果给出了一个有限N 界，约束期望的 ℓ_2-距离，即 $(q_i^N(\infty))_{i\geq 1}$ 与 $(q_i^*)_{i\geq 1}$之间的距离：

定理 3.1。给定任意 G_N，若 $\rho(G_N) \le \rho_0 < 1$，则 $\boldsymbol{X}(t) = (X_v(t))_{v\in V_N}$ 是遍历的。此外，若 $\max\{\phi(G_N)^2, \gamma(G_N)\} \le 1$，则存在常数 $c, \alpha > 0$（仅依赖于 λ, ρ_0 和 d），使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\left(q_i^N(\infty) - q_i^*\right)^2\right] \le \frac{c}{\ln\left(1/\max\{\phi(G_N)^2, \gamma(G_N)\}\right)^{\alpha}}, \tag{3.1}$$

其中 $q_i^* = \lambda^{\frac{d^i-1}{d-1}}$ 对于 $i \in \mathbb{N}$。

定理3.1 的证明见第 4.4 节。对于较大的 N 渐近情形，该定理还给出了收敛速率，不过我们不认为对于特定的图序列，这一速率是紧的，因为该结果适用于任意图。下面是一个直接推论。

推论 3.2. 设 $(G_N)_{N\ge1}$ 是一个图序列，满足 $\rho(G_N) \le \rho_0 < 1$ 对所有 $N \ge 1$ 均成立，并假设 最大值$\{\phi(G_N)^2, \gamma(G_N)\} \to 0$ 当 $N \to \infty$时成立。则 $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\left(q_i^N(\infty) - q_i^*\right)^2\right] \to 0$ 当 $N \to \infty$时成立。

注 3.3. 值得注意的是，定理 3.1 可推广为任意 ℓ_p距离上的界，适用于 $0 < p < \infty$。这是通过利用推论 4.3 对尾和进行界定，并利用 H¨older 不等式对有限余项进行界定而得到的。

3.2 特定图序列的收敛

现在我们来讨论两类满足推论3.2中的平均场近似条件的重要图序列。首先介绍一种常用的空间图生成模型。

定义 3.4（随机二部几何图）。如果 G_N 是按如下方式构造的，则称其为随机二部几何图。设 $r(N) > 0$ 为固定值，且 A 为单位环面。我们分别独立地将每个 $v \in V_N$ 和 $w \in W_N$ 均匀随机地分配到位置 $x_v \in A$ 和 $x_w \in A$。接下来，当且仅当 $\|x_v - x_w\|_p \le r(N)$ 时，令$(v, w) \in E_N$，其中 $0 < p < \infty$。

我们在环面上定义随机几何图，以避免边界效应。不过，从实际角度来看，随着 $N \to \infty$，边界效应会变得可以忽略。对于下述定理，请回忆 d_v^N和 d_w^N 分别表示 $v \in V_N$ 和 $w \in W_N$ 在 G_N中的度。

推论 3.5. 设 $(G_N)_{N\ge1}$ 是一个随机二部几何图序列，其中 $r(N)$ 的选取满足

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[d_v^N\right]}{\ln N} = \infty, \quad \liminf_{N\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[d_w^N\right]}{\max(\ln M(N), \ln N)} = \infty. \tag{3.2}$$

那么，对于图序列 $(G_N)_{N\ge1}$的任意一种实现，几乎必然有：$\boldsymbol{X}(t) = (X_v(t))_{v\in V}$ 对所有足够大的 N 都是遍历的，并且当 $N \to \infty$ 时，$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\left(q_i^N(\infty) - q_i^*\right)^2\right] \to 0$，其中 $q_i^* = \lambda^{\frac{d^i-1}{d-1}}$ 对于 $i \in \mathbb{N}$。

注 3.6. 添加“对所有 N 充分大”是推论 3.5 中的原因在于，对于任意固定的 N，随机图不满足稳定性判据的概率虽然很小，但仍为正。随着 $N \to \infty$增大，这一概率会变小；利用博雷尔-坎泰利引理，我们可以证明，对所有充分大的 N，稳定性判据几乎必然成立。具体而言，关于 $(q_i^N(\infty))_{i\ge1}$ 的收敛性陈述，应理解为对遍历性成立时所有充分大的 N 均成立。

证明依赖于利用测度集中的论证验证推论3.2 中的条件，详见第 4.5 节。接下来，我们考虑正则图序列；在这种情况下，我们可以允许更一般的图序列。

定义 3.7（正则二分图）。 我们称 G_N 为正则二分图，如果（v, w） $\in E_N$蕴含 $Nd_v^N = M$（N）d_w^N。

注意，正则二分图的定义意味着每个连通分量内所有服务器和调度器的度都相同，并且该图可以有多个连通分量。下一个定理证明了对于任何此类最小调度器度数趋于无穷的正则二分图，其稳态的收敛性。

推论 3.8。 设（G_N）$_{N\geq 1}$是一个正则二分图序列，其中 γ（G_N） $\to 0$ 当$N \to \infty$时成立。那么，对于所有 $N \geq 1$，队列长度过程均遍历，并且 $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\big[\big(q_i^N(\infty) - q_i^*\big)^2\big] \to 0$当 $N \to \infty$时成立，其中 $q_i^* = \lambda^{\frac{d^i-1}{d-1}}$ 对于$i \in \mathbb{N}$成立。特别地，当 $N \to \infty$时，$\min_{w\in W_N} d_w^N \to \infty$的收敛成立。

证明。注意到，由于 G_N 的正则性，显然有

$$\phi(G_N) := \max_{v\in V_N} \left| \frac{N}{M(N)} \sum_{w\in\mathcal{N}_v} \frac{1}{d_w^N} - 1 \right| = \max_{v\in V_N} \left| \frac{N}{M(N)} \sum_{w\in\mathcal{N}_v} \frac{M(N)}{Nd_v^N} - 1 \right| = 0. \tag{3.3}$$

还需注意，$\rho(G_N) \leq \lambda(1 + \phi(G_N)) = \lambda < 1$。因此，推论 3.2 完成了第一部分的证明。第二部分的证明基于以下观察：$\gamma(G_N) \leq 1/(\min_{w\in W_N} d_w^N)$。 □

其余的贡献将在定理 3.1 的证明中发挥关键作用。

3.3 大尺度混合时间界

确定稳态分布的一个关键步骤，是证明 $\boldsymbol{q}^N(t)$ 的分布在较长但有限的时间内会接近其稳态。我们证明，在适当意义下，对于任何在随机序上被稳态分布支配的状态，马尔可夫过程都能在与 N 无关的多项式时间内达到混合。我们使用以下随机序的定义：

定义 3.9 (随机序)。 对于 $n \in \mathbb{N}$，设 $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ 和 $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ 是两个 n 维随机变量。如果存在一个共同的概率空间，使得 $X_i \leq Y_i$ 对所有 $i = 1, \ldots, n$ 几乎必然成立，则记作 $\boldsymbol{X} \leq_{st} \boldsymbol{Y}$。

为形式化大规模混合时间的概念，考虑同一图 G_N 上系统的两个副本。对于系统 k，其中 $k = 1, 2$，服务器 $v \in V_N$ 的队列长度记为 $X_v^{(k)}(t)$，队列长度至少为 $i \in \mathbb{N}$ 的服务器所占比例记为 $q^{N,\,i\,(k)}(t)$。

定理 3.10。 设 G_N 是一个图，$\rho(G_N) \leq \rho_0 < 1$，且 $\boldsymbol{X}_0$ 是定义在 $\mathbb{N}^N$ 上的随机变量，使得 $\boldsymbol{X}_0 \leq_{st} \boldsymbol{X}(\infty)$。假设 $\boldsymbol{X}^{(1)}(0) \overset{d}{=} \boldsymbol{X}_0$ 且 $\boldsymbol{X}^{(2)}(0) \overset{d}{=} \boldsymbol{X}^{(2)}(\infty)$。那么存在一个联合概率空间以及常数 $c_1, c_2 > 0$, $0 < \alpha \leq 1$（仅依赖于 ρ_0 和 d），使得对所有 $t \geq 0$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\Big[\Big|q_i^{N,(2)}(t) - q_i^{N,(1)}(t)\Big|\Big] \leq \frac{1}{(c_1 + c_2 t)^{\alpha}}. \tag{3.4}$$

证明见第 4.2节，并依赖于随机序对所有 $t \geq 0$始终保持这一事实，如下述命题所示。

命题 3.11。 在定理 *3.10*的条件下，存在一个联合概率空间，使得 $X_v^{(1)}(t) \le X_v^{(2)}(t)$ 对所有 $v \in V$ 和 $t \ge 0$，沿任意样本路径几乎必然成立。

该命题在第 4.2 节证明。证明采用归纳论证，展示每个到达时刻和离开时刻都能保持该不等式。在到达时刻，我们利用 JSQ(d) 策略的单调性：如果在两个系统中抽取相同的 d 台服务器，那么任务在系统 2 中会被路由到队列长度高于系统 1 中所路由到的服务器。我们将这一行为与 JSQ(d) 概率分配函数的一项性质联系起来（引理 4.4）。该命题可推广到任何满足这种单调性的分配策略。

3.4 空状态的过程级极限

由于我们关注的量 $\boldsymbol{q}^N(t)$ 会在有限时间内变得任意接近稳态，因此只需刻画系统单条样本路径的瞬态行为。我们证明，如果 $\boldsymbol{q}^N(t)$ 和 $\phi(G_N)$ 足够小（其定义见回顾式 (2.3)），且初始状态中的队列“足够分散”，那么 $\gamma(G_N)$ 会接近一个常微分方程系统。

定理 3.12。 设 G_N 为一个图，$\rho(G_N) \le \rho_0$，且 $\bar{\boldsymbol{q}}(t) = (\bar{q}_i(t))_{i\ge1}$ 是常微分方程系统的唯一解

$$\frac{d\bar{q}_i(t)}{dt} = \lambda\left(\bar{q}_{i-1}(t)^d - \bar{q}_i(t)^d\right) - \left(\bar{q}_i(t) - \bar{q}_{i+1}(t)\right) \ \textit{for } i \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

那么，存在一个常数 $c \ge 1$（仅取决于 ρ_0 和 d），使得对于所有 $t \ge 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sup_{s\in[0,t]}\sum_{i=1}^{\infty}\left(q_i^N(s) - \bar{q}_i(s)\right)^2\Big] &\le 2\phi(G_N)^2\Big(\lambda t + \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{\infty} q_i^N(0)^2\Big]\Big)\\ &+ 12e^{ct^2}\Big(t^2d^2\phi(G_N)^2 + \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{M}\sum_{w\in W}\left|q_i^{N,w}(0) - \bar{q}_i(0)\right|\Big)^2\Big] + 4t(\rho_0 d + 1)\gamma(G_N)\Big).\end{aligned} \tag{3.6}$$

注意，定理 3.12 也是一个非渐近结果。一个直接推论如下 .

推论 3.13。 设 $(G_N)_{N\ge1}$ 为一个图序列，$\rho(G_N) \le \rho_0$ 且 $\max\{\phi(G_N)\ \gamma(G_N)\} \to 0$当 $N \to \infty$时成立。此外，假设 $q_1^N(0) = 0$。那么，对于任意 $t \ge 0$,

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\Big[\sup_{s\in[0,t]}\sum_{i=1}^{\infty}\left(q_i^N(s) - \bar{q}_i(s)\right)^2\Big] = 0,$$

其中 $(\bar{q}_i(t))_{i\ge1}$ 的定义见 (3.5)。

定理 3.12 中的“充分分散”条件由初始状态量 $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{M}\sum_{w\in W}\left|q^{N,w}_i(0) - \bar{q}_i(0)\right|\right)^2$施加。如果对大多数 $w \in W$，$\boldsymbol{q}^{N,w}(0) \approx \bar{\boldsymbol{q}}(0)$，那么这一项就很小，因此，从每种任务类型的视角来看，局部队列长度分布也近似相同。特别是，如果系统从空状态开始，那么这一项为零，此时对于所有 $w \in W_N$，$\boldsymbol{q}^{N,w}(0) = \bar{\boldsymbol{q}}(0) = 0$。定理 3.12 在第 4.3 节中证明。证明依赖于跟踪每种 $w \in W_N$ 对应的一列鞅，并利用它们的二次变差以及诸如 $\phi(G_N)$ 和 $\gamma(G_N)$ 这样的量，根据 Gr¨onwall 不等式来界定与常微分方程的 ℓ_2 距离。在证明中，量 $\phi(G_N)$ 用于 (4.27) 和 (4.34)，而 $\gamma(G_N)$ 用于 (4.35)。

备注 3.14。应将定理 3.12 和推论 3.13 与 Budhiraja 等人 [5]证明的过程级极限结果进行对比。在该论文中，作者研究了本文模型的一个无向版本。该模型本身并不适合刻画任务与服务器兼容性约束。无向图意味着，如果服务器 i 能够处理任务类型 j，那么服务器 j 也必须能够处理任务类型 i。不过，文献 [5] 中的模型推广到有向图后，可以视为我们模型的一个特例：当 $M(N) = N$，且服务器集合与调度器集合之间存在完美匹配时（等价地，每台服务器都有一个专用到达流）。尽管无向图这一假设在 [5]，中并非关键，但$M(N) = N$这一假设对该方法能否奏效起着重要作用。在本文模型中，$M(N)$ 可以随 N 以任意速率（次线性或超线性）增长。由于上述结构差异，[5] 中的队列长度过程对任意图都是遍历的，而在我们的模型中，这一点并非显然。

此外，[5]在服务器的初始队列长度为独立同分布且服从某个分布时，确立了过程级收敛。其思路是，如果系统从服务器队列长度独立同分布的状态出发，那么渐近地，在任意有限时间区间内，任意两个队列长度都保持随机独立，$N \to \infty$。因此，N维队列长度向量可以与一个无限维麦基恩–弗拉索夫过程耦合，在任意有限时间区间内，该过程任意有限组坐标都相互独立。初始时刻队列长度独立同分布这一假设，对于这一方法奏效至关重要。因此，正如 [5], 的结论中已经指出的那样，稳态收敛性如何证明尚不明确。除了我们关于稳态收敛性的主要贡献外，定理3.12还将过程级极限推广到了独立同分布情形之外。它确定了初始状态的一个结构条件，该条件确保系统具有与完全灵活系统相同的过程级极限。

4 证明

本节的大多数结果都是非渐近的，并且对任意固定的 N 均成立。因此，为简洁起见，本节在记号允许的情况下省略对 N 的依赖。

4.1 稳态的存在性与矩界

我们首先证明该马尔可夫过程是正常返的，并且存在唯一的稳态。

命题 4.1。如果 $\rho(G_N) \le \rho_0 < 1$，那么马尔可夫过程 $\boldsymbol{X}(t) = (X_v(t))_{v\in V}$ 是正常返的，并且该过程存在唯一的稳态，记为 $\boldsymbol{X}(\infty)$。

证明依赖于李雅普诺夫论证。令 $V(t) := \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} Q_j(t)$ 为李雅普诺夫函数。如果我们证明，在适当选取的有限状态集之外，$V(t)$ 的漂移处处严格为负，那么这就足以保证正常返。因此，我们计算其漂移。

引理 4.2. 任取 $i \in \mathbb{N}$ 和 $t \ge 0$。则，

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[\sum_{j=i}^{\infty} Q_j(t)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\lambda N}{M}\sum_{w\in W} q_{i-1}^{w}(t)^d - Q_i(t)\right]. \tag{4.1}$$

证明。要改变 $\sum_{j=i}^{\infty} Q_j(t)$ 的值，必须有任务到达队列长度至少为$i-1$ 的服务器，或者有任务离开队列长度至少为 i的服务器。

我们来计算任务被分配到队列长度至少为$i-1$的服务器上的概率。在到达时刻，任务会均匀随机地选择一种类型 $w \in W$。当且仅当系统只采样

队列长度至少为 $i-1$的服务器时，任务才会被路由到队列长度至少为 $i-1$的服务器，而这种情况发生的概率为$q_{i-1}^w(t-)^d$。因此，任务被路由到队列长度至少为 $i-1$的服务器上的概率为 $\frac{1}{M}\sum_{w\in W} q_{i-1}^w(t-)^d$。

现在，我们计算任务离开队列长度至少为 i的服务器的概率。在发生潜在离开的时刻，均匀随机选择一台服务器 $v\in V$。当且仅当 v 的队列长度至少为 i时，任务才会离开队列长度至少为 i 的服务器。因此，任务离开队列长度至少为 i的服务器的概率为 $q_i(t-)$。

我们将到达与离开过程描述如下。设 $N(t)$为速率为$(\lambda+1)N$的泊松过程。该过程中的一个事件，要么是类型为 $w\in W$的到达事件，其概率为 $\lambda/((\lambda+1)M)$；要么是服务器 $v\in V$上的潜在离开，其概率为 $1/((\lambda+1)N)$，且与过去独立。注意，这等价于之前介绍的模型描述。因此，对于任意 $h>0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{j=i}^{\infty}\Delta Q_j(t)\mid\mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=i}^{\infty}\Delta Q_j(t)\mid\Delta N(t)=1,\mathcal{F}_t\right]\mathbb{P}\left(\Delta N(t)=1\right)\\ &\quad\pm\mathbb{E}\left[\Delta N(t)\mid\Delta N(t)\geq 2\right]\mathbb{P}\left(\Delta N(t)\geq 2\right)\\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\frac{1}{M}\sum_{w\in W}q_{i-1}^w(t)^d-\frac{1}{\lambda+1}q_i(t)\right)(\lambda+1)Nhe^{-(\lambda+1)Nh}\\ &\quad\pm\left((\lambda+1)Nh+2\right)\left((\lambda+1)Nh\right)^2,\end{aligned}\tag{4.2}$$

其中，$\Delta Q_j(t):=Q_j(t+h)-Q_j(t)$，而 $\Delta N(t):=N(t+h)-N(t)$。这里，我们使用简写符号 $\pm x$ 来表示 $[-x,x]$中的一项。上式意味着

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[\sum_{j=i}^{\infty}Q_j(t)\right]=\lim_{h\downarrow 0}\frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{j=i}^{\infty}\left(Q_j(t+h)-Q_j(t)\right)\mid\mathcal{F}_t\right]\right]}{h}=\mathbb{E}\left[\frac{\lambda N}{M}\sum_{w\in W}q_{i-1}^w(t)^d-Q_i(t)\right],\tag{4.3}$$

这就完成了引理的证明。 □

命题*4.1*的证明。 注意到

$$\frac{\lambda N}{M}\sum_{w\in W}q_i^w(t)=\frac{\lambda N}{M}\sum_{w\in W}\sum_{\substack{v\in\mathcal{N}_w\\ X_v(t)\geq i}}\frac{1}{d_w}=\sum_{\substack{v\in V\\ X_v(t)\geq i}}\frac{\lambda N}{M}\sum_{w\in\mathcal{N}_v}\frac{1}{d_w}\leq\sum_{\substack{v\in V\\ X_v(t)\geq i}}\rho_0=\rho_0Q_i(t).\tag{4.4}$$

设 $V(t):=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}Q_j(t)$ 且 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{x}\in\mathbb{N}^V$。那么，根据单调收敛定理,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[V(t)\right]&=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\sum_{j=i}^{\infty}Q_j(t)\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[\sum_{j=i}^{\infty}Q_j(t)\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\frac{\lambda N}{M}\sum_{w\in W}q_{i-1}^w(t)^d-Q_i(t)\right]\\ &\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\frac{\lambda N}{M}\sum_{w\in W}q_{i-1}^w(t)-Q_i(t)\right]\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\rho_0Q_{i-1}(t)-Q_i(t)\right]=-(1-\rho_0)\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[Q_i(t)\right]+\rho_0N,\end{aligned}\tag{4.5}$$

其中，我们利用了以下事实：$\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[Q_i(t)\right]$ 在任意有限区间上一致收敛，从而在第二个等式中可以交换求导与求和；第三个等式中用到引理4.2，第二个不等式中用到4.4。令 $S:=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{N}^V:\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{v\in V}\mathbb{1}\{x_v\geq i\}\leq N/(1-\rho_0)\right\}$，并注意到 S 是有限的。于是,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[V(t)\right]\big|_{t=0}\leq-(1-\rho_0)\sum_{i=1}^{\infty}Q_i(0)+\rho_0N\leq-(1-\rho_0)N+N\mathbb{1}\{\boldsymbol{x}\in S\}.\tag{4.6}$$

因此，根据 [22], 中的定理 4.2，马尔可夫过程 $\boldsymbol{X}(t)$是正常返的，并且该过程存在唯一的稳态，记为 $\boldsymbol{X}(\infty)$。 □

因此，类似的李雅普诺夫论证表明，稳态具有矩界。

推论 4.3。 若 $\rho(G_N) \le \rho_0 < 1$，则对所有 $i \in \mathbb{N}$， $\mathbb{E}[q_i(\infty)] \le \rho_0^i$。

证明。 任取 $i \in \mathbb{N}$ 和 $t \ge 0$。令 $\boldsymbol{X}(0) \overset{d}{=} \boldsymbol{X}(\infty)$，使得 $\boldsymbol{X}(t) \overset{d}{=} \boldsymbol{X}(\infty)$。于是，

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[\sum_{j=i}^{\infty} Q_j(t)\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{\lambda N}{M}\sum_{w\in W} q_{i-1}^w(t)^d - Q_i(t)\right] \\ &\le \mathbb{E}\left[\frac{\lambda N}{M}\sum_{w\in W} q_{i-1}^w(t) - Q_i(t)\right] \le \mathbb{E}\left[\rho_0 Q_{i-1}(t) - Q_i(t)\right], \end{aligned} \tag{4.7}$$

第二个等式中用到了引理4.2 ，第二个不等式中用到了（4.4）。因此，通过归纳可得 $\mathbb{E}[q_i(t)] \le \rho_0 \mathbb{E}[q_{i-1}(t)] \le \rho_0^i$，由此完成该引理的证明。 □

4.2 大尺度混合时间界的证明

本节的证明依赖于引理4.4中所述的负载均衡策略的以下随机序性质。该引理在附录A中证明。我们针对 JSQ(d) 策略进行证明。不过，我们认为，可以将混合时间界推广到一大类满足类似单调性的负载均衡策略。

引理 4.4. 任取满足 $x_1 \le x_2$ 和 $y_1 \le y_2$的 $0 \le y_1 < x_1 \le 1$ 与 $0 \le y_2 < x_2 \le 1$。那么，

$$\frac{x_1^d - y_1^d}{x_1 - y_1} \le \frac{x_2^d - y_2^d}{x_2 - y_2}. \tag{4.8}$$

命题 *3.11*的证明。 我们对两个系统的到达时刻和潜在离开时刻进行耦合，使得任何任务类型 $w \in W$ 的到达以及服务器 $v \in V$的任何潜在离开发生在两个系统中的同一时刻。我们将设计一种随机耦合，使不等式 $X_v^{(1)}(t) \le X_v^{(2)}(t)$ 对每个 $v \in V$ 都在每个到达时刻和潜在离开时刻保持成立。在时刻$t = 0$，根据随机序假设，并在适当的概率空间上定义 $\boldsymbol{X}^{(1)}(0)$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)}(0)$，该不等式得以保持。

设 $t \ge 0$ 为服务器 $v \in V$的一个潜在离开时刻，并假设对于所有 $v' \in V$， $X_{v'}^{(1)}(t-) \le X_{v'}^{(2)}(t-)$。显然，离开后 $X_v^{(1)}(t) \le X_v^{(2)}(t)$ 也成立。

现在，令 $t \ge 0$ 为任务类型 $w \in W$ 的一个到达时刻，并假设对于所有 $v' \in V$， $X_{v'}^{(1)}(t-) \le X_{v'}^{(2)}(t-)$。任取满足 $i := X_v(t-)$ 的 $v \in \mathcal{N}_w$，我们来计算该任务被分配给 v 的概率。当且仅当系统抽样的服务器队列长度均至少为 i，但并非所有服务器的队列长度都至少为 $i+1$ 时，该任务才会被路由到队列长度为 i 的服务器；这种情况发生的概率为 $q_i^w(t-)^d - q_{i+1}^w(t-)^d$。根据对称性， $\mathcal{N}_w$ 中任何队列长度为 i 的服务器接收该任务的概率都相同，而符合条件的服务器总数为 $Q_i^w(t-) - Q_{i+1}^w(t-)$。因此，分配该任务的概率为

$$p_v^{(k)} := \frac{q^{(k),w}_{X_v^{(k)}(t-)}(t-)^d - q^{(k),w}_{X_v^{(k)}(t-)+1}(t-)^d}{Q^{(k),w}_{X_v^{(k)}(t-)}(t-) - Q^{(k),w}_{X_v^{(k)}(t-)+1}(t-)}, \tag{4.9}$$

将该任务分配给系统 $k=1$ 中的服务器 $v \in \mathcal{N}_w$ 的概率。令 $\hat{p}_v := \min\left(p_v^{(1)}, p_v^{(2)}\right)$ 为共享概率质量。为方便记号，假设 $\mathcal{N}_w$ 中的服务器按顺序排列，并对应整数 $\{1,2,\ldots,d_w\}$。令 $U_t \in [0,1]$ 为一个均匀随机变量，它与其他任何过程相互独立，在各到达时刻之间也相互独立，并且在两个系统之间共享。然后，在系统 k 中，当且仅当

$$U_t \in \left[\sum_{v'=1}^{v-1} \hat{p}_{v'}, \sum_{v'=1}^{v} \hat{p}_{v'}\right) \cup \left[\sum_{v' \in \mathcal{N}_w} \hat{p}_{v'} + \sum_{v'=1}^{v-1}\left(p_{v'}^{(k)} - \hat{p}_{v'}\right), \sum_{v' \in \mathcal{N}_w} \hat{p}_{v'} + \sum_{v'=1}^{v}\left(p_{v'}^{(k)} - \hat{p}_{v'}\right)\right). \tag{4.10}$$

请注意，分配给系统 k 中服务器 $v \in \mathcal{N}_w$ 的概率恰好等于 $p_v^{(k)}$。

为验证随机耦合能维持队列长度的顺序，请注意，若 $U_t < \sum_{v' \in \mathcal{N}_w} \hat{p}_{v'}$，则根据上述构造，任务在两个系统中都会被路由到同一台服务器。因此，在这种情况下，到达后对于所有 $v' \in V$，仍有 $X_{v'}^{(1)}(t) \le X_{v'}^{(2)}(t)$。

接下来，考虑 $U_t \ge \sum_{v' \in \mathcal{N}_w} \hat{p}_{v'}$ 的情况。此时，任务在两个系统中会被路由到两台不同的服务器。令 $v \in \mathcal{N}_w$ 为系统 1 中任务被路由到的服务器。请注意，任务在系统 2 中被路由到哪台服务器并不重要，因为其队列长度只会增加。根据上述构造，必有 $p_v^{(1)} > \hat{p}_v = p_v^{(2)}$。我们声称，这意味着 $X_v^{(1)}(t-) < X_v^{(2)}(t-)$。为说明原因，假设反而有 $X_v^{(1)}(t-) = X_v^{(2)}(t-)$。请注意，

$$Q_i^{(1),w}(t-) = \sum_{v' \in \mathcal{N}_w} \mathbb{1}\{X_{v'}^{(1)}(t-) \ge i\} \le \sum_{v' \in \mathcal{N}_w} \mathbb{1}\{X_{v'}^{(2)}(t-) \ge i\} = Q_i^{(2),w}(t-), \tag{4.11}$$

对所有 $i \in \mathbb{N}$ 和 $w \in W$ 由于 $X_{v'}^{(1)}(t-) \le X_{v'}^{(2)}(t-)$，对所有 $v' \in V$。于是，根据引理 4.4，

$$p_v^{(1)} = \frac{1}{d_w} \frac{q^{(1),w}_{X_v^{(1)}(t-)}(t-)^d - q^{(1),w}_{X_v^{(1)}(t-)+1}(t-)^d}{q^{(1),w}_{X_v^{(1)}(t-)}(t-) - q^{(1),w}_{X_v^{(1)}(t-)+1}(t-)} \le \frac{1}{d_w} \frac{q^{(2),w}_{X_v^{(2)}(t-)}(t-)^d - q^{(2),w}_{X_v^{(2)}(t-)+1}(t-)^d}{q^{(2),w}_{X_v^{(2)}(t-)}(t-) - q^{(2),w}_{X_v^{(2)}(t-)+1}(t-)} = p_v^{(2)}, \tag{4.12}$$

这与假设矛盾。因此，必有 $X_v^{(1)}(t-) < X_v^{(2)}(t-)$，从而对于所有 $v' \in V$，即使在到达之后，$X_{v'}^{(1)}(t) \le X_{v'}^{(2)}(t)$ 也成立，这就完成了命题的证明。 □

定理 3.10 的证明。根据命题 3.11，我们将马尔可夫过程的两个副本耦合，使得对于所有 $v \in V$ 和 $t \ge 0$，几乎必然有 $X_v^{(1)}(t) \le X_v^{(2)}(t)$。这意味着，根据 (4.11)，对于所有 $w \in W$，有 $q^{(2),w}(t) \ge q^{(1),w}(t)$，并且对于所有 $i \in \mathbb{N}$ 和 $t \ge 0$，有 $q_i^{(2)}(t) \ge q_i^{(1)}(t)$。全文中，我们将记 $\Delta_i(t) := q_i^{(2)}(t) - q_i^{(1)}(t)$。令 $\theta := \min(1/(2\rho_0 d), \rho_0)$，并定义 $V(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \theta^i \sum_{j=i}^{\infty} \Delta_j(t)$。于是，根据单调收敛定理，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbb{E}[V(t)] &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{\infty}\theta^i \mathbb{E}\left[\sum_{j=i}^{\infty}\Delta_j(t)\right] = \sum_{i=1}^{\infty}\theta^i \frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[\sum_{j=i}^{\infty}\Delta_j(t)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\theta^i \mathbb{E}\left[\frac{\lambda}{M}\sum_{w \in W}\left(q_{i-1}^{(2),w}(t)^d - q_{i-1}^{(1),w}(t)^d\right) - \Delta_i(t)\right] \\
&\le \sum_{i=1}^{\infty}\theta^i \mathbb{E}\left[\frac{\lambda d}{M}\sum_{w \in W}\left(q_{i-1}^{(2),w}(t) - q_{i-1}^{(1),w}(t)\right) - \Delta_i(t)\right] \\
&\le \sum_{i=1}^{\infty}\theta^i\left(\theta\rho_0 d - 1\right)\mathbb{E}[\Delta_i(t)] \le -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\theta^i \mathbb{E}[\Delta_i(t)]
\end{aligned} \tag{4.13}$$

其中我们利用了以下事实： $\sum_{i=1}^{\infty}\theta^i\mathbb{E}\left[\Delta_i(t)\right]$ 一致收敛，因为 $\theta<1$ 在第二个等式中交换求导与求和，第三个等式中使用引理 4.2 第一个不等式中使用中值定理以及 θ 第三个不等式中使用其定义。第二个不等式成立是因为

$$\begin{aligned}\frac{\lambda N}{M}\sum_{w\in W}\left(q_i^{(2),w}(t)-q_i^{(1),w}(t)\right)&=\frac{\lambda N}{M}\sum_{w\in W}\sum_{\substack{v\in\mathcal{N}_w:\,X_v^{(2)}(t)\geq i\\ X_v^{(1)}(t)\leq i-1}}\frac{1}{d_w}\\ &=\sum_{\substack{v\in V:\,X_v^{(2)}(t)\geq i\\ X_v^{(1)}(t)\leq i-1}}\frac{\lambda N}{M}\sum_{w\in\mathcal{N}_v}\frac{1}{d_w}\leq\sum_{\substack{v\in V:\,X_v^{(2)}(t)\geq i\\ X_v^{(1)}(t)\leq i-1}}\rho_0=\rho_0\left(Q_i^{(2)}(t)-Q_i^{(1)}(t)\right).\end{aligned}\tag{4.14}$$

接下来，我们用 $\mathbb{E}\left[V(t)\right]$ 给出 $\sum_{i=1}^{\infty}\theta^i\mathbb{E}\left[\Delta_i(t)\right]$ 的一个下界。注意，

$$\mathbb{E}\left[V(t)\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}\theta^i\Delta_j(t)\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{j}\theta^i\Delta_j(t)\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\theta\left(1-\theta^i\right)}{1-\theta}\Delta_i(t)\right],\tag{4.15}$$

因此，再次根据单调收敛定理，

$$\theta\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\Delta_i(t)\right]\leq\mathbb{E}\left[V(t)\right]\leq\frac{\theta}{1-\theta}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\Delta_i(t)\right].\tag{4.16}$$

因此，要用 $\mathbb{E}\left[V(t)\right]$，给出 $\sum_{i=1}^{\infty}\theta^i\mathbb{E}\left[\Delta_i(t)\right]$ 的一个下界，只需用 $\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\Delta_i(t)\right]$ 给出一个下界。令 $\eta:=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\Delta_i(t)\right]$。注意，由推论 4.3 可知 $\mathbb{E}\left[\Delta_i(t)\right]\leq\mathbb{E}\left[q_i^{(2)}(t)\right]\leq\rho_0^i$。因此，$\sum_{i=1}^{\infty}\theta^i\mathbb{E}\left[\Delta_i(t)\right]$ 的一个下界由以下原始与对偶对给出

$$\begin{aligned}(P)\ \min_{\boldsymbol{x}}\quad&\sum_{i=1}^{\infty}\theta^i x_i\\ \text{s.t.}\quad&\sum_{i=1}^{\infty}x_i=\eta\\ &0\leq x_i\leq\rho_0^i\end{aligned}\qquad\begin{aligned}(D)\ \max_{z,\boldsymbol{y}}\quad&\eta z-\sum_{i=1}^{\infty}\rho_0^i y_i\\ \text{s.t.}\quad&z-y_i\leq\theta^i\\ &y_i\geq 0.\end{aligned}\tag{4.17}$$

任取 $i_0\in\mathbb{N}$。对偶问题的一个可行解为：当 $i<i_0$ 时取 $y_i=0$，当 $i\geq i_0$ 时取 $y_i=\theta^{i_0}-\theta^i$，且 $z=\theta^{i_0}$。由于根据弱对偶性，任意对偶解都为任意原始解提供一个下界，因此可得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\theta^i\mathbb{E}\left[\Delta_i(t)\right]\geq\left(\eta-\sum_{i=i_0}^{\infty}\rho_0^i\right)\theta^{i_0}+\sum_{i=i_0}^{\infty}\rho_0^i\theta^i=\left(\eta-\frac{\rho_0^{i_0}}{1-\rho_0}\right)\theta^{i_0}+\frac{\rho_0^{i_0}\theta^{i_0}}{1-\rho_0\theta}.\tag{4.18}$$

现在，令 $i_0:=\lceil\ln((1-\rho_0)\eta)/\ln(\rho_0)\rceil$。注意，由于 $i_0\in\mathbb{N}$ since $\eta\leq\rho_0/(1-\rho_0)$ and $\rho_0<1$。那么，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\theta^i\mathbb{E}\left[\Delta_i(t)\right]&\geq\left(\eta-\frac{\rho_0^{\ln((1-\rho_0)\eta)/\ln(\rho_0)}}{1-\rho_0}\right)\theta^{i_0}+\frac{\rho_0^{i_0}\theta^{i_0}}{1-\rho_0\theta}=\left(\eta-\frac{(1-\rho_0)\eta}{1-\rho_0}\right)\theta^{i_0}+\frac{\rho_0^{i_0}\theta^{i_0}}{1-\rho_0\theta}\\ &=\frac{(\rho_0\theta)^{i_0}}{1-\rho_0\theta}\geq\frac{\rho_0\theta}{1-\rho_0\theta}\left(\rho_0\theta\right)^{\ln((1-\rho_0)\eta)/\ln(\rho_0)}=\frac{\rho_0\theta}{1-\rho_0\theta}\left((1-\rho_0)\eta\right)^{\ln(\rho_0\theta)/\ln(\rho_0)}.\end{aligned}\tag{4.19}$$

令 $\alpha := \ln(\theta)/\ln(\rho_0) \geq 1$。上面的方程和（4.16）意味着

$$\sum_{i=1}^{\infty} \theta^i \mathbb{E}\left[\Delta_i(t)\right] \geq \frac{\rho_0\theta}{1-\rho_0\theta}((1-\rho_0)\eta)^{1+\alpha} \geq \frac{\rho_0\theta}{1-\rho_0\theta}\left(\frac{(1-\rho_0)(1-\theta)}{\theta}\mathbb{E}\left[V(t)\right]\right)^{1+\alpha}. \tag{4.20}$$

因此，我们得到了一个有效的下界。将该下界应用于 (4.13)，得到 $\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[V(t)\right] \leq -c_1\mathbb{E}\left[V(t)\right]^{1+\alpha}$，其中 $c_1 := \rho_0\theta\left((1-\rho_0)(1-\theta)/\theta\right)^{1+\alpha}/(2(1-\rho_0\theta)) > 0$。这意味着

$$\mathbb{E}\left[V(t)\right] \leq \frac{1}{\left(\mathbb{E}\left[V(0)\right]^{-\alpha} + c_1\alpha t\right)^{1/\alpha}} \leq \frac{1}{\left(c_2^{-\alpha} + c_1\alpha t\right)^{1/\alpha}}, \tag{4.21}$$

其中 $c_2 := \rho_0\theta/((1-\rho_0)(1-\theta)) > 0$，并且我们利用了以下事实：$\mathbb{E}\left[V(0)\right] \leq \theta\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\Delta_i(t)\right]/(1-\theta) \leq \theta\sum_{i=1}^{\infty}\rho_0^i/(1-\theta) = c_2$，根据 (4.16) 和推论 4.3，在第二个不等式中。因此，由 (4.16)，

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\Delta_i(t)\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[V(t)\right]}{\theta} \leq \frac{1}{\theta\left(c_2^{-\alpha} + c_1\alpha t\right)^{1/\alpha}}, \tag{4.22}$$

这就完成了定理的证明。 □

4.3 过程级极限的证明

引理 4.5。固定任意 $i \in \mathbb{N}$ 和 $w \in W$。过程

$$M_i^w(t) := Q_i^w(t) - Q_i^w(0) - \int_0^t \frac{\lambda N}{M} \sum_{\substack{v\in\mathcal{N}_w \\ X_v(s)=i-1}} \sum_{w'\in\mathcal{N}_v} \frac{q_{i-1}^{w'}(s)^d - q_i^{w'}(s)^d}{Q_{i-1}^{w'}(s) - Q_i^{w'}(s)} - \left(Q_i^w(s) - Q_{i+1}^w(s)\right)\mathrm{d}s, \tag{4.23}$$

是从零开始的平方可积鞅。此外，二次变差 $[M_i^w]_t$ 满足

$$\mathbb{E}\left[[M_i^w]_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{\lambda N}{M} \sum_{\substack{v\in\mathcal{N}_w \\ X_v(s)=i-1}} \sum_{w'\in\mathcal{N}_v} \frac{q_{i-1}^{w'}(s)^d - q_i^{w'}(s)^d}{Q_{i-1}^{w'}(s) - Q_i^{w'}(s)} + \left(Q_i^w(s) - Q_{i+1}^w(s)\right)\mathrm{d}s\right]. \tag{4.24}$$

引理 4.5的证明见附录 B。

定理 *3.12*的证明。固定任意 $i \in \mathbb{N}$、$w \in W$ 和 $t \geq 0$，并令 $d_i^w(t) := |q_i^w(t) - \bar{q}_i(t)|$。于是，

$$\begin{aligned} d_i^w(t) \leq \lambda \int_0^t \Bigg| \frac{1}{d_w}\frac{N}{M} \sum_{\substack{v\in\mathcal{N}_w \\ X_v(s)=i-1}} \sum_{w'\in\mathcal{N}_v} \frac{q_{i-1}^{w'}(s)^d - q_i^{w'}(s)^d}{Q_{i-1}^{w'}(s) - Q_i^{w'}(s)} - \left(\bar{q}_{i-1}(s)^d - \bar{q}_i(s)^d\right) \Bigg| \mathrm{d}s \\ + \int_0^t \left|\left(q_i^w(s) - q_{i+1}^w(s)\right) - \left(\bar{q}_i(s) - \bar{q}_{i+1}(s)\right)\right| \mathrm{d}s + d_i^w(0) + \frac{|M_i^w(t)|}{d_w}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

其中 $M_i^w(t)$ 是引理 4.5 中定义的平方可积鞅。接下来我们对以下各项进行估计

右侧的各项。式（4.25）中第一个积分里的项有如下上界

$$
\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{d_w}\frac{N}{M}\sum_{\substack{v\in\mathcal{N}_w\\ X_v(s)=i-1}}\sum_{w'\in\mathcal{N}_v}\frac{q_{i-1}^{w'}(s)^d-q_i^{w'}(s)^d}{Q_{i-1}^{w'}(s)-Q_i^{w'}(s)}-\left(\bar{q}_{i-1}(s)^d-\bar{q}_i(s)^d\right)\Big| \\
&\quad\le\Big|\frac{1}{d_w}\sum_{\substack{v\in\mathcal{N}_w\\ X_v(s)=i-1}}\sum_{w'\in\mathcal{N}_v}\frac{N}{M}\frac{q_{i-1}^{w'}(s)^d-q_i^{w'}(s)^d}{Q_{i-1}^{w'}(s)-Q_i^{w'}(s)}-\left(q_{i-1}^{w}(s)-q_i^{w}(s)\right)\frac{\bar{q}_{i-1}(s)^d-\bar{q}_i(s)^d}{\bar{q}_{i-1}(s)-\bar{q}_i(s)}\Big| \\
&\qquad+\Big|\left(q_{i-1}^{w}(s)-q_i^{w}(s)\right)-\left(\bar{q}_{i-1}(s)-\bar{q}_i(s)\right)\Big|\frac{\bar{q}_{i-1}(s)^d-\bar{q}_i(s)^d}{\bar{q}_{i-1}(s)-\bar{q}_i(s)} \\
&\le\frac{1}{d_w}\sum_{\substack{v\in\mathcal{N}_w\\ X_v(s)=i-1}}\Big|\sum_{w'\in\mathcal{N}_v}\frac{N}{M}\frac{q_{i-1}^{w'}(s)^d-q_i^{w'}(s)^d}{Q_{i-1}^{w'}(s)-Q_i^{w'}(s)}-\frac{\bar{q}_{i-1}(s)^d-\bar{q}_i(s)^d}{\bar{q}_{i-1}(s)-\bar{q}_i(s)}\Big|+d\left(d_{i-1}^{w}(s)+d_i^{w}(s)\right),
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

其中，第一个不等式中使用了三角不等式，第二个不等式中使用了中值定理。上式右侧的第一项进一步可上界为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{d_w}\sum_{\substack{v\in\mathcal{N}_w\\ X_v(s)=i-1}}\left|\sum_{w'\in\mathcal{N}_v}\frac{N}{M}\frac{q_{i-1}^{w'}(s)^d-q_i^{w'}(s)^d}{Q_{i-1}^{w'}(s)-Q_i^{w'}(s)}-\frac{\bar{q}_{i-1}(s)^d-\bar{q}_i(s)^d}{\bar{q}_{i-1}(s)-\bar{q}_i(s)}\right| \\
&\quad\le\frac{1}{d_w}\sum_{\substack{v\in\mathcal{N}_w\\ X_v(s)=i-1}}\frac{N}{M}\sum_{w'\in\mathcal{N}_v}\frac{1}{d_{w'}}\left|\frac{q_{i-1}^{w'}(s)^d-q_i^{w'}(s)^d}{q_{i-1}^{w'}(s)-q_i^{w'}(s)}-\frac{\bar{q}_{i-1}(s)^d-\bar{q}_i(s)^d}{\bar{q}_{i-1}(s)-\bar{q}_i(s)}\right| \\
&\qquad+\frac{1}{d_w}\sum_{\substack{v\in\mathcal{N}_w\\ X_v(s)=i-1}}\left|\frac{N}{M}\sum_{w'\in\mathcal{N}_v}\frac{1}{d_{w'}}-1\right|\frac{\bar{q}_{i-1}(s)^d-\bar{q}_i(s)^d}{\bar{q}_{i-1}(s)-\bar{q}_i(s)} \\
&\le\frac{1}{d_w}\sum_{v\in\mathcal{N}_w}\frac{N}{M}\sum_{w'\in\mathcal{N}_v}\frac{K}{d_{w'}}\left(d_{i-1}^{w'}(s)+d_i^{w'}(s)\right)+d\phi(G)\left(q_{i-1}^{w}(s)-q_i^{w}(s)\right),
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

其中，第一个不等式中使用了三角不等式和引理 C.1 ，第二个不等式中使用了中值定理。接着，将右侧第一项对 $w\in W$ 求和，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{w\in W}\frac{1}{d_w}\sum_{v\in\mathcal{N}_w}\frac{N}{M}\sum_{w'\in\mathcal{N}_v}\frac{K}{d_{w'}}\left(d_{i-1}^{w'}(s)+d_i^{w'}(s)\right)=\sum_{w\in W}\frac{1}{d_w}\sum_{w'\in W}\frac{N}{M}\sum_{v\in\mathcal{N}_w\cap\mathcal{N}_{w'}}\frac{K}{d_{w'}}\left(d_{i-1}^{w'}(s)+d_i^{w'}(s)\right) \\
&=\sum_{w'\in W}\frac{1}{d_{w'}}\sum_{w\in W}\frac{N}{M}\sum_{v\in\mathcal{N}_w\cap\mathcal{N}_{w'}}\frac{K}{d_w}\left(d_{i-1}^{w'}(s)+d_i^{w'}(s)\right)=\sum_{w'\in W}\frac{1}{d_{w'}}\sum_{v\in\mathcal{N}_{w'}}\frac{N}{M}\sum_{w\in\mathcal{N}_v}\frac{K}{d_w}\left(d_{i-1}^{w'}(s)+d_i^{w'}(s)\right) \\
&\le\sum_{w'\in W}\frac{1}{d_{w'}}\sum_{v\in\mathcal{N}_{w'}}\frac{\rho_0 K}{\lambda}\left(d_{i-1}^{w'}(s)+d_i^{w'}(s)\right)=\sum_{w'\in W}\frac{\rho_0 K}{\lambda}\left(d_{i-1}^{w'}(s)+d_i^{w'}(s)\right).
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

(4.25) 中第二个积分里的项有如下界

$$
\left|\left(q_i^{w}(s)-q_{i+1}^{w}(s)\right)-\left(\bar{q}_i(s)-\bar{q}_{i+1}(s)\right)\right|\le d_i^{w}(s)+d_{i+1}^{w}(s). \tag{4.29}
$$

因此，综上所述，根据詹森不等式和柯西–施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}\left(\sum_{w\in W} d_i^w(t)\right)^2 &\le \left(\sum_{w\in W}\left(\int_0^t (\rho_0 K+d)\left(d_{i-1}^w(s)+d_i^w(s)\right)+d\phi(G)\left(q_{i-1}^w(s)-q_i^w(s)\right)\right.\right.\\ &\qquad \left.\left.+\left(d_i^w(s)+d_{i+1}^w(s)\right)\mathrm{d}s+d_i^w(0)+\frac{|M_i^w(t)|}{d_w}\right)\right)^2\\ &\le 6\left(\int_0^t\sum_{w\in W} c_1 d_{i-1}^w(s)\,\mathrm{d}s\right)^2+6\left(\int_0^t\sum_{w\in W} c_1 d_i^w(s)\,\mathrm{d}s\right)^2+6\left(\int_0^t\sum_{w\in W} d_{i+1}^w(s)\,\mathrm{d}s\right)^2\\ &\quad+6\left(\int_0^t\sum_{w\in W} d\phi(G)\left(q_{i-1}^w(s)-q_i^w(s)\right)\mathrm{d}s\right)^2+6\left(\sum_{w\in W} d_i^w(0)\right)^2+6\left(\sum_{w\in W}\frac{|M_i^w(t)|}{d_w}\right)^2\\ &\le 6tc_1^2\int_0^t\left(\sum_{w\in W} d_{i-1}^w(s)\right)^2\mathrm{d}s+6tc_1^2\int_0^t\left(\sum_{w\in W} d_i^w(s)\right)^2\mathrm{d}s+6t\int_0^t\left(\sum_{w\in W} d_{i+1}^w(s)\right)^2\mathrm{d}s\\ &\quad+6Mtd^2\phi(G)^2\int_0^t\sum_{w\in W}\left(q_{i-1}^w(s)-q_i^w(s)\right)^2\mathrm{d}s+6\left(\sum_{w\in W} d_i^w(0)\right)^2+6M\sum_{w\in W}\frac{M_i^w(t)^2}{d_w^2},\end{aligned}\tag{4.30}$$

其中 $c_1 := \rho_0 K + d + 1$。然后，根据单调收敛定理，

$$\begin{aligned}\sup_{s\in[0,t]}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{M}\sum_{w\in W} d_i^w(s)\right)^2 &\le c_2 t\int_0^t \sup_{u\in[0,s]}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{M}\sum_{w\in W} d_i^w(u)\right)^2\mathrm{d}s\\ &\quad+6t^2d^2\phi(G)^2+6\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{M}\sum_{w\in W} d_i^w(0)\right)^2+\frac{6}{M}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{w\in W}\sup_{s\in[0,t]}\frac{M_i^w(s)^2}{d_w^2},\end{aligned}\tag{4.31}$$

其中 $c_2 := 6\left(2c_1^2+1\right)$。因此，根据 Gr¨onwall 不等式，

$$\sup_{s\in[0,t]}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{M}\sum_{w\in W} d_i^w(s)\right)^2 \le 6e^{c_2t^2}\left(t^2d^2\phi(G)^2+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{M}\sum_{w\in W} d_i^w(0)\right)^2+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{M}\sum_{w\in W}\sup_{s\in[0,t]}\frac{M_i^w(s)^2}{d_w^2}\right).\tag{4.32}$$

这几乎完成了该定理的证明。现在，根据詹森不等式，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\left(q_i(t)-\bar{q}_i(t)\right)^2 &\le 2\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{M}\sum_{w\in W} q_i^w(t)-q_i(t)\right)^2+2\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{M}\sum_{w\in W} q_i^w(t)-\bar{q}_i(s)\right)^2\\ &\le 2\phi(G)^2\sum_{i=1}^{\infty} q_i(t)^2+2\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{M}\sum_{w\in W} d_i^w(t)\right)^2\\ &\le 2\phi(G)^2\left(\frac{N_a(t)}{N}+\sum_{i=1}^{\infty} q_i(0)^2\right)+2\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{M}\sum_{w\in W} d_i^w(t)\right)^2,\end{aligned}\tag{4.33}$$

其中， $N_a(t)$ 表示截至时间 t 的到达次数，第二个不等式成立是因为

$$\begin{aligned}\left|\frac{N}{M}\sum_{w\in W}q_i^w(t)-Q_i(t)\right| &= \left|\frac{N}{M}\sum_{w\in W}\sum_{\substack{v\in\mathcal{N}_w\\ X_v(t)\geq i}}\frac{1}{d_w}-Q_i(t)\right| = \left|\sum_{\substack{v\in V\\ X_v(t)\geq i}}\frac{N}{M}\sum_{w\in\mathcal{N}_v}\frac{1}{d_w}-\sum_{\substack{v\in V\\ X_v(t)\geq i}}1\right| \\ &\leq \sum_{\substack{v\in V\\ X_v(t)\geq i}}\left|\frac{N}{M}\sum_{w\in\mathcal{N}_v}\frac{1}{d_w}-1\right| \leq \sum_{\substack{v\in V\\ X_v(t)\geq i}}\phi(G)=\phi(G)Q_i(t).\end{aligned} \tag{4.34}$$

于是，(4.32) 和 (4.33) 联合推出

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\sum_{i=1}^{\infty}(q_i(s)-\bar{q}_i(s))^2\right] &\leq 2\phi(G)^2\mathbb{E}\left[\frac{N_a(t)}{N}+\sum_{i=1}^{\infty}q_i(0)^2\right]+2\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{M}\sum_{w\in W}d_i^w(s)\right)^2\right] \\ &\leq 2\phi(G)^2\left(\lambda t+\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}q_i(0)^2\right]\right) \\ &\quad+12e^{c_2t^2}\left(t^2d^2\phi(G)^2+\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{M}\sum_{w\in W}d_i^w(0)\right)^2\right]+4t(\rho_0 d+1)\gamma(G)\right),\end{aligned} \tag{4.35}$$

在第二个不等式中，我们使用了引理 C.2 。至此，定理的证明完成。 □

4.4 稳态分析

上述混合时间界表明，从空状态出发，经过较长但有限的时间后，系统会接近稳态。过程级极限刻画了这一样本路径，并证明系统始终接近一个常微分方程。结合一个标准的全局收敛结果，可知稳态接近常微分方程系统的不动点。

定理 *3.1* 的证明。 命题 4.1 证明了定理的前半部分。为了证明后半部分，设 $\bar{\boldsymbol{q}}(t)$ 是定理 3.12 中常微分方程组的唯一解，其中 $\bar{\boldsymbol{q}}(0)=0$。文献 [24] 中的定理 3.6 表明，存在常数 c_1，$c_2>0$（仅取决于 λ），使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\bar{q}_i(t)-q_i^*)^2\leq\sum_{i=1}^{\infty}|\bar{q}_i(t)-q_i^*|\leq c_1e^{-c_2t}\leq\frac{c_1}{1+c_2t}. \tag{4.36}$$

在全文中，记作 $\eta=\max\{\phi(G)^2,\ \gamma(G)\}$。令 $\boldsymbol{X}^{(1)}(t)$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)}(t)$ 为该马尔可夫过程的两个副本，其中 $\boldsymbol{X}^{(1)}(0)=0$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)}(0)\overset{d}{=}\boldsymbol{X}^{(2)}(\infty)$。那么，存在常数 c_4，c_5，c_1'，c_2'，$c_4'>0$，$c_3\geq1$ 以及 $0<\alpha\leq1$（仅依赖于 λ、ρ_0 和 d），使得对所有 $t\geq1$，

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\left(q_i^{(2)}(\infty)-q_i^*\right)^2\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\left(q_i^{(2)}(t)-q_i^*\right)^2\right] \\ &\leq 3\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\left(q_i^{(2)}(t)-q_i^{(1)}(t)\right)^2\right]+3\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\left(q_i^{(1)}(t)-\bar{q}_i(t)\right)^2\right]+3\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[(\bar{q}_i(t)-q_i^*)^2\right] \\ &\leq\frac{3}{(c_4+c_5t)^{\alpha}}+6\phi(G)^2\lambda t+36e^{c_3t^2}\left(t^2d^2\phi(G)^2+4t(\rho_0d+1)\gamma(G)\right)+\frac{3c_1}{1+c_2t} \\ &\leq\frac{1}{(c_1'+c_2't)^{\alpha}}+c_4't^2e^{c_3t^2}\eta,\end{aligned} \tag{4.37}$$

其中，第一个不等式用到了詹森不等式，第二个不等式用到了定理 3.10 和 3.12 。我们考虑两种情况。若 $\ln(1/\eta) \geq 2c_3$，则令 $t = \sqrt{\ln(1/\eta)/(2c_3)} \geq 1$ 使得

$$t^2 e^{c_3 t^2}\eta = \frac{\ln(1/\eta)\sqrt{\eta}}{2c_3} \leq \frac{1}{c_3\sqrt{\ln(1/\eta)}} \leq \frac{1}{\left(c_3\sqrt{\ln(1/\eta)}\right)^{\alpha}} \tag{4.38}$$

其中第一个不等式用到了对于 $0 \leq x \leq 1$， $\ln(1/x)\sqrt{x} \leq 2/\sqrt{\ln(1/x)}$。因此，

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\left(q_i^{(2)}(\infty) - q_i^*\right)^2\right] \leq \frac{1}{\left(c_1' + c_2'\sqrt{\ln(1/\eta)}\right)^{\alpha}} + \frac{c_4'}{\left(c_3\sqrt{\ln(1/\eta)}\right)^{\alpha}} \leq \frac{c_3^{\alpha} + c_2'^{\alpha}c_4'}{\left(c_2'c_3\sqrt{\ln(1/\eta)}\right)^{\alpha}}. \tag{4.39}$$

反之，若 $\ln(1/\eta) < 2c_3$，则令 $t = 1$ 使得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\left(q_i^{(2)}(\infty) - q_i^*\right)^2\right] &\leq \frac{1}{(c_1' + c_2')^{\alpha}} + c_4' e^{c_3}\eta \\ &\leq \frac{\sqrt{2c_3}}{(c_1' + c_2')^{\alpha}\sqrt{\ln(1/\eta)}} + \frac{c_4' e^{c_3}}{\sqrt{\ln(1/\eta)}} \leq \frac{\sqrt{2c_3} + c_4' e^{c_3}(c_1' + c_2')^{\alpha}}{(c_1' + c_2')^{\alpha}\sqrt{\ln(1/\eta)}},\end{aligned} \tag{4.40}$$

其中第二个不等式用到了对于 $0 \leq x \leq 1$， $x \leq 1/\sqrt{\ln(1/x)}$。由此定理得证。

□

4.5 随机二部几何图的验证

推论的证明 *3.5*。任取 $v \in V_N$ 和 $0 < \varepsilon \leq 1/2$。由于每个 $w \in W_N$ 都是独立地均匀随机放置的，d_v^N服从二项随机变量。因此，切尔诺夫界（例如参见 [12]中的推论 2.3）表明

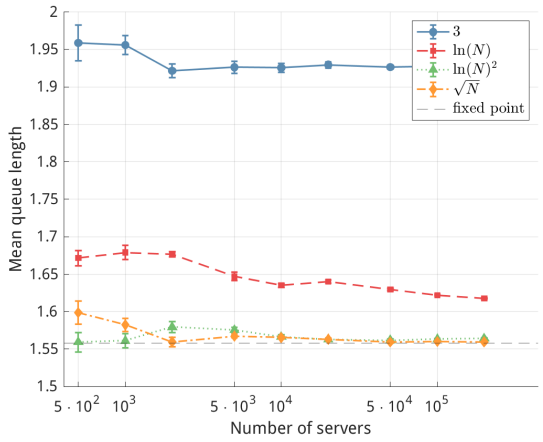
$$\mathbb{P}\left(\left|d_v^N - \mathbb{E}\left[d_v^N\right]\right| \geq \varepsilon\mathbb{E}\left[d_v^N\right]\right) \leq 2\exp\left(-\varepsilon^2\mathbb{E}\left[d_v^N\right]/3\right). \tag{4.41}$$

对于 $w \in W_N$，也有类似的切尔诺夫界。令 E_N 表示存在某个 $v \in V_N$使得 $\left|d_v^N - \mathbb{E}\left[d_v^N\right]\right| \geq \varepsilon\mathbb{E}\left[d_v^N\right]$，或者存在某个 $w \in W_N$使得 $\left|d_w^N - \mathbb{E}\left[d_w^N\right]\right| \geq \varepsilon\mathbb{E}\left[d_w^N\right]$这一事件。令 N_1 足够大，使得对于所有 $N \geq N_1$，均有 $\varepsilon^2\mathbb{E}\left[d_v^N\right]/3 \geq 3\ln N$、 $\varepsilon^2\mathbb{E}\left[d_w^N\right]/3 \geq 3\ln N$以及 $\varepsilon^2\mathbb{E}\left[d_w^N\right]/3 \geq 3\ln M$。那么，

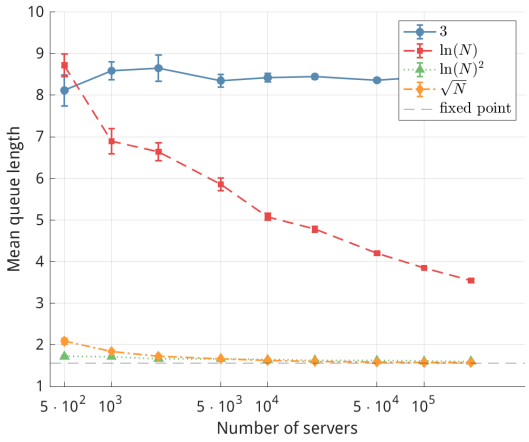
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_N) &\leq \sum_{v\in V_N}\mathbb{P}\left(\left|d_v^N - \mathbb{E}\left[d_v^N\right]\right| \geq \varepsilon\mathbb{E}\left[d_v^N\right]\right) + \sum_{w\in W_N}\mathbb{P}\left(\left|d_w^N - \mathbb{E}\left[d_w^N\right]\right| \geq \varepsilon\mathbb{E}\left[d_w^N\right]\right) \\ &\leq 2N\exp\left(-\varepsilon^2\mathbb{E}\left[d_v^N\right]/3\right) + 2M\exp\left(-\varepsilon^2\mathbb{E}\left[d_w^N\right]/3\right) \\ &\leq 2N\exp\left(-3\ln N\right) + 2M\exp\left(-\ln(M) - 2\ln(N)\right) = \frac{4}{N^2},\end{aligned} \tag{4.42}$$

对所有 $N \geq N_1$。因此，$\sum_{N=1}^{\infty}\mathbb{P}(E_N) < \infty$，由博雷尔-坎泰利引理可知，几乎必然存在 $N_2 < \infty$，使得对所有 $N \geq N_2$， E_N 都不发生。这尤其意味着，

$$\begin{aligned}\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{N}{M(N)}\frac{(1-\varepsilon)\mathbb{E}\left[d_v^N\right]}{(1+\varepsilon)\mathbb{E}\left[d_w^N\right]} &\leq \frac{N}{M(N)}\frac{\min_{v\in V_N} d_v^N}{\max_{w\in W_N} d_w^N} \leq \frac{N}{M(N)}\sum_{w\in\mathcal{N}_v}\frac{1}{d_w^N} \\ &\leq \frac{N}{M(N)}\frac{\max_{v\in V_N} d_v^N}{\min_{w\in W_N} d_w^N} \leq \frac{N}{M(N)}\frac{(1+\varepsilon)\mathbb{E}\left[d_v^N\right]}{(1-\varepsilon)\mathbb{E}\left[d_w^N\right]} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon},\end{aligned} \tag{4.43}$$



(a) 几何图



(b) 正则图

图2：随机正则二部图和随机二部几何图在不同度数下的稳态平均队列长度，与流体极限的不动点进行比较。

对所有 $N \geq N_2$ ，因此

$$\phi(G_N) := \max_{v \in V_N} \left| \frac{N}{M(N)} \sum_{w \in W_N} \frac{1}{d_w^N} - 1 \right| \leq \max\left(1 - \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - 1\right) \leq \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq 4\varepsilon, \tag{4.44}$$

对所有 $N \geq N_2$。此外，

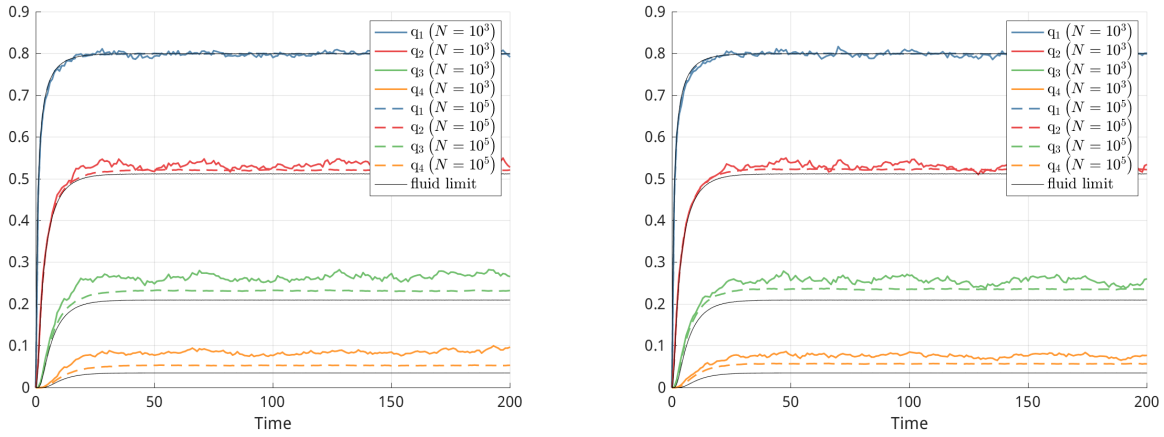
$$\gamma(G_N) := \frac{1}{M(N)} \sum_{w \in W_N} \frac{1}{d_w^N} \leq \frac{1}{\min_{w \in W_N} d_w^N} \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)\mathbb{E}\left[d_w^N\right]} \leq \frac{2}{\ln N}, \tag{4.45}$$

对所有 $N \geq N_2$。另请注意， $\rho(G_N) \leq \lambda(1+\phi(G_N)) \leq \lambda(1+4\varepsilon) < 1$ 对所有 $N \geq N_2$ 且 ε 足够小。因此，定理3.1完成了证明。 □

5 数值实验

我们进行数值实验，以补充理论结果。为简单起见，实验考虑 $M(N) = N$的情形。我们模拟两类图序列：随机二部几何图和随机正则二部图。随机几何图按照第3.2节中的定义生成。随机正则二部图通过预先固定度 k 来生成。随后，在每个服务器 $v \in V_N$ 和任务类型 $w \in W_N$处分别创建 k 个半边。通过依次随机选取两个可用半边（一个来自服务器端，一个来自任务类型端），并在它们之间创建一条边，将服务器上的半边与任务类型上的半边连接起来。尽管这可能导致重边，但当 N较大时，这种情况发生的概率可以忽略不计。

平均队列长度。 图 2 展示了不同（平均）度下的稳态平均队列长度。对于随机二部几何图，当平均度为 $(\ln(N))^2$ 且 $\sqrt{N}$ 时，平均队列长度收敛到不动点 $N_\to \infty$ ，这与我们的主要结果一致。平均度为 $\ln(N)$ 时，平均队列长度似乎也会收敛，不过速度较慢。A



(a) 几何 $(\ln(N)^2)$

(b) 正则 $(\ln(N))$

图 3：随机二部几何图和随机正则二部图的占用过程 $(q_i(t))$ 的过程级极限，并与从空状态开始的流体极限进行比较。括号中标注的是平均度。

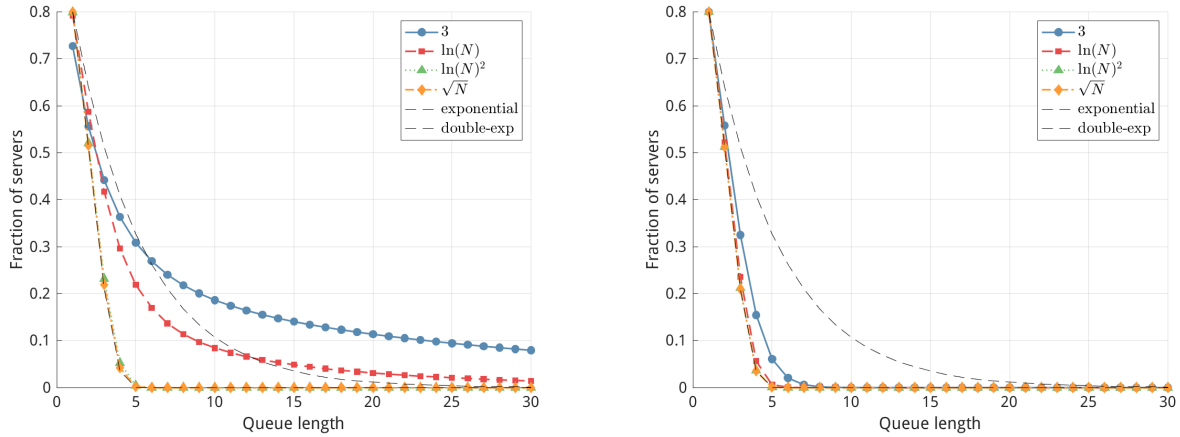
$\ln(N)$ 的速率是我们主要结果的边界情形。尽管平均队列长度似乎会收敛，但占用尾部并非双指数级（见图4）。对于随机正则二分图，当度为 $\ln(N)$、$(\ln(N))^2$ 且 $\sqrt{N}$时，平均队列长度收敛到不动点 $N \to \infty$。在两种情况下，常数度为 3 时平均队列长度都不收敛。因此，正则二分图的条件是充要的。

从空状态出发的过程级极限。图 3 展示了系统在两个 N值下的瞬态行为，初始状态为空。随着 N 增大，对于两种类型的图，该过程都保持接近常微分方程的解，即流体极限。请注意，该过程仍会略微偏离流体极限，尤其是对于 $q_3(t)$ 和 $q_4(t)$，因为平均度仅随 N对数增长，这会直接影响收敛速率，如定理 3.12所示。

指数尾部或双指数尾部。先前的研究曾探讨，对于常数度图（例如环） [10]，队列长度是否也具有类似的双指数尾部。图 4 展示了不同度数下以及 q_i处于稳态时的占用情况∞。图中将占用情况与参数为 λ^i 的指数尾部和双指数尾部进行比较

尾部 $\lambda_{_d-1}^{\frac{d^i _ 1}{}}$。对于随机二部几何图，当平均度为 $(\ln(N))^2$ 且 $\sqrt{N}$ 时，正如我们的主要结果所预期的那样，队列长度具有双指数尾部。当平均度为 3 或 $\ln(N)$ 时，系统不具有双指数尾部，其性能甚至似乎比指数尾部（或完全图上的随机路由）更差。对于随机正则二部图，无论度如何选择，似乎都具有双指数尾部，即使度为常数 3 也是如此。不过，在这种情况下，队列长度具有双指数尾部

as $\lambda_{_d-1}^{\frac{d^i _ 1}{}}$ 但其 d 值略低。能否通过解析方法刻画 d 的这一取值，仍是一个非常值得探索的未来研究方向，即便只考虑度为常数的特定正则图也是如此。



(a) 随机几何　　(b) 随机正则

图 4：随机二部几何图和随机正则二部图在不同度下的稳态占用（$q_i(\infty))_{i\geq 1}$，与 $N = 10^4$ 的指数尾部和双指数尾部进行比较。

致谢

这项工作部分得到了美国国家科学基金会（NSF）CIF-2113027 项目的资助。

参考资料

[1] Anton, E., Ayesta, U., Jonckheere, M., and Verloop, I. M. (2020). 通过冗余机制提升异构数据中心的性能。《*ACM*计算系统测量与分析会议录》，4(3):1–29。[2] Anton, E., Ayesta, U., Jonckheere, M., and Verloop, I. M. (2021). 关于冗余模型的稳定性。运筹学，69(5):1540–1565。[3] Barbour, A. D. (1980). 密度依赖马尔可夫总体过程。载于 J¨ager, W., Rost, H., and Tautu, P. 编，生物生长与传播，第36–49页，柏林、海德堡。施普林格·柏林·海德堡。[4] Bramson, M. (2011). 加入最短队列网络的稳定性。《概率年刊》，21(4):1568–1625。[5] Budhiraja, A., Mukherjee, D., and Wu, R. (2019). 图上的超市模型。《概率年刊》，29(3):1740–1777。[6] Cardinaels, E., Borst, S. C., and van Leeuwaarden, J. S. H. (2019). 具有亲和关系的大规模服务系统中的作业分配。《排队系统》，93(3-4):227–268。[7] Choudhury, T., Joshi, G., Wang, W., and Shakkottai, S. (2021). 服务率未知的排队系统的作业调度策略。载于第二十二届移动网络与移动计算理论、算法基础及协议设计国际研讨会论文集，第181–190页。

[8] Comte, C. (2019). 使用令牌的动态负载均衡。计算机通信，144:76–88。[9] Down, D., Meyn, S. P., and Tweedie, R. L. (1995). 马尔可夫过程的指数遍历性与一致遍历性。概率年刊，23(4):1671–1691。[10] Gast, N. (2015). 图上的二选一策略：成对近似是准确的。载于*2015*年*MAMA*研讨会论文集，第69–71页。[11] Gupta, V. and Walton, N. (2019). 非退化减速区间内的负载均衡。运筹学，67(1):281–294。[12] Janson, S., Luczak, T., and Rucinski, A. (2000). 随机图。约翰·威立父子出版公司。[13] Jonckheere, M., Moyal, P., Ram´ırez, C., and S oprano-Loto, N. (2022). 随机匹配中的广义最大权重策略。随机系统。[14] Kurtz, T. G. (1970). 常微分方程的解作为纯跳跃马尔可夫过程的极限。应用概率学杂志，7(1):49–58。[15] Kurtz, T. G. (1971). 逼近常微分过程的跳跃马尔可夫过程序列的极限定理。应用概率学杂志，8(2):344–356。[16] Kurtz, T. G. (1978). 密度依赖马尔可夫链的强逼近定理。*Stoch. Proc. Appl.*，6(3):223–240。[17] Lu, X., Kong, F., Yin, J., Liu, X., Yu, H., and Fan, G. (2015). 具有异构需求和服务器的数据中心中的地理位置作业调度。载于*2015*年*IEEE*第八届云计算国际会议，第413–420页。IEEE。[18] Lu, Y., Xie, Q., Kliot, G., Geller, A., Larus, J. R., and Greenberg, A. (2011). 加入空闲队列：一种适用于动态可扩展网络服务的新型负载均衡算法。性能评估，68(11):1056–1071。[19] Luczak, M. J. and McDiarmid, C. (2006). 超市模型中的最大队列长度。《概率年刊》，34(2):493–527。[20] Maswood, M. M. S., Nasim, R., Kassler, A. J., and Medhi, D. (2018). 面向地理分布式数据中心、满足服务质量约束的高性价比资源调度。载于*NOMS 2018——IEEE/IFIP*网络运维与管理研讨会，第1–9页。IEEE。[21] McDonald, D. R. and Turner, S. R. E. (2000). 分布式排队网络负载均衡算法比较，第28卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州。[22] Meyn, S. P. and Tweedie, R. L. (1993). 马尔可夫过程的稳定性 III：连续时间过程的Foster–Lyapunov判据。应用概率进展，25(3):518–548。[23] Mitzenmacher, M. (1996). 随机负载均衡中的二选一策略。博士论文，加州大学伯克利分校。[24] Mitzenmacher, M. (2001). 随机负载均衡中的二选一策略。*IEEE*并行与分布式系统汇刊，12(10):1094–1104。[25] Mukherjee, D., Borst, S. C., and Van Leeuwaarden, J. S. H. (2018). 渐近最优负载均衡拓扑。*ACM*测量、分析与计算系统会议论文集，2(1):1–29。

[26] Norman, M. F. (1972). 马尔可夫过程与学习模型，第 84 卷。Academic Press，纽约。[27] Norman, M. F. (1974). 关于以小步移动的马尔可夫过程的中心极限定理。《概率年刊》，2(6):1065–1074。[28] Panigrahy, N. K., Vasantam, T., Basu, P., Towsley, D., Swami, A., and Leung, K. K. (2022a). 关于基于邻近性的负载均衡策略的分析与评估。《*ACM*计算系统建模与性能评估汇刊》。[29] Panigrahy, N. K., Vasantam, T., Basu, P., Towsley, D., Swami, A., and Leung, K. K. (2022b). 关于基于邻近性的负载均衡策略的分析与评估。《*ACM*计算系统建模与性能评估汇刊》[30] Penrose, M. (2003). 随机几何图。牛津大学出版社。

[31] Rutten, D. 和 Mukherjee, D.（2022）。严格兼容性约束下的负载均衡。《数学运筹学》

[32] Tsitsiklis, J. N. 和 Xu, K.（2017）。灵活的排队架构。《运筹学》，65(5)：1398–1413。

[33] van der Boor, M.、Borst, S.、van Leeuwaarden, J. 和 Mukherjee, D.（2022）。网络化系统中的可扩展负载均衡：近期进展综述。《*SIAM*评论》，64(3)：554–622。

[34] van der Boor, M. 和 Comte, C.（2021）。异构服务器集群中的负载均衡：来自乘积形式排队模型的启示。载于*2021 IEEE/ACM* 第*29*届国际服务质量研讨会（*IWQOS*），第1–10页。IEEE。

[35] Vvedenskaya, N. D., Dobrushin, R. L. 和 Karpelevich, F. I.（1996）。带有选择两条队列中较短者机制的排队系统：一种渐近方法。《信息传输问题》，32(1):20–34。

[36] Weng, W. 和 Wang, W.（2020）。实现并行作业的渐近零排队延迟。《*ACM*计算系统测量与分析会议录》，4(3):1–36。

[37] Weng, W., Zhou, X. 和 Srikant, R.（2020）。具有局部性约束的最优负载均衡。*ACM*测量、分析与计算系统会议论文集，4(3):1–37。

引理 4.4 的证明

引理 *4.4* 的证明。任取 $0 \le y < x \le 1$。那么，

$$\frac{x^d - y^d}{x-y} = \frac{((x-y)+y)^d - y^d}{x-y} = \frac{\sum_{i=0}^{d}\binom{d}{i}(x-y)^i y^{d-i} - y^d}{x-y} = \sum_{i=1}^{d}\binom{d}{i}(x-y)^{i-1}y^{d-i}. \tag{A.1}$$

此外，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\frac{x^d-y^d}{x-y} &= \frac{x^d-y^d}{(x-y)^2} - \frac{dy^{d-1}}{x-y} = \frac{((x-y)+y)^d - d(x-y)y^{d-1} - y^d}{(x-y)^2} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{d}\binom{d}{i}(x-y)^i y^{d-i} - d(x-y)y^{d-1} - y^d}{(x-y)^2} = \sum_{i=2}^{d}\binom{d}{i}(x-y)^{i-2}y^{d-i} \ge 0.\end{aligned} \tag{A.2}$$

于是，根据中值定理，存在 $\xi \in [y_1, y_2]$ 使得

$$\begin{aligned}\frac{x_1^d - y_1^d}{x_1 - y_1} = \sum_{i=1}^{d} \binom{d}{i} y_1^{d-i}(x_1 - y_1)^{i-1} \le \sum_{i=1}^{d} \binom{d}{i} y_1^{d-i}(x_2 - y_1)^{i-1} = \frac{x_2^d - y_1^d}{x_2 - y_1} \\ = \frac{x_2^d - y_2^d}{x_2 - y_2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{x_2^d - y^d}{x_2 - y}\Big|_{y=\xi}(y_2 - y_1) \le \frac{x_2^d - y_1^d}{x_2 - y_1},\end{aligned} \tag{A.3}$$

由此完成引理的证明。 □

B 引理证明 4.5

引理 *4.5* 的证明。 任取 $t \ge 0$。要改变 $Q_i^w(t)$ 的值，必须有任务到达服务器$v \in \mathcal{N}_w$，其队列长度为 $i-1$；或者有任务离开队列长度为 $v \in \mathcal{N}_w$ 的服务器 i。

任取 $v \in \mathcal{N}_w$，满足 $X_v(t-) = i-1$，我们来计算任务被分配到 v 的概率。在任务到达的时刻，任务均匀随机地选择一种任务类型 $w' \in W$。随后，当且仅当系统只抽样队列长度至少为 $i-1$ 的服务器，而非只抽样队列长度至少为 i 的服务器时，该任务才会被路由到队列长度为 $i-1$ 的服务器；这种情况发生的概率为 $q_{i-1}^{w'}(t-)^d - q_i^{w'}(t-)^d$。根据对称性， $\mathcal{N}_{w'}$ 中任何队列长度为 $i-1$ 的服务器接收该任务的概率都相同，而这样的符合条件的服务器总共有 $Q_{i-1}^{w'}(t-) - Q_i^{w'}(t-)$ 台。因此，该任务被分配到其中任一台的概率为

$$\frac{1}{M}\sum_{w' \in \mathcal{N}_v} \frac{q_{i-1}^{w'}(t-)^d - q_i^{w'}(t-)^d}{Q_{i-1}^{w'}(t-) - Q_i^{w'}(t-)}. \tag{B.1}$$

现在，固定任意 $v \in \mathcal{N}_w$ 使得 $X_v(t-) = i$，并计算任务离开的概率v。在潜在离开时刻，均匀随机选择一台服务器 $v' \in V$；若 v' 的队列中至少有一个任务，则该任务离开。因此，概率为 $1/N$。

我们如下描述到达与离开过程。令 $N(t)$ 为速率为 $(\lambda+1)N$ 的泊松过程。该过程中的事件，要么是类型为 $w \in W$的到达，其概率为 $\lambda/((\lambda+1)M)$；要么是服务器 $v \in V$发生潜在离开，其概率为 $1/((\lambda+1)N)$，且与过去独立。请注意，这等价于之前引入的模型描述。因此，对于任意 $h > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\Delta Q_i^w(t) \mid \mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[\Delta Q_i^w(t) \mid \Delta N(t) = 1, \mathcal{F}_t\right]\mathbb{P}\left(\Delta N(t) = 1\right) \\ &\quad \pm \mathbb{E}\left[\Delta N(t) \mid \Delta N(t) \ge 2\right]\mathbb{P}\left(\Delta N(t) \ge 2\right) \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\sum_{\substack{v \in \mathcal{N}_w \\ X_v(t)=i-1}} \frac{1}{M}\sum_{w' \in \mathcal{N}_v} \frac{q_{i-1}^{w'}(t)^d - q_i^{w'}(t)^d}{Q_{i-1}^{w'}(t) - Q_i^{w'}(t)} - \frac{1}{\lambda+1}\sum_{\substack{v \in \mathcal{N}_w \\ X_v(t)=i}} \frac{1}{N}\right)(\lambda+1)Nhe^{-(\lambda+1)Nh} \\ &\quad \pm \left((\lambda+1)Nh + 2\right)\left((\lambda+1)Nh\right)^2,\end{aligned} \tag{B.2}$$

其中 $\Delta Q_i^w(t) := Q_i^w(t+h) - Q_i^w(t)$ 且 $\Delta N(t) := N(t+h) - N(t)$。这里，我们使用简写符号 $\pm x$ 来表示 $[-x, x]$中的一个项。任取一个 $0 \le s \le t$。上面的等式意味着

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[Q_i^w(t) \mid \mathcal{F}_s\right] &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Q_i^w(t+h) - Q_i^w(t) \mid \mathcal{F}_t\right] \mid \mathcal{F}_s\right]}{h} \\ &= \mathbb{E}\Big[\frac{\lambda N}{M}\sum_{\substack{v \in \mathcal{N}_w \\ X_v(t)=i-1}}\sum_{w' \in \mathcal{N}_v} \frac{q_{i-1}^{w'}(t)^d - q_i^{w'}(t)^d}{Q_{i-1}^{w'}(t) - Q_i^{w'}(t)} - \left(Q_i^w(t) - Q_{i+1}^w(t)\right) \mid \mathcal{F}_s\Big],\end{aligned} \tag{B.3}$$

因此，根据微积分第二基本定理和 Fubini 定理，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Q_i^w(t) - Q_i^w(s) \mid \mathcal{F}_s\right] &= \int_s^t \frac{d}{du}\mathbb{E}\left[Q_i^w(u) \mid \mathcal{F}_s\right] \mathrm{d}u \\ &= \mathbb{E}\Big[\int_s^t \frac{\lambda N}{M} \sum_{\substack{v\in\mathcal{N}_w \\ X_v(u)=i-1}} \sum_{w'\in\mathcal{N}_v} \frac{q_{i-1}^{w'}(u)^d - q_i^{w'}(u)^d}{Q_{i-1}^{w'}(u) - Q_i^{w'}(u)} - \left(Q_i^w(u) - Q_{i+1}^w(u)\right) \mathrm{d}u \mid \mathcal{F}_s\Big],\end{aligned} \tag{B.4}$$

这证明了 $\mathbb{E}\left[M_i^w(t) \mid \mathcal{F}_s\right] = M_i^w(s)$。此外，

$$\begin{aligned}|M_i^w(t)| &\le |Q_i^w(t) - Q_i^w(0)| + \int_0^t \frac{\lambda N}{M} \sum_{\substack{v\in\mathcal{N}_w \\ X_v(s)=i-1}} \sum_{w'\in\mathcal{N}_v} \frac{q_{i-1}^{w'}(s)^d - q_i^{w'}(s)^d}{Q_{i-1}^{w'}(s) - Q_i^{w'}(s)} + \left(Q_i^w(s) - Q_{i+1}^w(s)\right) \mathrm{d}s \\ &\le d_w + \Big(\frac{\lambda N}{M} \sum_{v\in\mathcal{N}_w} \sum_{w'\in\mathcal{N}_v} \frac{d}{d_{w'}} + d_w\Big)t < \infty,\end{aligned} \tag{B.5}$$

根据中值定理。这尤其意味着，$M_i^w(t)$ 是一个平方可积鞅。

我们继续计算 $M_i^w(t)$ 的二次变差。由于 $Q_i^w(0)$ 是常数，且积分项是连续的有限变差过程，因此可得 $[M_i^w]_t = [Q_i^w]_t$。此外，由于 $Q_i^w(t)$ 是一个右连续且有左极限的有限变差过程，因此可得$[Q_i^w]_t = \sum_{k=1}^n (Q_i^w(t_k) - Q_i^w(t_k-))^2$，其中 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是该过程的（随机）跳跃时刻。现在，回想一下，$Q_i^w(t)$ 的跳跃始终等于一，因此 $[Q_i^w]_t$ 必定只是对跳跃总次数进行计数。于是，沿着 (B.2) 和 (B.3) 的思路进行类似计算可得

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[[Q_i^w]_t\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\lambda N}{M} \sum_{\substack{v\in\mathcal{N}_w \\ X_v(t)=i-1}} \sum_{w'\in\mathcal{N}_v} \frac{q_{i-1}^{w'}(t)^d - q_i^{w'}(t)^d}{Q_{i-1}^{w'}(t) - Q_i^{w'}(t)} + \left(Q_i^w(t) - Q_i^w(t)\right)\right]. \tag{B.6}$$

然后，按照（B.4）中的做法，应用微积分基本定理的第二部分和 Fubini 定理，即可完成该引理的证明。 □

C 辅助引理

引理 C.1. 任取 $0 \le y_1 < x_1 \le 1$ 和 $0 \le y_2 < x_2 \le 1$。那么，存在 $K > 0$ （仅依赖于 d），使得

$$\left|\frac{x_1^d - y_1^d}{x_1 - y_1} - \frac{x_2^d - y_2^d}{x_2 - y_2}\right| \le K\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\right). \tag{C.1}$$

证明。 任取 $0 \le y < x \le 1$。于是，

$$\frac{x^d - y^d}{x - y} = \frac{((x-y)+y)^d - y^d}{x - y} = \frac{\sum_{i=0}^d \binom{d}{i}(x-y)^i y^{d-i} - y^d}{x - y} = \sum_{i=1}^d \binom{d}{i}(x-y)^{i-1} y^{d-i}. \tag{C.2}$$

注意，由中值定理可得 $|x^d - y^d| \le d|x-y|$。因此，

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{x_1^d - y_1^d}{x_1 - y_1} - \frac{x_2^d - y_2^d}{x_2 - y_2}\right| \le \sum_{i=1}^{d} \binom{d}{i} \left|(x_1-y_1)^{i-1} y_1^{d-i} - (x_2-y_2)^{i-1} y_2^{d-i}\right| \\
&= \sum_{i=1}^{d} \binom{d}{i} \left|(x_1-y_1)^{i-1} y_1^{d-i} - (x_1-y_1)^{i-1} y_2^{d-i} + (x_1-y_1)^{i-1} y_2^{d-i} - (x_2-y_2)^{i-1} y_2^{d-i}\right| \\
&\qquad \le \sum_{i=1}^{d} \binom{d}{i} \left((d-i)\,|y_1-y_2| + (i-1)\,|(x_1-y_1)-(x_2-y_2)|\right) \\
&\qquad\qquad \le \sum_{i=1}^{d} \binom{d}{i} \left((i-1)\,|x_1-x_2| + (d-1)\,|y_1-y_2|\right) \\
&\qquad\qquad\qquad \le (2^d-1)(d-1)\left(|x_1-x_2| + |y_1-y_2|\right),
\end{aligned} \tag{C.3}$$

至此，引理得证。 □

引理 C.2. 设 $M_i^w(t)$ 如引理 4.5中所定义。那么，对所有 $t \ge 0$，

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{M} \sum_{w \in W} \sup_{s\in[0,t]} \frac{M_i^w(s)^2}{d_w^2}\right] \le 4t(\rho_0 d + 1)\gamma(G). \tag{C.4}$$

证明。 任取 $i \in \mathbb{N}$、 $w \in W$ 和 $t \ge 0$。注意， $M_i^w(t)$ 是一个平方可积鞅，因此，根据 Doob 鞅不等式，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{s\in[0,t]} M_i^w(s)^2\Big] \le 4\mathbb{E}\left[M_i^w(t)^2\right] = 4\mathbb{E}\left[[M_i^w]_t\right] \\
&= 4\mathbb{E}\Big[\int_0^t \frac{\lambda M}{N} \sum_{\substack{v\in\mathcal{N}_w \\ X_v(s)=i-1}} \sum_{w'\in\mathcal{N}_v} \frac{q_{i-1}^{w'}(s)^d - q_i^{w'}(s)^d}{Q_{i-1}^{w'}(s) - Q_i^{w'}(s)} + \left(Q_i^w(s) - Q_{i+1}^w(s)\right) \mathrm{d}s\Big] \\
&\le 4\mathbb{E}\Big[\int_0^t \sum_{\substack{v\in\mathcal{N}_w \\ X_v(s)=i-1}} \frac{\lambda M}{N} \sum_{w'\in\mathcal{N}_v} \frac{d}{d_{w'}} + \left(Q_i^w(s) - Q_{i+1}^w(s)\right) \mathrm{d}s\Big] \\
&\le 4\mathbb{E}\left[\int_0^t \rho_0 d\left(Q_{i-1}^w(s) - Q_i^w(s)\right) + \left(Q_i^w(s) - Q_{i+1}^w(s)\right) \mathrm{d}s\right],
\end{aligned} \tag{C.5}$$

其中，在第二个等式中我们使用了引理 4.5 ，在第二个不等式中使用了中值定理。根据单调收敛定理和 Fubini 定理，上述等式推出，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{M} \sum_{w\in W} \sup_{s\in[0,t]} \frac{M_i^w(s)^2}{d_w^2}\right] \\
&\le 4\int_0^t \frac{1}{M} \sum_{w\in W} \frac{1}{d_w^2} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\rho_0 d\left(Q_{i-1}^w(s) - Q_i^w(s)\right) + \left(Q_i^w(s) - Q_{i+1}^w(s)\right)\right] \mathrm{d}s \\
&\qquad \le 4\int_0^t \frac{1}{M} \sum_{w\in W} \frac{\rho_0 d + 1}{d_w} \mathrm{d}s = 4t\left(\rho_0 d + 1\right)\gamma(G),
\end{aligned} \tag{C.6}$$

至此，引理得证。 □