arXiv:2301.03494v1 [math.GR] 9 Jan 2023

关于光滑映射到单连通紧致李群的群：再探

PIERRE DE LA HARPE

Abstract. 设 X 是一个闭光滑流形， G 是一个单连通紧实实李群， $M(G)$是从 X 到 G的所有光滑映射构成的群，而 $M_0(G)$是其在 $\mathcal{C}^\infty$-紧开拓扑下的连通分支。

文中证明， $M_0(G)$的极大正规子群恰好是通过求值同态$M_0(G) \to G$、$\gamma \mapsto \gamma(a)$取 G 的中心 $Z(G)$所得逆像，其中 $a \in X$。这又是群$\mathcal{C}^\infty_n(\cdot, G)$ 的一个结果；该群由原点 O 处的芽构成，这些芽是从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n \to G$的光滑映射的芽：该群具有唯一的极大正规子群，即通过求值同态$\mathcal{C}^\infty_n(\cdot, G) \to G$、 $\underline{\gamma} \mapsto \underline{\gamma}(O)$取 $Z(G)$所得的逆像。

本文对早期文章 [Harp–88] 的部分内容作出修正。

Introduction

早期文章 [Harp–88] 被发现存在若干错误。逐条列出局部修正会令人困惑，因此我们在下文重述命题I和II（即 [Harp–88] 中的命题II和III），并给出完整证明；这两个命题讨论极大子群。本文仅以一个猜想性陈述取代 [Harp–88], 中关于自同构的定理I。

设 X 是一个闭光滑流形， G 是一个单连通紧实实李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。令 $M(G)$ 表示从 X 到 G 的所有光滑映射构成的群，令 $M_0(G)$ 表示它在 $\mathcal{C}^\infty$-紧开拓扑下的连通分支（该拓扑是映射及其所有阶偏导数的一致收敛拓扑）。那么 $M_0(G)$ 是一个性质良好的无限维李群的重要例子；参见 [Miln–84、PrSe–86、Neeb–06、KhWe–09]。不过，本文将 $M_0(G)$ 视为抽象群。

命题 I 给出了$M_0(G)$的所有极大正规子群的分类。对于 $a \in X$，令 $\varepsilon_a\colon\ M_0(G) \to G$ 表示求值映射 $\gamma \mapsto \gamma(a)$，并令

$$N_a M_0(G) = \varepsilon_a^{-1}(Z(G))$$

是 ε_a 对 G 的中心 $Z(G)$ 的逆像。由于 $G/Z(G)$ 是单李群，$N_a M_0(G)$ 是 $M_0(G)$ 的极大正规子群。反之：

日期：2023年1月9日。2000年数学主题分类：22E65。关键词和短语：到紧致李群的光滑映射群，极大子群。

命题 I. $M_0(G)$ 的任何真正规子群都包含于某个 $N_a M_0(G)$，其中 $a \in X$。

可以将命题 I 看作一个全局结果，其证明用到了命题 II；命题 II 是一个相关的局部结果。用 n 表示 X的维数，用 $\mathcal{C}^\infty_{n,\,G}$ 表示从 $\mathbf{R}^n$ 到 G的光滑映射的芽在原点 O 处构成的集合，用 $\varepsilon\colon \mathcal{C}^\infty_{n,\,G} \to G$ 表示求值映射 $\underline{\gamma} \mapsto \underline{\gamma}(O)$。令

$$N_O \mathcal{C}^\infty_{n,G} = \varepsilon^{-1}(Z(G))$$

为 ε在 $Z(G)$下的逆像。那么 $\mathcal{C}^\infty_{n,\,G}$ 有唯一的极大正规子群；换言之：

命题 II. $\mathcal{C}^\infty_{n,\,G}$ 的任意真正规子群都包含于 $N_O\mathcal{C}^\infty_{n,\,G}$中。

这里的一切对某个 $k \geq 0$的 $\mathcal{C}^k$ 类映射和芽同样适用。命题 II 的证明在实解析情形下也成立。虽然实解析映射的命题 I 类似结论看起来颇为合理，但我们的证明并未涵盖这一情形，因为证明用到了单位分解。此外，我认为，对于不一定紧的单连通李群，命题 II 也成立。

令 M(Aut(G)) 为从 X 到自同构群 Aut(G) 的光滑映射群，其中 Aut(G) 是 G 的自同构群（请回想，Aut(G) 中的任意自同构都自动连续 [Cart–30], ，事实上还是解析的）。令 $\mathcal{D}(X)$ 为 X 的光滑微分同胚群。考虑 $\mathcal{D}(X)$ 在 M(Aut(G)) 上的自然作用，其定义如下

$$\varphi(\beta) \,=\, \beta \circ \varphi^{-1} \quad \text{for } \varphi \in \mathcal{D}(X) \text{ and } \beta \in M(\mathrm{Aut(G)}),$$

以及相应的半直积

$$M(\mathrm{Aut(G)}) \rtimes \mathcal{D}(\mathrm{X}), \quad \text{with multiplication } (\alpha,\varphi)(\beta,\psi) \,=\, (\alpha\varphi(\beta), \varphi\psi).$$

它通过自同构作用于 $M_0(G)$：

$$(\alpha,\varphi)(\gamma)(x) \,=\, \alpha(x)\big(\gamma\left(\varphi^{-1}(x)\right)\big)$$

其中 $\alpha \in M$(Aut(G))、 $\varphi \in \mathcal{D}(X)$、 $\gamma \in M_0(G)$ 且 $x \in X$。我们认为，抽象群 $M_0(G)$ 的任意自同构都具有这种形式，因此尤其认为 $M_0(G)$ 的任意自同构在 $\mathcal{C}^\infty$-紧开拓扑下都是连续的。换言之，我们可以表述以下命题，即 [Harp–88] 中所谓的定理I：

猜想定理。采用上述记号， $M_0(G)$ 的所有抽象群自同构所成的群与群 M(Aut(G)) $\rtimes \mathcal{D}$(X) 相同。

在 [PrSe–86], Pressley 和 Segal 的命题 3.4.2 中，他们声称，群M(Aut(G)) $\rtimes \mathcal{D}$(X) 是拓扑群 $M_0(G)$ 的所有双连续自同构所构成的群。

文章 [Harp–88]显然鲜有人读。然而，2009 年 11 月，Michael Murray 和 Daniel Stevenson 指出，所谓的引理14证明中存在一个严重漏洞，因此命题 I 的证明也有问题。（其中有问题的一步是这句话：“由引理 12 再次可得 $N_{\mathcal{W}} \subset \ker(\pi)$”； [Harp–88] 中的这个引理14已由下文的引理 22 取代。）当时，我还没有足够的才智（或足够的执拗）来撰写更正。我与 Georges Skandalis 讨论了此事，他说服我修补引理14（即下文的引理 22）是可行的；我也下定决心尽快着手处理，但此事后来耽搁了好几年。

2022年我终于重新着手这个问题时，发现其他引理的证明中还存在别的漏洞和缺陷。（特别是，在那里给光滑芽空间定义拓扑并不妥当。）与其发布勘误来修正所有断言，尤其是 [Harp–88], 的定理I，我决定完整写出命题I和II的证明。此外， [Harp–88] 所谓的定理I如今降格为一个关于 $M_0(G)$ 抽象群自同构群的“猜想定理”，相关内容见引言。

以下对应表说明了下列引理与 [Harp–88] 中引理的对应关系：

[竖琴–88]	*Lem* 1	*Lem* 2	–	*Lem* 3	*Lem* 4	*Lem* 5
Below	*Lem* 1	*Lem* 2	*Remark* 3	*Lem* 4	*Lem* 5	*Lem* 6
[哈普–88]	*Prop* 6	–	–	*Lem* 7	*Lem* 8	*Lem* 9
Below	*Prop* 7	*Remind* 8	*Reduct* 9	*Lem* 10	*Lem* 11	*Lem* 12
[豎琴–88]	–	–	*Lem* 10	*Lem* 11	*Lem* 13	*Lem* 12
Below	*Remind* 13	*Ex* 14	*Lem* 15	*Lem* 16	*Lem* 17	*Lem* 18
[哈普–88]	– – –		*Lem* 14	*Lem* 15 & 16		
Below	*Lem* 19 & 20 & 21		*Lem* 22	––		

（ [Harp–88] 中的引理 15 和引理 16 不正确，现在应予以忽略）。

1. Proof of Proposition II when $G = \mathrm{SU}(2)$

请注意，第1节中针对这一特定情形 $G = \mathrm{SU}(2)$ 得出的结果，将用于证明一般情形的结果，参见第2节中引理 15 的证明。

我们采用以下记号。模为 1 的复数乘法群记为 U。$\mathbf{C}^2$ 上的线性自同态代数是由复系数组成的 2×2 矩阵代数 $\mathrm{M}_2(\mathbf{C})$； x^* 表示矩阵 $x \in \mathrm{M}_2(\mathbf{C})$的共轭转置，而 id_2 是单位矩阵。从 $\mathbf{C}^2$ 到直线的正交投影空间就是射影直线

$$\mathrm{P}^1_{\mathbf{C}} = \{p \in \mathrm{M}_2(\mathbf{C}) \mid \mathrm{p}^* = \mathrm{p} = \mathrm{p}^2 \text{ and } \mathrm{trace}(\mathrm{p}) = 1\}.$$

在本节中，直到命题 7（含）为止，我们用 G 表示这个单连通紧李群

$$\begin{aligned}\mathrm{SU}(2) &= \{g \in \mathrm{M}_2(\mathbf{C}) \mid \mathrm{g}^*\mathrm{g} = \mathrm{id}_2 \text{ and } \det \mathrm{g} = 1\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \rho & \sigma \\ -\overline{\sigma} & \overline{\rho} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbf{C}) \;\middle|\; \rho, \sigma \in \mathbf{C},\ |\rho|^2 + |\sigma|^2 = 1 \right\}.\end{aligned}$$

若 $g \in G$ $\mathrm{id}_2, -\mathrm{id}_2\}$，则元素 $g \in G$ 是正则元素；我们用 G_{reg} 表示 G 中由正则元素构成的开子集。

任意 $g \in G_{\mathrm{reg}}$ 都有两个特征值 $z_g, \overline{z_g} \in \mathrm{U}$；记号使得$\Im(z_g) > 0$。令

$$A :=]0, \pi[.$$

令 $s_g \in A$ 为满足 $z_g = \exp(is_g)$ 的数。令 $p_g \in \mathrm{P}^1_{\mathbf{C}}$ 为从 $\mathbf{C}^2$ 到特征子空间 $\ker(z_g\mathrm{id}_2 - \mathrm{g})$ 的投影，令 $p'_G \in \mathrm{P}^1_{\mathbf{C}}$ 为从 $\mathbf{C}^2$ 到 $\ker(\overline{z_g}\mathrm{id}_2 - \mathrm{g})$ 的投影。我们有

$$g = \exp(is_g)p_g + \exp(-is_g)p'_g \quad \text{for all } g \in G_{\mathrm{reg}}.$$

群 G 通过共轭作用于 G_{reg} 和 $\mathrm{P}^1_{\mathbf{C}}$，在 A 上作用平凡，并在 $\mathrm{P}^1_{\mathbf{C}} \times A$ 上作乘积作用。

引理 1。映射 ψ_A：$\begin{cases} G_{\mathrm{reg}} \to {}^{1}_{\mathbf{C}} \times A \\ \mathrm{P}g \mapsto p_g\ s_g \end{cases}$ $(,)$ 是光滑微分同胚，并且关于 G 的作用是等变的。

证明。设 $h \in G_{\mathrm{reg}}$。令 D_r 为以 $\exp(is_h)$ 为中心、半径为 $r > 0$ 的闭圆盘，它包含于半平面 $\{z \in \mathbf{C} \mid \Im z > 0\}$中；令 Γ_r 为圆 ∂D_r，取正向。由于特征值随矩阵连续变化，存在 h 在 G_{reg} 中的一个邻域 $\mathcal{V}$，使得对所有 $g \in \mathcal{V}$，$\exp(is_g)$ 都位于 D_r 的内部。对于 $g \in \mathcal{V}$，我们有显式公式

$$p_g = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_r} (z - g)^{-1} dz$$

由全纯函数演算可得。因此，p_g 关于 g 光滑变化。我们还有

$$(*) \qquad s_g = \arccos\left(\frac{1}{2}\mathrm{trace}(\mathrm{g})\right),$$

因此，s_g 关于 g 光滑变化。

关于特征值的连续性和全纯函数演算，参见例如 [DuSc–58，第 VII 章，第 3 节，第 19 条，推论 21]，；或 [BoTS，第 1 章，第 4 节，第 11 条，命题 16]，；或 [Serr–10，第 5.2.3 节和第 5.5]，节；或 [Texi–18]。

ψ_A 的等变性显而易见。 □

复射影直线也可以描述为

$$\begin{aligned}\mathrm{P}^1_{\mathbf{C}} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & 1-a \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbf{R},\ b \in \mathbf{C},\ 0 \le a \le 1,\ a^2 + |b|^2 = a \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4r^2}\right) & re^{i\varphi} \\ re^{-i\varphi} & \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4r^2}\right) \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \le r \le \frac{1}{2},\ \varphi \in [0, 2\pi[\right\} \\ &\cup \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4r^2}\right) & re^{i\varphi} \\ re^{-i\varphi} & \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4r^2}\right) \end{pmatrix} \;\middle|\; \frac{1}{2} \ge r \ge 0,\ \varphi \in [0, 2\pi[\right\}. \end{aligned}$$

第二种参数化清楚地表明，$\mathrm{P}^1_{\mathbf{C}}$ 与二维球面微分同胚，可将其看作两个半球沿赤道粘合而成。我们定义

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \mathrm{P}^1_{\mathbf{C}} \smallsetminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & 1-a \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbf{R},\ b \in \mathbf{C},\ 0 < a \le 1,\ a^2 + |b|^2 = a \right\}, \end{aligned}$$

它是 $\mathrm{P}^1_{\mathbf{C}}$ 中的一个开邻域。

引理 2. 存在一个光滑映射 $\begin{cases} \mathcal{U} \to G \\ u \mapsto g_u \end{cases}$，使得对所有 $u \in \mathcal{U}$，都有

$$g_u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} g_u^{-1} = u_\circ$$

证明. 给定一个秩一投影 $u = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & 1-a \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$，令 $\rho = \sqrt{a}$、$\sigma = -b/\rho$，并定义 $g_u = \begin{pmatrix} \rho & \sigma \\ -\overline{\sigma} & \rho \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$。由简单计算可得 $g_u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} g_u^{-1} = u_\circ$ □

注 3. 引理 1 中的微分同胚和引理 2 中的映射不仅是光滑的，而且实际上是实解析的。类似地，下面的引理 10 中的映射也是实解析的。

设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中原点的一个邻域，且 $\gamma\colon \mathcal{O} \to G$ 是一个取值于 G_{reg} 的光滑映射。用 $\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^\infty_{n,\,G}$ 表示由 γ 定义的芽。根据引理 1，$s_{\gamma(x)}$ 光滑地依赖于 x，并在原点定义了一个取值于 A 的光滑映射芽 $\underline{s_\gamma}$。类似地，$p_{\gamma(x)}$ 在原点定义了一个取值于 $\mathrm{P}^1_{\mathbf{C}}$ 的光滑映射芽 $\underline{p_\gamma}$。当 $\underline{\gamma}$ 的所指明确时，我们分别简记为 $\underline{s}$ 和 $\underline{p}$。

引理 4. 设 $\underline{\gamma}$ 和 $\underline{\delta}$ 是 $\mathcal{C}^\infty_{n,G}$ 中的两个芽，满足 $\underline{\gamma}(O)\ \underline{\delta}(O) \in G_{\mathrm{reg}}$。设 $(\underline{p}, \underline{s})$ 和 $(\underline{q}, \underline{t})$ 是与之对应的、在 O 处的取值于 $(\mathrm{P}^1_{\mathbf{C}} \times A)$ 的光滑映射的芽。那么，$\underline{\gamma}$ 和 $\underline{\delta}$ 在 $\mathcal{C}^\infty_{n,\,G}$ 中共轭，当且仅当 $\underline{s} = \underline{t}$。

证明。考虑 $\underline{\zeta} \in \mathcal{C}^\infty_{n,G}$。我们可以选取 $\gamma, p, s, \delta, q, t, \zeta$ 作为 $\underline{\gamma}, \underline{p}, \underline{s}, \underline{\delta}, \underline{q}, \underline{t}, \underline{\zeta}$ 的代表元，它们定义在 R^n 中原点的某个公共邻域 $\mathcal{O}$ 上，并且对所有 $x \in \mathcal{O}$ 都满足 $\gamma(x)\ \delta(x) \in G_{\mathrm{reg}}$。

首先假设 $\underline{\zeta}\,\underline{\gamma}\,\underline{\zeta}^{-1} = \underline{\delta}$。将 $\mathcal{O}$ 缩小为一个更小的邻域后，我们可以假设，对于所有 $x \in \mathcal{O}$，$\zeta(x)\gamma(x)\zeta(x)^{-1} = \delta(x)$，因此对于所有 $x \in \mathcal{O}$，$s(x) = t(x)$。由此可得 $\underline{s} = \underline{t}$。

现在假设 $\underline{s} = \underline{t}$。我们同样可以假设，对于所有 $x \in \mathcal{O}$，$s(x) = t(x)$。

首先进一步假设，$p(O)$的值域与 $q(O)$的值域在 C^2 中不正交。在适当的正交坐标下：

$$p(O) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad q(O) = \begin{pmatrix} c & d \\ \overline{d} & 1-c \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad c > 0,\ d \in \mathbf{C},\ c^2 + |d|^2 = c.$$

如有必要，再次缩小 $\mathcal{O}$ 后，我们可以假设 p 和 q 具有如下形式

$$p(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ \overline{b(x)} & 1-a(x) \end{pmatrix} \text{ where } a(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathcal{O}, \text{ with } a(O) = 1,$$
$$q(x) = \begin{pmatrix} c(x) & d(x) \\ \overline{d(x)} & 1-c(x) \end{pmatrix} \text{ where } c(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathcal{O}, \text{ with } c(O) = c.$$

根据引理 2，存在一个光滑映射 $\zeta\colon \mathcal{O} \to G$，使得对于所有 $x \in \mathcal{O}$，$\zeta(x)p(x)\zeta(x)^{-1} = q(x)$。由于 $s = t$，可得 $\zeta\gamma\zeta^{-1} = \delta$，因此 $\underline{\zeta}\,\underline{\gamma}\,\underline{\zeta}^{-1} = \underline{\delta}$。

现在假设 $p(O)$ 的值域与 $q(O)$ 的值域在 $\overline{\mathrm{P}^1_{\mathbf{C}}}$ 中正交。定义第三个芽 $\underline{\eta} \in \mathcal{C}^\infty_{n,G}$，其特征值芽等于 $\underline{s}$（因而也等于 $\underline{t}$），且 $\underline{\eta}(O)$ 既不与 $\underline{\gamma}(O)$ 正交，也不与 $\underline{\delta}(O)$ 正交。前述论证表明，$\underline{\gamma}$ 和 $\underline{\delta}$ 均与 $\underline{\eta}$ 共轭，因此二者彼此共轭。□

引理 5. 设 $\mathcal{O}$ 是 R^n 中原点的一个邻域，s、t 是两个光滑映射 $\mathcal{O} \to A$，满足对所有 $x \in \mathcal{O}$，$\sin(t(x)/2) < \sin(s(x))$。定义光滑映射 ζ、η、$\delta\colon \mathcal{O} \to G$，使得

$$\zeta(x) = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\sin^2(t(x)/2)}{\sin^2(s(x))}\right)^{1/2} & \frac{\sin(t(x)/2)}{\sin(s(x))} \\ -\frac{\sin(t(x)/2)}{\sin(s(x))} & \left(1 - \frac{\sin^2(t(x)/2)}{\sin^2(s(x))}\right)^{1/2} \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2) \subset \mathrm{G},$$
$$\eta(x) = \begin{pmatrix} \exp(is(x)) & 0 \\ 0 & \exp(-is(x)) \end{pmatrix} \zeta(x) \begin{pmatrix} \exp(-is(x)) & 0 \\ 0 & \exp(is(x)) \end{pmatrix} \zeta(x)^{-1},$$
$$\delta(x) = \begin{pmatrix} \exp(it(x)) & 0 \\ 0 & \exp(-it(x)) \end{pmatrix},$$

对所有 $x \in \mathcal{O}$。

那么，对于所有 $x \in \mathcal{O}$，$\eta(x) \in G_{\mathrm{reg}}$，且 η 和 δ 的芽在 $\mathcal{C}^\infty_{n,\,G}$ 中共轭。

证明。注意到，对于所有 $x \in \mathcal{O}$，$s(x)$ $t(x)$ $\in A$ 蕴含 $\zeta(x)$ $\delta(x)$ $\in G_{\mathrm{reg}}$。直接计算可得，对于所有 $x \in \mathcal{O}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{trace}(\eta(\mathrm{x})) &= 2\,\frac{\sin^2(s(x)) - (1-\cos(2s(x)))\sin^2(t(x)/2)}{\sin^2 s(x)} \\ &= 2(1-2\sin^2(t(x)/2)) = 2\cos(t(x)) = \mathrm{trace}(\delta(\mathrm{x})).\end{aligned}$$

一个直接推论是 $\eta(x) \in G_{\mathrm{reg}}$，因为 $2\cos(t(x)) \neq \pm 2$。（请记住引理 1 的证明中的公式 (*)。）第二个推论是，与 η 和 δ 相关联的 A 值芽在 O 处相等。由引理 4 可知，η 和 δ 在 O 处的芽在 $\mathcal{C}^\infty_{n,G}$ 中共轭。□

引理 6. 设 N 是 $\mathcal{C}^\infty_{n,G}$ 的正规子群，其中包含一个芽 $\underline{\gamma}$，满足 $\underline{\gamma}(O) \in G_{\mathrm{reg}}$。

存在单位元的一个对称邻域 $\mathcal{V}$，它位于 G 中（取决于 $\underline{\gamma}$），使得每个满足 $\underline{\delta}(O) \in \mathcal{V} \cap G_{\mathrm{reg}}$ 的 $\underline{\delta} \in \mathcal{C}^\infty_{n,G}$ 都属于 N。

（若对所有 $g \in \mathcal{V}$ 都有 $g^{-1} \in \mathcal{V}$，则 G 中单位元 $_2$ 的邻域 $\mathcal{V}$ 是对称的。）

证明。设 $(\underline{p}, \underline{s})$ 是如引理 4 中所述，与 $\underline{\gamma}$ 相关联的、在 O 处的 $(\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} \times A)$ 值芽。设 γ、p、s 分别是 $\underline{\gamma}$、$\underline{p}$、$\underline{s}$ 的代表元，它们定义在 $\mathbf{R}^n$ 中原点的某个邻域 $\mathcal{O}$ 上。根据引理 4，不失一般性，可假设

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} \exp(is(x)) & 0 \\ 0 & \exp(-is(x)) \end{pmatrix}$$

并且对于所有 $x \in \mathcal{O}$，$s(x)$ 都与 $\{0, \pi\}$ 保持正距离；更确切地说，存在 $c > 0$，使得对于所有 $x \in \mathcal{O}$，$c < s(x) < \pi - c$。

令 $\mathcal{V}^\bullet$ 为 G_{reg} 的开子集，由满足 $\sin(s_g/2) < \sin(c)$ 的元素 g 构成，其中 s_g 由 $\psi_A(g) = (p_g, s_g)$ 定义，而 ψ_A 如引理 1 中所述。设 $\mathcal{V} = \mathcal{V}^\bullet \cup \{\mathrm{id}_2\}$；它是 G 中 id_2 的一个对称开邻域。令 $\underline{\delta} \in \mathcal{C}^\infty_{n,\,G}$ 满足 $\underline{\delta}(O) \in \mathcal{V}^\bullet$；我们必须证明 $\underline{\delta} \in N$。

令 $(\underline{q}, \underline{t})$ 为与 $\underline{\delta}$ 相关联的 $(\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} \times A)$ 值芽。将 $\mathcal{O}$ 替换为 $\mathbf{R}^n$ 中原点的一个较小邻域后，我们可以找到 δ, q, t，分别作为 $\underline{\delta}, \underline{q}, \underline{t}$ 的代表元，使得 $\delta(x) \in \mathcal{V}^\bullet$，也就是说，对于所有 $x \in \mathcal{O}$，都有 $0 < \sin(t(x)/2) < \sin(x)$。再次应用引理 4，只需考虑由下式定义的元素 $\underline{\delta}$

$$\delta(x) = \begin{pmatrix} \exp(it(x)) & 0 \\ 0 & \exp(-it(x)) \end{pmatrix}$$

对所有 $x \in \mathcal{O}$。

根据引理 5，存在一个光滑映射 $\zeta\colon \mathcal{O} \to G$，使得 $\underline{\delta}$ 和 $\underline{\gamma}\,\underline{\zeta}\,\underline{\gamma}^{-1}\,\underline{\zeta}^{-1}$ 在 $\mathcal{C}^\infty_{n,\,G}$ 中共轭，因此 $\underline{\delta}$ 属于由 $\underline{\gamma}$ 生成的正规子群。□

命题 7. 引言中的命题 II 对 $G = \mathrm{SU}(2)$ 成立：$\mathcal{C}^\infty_{n,G}$ 的任意真正规子群都包含于 $N_O\mathcal{C}^\infty_{n,G}$。

证明. 设 N 是 $\mathcal{C}^\infty_{n,G}$ 的正规子群，且不包含于 $N_O\mathcal{C}^\infty_{n,G} = \varepsilon^{-1}(Z(G))$。那么 $\varepsilon(N) = G$，因为 G 的正规子群若不包含于 $Z(G)$，则必为 G 本身（见提示 8）。特别地，N 包含一个芽 $\underline{\gamma}$，使得 $\underline{\gamma}(O)$ 正则。令 $\underline{\zeta} \in \mathcal{C}^\infty_{n,G}$；我们必须证明 $\underline{\zeta} \in N$。

设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中原点的一个邻域，并令 γ、$\zeta : \mathcal{O} \to G$ 为 $\underline{\gamma}$、$\underline{\zeta}$ 的代表。由引理 6，存在 G 中包含 id_2 的一个对称邻域 $\mathcal{V}$，使得每个满足 $\underline{\delta}(O) \in \mathcal{V} \cap G_{\mathrm{reg}}$ 的 $\underline{\delta} \in \mathcal{C}^\infty_{n,G}$ 都属于 N。由于 G 连通，存在一个整数 $k \geq 1$ 及元素 g_1、g_2、$\dots g_k \in \mathcal{V} \cap G_{\mathrm{reg}}$，使得 $\zeta(O) = g_1 g_2 \cdots g_k$。对于任意 $g \in G$，记 $\eta_g : \mathcal{O} \to G$ 为取值恒为 g 的常值映射。令 $\delta = \zeta(\eta_{g_2} \cdots \eta_{g_k})^{-1}$，于是 $\zeta = \delta\eta_{g_2} \cdots \eta_{g_k}$。那么，$k$ 个矩阵 $\delta(O) = g_1$、$\eta_{g_2}(O) = g_2$、.....、$\eta_{g_k}(O) = g_k$ 均属于 $\mathcal{V} \cap G_{\mathrm{reg}}$。引理 6 表明，芽 $\underline{\delta}$、$\underline{\eta_{g_2}}$、$\dots \underline{\eta_{g_k}}$ 均属于 N，因此它们的乘积 $\underline{\zeta}$ 也属于 N。□

提示 8. 设 G是一个连通紧李群 G，且作为李群是单的，也就是说，其李代数是单李代数。以下结果归功于嘉当和范德瓦尔登 [Cart–30, vdWa–33]。

(i) G 的任何非平凡正规子群都包含于中心 $Z(G)$ 之中，而商群 $G/Z(G)$ 是一个单抽象群。

(ii) 从 G 到李群的任何像有界的抽象群同态都是连续的，因而也是光滑的。特别地，任何抽象群自同态 ϕ of G 必然是光滑的。由于 G 的李代数是单李代数，ϕ 的导数要么是同构，此时 ϕ 是自同构；要么为零，此时对所有 $g \in G$，$\phi(g) = 1_G$。

关于嘉当和范德瓦尔登这些文章的历史背景，参见[Bore–01, 第六章，§ 6]。证明提示见 [BoLG2-3, 第三章，§ 4 习题 8 和 9，以及 § 9 习题 25]。请记住，李群之间的任何连续同态都是解析的，特别是光滑的；例如参见[BoLG2-3, 第三章，§ 8，第 1] 条。

我们以一段题外话结束本节。正则的芽可由引理 4 对角化，但不能去掉正则性条件。

下面的例子说明了这一点；它是对[Rell–69，第 1 章，§ 3]中一个例子的稍作改编。令 $n = 1$。先定义一个映射 θ，从 R 到 2×2 矩阵空间，其定义如下：

$$\theta(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-2}) \begin{pmatrix} \cos(2/x) & \sin(2/x) \\ \sin(2/x) & -\cos(2/x) \end{pmatrix} & \text{if } x \neq 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

于是定义映射 $\gamma : \mathbf{R} \to \mathrm{SU}(2)$，使得对所有 $x \in \mathbf{R}$，$\gamma(x) = \exp(i\theta(x))$。除原点外，$\gamma(x)$ 的特征向量为 $\begin{pmatrix} \cos(1/x) \\ \sin(1/x) \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \sin(1/x) \\ -\cos(1/x) \end{pmatrix}$，其特征值为

$\exp(i\exp(-x^{-2}))$ 和 $\exp(-i\exp(-x^{-2}))$。但不存在使$\underline{\zeta}\,\underline{\gamma}\,\underline{\zeta}^{-1}$ 为对角形式的芽 $\underline{\zeta}$ 。

尽管这与此处无关，我们提及可以用一个Borel映射 [Azof–74]将 $\underline{\gamma}$对角化。

2. Proof of Proposition II in the general case

设 G 为单连通紧李群， $\mathfrak{g}$ 为其李代数，$\exp:\ \mathfrak{g}\to G$为指数映射，而 $\mathrm{Ad}: G\to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C})$ 为 G的伴随表示。

约化 9. 只需证明 G 为单连通时的命题 II。

~证明。事实上，假设命题 II 对 G的万有覆盖 G 成立（根据 Weyl定理 [BoLG9，第 1 节，第 4]号，该覆盖仍然是紧的）。短正合列

$$\{1\}\ \to\ \pi_1(G)\ \to\ \widetilde{G}\ \to\ G\ \to\ \{1\}$$

诱导出一个序列

$$\{1\}\ \to\ \pi_1(G)\ \to\ \mathcal{C}^\infty_{n,\widetilde{G}}\ \xrightarrow{p}\ \mathcal{C}^\infty_{n,G}\ \to\ \{1\}$$

该序列也是正合的（在这些序列中， $\pi_1(G)$的元素被视为~ G中心的元素，同时也被视为从 $\mathbf{R}^n$ 到~ ~G中心的常值映射芽）。这里，我们用 $\varepsilon_G\colon \mathcal{C}^\infty_{n,\,G}\to G$和 $\varepsilon_{\widetilde{G}}\colon \mathcal{C}^\infty_{n,\,\widetilde{G}}\to G$ 表示 $\mathbf{R}^n$原点处的求值映射。

设 N 是 $\mathcal{C}^\infty_{n,\,G}$ 的一个正规子群，且不包含于 $\varepsilon_G^{-1}(Z(G))$。由于 ~ ~ ~$G/Z(G)=G/Z(G)$，正规子群 $N:=p^{-1}(N)\subset C^\infty_{n,\,\widetilde{G}}$不包含于 $\varepsilon_{\widetilde{G}}^{-1}(Z(\widetilde{G}))$。若命题 II 对 $\widetilde{G}$成立，则 $N=\mathcal{C}^\infty_{n,\,\widetilde{G}}$，故 $N=\mathcal{C}^\infty_{n,\,G}$；因此命题 II 对 G成立。□

对于 $g\in G$，用 $Z_G(g)_0$ 表示中心化子$Z_G(g)=\{h\in G\mid hg=gh\}$的连通分支。若 g 使得 $Z_G(g)_0$ 是 G中的一个极大环面，则称元素 g 为正则元素；等价地，若 G中存在唯一一个包含 g的极大环面。若 g是正则元素而 $h\in G$不是，则 $\dim Z_G(g)_0<\dim Z_G(h)_0$，并且 G 中有无穷多个包含 h的极大环面。我们用 G_{reg} 表示 G中正则元素的集合。正则元素的共轭仍为正则元素，因此G 通过共轭作用于 G_{reg}。子集 G_{reg} 在 G中是对称的、开且稠密的。关于 [中的正则元素，参见 BoLG7-8，第 VII 章，§ 4] 以及 BoLG9，§ 5，第 1]号。我们

在 G 中选取一个极大环面 T

并记其李代数为 $\mathfrak{t}$。我们在 $\mathfrak{t}$ 中选取一个胞腔 A，即由 $\mathfrak{t}$ 中满足 $\exp(\xi)$ 为正则元素的那些 $\xi\in\mathfrak{t}$ 所构成的子集的一个连通分支。群 G 按通常方式作用于 G/T，在 A 上的作用是平凡的，并通过共轭作用于正则元素子集 G_{reg}。根据约化 9:

从本节此处起，我们假设 G 是单连通的。

引理 10 和引理 12 可分别视为引理 1 和引理 4 的推广。

引理 10. 映射 $\varphi_A\colon \begin{cases} G/T \times A \to G_{\mathrm{reg}} \\ gT\ s \mapsto g\ s\ g^{-1} \end{cases}$ 是一个光滑微分同胚，

并且关于 G的作用是等变的。

证明. 映射 φ_A 是一个微分同胚，参见 [BoLG9，第 51]页命题 4b；其中记作 H_A 的群在此缩减为 $\{1\}$，因为 G 是单连通的，参见 [BoLG9，第 45]页注 1。等变性显而易见。□

我们将 $\pi\colon G \to G/T$ 记为典范投影。

引理 11. 存在一个整数 $k \geq 1$ 以及

$$\begin{aligned} &\text{open subsets } \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_k \text{ in } G/T, \\ &\text{smooth maps } \mu_j : \mathcal{U}_j \to G \text{ for } j = 1, 2, \dots, k, \end{aligned}$$

使得

$$\pi\big(\mu_j(u)\big) = u \text{ for each } u \in \mathcal{U}_j, \text{ for } j = 1, 2, \dots, k.$$

证明。换言之，$\pi\colon G \to G/T$ 是一个以 G/T 为紧底空间、以 T为纤维的局部平凡丛的投影。□

引理 12. 设 $\underline{\gamma}$ 和 $\underline{\delta}$ 是 $\mathcal{C}^\infty_{n,G}$ 中的两个芽，使得 $\underline{\gamma}(O)$ $\underline{\delta}(O) \in G_{\mathrm{reg}}$。设 $(\underline{p}, \underline{s})$ 和 $(\underline{q}, \underline{t})$ 是在 O 处的相应芽，它们是通过将 $\underline{\gamma}$ 和 $\underline{\delta}$ 与映射 φ_A^{-1} 复合而得到的、取值于 $(G/T \times A)$ 的光滑映射，其中 φ_A 如引理 10 所述。

当且仅当 $\underline{s} = \underline{t}$成立时，$\underline{\gamma}$ 和 $\underline{\delta}$ 在 $\mathcal{C}^\infty_{n,G}$ 中共轭。

证明。我们只证明非平凡的蕴含。假设 $\underline{s} = \underline{t}$，我们需要证明 $\underline{\gamma}$ 和 $\underline{\delta}$ 共轭。我们采用引理 11 中的记号。分两种情况讨论。

第一种情况下，存在 $j \in \{1, \dots, k\}$，使得 $\underline{p}(O)$ $\underline{q}(O)$ 属于 $\mathcal{U}_j$。我们可以选取 $\gamma, p, s, \delta, q, t$ 的代表元，它们在 $\mathbf{R}^n$ 中原点的某个公共邻域 $\mathcal{O}$ 上定义，并满足 $p(x)$ $q(x) \in \mathcal{U}_j$，且对所有 $x \in \mathcal{O}$，$s(x) = t(x)$。定义光滑映射 $\zeta\colon \mathcal{O} \to G$，令 $\zeta(x) = \mu_j(q(x))\big(\mu_j(p(x))\big)^{-1}$；于是对所有 $x \in \mathcal{O}$，有 $\zeta(x)p(x) = q(x$。（注意，$\zeta(x)$ 是 G 的一个元素，它作用于 G/T；并且 $\zeta(x)p(x) = q(x)$ 是 G/T 中两个元素之间的等式。）由引理 10 可知，对所有 $x \in \mathcal{O}$，$\zeta(x)\gamma(x)\zeta(x)^{-1} = \delta(x)$，因此 $\underline{\gamma}$ 和 $\underline{\delta}$ 共轭。

在第二种情况下，存在 j、$j' \in \{1, \dots, k\}$，使得 $j \neq j'$，并且 $\underline{p}(O) \in \mathcal{U}_j$ 以及 $\underline{q}(O) \in \mathcal{U}_{j'}$。我们可以选择 γ、p、s、δ、q、t，分别作为 $\underline{\gamma}$、$\underline{p}$、$\underline{s}$、$\underline{\delta}$、$\underline{q}$、$\underline{t}$ 的代表元，它们定义在 $\mathbf{R}^n$ 中原点的某个公共邻域 $\mathcal{O}$ 上，并满足对于所有 $x \in \mathcal{O}$，有 $p(x) \in \mathcal{U}_j$、$q(x) \in \mathcal{U}_{j'}$，以及 $s(x) = t(x)$。存在一个整数 $m \geq 1$，并且

存在一个序列 $q_0 = \underline{p}(O)$ q_1、……、q_{m-1}、$q_m = \underline{q}(O)$，其元素属于 G/T，使得对于每个 $i \in \{1, \dots, m\}$，存在 $j(i) \in \{1, \dots, k\}$，且 q_{i-1} 和 q_i 都属于 $\mathcal{U}_{j(i)}$。对于 $i \in \{1, \dots, m-1\}$，定义一个光滑映射 $\gamma_i \colon \mathcal{O} \to G$，使得对于所有 $x \in \mathcal{O}$，$\gamma_i(x) = \varphi_A(q_i, s(x))$；记 γ_0 为 γ，记 γ_m 为 δ。根据第一种情况中的论证，对于 $i \in \{1, \dots, m\}$，存在一个光滑映射 $\zeta_i \colon \mathcal{O} \to G$，使得 $\zeta_i(x) q_{i-1}(x) = q_i(x)$，因此对于所有 $x \in \mathcal{O}$，有 $\zeta_i(x)\gamma_{i-1}(x)\zeta_i(x)^{-1} = \gamma_i(x)$。由此可知，$\zeta_m \zeta_{m-1} \cdots \zeta_1$ 将 $\gamma_0 = \gamma$ 共轭为 $\gamma_m = \delta$，因此 $\underline{\gamma}$ 与 $\underline{\delta}$ 共轭。□

由于我们无法推广引理 5，因此在接下来的引理中，我们将问题归约到 SU(2) 的情形。在此之前，我们先回顾单连通紧李群结构的以下事实。

提示 13. 令 $X(T)$ 表示从极大环面 T 到模为 1 的复数群 U 的连续同态群。对于$\alpha \in X(T)$，令

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^{\alpha} = \{\xi \in \mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \mid \mathrm{Ad(t)}\xi = \alpha(\mathrm{t})\xi \text{ for all } \mathrm{t} \in \mathrm{T}\}.$$

群 $X(T)$ 采用加法记号，因此 $\alpha = 0$ 是取值为 1 的常值同态 $T \to$U。相对于 T，G 的一个根是 $\alpha \neq 0$ 中的元素，满足 $\dim\ \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^{\alpha} > 0$。已知若 α 是一个根，则 $\dim\ \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^{\alpha} = 1$，且$-\alpha$ 也是一个根。令 $R(G,T)$ 表示根集。元素 $t \in T$ 是正则的，当且仅当对于所有 $\alpha \in R(G,T)$，t 都不包含于 $\ker(\alpha)$ 中；因此，前面选取的胞腔 A 是 $\mathfrak{t} \smallsetminus \bigcup_{\alpha \in R(G,T)} \{\xi \in \mathfrak{t} \mid \exp(\xi) \in \ker(\alpha)\}$ 的一个连通分支。选取根集 $R(G,T)$ 的一个基，并令 $R_+(G,T)$ 为相应的正根集。

设 α 是一个根。存在 G 的一个连通闭子群 S_α，以及一个李群满态射

$$\nu_\alpha : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{S}_\alpha$$

使得

(i) S_α *and the kernel of* $\alpha : T \to \mathbf{U}$ *commute,*
(ii) $\nu_\alpha \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \in T$ *and* $\alpha\left(\nu_\alpha \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix}\right) = a^2$ *for all* $a \in \mathbf{U}$,
(iii) $T = \big(S_\alpha \cap T\big) \cdot \big(\ker(\alpha)\big)$,
(iv) ν_α *is injective, i.e.,* $\nu_\alpha : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{S}_\alpha$ *is an isomorphism.*

群 S_α 是 G 的李子群，其李代数为

$$\mathfrak{su}(2)_\alpha = \mathfrak{g} \cap \left(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^{-\alpha} \oplus [\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^{\alpha}, \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^{-\alpha}]\right),$$

它是 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数，与 $\mathfrak{su}(2)$ 同构。

关于 ν_α 的存在性，以及 (i) 和 (ii)，请参见 [BoLG9, § 4, no 5, 第 31] 页。

对于 (iii)，考虑 $t \in T$。选取 $a(t)$ 的一个平方根 α。令 $t_1 = \nu_\alpha \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix}$ 和 $t_2 = t_1^{-1} t$。则 $t = t_1 t_2$，其中 $t_1 \in S_\alpha \cap T$ 且 $t_2 \in$ 核(α)。

关于 (iv)，请参见 [BoLG9, § 4, no 5, 第 32], 页，并回想一下 G是单连通的。（对于并非单连通的 $G = \mathrm{SO}(2n+1)$，以及对于 α 短根，ν_α 的像同构于 $\mathrm{SO}(3) = \mathrm{SU}(2)/\{\pm \mathrm{id}_2\}$。）

令 ψ_α 表示由 $\nu_\alpha \begin{pmatrix} 2^{-1/2} & 2^{-1/2} \\ -2^{-1/2} & 2^{-1/2} \end{pmatrix}$ 对 G 施加共轭作用所定义的自同构。

那么

(v) $\psi_\alpha \left(\nu_\alpha \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \right) = \nu_\alpha \begin{pmatrix} \frac{a+\overline{a}}{2} & \frac{-a+\overline{a}}{2} \\ \frac{-a+\overline{a}}{2} & \frac{a+\overline{a}}{2} \end{pmatrix}$ *for all* $\nu_\alpha \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(\nu_\alpha) \cap T$,
(vi) $\psi_\alpha(t) = t$ *for all* $t \in \ker(\alpha)$.
(vii) $t\psi_\alpha(t)^{-1} \in \nu_\alpha(\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{reg}})$ *for all* $t \in T \cap G_{\mathrm{reg}}$.

断言 (v) 由以下计算得出

$$\begin{pmatrix} 2^{-1/2} & 2^{-1/2} \\ -2^{-1/2} & 2^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{-1/2} & -2^{-1/2} \\ 2^{-1/2} & 2^{-1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+\overline{a}}{2} & \frac{-a+\overline{a}}{2} \\ \frac{-a+\overline{a}}{2} & \frac{a+\overline{a}}{2} \end{pmatrix}$$

而断言 (vi) 由 (i) 得出。（将 (v) 和 (vi) 与 [BoLG9, § 4, no 5, 第 35], 页作比较，其中相关的 G 内自同构由 $\nu_\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 定义。）

下面证明 (vii)。令 $t \in T$。根据 (iii)，存在相互交换的元素

$$t_1 = \nu_\alpha \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(\nu_\alpha) \cap T \quad \text{and} \quad t_2 \in \ker(\alpha) \quad \text{such that} \quad t = t_1 t_2.$$

Then

$$\begin{aligned} t\psi_\alpha(t)^{-1} &= t_1 t_2 \nu_\alpha \begin{pmatrix} 2^{-1/2} & 2^{-1/2} \\ -2^{-1/2} & 2^{-1/2} \end{pmatrix} t_2^{-1} t_1^{-1} \nu_\alpha \begin{pmatrix} 2^{-1/2} & -2^{-1/2} \\ 2^{-1/2} & 2^{-1/2} \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{by (i)}}{=} t_1 \nu_\alpha \begin{pmatrix} 2^{-1/2} & 2^{-1/2} \\ -2^{-1/2} & 2^{-1/2} \end{pmatrix} t_1^{-1} \nu_\alpha \begin{pmatrix} 2^{-1/2} & -2^{-1/2} \\ 2^{-1/2} & 2^{-1/2} \end{pmatrix} \\ &= \nu_\alpha \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \nu_\alpha \begin{pmatrix} \frac{1+a^2}{2} & \frac{-1+a^2}{2} \\ \frac{1-\overline{a}^2}{2} & \frac{1+\overline{a}^2}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

若 $t \in T \cap G_{\mathrm{reg}}$，则 $t \notin \ker(\alpha)$，因此 $t_1 \notin \ker(\alpha)$，进而由 (ii) 得 $a^2 \neq 1$，所以 $\begin{pmatrix} \frac{1+a^2}{2} & \frac{-1+a^2}{2} \\ \frac{1-\overline{a}^2}{2} & \frac{1+\overline{a}^2}{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{reg}}$。

最后，我们得到以下结论，证明引理 17 时将用到。

(viii) 存在 G 中 1_G 的一个邻域 $\mathcal{V}$，并且对每个 $\alpha \in R_+(G,T)$，存在一个光滑映射 $\lambda_\alpha\colon \mathcal{V} \to S_\alpha$，使得 $\prod_{\alpha\in R_+(G,\ T)} \nu_\alpha(\lambda_\alpha(g)) = g$。

（viii）的证明。记 R_+ 为 $R_+(G,T)$。对于 $\alpha \in R_+$，回忆一下，$\mathfrak{su}(2)_\alpha$ 是 S_α的李代数。考虑满射线性映射 $\bigoplus_{\alpha\in R_+} \mathfrak{su}(2)_\alpha \to \mathfrak{g}$，它将 $(\xi_\alpha)_{\alpha\in R_+}$ 映到 $\sum_{\alpha\in R_+} \xi_\alpha$。对每个 $\alpha \in R_+$，选取一个线性映射$\kappa_\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{su}(2)_\alpha$，使得对所有 $\xi \in \mathfrak{g}$，都有 $\sum_{\alpha\in R_+} \kappa_\alpha(\xi) = \xi$。

设 $\mathcal{V}'$ 是 G 中 1_G 的一个邻域，$\mathcal{W}$ 是 $\mathfrak{g}$ 中原点 O 的一个邻域，并且指数映射是微分同胚 $\exp\colon \mathcal{W} \to \mathcal{V}'$；记其逆微分同胚为 log。对每个 $\alpha \in R_+$，定义光滑映射 $\lambda'_\alpha\colon \mathcal{V}' \to S_\alpha$，令 $\lambda'_\alpha(g) = \exp\left(\kappa_\alpha\big(\log(g)\big)\right)$。接着定义光滑映射$\lambda'\colon \mathcal{V}' \to G$，令 $\lambda'(g) = \prod_{\alpha\in R_+} \nu_\alpha(\lambda'_\alpha(g))$；该乘积中的各项按选定的某种顺序排列，下面的下一个乘积$\prod_{\alpha\in R_+}(\cdots)$也采用相同的顺序。注意到 $\lambda'(1_G) = 1_G$，且 λ'在1_G 处的导数是恒等映射 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$。因此，将 $\mathcal{V}'$ 替换为 1_G的一个较小邻域后，可以假设 λ' 是从 $\mathcal{V}'$ 到 G中 1_G 的某个邻域 $\mathcal{V}$ 的微分同胚。记其逆微分同胚为 ν。对每个 $\alpha \in R_+$，定义光滑映射 $\lambda_\alpha\colon \mathcal{V} \to S_\alpha$，令 $\lambda_\alpha(g) = \lambda'_\alpha(\nu(g))$。于是，对所有 $g \in G$，都有$\prod_{\lambda\in R_+} \nu_\alpha(\lambda_\alpha(g)) = \prod_{\lambda\in R_+} \nu_\alpha(\lambda'_\alpha(\nu(g))) = \lambda'(\nu(g)) = g$，证明至此完成。□

例14. 设 $G = \mathrm{SU(n)}$，其中 $n \geq 3$，并令 T 为 G中对角矩阵构成的环面。T 的开稠密子集 $T \cap G_{\mathrm{reg}}$ 由矩阵 $\mathrm{diag}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ 构成，其中 z_1、z_2、…、z_n 两两不同，且 $z_1 z_2 \cdots z_n = 1$。令α 为同态 $G \to \mathrm{U}$，它将 $\mathrm{diag}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ 映射到 $z_1 z_2^{-1}$。则 α 是相对于 T 的 G 的一个根，ν_α 的像为 $\begin{pmatrix} \mathrm{SU(2\ 0\ 0\ )} \\ \mathrm{id}_{n-2} \end{pmatrix}$，而 α 的核为 $\begin{pmatrix} \pm\mathrm{id}_0{}^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{SU(n\ -\ 2)} \end{pmatrix}$。

引理 15. 设 N 是$\mathcal{C}^\infty_{n,\ G}$ 的一个正规子群，它包含一个芽 $\underline{\gamma}$，使得 $\underline{\gamma}(O) \notin Z(G)$。

那么 N 包含所有常值芽。

证明。第一步。我们可以假设 $\underline{\gamma}(O) \in G_{\mathrm{reg}}$。

事实上，令 $g = \underline{\gamma}(O)$。用 k 表示 G的维数；定义

$$\mathcal{M}(g) = \left\{ h \in G \mid h = \prod_{j=1}^{k} a_j b_j g b_j^{-1} g^{-1} a_j^{-1} \text{ for some } a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k \in G \right\}.$$

由于 g 并非中心元，$\mathcal{M}(g)$ 是 G 中 1_G 的一个邻域（这是范德瓦尔登证明抽象群 $G/Z(G)$ 的简单性的关键所在）

[vdWa–33])。选取 a_1、b_1、……、a_k、$b_k \in G$，使得 $g' \doteqdot \prod_{j=1}^{k} a_j b_j g b_j^{-1} g^{-1} a_j^{-1} \in G_{\mathrm{reg}}$。记住，$\eta_a$ 表示取值为 a 的常值映射 $\mathbf{R}^n \to G$。定义

$$\underline{\gamma}' = \prod_{j=1}^{k} \underline{\eta}_{a_j}\, \underline{\eta}_{b_j}\, \underline{\gamma}\, \underline{\eta}_{b_j}^{-1}\, \underline{\gamma}^{-1}\, \underline{\eta}_{a_j}^{-1}.$$

那么 $\underline{\gamma}'$ 属于 N，且 $g' = \underline{\gamma}'(O) \in G_{\mathrm{reg}}$。因此，我们确实可以从一开始就假设 $\underline{\gamma}(O) \in G_{\mathrm{reg}}$。

第二步。我们可以假设，对于所有 $x \in \mathcal{O}$，$\gamma(x) \in T \cap G_{\mathrm{reg}}$。

用 $(\underline{p}, \underline{s})$ 表示如引理 12 中与 $\underline{\gamma}$ 相关联的、取值于 $(G/T \times A)$ 的光滑映射在 O 处的芽。令 $\gamma : \mathcal{O} \to G_{\mathrm{reg}}$，且 $s: \mathcal{O} \to A$ 分别为 $\underline{\gamma}$ 和 $\underline{s}$ 的代表元。根据引理 12，映射 $\gamma' : \mathcal{O} \to G_{\mathrm{reg}}$, $x \mapsto$ 指数映射$(s(x))$ 在 O 处的芽与 $\underline{\gamma}$ 共轭，因此属于 N。因此，从现在起，我们可以假设 $\underline{\gamma}$ 本身就是映射 $\gamma : \mathcal{O} \to G_{\mathrm{reg}}$, $x \mapsto$ 指数映射$(s(x))$ 的芽，特别是对于所有 $x \in \mathcal{O}$，$\gamma(x) \in T \cap G_{\mathrm{reg}}$。

第三步。群 N 包含一个常值映射的芽，其值不属于 $Z(G)$。

设 α 是相对于 T的 G 的一个根。设 $\nu_\alpha : \mathrm{SU(2)} \to \mathrm{G}$，且 $\psi_\alpha \in \mathrm{Aut(G)}$如提示 13 所述。设 $I_\alpha : \mathcal{C}^\infty_{n,\mathrm{SU(2)}} \to \mathcal{C}^\infty_{n,G}$ 是这样一个映射：它将光滑映射 $\mathcal{O} \to \mathrm{SU(2)}$在 O 处的芽，映到复合映射$\mathcal{O} \to \mathrm{SU(2)} \xrightarrow{\nu_\alpha} \mathrm{G}$在 O 处的芽；则 I_α 是群的单同态。定义映射 $\delta : \mathcal{O} \to G$，使得对所有 $x \in \mathcal{O}$，$\delta(x) = \gamma(x)\psi_\alpha(\gamma(x))^{-1}$，并令 $\underline{\delta}$ 表示它在 $O \in \mathcal{O}$处的芽。由于 δ 是 γ 与某个元素的交换子，故$\underline{\delta}$ 属于 N。由提示 13 中的 (vii) 可知，对所有 $x \in \mathcal{O}$，$\delta(x) \in \nu_\alpha(\mathrm{SU(2)_{reg}})$，且 $\underline{\delta}$ 属于 I_α 的像。因此，$I_\alpha^{-1}(N)$是$\mathcal{C}^\infty_{n,\mathrm{SU(2)}}$ 的正规子群，其中包含芽 $I_\alpha^{-1}(\underline{\delta})$，并且 $I_\alpha^{-1}(\underline{\delta})(O) \in \mathrm{SU(2)_{reg}}$。由命题 7 可知，$N$包含 O 处所有取值于 $\mathcal{O} \to \nu_\alpha(\mathrm{SU(2)})$的光滑映射的芽。

特别地，N 包含一个常值映射的芽 $\mathcal{O} \to G$，其取值属于$\nu_\alpha(\mathrm{SU(2)_{reg}})$，特别是取值属于 G 而不属于 $Z(G)$。

最后一步。由于 G 的任何不包含在 $Z(G)$中的正规子群都是 G 本身（见提示 8），因此 N 包含所有常值映射 $\mathcal{O} \to G$的芽。□

下面的引理是命题 II 证明的最后一步。

引理 16。设 N 是$\mathcal{C}^\infty_{n,G}$ 的一个正规子群，其中包含一个芽 $\underline{\gamma}$，使得$\underline{\gamma}(O) \notin Z(G)$。那么 $N = \mathcal{C}^\infty_{n,G}$.

证明。第一步。设 W 是关于 T 的 G 的韦伊群（它是正规化子 $\mathrm{Norm}_G(T)$ 除以 T 所得的商群），设 $c \in W$ 是一个考克塞特元素，并设 $m \in \mathrm{Norm}_G(T)$ 是一个属于 c 类的元素。回忆一下，W 作用于 T 和 $\mathfrak{t}$；特别地，c 通过 $t \mapsto mtm^{-1}$ 作用于 T，并通过 $\xi \mapsto \mathrm{Ad(m)}\xi$ 作用于 $\mathfrak{t}$。考虑

光滑映射

$$f : T \to T, \quad t \mapsto c(t)t^{-1} = mtm^{-1}t^{-1}.$$

f 在单位元处的导数为

$$L(f) : \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}, \quad \xi \mapsto c(\xi) - \xi = \mathrm{Ad(m)}\xi - \xi.$$

现在， $L(f)$是一个线性自同构，因为考克塞特元素的特征值中不含 1（见 [BoLG9，第 33], 页，其中引用了 [BoLG4-6，第 V 章，第 6 节，第 2]条）。根据隐函数定理，存在 T 中单位元的一个对称邻域 $\mathcal{V}$，以及一个光滑映射 χ： $\mathcal{V} \to T$，使得

$$(\sharp) \qquad t = m\chi(t)m^{-1}\chi(t)^{-1} \quad \text{for all } t \in \mathcal{V}.$$

注意，$\bigcup_{g\in G} g\mathcal{V}g^{-1}$ 是 G中 1_G 的一个邻域。

第二步。令$\underline{\delta} \in \mathcal{C}^\infty_{n,G}$ 满足 $\underline{\delta}(O) \in \left(\bigcup_{g\in G} g\mathcal{V}g^{-1}\right) \cap G_{\mathrm{reg}}$；则 $\underline{\delta} \in N$。

令 $\mathcal{O}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中原点的一个邻域，并令 δ： $\mathcal{O} \to \left(\bigcup_{g\in G} g\mathcal{V}g^{-1}\right) \cap G_{\mathrm{reg}}$ 为芽 $\underline{\delta}$ 的一个光滑映射。根据引理 12，存在一个光滑映射ζ： $\mathcal{O} \to \mathcal{V} \cap G_{\mathrm{reg}}$，其芽$\underline{\zeta}$ 在$\mathcal{C}^\infty_{n,G}$中与 $\underline{\delta}$ 共轭，因此只需证明 $\underline{\zeta} \in N$。令 η_m 为取值 m的常值映射 $\mathcal{O} \to G$；根据（$\sharp$），我们有

$$\zeta(x) = \eta_m(x)\chi(\zeta(x))\eta_m(x)^{-1}\chi(\zeta(x))^{-1} \quad \text{for all } x \in O.$$

根据引理 15， η_m 的芽属于 N，因此可得 $\underline{\zeta} \in N$。

最后一步。现在任取 $\underline{\delta}$ 属于$\mathcal{C}^\infty_{n,\,G}$，并令 δ: $\mathcal{O} \to G$ 为δ的一个代表。由于 $\left(\bigcup_{g\in G} g\mathcal{V}g^{-1}\right) \cap G_{\mathrm{reg}}$是$G$的非空对称开子集，且 G是连通的，故存在 g_1、……、 $g_k \in \left(\bigcup_{g\in G} g\mathcal{V}g^{-1}\right) \cap G_{\mathrm{reg}}$，使得 $\underline{\delta}(O) = g_1 \cdots g_k$。对于 $j \in \{1, \ldots, k\}$，令 η_j: $\mathcal{O} \to \bigcup_{g\in G} g\mathcal{V}g^{-1}$为取值为 g_j的常值映射。设 $\varphi = \delta(\eta_2 \cdots \eta_k)^{-1}$，于是 $\delta = \varphi\eta_2 \cdots \eta_k$。那么$\varphi(O) = g_1$、 $\eta_2(O) = g_2$、……、 $\eta_k(O) = g_k$都属于$\left(\bigcup_{g\in G} g\mathcal{V}g^{-1}\right) \cap G_{\mathrm{reg}}$，因此根据第二步，$\underline{\varphi}$、$\underline{\eta}_2$、……、$\underline{\eta}_k$都属于 N。由此可得 $\underline{\delta} = \underline{\varphi\eta}_2 \cdots \underline{\eta}_k$属于 N。□

3. Proof of Proposition I

设 X 为闭光滑流形， n 为其维数， G 为单连通紧实实李群， 1_G 为 G 中的单位元， $M_0(G)$ 为群 $M(G)$ 的连通分支； $M(G)$ 是从 X 到 G 的所有光滑映射构成的群，如命题 I 所述。

在下述引理中，将 G 与 $M_0(G)$ 中的常值映射群等同。给定 $M_0(G)$ 中的子集 A、 B，我们用 (A, B) 表示由交换子 $\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1}$ （其中 $\gamma \in A$ 和 $\delta \in B$）生成的 $M_0(G)$ 的子群。

引理 17. 有 $M_0(G) = (G, M_0(G))$。特别地，群 $M_0(G)$ 是完美群。

注意。群 $M(G)$ 不一定是完美群。例如，当 X 是圆S^1 且 G 不是单连通时，存在一个从 $M(G)$ 到

G 的基本群的自然满同态；该基本群是阿贝尔群且非平凡，因此 $M(G)$ 不是完美群。

在某些情况下， $M_0(G) = M(G)$。当 G 单连通时，这对 X 圆（显然）和 X 2-球面都成立（因为根据外尔的一个定理， G 的第二同伦群是平凡的）。当 $G =$ 为 SU(2) 时，只要 X 的第三上同伦集只有一个元素，这一结论就成立；特别是当 X 为圆或闭曲面时。

证明。我们基本上沿用 [PrSe–86] 中命题 3.4.1 的证明。我们先考虑 $G =$ 为 SU(2) 的情形。

第一步。设 T_1 为 G中由对角矩阵构成的环面。设 $\gamma \in M_0(T_1)$。于是 $\gamma \in G$, M_0 G 。 (( ))

Indeed, let $\mathcal{U}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{is} & 0 \\ 0 & e^{-is} \end{pmatrix} \in T_1 \;\middle|\; -\pi < s < \pi \right\}$. Let

$$\mathcal{V}_1 = \{\gamma \in M(T_1) \mid \gamma(x) \in \mathcal{U}_1 \text{ for all } x \in X\},$$

它是 $M_0(T_1)$中单位元的一个邻域。由于在 T_1中存在从 $\mathcal{U}_1$ 到 $\{1_{T_1}\}$ 的光滑变形收缩，任意光滑映射 $\gamma \in \mathcal{V}_1$ 都属于$M_0(T_1)$。先假设 $\gamma \in \mathcal{V}_1$。那么 γ 具有 $x \mapsto \begin{pmatrix} e^{is(x)} & 0 \\ 0 & e^{-is(x)} \end{pmatrix}$的形式，其中某个光滑映射 $s\colon\ X \to]-\pi,\ \pi[$。由于

$$\begin{pmatrix} e^{is(x)} & 0 \\ 0 & e^{-is(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-is(x)/2} & 0 \\ 0 & e^{is(x)/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{is(x)/2} & 0 \\ 0 & e^{-is(x)/2} \end{pmatrix}$$

对于所有 $x \in X$，我们有 $\gamma \in (G, M_0(G))$。现在任取 γ ，使其属于 $M_0(T_1)$。由于 $M_0(T_1)$ 是连通的，存在 $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \mathcal{V}_1$ ，使得 γ 是乘积$\gamma_1 \cdots \gamma_k$。根据前面的论证，每个 γ_j 都包含于 $(G, M_0(G))$，因此 $\gamma \in (G, M_0(G))$。

第二步。令

$$T_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) & i\sin(t) \\ i\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in [0, 2\pi[\right\},$$

$$T_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(u) & \sin(u) \\ -\sin(u) & \cos(u) \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in [0, 2\pi[\right\}.$$

同样，如果 γ 属于 $M_0(T_2)$ 或属于 $M_0(T_3)$，那么 $\gamma \in (G, M_0(G))$。

这由第一步得出，因为 SU(2) 中的极大环面彼此共轭。

第三步。在 $M_0(G)$ 中，单位元 $\mathcal{W}$ 存在一个邻域，使得每个 $\gamma \in \mathcal{W}$ 都属于 $(G, M_0(G))$。

对于 $j \in \{1, 2, 3\}$，令 $\mathfrak{t}_j$ 表示 T_j 的李代数。考虑乘法映射

$$\mu : T_1 \times T_2 \times T_3 \to G,\ (g_1, g_2, g_3) \mapsto g_1 g_2 g_3.$$

它在单位元处的导数

$$\mathfrak{t}_1 \times \mathfrak{t}_2 \times \mathfrak{t}_3 \to \mathfrak{g},\ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$$

是一个线性同构。由隐函数定理，存在单位元 $T_1 \times T_2 \times T_3$ 的一个邻域 $\mathcal{V}_T$，以及单位元 G 的一个邻域 $\mathcal{V}_G$，使得 μ 的限制是一个同胚 $\mathcal{V}_T \to \mathcal{V}_G$。缩小这些邻域后，我们还可以假定存在从 $\mathcal{V}_T$ 到 $\{1_T\}$（在 $T_1 \times T_2 \times T_3$ 中）以及从 $\mathcal{V}_G$ 到 $\{1_G\}$（在 G 中）的光滑变形收缩。对所有 $x \in X\}$，定义 $\mathcal{W} = \{\gamma \in M(G) \mid \gamma(x) \in \mathcal{V}_G$；任意光滑映射 $\gamma \in \mathcal{W}$ 都属于 $M_0(G)$，而 $\mathcal{W}$ 是 $M_0(G)$ 中单位元的一个邻域。于是，每个 $\gamma \in \mathcal{W}$ 都可表示为乘积 $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$，其中 $\gamma_j \in M_0(T_j)$，$j \in \{1, 2, 3\}$，因此由前两步可得 $\gamma \in (G, M_0(G))$。

第四步。每个 $\gamma \in M_0(G)$ 都属于 $(G, M_0(G))$。

由于 $M_0(G)$ 是连通的，这由第三步通过通常的论证可得。（参见第一步证明的结尾。）

关于 G 表示 SU(2) 的部分现已完成。从现在起，G 又表示一个一般的单连通紧实实李群，如引理 17 的陈述中所述。

第五步。取 G 的一个极大环面 T，并取 G 关于 T 的根集 $R = R(G, T)$ 的一个基。令 R_+ 为相应的正根集。取 G 中 1_G 的一个邻域 $\mathcal{V}$，并且对每个 $\alpha \in R_+$，取一个光滑映射 $\lambda_\alpha\colon \mathcal{V} \to S_\alpha$，使得对所有 $g \in \mathcal{V}$，$\prod_{\alpha \in R_+} \nu_\alpha\big(\lambda_\alpha(g)\big) = g$。（参见提示 13 中的 (viii)；回忆一下，ν_α 是从 SU(2) 到 G 的 $S_\alpha \approx$ 包含同态。）

设 $\gamma \in M_0(G)$ 满足 $\gamma(X) \subset \mathcal{V}$。对于每个 $\alpha \in R_+$，映射 $\lambda_\alpha \circ \gamma\colon X \to S_\alpha$ 根据第四步属于交换子群 $(S_\alpha, M_0(S_\alpha))$。由此可得，$\gamma = \prod_{\alpha \in R_+} \nu_\alpha\big(\mu_\alpha \circ \gamma\big)$ 属于交换子群 $(G, M_0(G))$。

现在令 γ 为 $M_0(G)$ 中任意元素。由于 $M_0(G)$ 连通，γ 是若干像属于 $\mathcal{V}$ 的元素之积，因此 $\gamma \in (G, M_0(G))$。□

$M(G)$ 中元素 γ 的支集，是集合 X 中满足 $\gamma(x) \neq 1_G$ 的点 x 所成子集的闭包 $\operatorname{supp}(\gamma)$。

引理 18。设 $(\mathcal{U}_i)_{1 \le i \le k}$ 是 X 的一个开覆盖，并设 $\gamma \in M_0(G)$。

存在一个由光滑映射 $(\gamma_j)_{1 \le j \le \ell}$ in $M_0(G)$ 构成的有限序列，以及一个指标序列 $(i(j))_{1 \le j \le \ell}$ in $\{1, \dots, k\}$，满足 $\operatorname{supp}(\gamma_j) \subset \mathcal{U}_{i(j)}$ for $j \in \{1, \dots, \ell\}$，使得 $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_\ell$。

证明。令 $\mathcal{C}^\infty(X, \mathfrak{g})$ 表示从 X 到 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的所有光滑映射构成的空间。那么 $M_0(G)$ 是一个 Fr´echet 李群，其李代数为 $\mathcal{C}^\infty(X, \mathfrak{g})$；存在一个指数映射

$$\mathrm{EXP} : \mathcal{C}^\infty(\mathrm{X}, \mathfrak{g}) \to \mathrm{M}_0(\mathrm{G})$$

定义为

$$(\mathrm{EXP}(\zeta))(\mathrm{x}) = \exp(\zeta(\mathrm{x})) \quad \text{for all } \zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{X}, \mathfrak{g}) \text{ and } \mathrm{x} \in \mathrm{X},$$

其中 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ 是 G的指数映射，并且该 EXP 是局部微分同胚。由于 $M_0(G)$ 是连通的，存在 $\zeta_1, \dots \zeta_m \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathfrak{g})$，使得

$$\gamma = \mathrm{EXP}(\zeta_1) \cdots \mathrm{EXP}(\zeta_\mathrm{m}).$$

令 $(\lambda_i)_{1 \le i \le k}$ 为从属于 $(\mathcal{U}_i)_{1 \le i \le k}$ 的光滑单位分解。由于这些$\lambda_i \zeta_1$ 彼此可交换，我们有

$$\mathrm{EXP}(\zeta_1) = \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \mathrm{EXP}(\lambda_\mathrm{i} \zeta_1)$$

且对于 $i \in \{1, \dots, k\}$，有 $\mathrm{supp}(\lambda_\mathrm{i}\zeta_1) \subset \mathcal{U}_\mathrm{i}$。对 $\mathrm{EXP}(\zeta_2), \dots, \mathrm{EXP}(\zeta_\mathrm{m})$ 也同样成立，故引理得证，其中 $N = km$。□

对于 $a \in X$，回顾一下，ε_a 表示求值映射 $M_0(G) \to G, \gamma \mapsto \gamma(a)$。核 $\ker(\varepsilon_a)$ 是 $M_0(G)$ 的闭正规子群。对于 X的一个开子集 $\mathcal{U}$，定义

$$N_\mathcal{U} = \{\gamma \in M_0(G) \mid \mathrm{supp}(\gamma) \subset \mathcal{U}\},$$

which 是 $M_0(G)$ 的正规子群。对于 $a \in X$，我们用 $N_{X \smallsetminus a}$ 表示 $N_{X \smallsetminus \{a\}}$。

引理 19. 设 $\mathcal{V}$ 是 G 中 1_G 的一个开邻域，$\mathcal{W}$ 是 $\mathfrak{g}$ 中 O 的一个开邻域，并且 $\exp : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ 是一个微分同胚。设 $a \in X$。

(i) $M_0(G)$ 的正规闭子群 $\ker(\varepsilon_a)$ 是连通的。

设 $\gamma \in N_{X \smallsetminus a}$

(ii) 存在 X 中 a 的一个开邻域 $\mathcal{U}$，以及从 $\gamma = \gamma_0$ 到常值映射 $\gamma_1 \colon X \to \{1_G\}$ 的同伦 $(\gamma_t)_{0, \, \le t \le 1}$，其中 $\le t \le 1$ 属于 $M_0(G)$，使得对于所有 $t \in [0,1]$ 和所有 $x \in \mathcal{U}$，$\gamma_t(x) = 1_G$。

(iii) 此外，存在一个序列 $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathfrak{g})$，具有以下性质

$$\begin{aligned}
&\xi_i(x) \in \mathcal{W} \quad \textit{for all } i \in \{1, \dots, k\} \textit{ and } x \in X, \\
&\xi_i(x) = 0 \quad \textit{for all } i \in \{1, \dots, k\} \textit{ and } x \in \mathcal{U}, \\
&\gamma(x) = \exp\big(\xi_1(x)\big) \exp\big(\xi_2(x)\big) \cdots \exp\big(\xi_k(x)\big) \quad \textit{for all } x \in X.
\end{aligned}$$

证明。（i）设 $\gamma \in M_0(G)$。

由于按定义 $M_0(G)$ 是一个连通群，因此存在一个连续映射

$$\Gamma_\gamma : X \times [0,1] \to G$$

使得

$$\begin{aligned}
&(11) \quad \Gamma_\gamma(\cdot, t) : X \to G \quad \text{is smooth for all } t \in [0,1], \\
&(12) \quad \Gamma_\gamma(x, 0) = \gamma(x) \quad \text{for all } x \in X, \\
&(13) \quad \Gamma_\gamma(x, 1) = \gamma(a) \quad \text{for all} \quad x \in X.
\end{aligned}$$

当 $\gamma \in$ 核(ε_a) 时，注意到 $\Gamma_\gamma(\cdot, t)$ 不一定属于核(ε_a)，对于 $t \in]0,1[$, 而言，断言（i）尚未得到证明。

定义

$$\Delta'_\gamma : X \times [0,1] \to G \quad \text{by} \quad \Delta'_\gamma(x,t) = \Gamma_\gamma(x,t)\Gamma_\gamma(a,t)^{-1}\gamma(a)$$

由 (11)、(12) 和 (13) 可得,

$$(21) \quad \Delta'_\gamma(\cdot,t) : X \to G \quad \text{is smooth for all } t \in [0,1],$$
$$(22) \quad \Delta'_\gamma(x,0) = \gamma(x)\gamma(a)^{-1}\gamma(a) = \gamma(x) \quad \text{for all } x \in X,$$
$$(23) \quad \Delta'_\gamma(x,1) = \gamma(a)\gamma(a)^{-1}\gamma(a) = \gamma(a) \quad \text{for all } x \in X,$$
$$(24) \quad \Delta'_\gamma(a,t) = \Gamma_\gamma(a,t)\Gamma_\gamma(a,t)^{-1}\gamma(a) = \gamma(a) \quad \text{for all } t \in [0,1].$$

现在假设 $\gamma \in$ ker(ε_a)。那么 $(x \mapsto \Delta'_\gamma(x,t))_{t\in[0,1]}$ 是一个连续映射族，它将 γ 与群 $M_0(G)$ 中的常值映射 $X \to \{\gamma(a)\} = \{1_G\}$ 连接起来；事实上，根据 (24)，该映射族位于群 ker(ε_a) 中。这就证明了断言（i）。

(ii) 设 $\mathcal{U}'$ 是 X 中 a 的一个开邻域，使得对于所有 $x \in \mathcal{U}'$，都有 $\gamma(x) = \gamma(a)$。将 $\mathcal{U}'$ 换成一个更小的邻域后，可以假设 $\mathcal{U}'$ 微分同胚于一个开球，且 $\mathcal{U}'$ 具有球坐标 $(r,\sigma) \in [0,1[\times S^{n-1}$；令 $\mathcal{U} = \{(r,\sigma) \in \mathcal{U}' \mid r < 1/3\}$。

令 $\lambda : [0,1[\to [0,1[$ 为一个光滑函数，使得当 $t \le 1/3$ 时，$\lambda(t) = 0$，且当 $t \ge 2/3$ 时，$\lambda(t) = 1$。定义一个光滑映射 $h : X \to X$，其定义为：对所有 $x = (r,\sigma) \in \mathcal{U}'$，$h(x) = h(\lambda(r)\ \sigma)$；并且对所有 $x \in X \setminus \mathcal{U}'$，$h(x) = x$。那么

$$(31) \quad h(x) = x \quad \text{for all } x \in X \setminus \mathcal{U}',$$
$$(32) \quad h(\mathcal{U}') \subset \mathcal{U}',$$
$$(33) \quad h(x) = a \quad \text{for all } x \in \mathcal{U}.$$
$$(34) \quad \gamma \circ h = \gamma.$$

[对（34）的检验：若 $x \in X \setminus \mathcal{U}'$，由（31）可得 $\gamma(h(x)) = \gamma(x)$；若 $x \in \mathcal{U}'$，由（33）可得 $\gamma(h(x)) = \gamma(a) = \gamma(x)$。]

令 Δ'_γ 如（i）中所述。定义

$$\Delta_\gamma : X \times [0,1] \to G \quad \text{by} \quad \Delta_\gamma(x,t) = \Delta'_\gamma(h(x),t).$$

我们有

$$(41) \quad \Delta_\gamma(\cdot,t) : X \to G \quad \text{is smooth for all } t \in [0,1],$$
$$(42) \quad \Delta_\gamma(x,0) = \gamma(h(x)) = \gamma(x) \quad \text{for all } x \in X, \text{ by (22) and (34)},$$
$$(43) \quad \Delta_\gamma(x,1) = \gamma(a) = 1_G \quad \text{for all } x \in X, \text{ by (23)},$$
$$(44) \quad \Delta_\gamma(a,t) = \gamma(a) = 1_G \quad \text{for all } t \in [0,1], \text{ by (33) and (24)}.$$

由 $\gamma_t = \Delta_\gamma(\cdot,t)$，这证明了断言（ii）。

（iii）由 Δ_γ 的一致连续性可知，对于所有满足 $t' < t''$ 且 $t'' - t'$ 足够小的 $t', t'' \in [0,1]$，我们有

$$\Delta_\gamma(x,t')^{-1}\Delta_\gamma(x,t'') \in \mathcal{V} \quad \text{for all } x \in X.$$

因此，我们可以找到一个序列 $t_0, t_1, \ldots, t_k \in [0,1]$，使得

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = 1$$
$$\Delta_\gamma(x,t_{i-1})^{-1}\Delta_\gamma(x,t_i) \in \mathcal{V} \quad \text{for all } x \in X \text{ and } i \in \{1,\ldots,k\}.$$

令 $\log : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ 表示微分同胚 $\exp : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ 的逆映射。对于$i \in \{1,\ldots,k\}$，定义

$$\gamma_i(x) = \Delta_\gamma(x,t_{i-1})^{-1}\Delta_\gamma(x,t_i)$$
$$\xi_i(x) = \log(\gamma_i(x))$$

对所有 $x \in X$ 均成立。于是

$$\gamma(x) = \exp\big(\xi_1(x)\big)\exp\big(\xi_2(x)\big)\cdots\exp\big(\xi_k(x)\big) \quad \text{for all } x \in X$$

并且 $\xi_1, \ldots, \xi_k$ 具有 (iii) 中所述的性质。 □

以下凡有需要，我们都将李代数 $\mathfrak{g}$ 配备一个标量积，例如由负的 Killing 型给出的标量积，这样 $\mathfrak{g}$中的球这一概念便有意义。

下一个引理表明，$M(G)$ 中在 X 的某个小开子集之外为常值的元素属于 $M_0(G)$。更确切地说：

引理 20. 设 $a \in X$ 和 $g \in G$。设 $\mathcal{U}$ 是 X中 a 的一个开邻域。设 $\mathcal{V}$ 是 G 中 g 的一个开邻域，并设 $\mathcal{W}$ 是 $\mathfrak{g}$ 中以原点 O 为中心的开球，使得映射 $\varphi : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$, $\xi \mapsto g\exp(\xi)$ 是一个微分同胚。设 $\delta \in M(G)$ 是一个满足以下条件的元素

$$\delta(a) = g, \quad \delta(\mathcal{U}) \in \mathcal{V},$$
$$\delta(x) = g \text{ for all } x \text{ in some neighbourhood of } X \smallsetminus \mathcal{U}.$$

那么 $\delta \in M_0(G)$。

证明. 设 $\lambda : [0,1] \to [0,1]$ 是一个光滑函数，使得对 $t \le 1/3$, $\lambda(t) = 1$，且对 $t \ge 2/3$, $\lambda(t) = 0$。考虑具有极坐标 (r,σ) 的 $\mathcal{W}$，其中$r \in [0,1[$，且 σ 位于 $\mathfrak{g}$的单位球面上。定义一个连续映射

$$h : \mathcal{W} \times [0,1] \to \mathcal{W}, \ (r,\sigma,t) \mapsto (\lambda(t)r, \sigma)$$

对于所有 $(r,\sigma) \in \mathcal{W}$和 $t \in [0,1]$。那么：

$$\mathcal{W} \to \mathcal{W},\ \xi \mapsto h(\xi,t), \text{ is smooth for all } t \in [0,1],$$
$$h(\xi,0) = \xi \text{ for all } \xi \in \mathcal{W},$$
$$h(\xi,1) = O \text{ for all } \xi \in \mathcal{W},$$
$$h(O,t) = O \text{ for all } t \in [0,1].$$

对于 $t \in [0,1]$，定义 $\delta_t : X \to G$ 为

$$\delta_t(x) = g \exp\left(h\left(\varphi^{-1}(\delta(x)), t\right)\right) \text{ for all } x \in \mathcal{U},$$
$$\delta_t(x) = g \text{ for all } x \in X \setminus \mathcal{U}.$$

于是，$(t \mapsto \delta_t)_{t\in[0,1]}$ 是 $M(G)$ 中一个连续的映射族，它连接 $\delta_0 = \delta$ 与取值为 g 的常值映射 δ_1。因此，δ 和 δ_1 属于 $M(G)$ 的同一个连通分支。由于 G 是连通的，常值映射 δ_1 属于 $M_0(G)$，因而 $\delta \in M_0(G)$。□

对于一点 $a \in X$，记 $\mathcal{C}^\infty_{a,\,G}$ 为从 X 到 G 的光滑映射在 a 处的芽群。回忆一下，$\mathcal{C}^\infty_{n,\,G}$ 表示从 $\mathbf{R}^n$ 到 G 的光滑映射在原点处的芽群。

引理 21。设 $a \in X$。

(i) 群$\mathcal{C}^\infty_{a,\,G}$ 与 $\mathcal{C}^\infty_{n,\,G}$ 同构。(ii) 商群 $M_0(G)/N_{X\setminus a}$ 与芽群 $\mathcal{C}^\infty_{a,\,G}$同构，因而也与 $C^\infty_{n,\,G}$同构。

证明。断言（i）显然；事实上，M 在 a 附近的任意坐标图都给出$C^\infty_{a,G}$ 到 $C^\infty_{n,\,G}$的一个同构。

考虑同态

$$\rho_a : M_0(G) \to \mathcal{C}^\infty_{a,G}$$

它将 $X \to G$ 中X上的全局定义光滑映射关联到其在 a处的局部芽。ρ_a 的核为 $N_{X\setminus a}$。对于断言（ii），还需证明同态 ρ_a 是满射。

设$\underline{\gamma} \in \mathcal{C}^\infty_{a,G}$；令 $g = \underline{\gamma}(a)$。设 $\mathcal{U}'$ 是 X 中 a 的一个开邻域，使得存在$\underline{\gamma}$的一个代表元 $\gamma_a : \mathcal{U}' \to G$。与引理 19 的证明相同，我们可以假设 $\mathcal{U}'$微分同胚于一个开球，且 $\mathcal{U}'$具有球坐标 $(r,\sigma) \in [0,1[\times S^{n-1}$；令 $\mathcal{U} = \{(r,\sigma) \in \mathcal{U}' \mid r < 1/3\}$。我们还可以假设存在引理 20 中的 $\mathcal{V} \subset G$ 和 $\mathcal{W} \in \mathfrak{g}$，使得 $\gamma(\mathcal{U}') \subset \mathcal{V}$。

设 $\lambda : [0,1[\to [0,1[$ 是一个光滑函数，使得 $\lambda(t) = t$ 对 $t \le 1/3$ 成立，且$\lambda(t) = 0$ 对 $t \ge 2/3$成立。定义光滑映射 $h : X \to X$，其定义为：对所有 $x = (r,\sigma) \in \mathcal{U}'$，有 $h(x) = h(\lambda(r)\ \sigma)$；并且对所有 $x \in X \setminus \mathcal{U}'$，有 $h(x) = a$。在 $M(G)$ 中定义 $\delta : X \to G$，使得对所有 $x \in X$，有 $\delta(x) = \gamma(h(x))$。于是

$$\delta(x) = \gamma(x) \quad \text{for all } x \in \mathcal{U} \quad \text{and therefore} \quad \underline{\delta} = \underline{\gamma},$$
$$\delta(x) = a \quad \text{for all } x \in \mathcal{U}',$$

根据引理 20，且 $\delta \in M_0(G)$。由此完成了对 ρ_a满射性的证明。□

引理 22. 设 N 是 $M_0(G)$ 中的一个极大正规子群。

存在 $a \in X$，使得 N 包含 $N_{X\setminus a}$。

证明。第一步。令 $S = M_0(G)/N$。这个商群 S 是单李群，因为 N是极大的，并且根据引理 17，它是完美群。对于 X的一个开子集 $\mathcal{U}$，回顾一下，$N_{\mathcal{U}}$ 已定义为 $\{\gamma \in M_0(G) \mid \mathrm{supp}(\gamma) \subset \mathcal{U}\}$。定义

$$Y = \left\{ x \in X \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{there exists an open neighbourhood} \\ \mathcal{U}(x) \text{ of } x \text{ in } X \text{ such that } N_{\mathcal{U}(x)} \subset N \end{array} \right\}.$$

根据定义，Y 在 X中是开集。第一步的目的是证明

$$Y = X \smallsetminus a \quad \text{for some point} \quad a \in X.$$

包含关系 $Y \subset X$ 是严格的。事实上，反设 $Y = X$。对每个 $x \in X$，都存在一个开邻域 $\mathcal{U}(x)$，使得 $N_{\mathcal{U}(x)} \subset N$。令 $\{x_1, \dots, x_k\}$为 X的一个子集，使得 $\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{U}(x_i) = X$。任取 $M_0(G)$中的元素 γ。根据引理 18，存在一个由光滑映射 $(\gamma_j)_{1 \le j \le \ell}$构成的有限序列，取值于 $M_0(G)$，以及一个指标序列 $(i(j))_{1 \le j \le \ell}$，取值于 $\{1, \dots, k\}$，使得 $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_\ell$，并且 $\gamma_j \in N_{\mathcal{U}(x_{i(j)})}$对所有 $j \in \{1, \dots, \ell\}$都成立。这意味着对所有 $j \in \{1, \dots, \ell\}$都有 $\gamma_j \in N$，因此 $\gamma \in N$。由于 γ是任意的，这说明$N = M_0(G)$，但这是不可能的，因为 N 是 $M_0(G)$中的极大正规子群。

存在唯一一点 $a \in X$ 使得 $Y = X \smallsetminus \{a\}$。事实上，反设有两个不同的点 a 和 b，它们属于 X 且不在 Y 中。存在 $\mathcal{A}$ 的两个不相交邻域 a 和 $\mathcal{B}$，分别包含 b 和 X；注意到 $N_{\mathcal{A}}$ 与 $N_{\mathcal{B}}$可交换。考虑典范投影 $\pi \colon M_0(G) \to S$；由 Y的定义可知 $N_{\mathcal{A}} \not\subset N$，因此 $\pi(N_{\mathcal{A}}) = S$，同理 $\pi(N_{\mathcal{B}}) = S$。由于 S 是完美群，我们有

$$S = (S, S) = (\pi(N_{\mathcal{A}}), \pi(N_{\mathcal{B}})) = \pi(N_{\mathcal{A}}, N_{\mathcal{B}}) = \pi(\{1_G\}) = \{1_S\},$$

这是不可能的，因为 S 不是平凡群。

第二步。还需证明 $N \supset N_{X \smallsetminus a}$ $(= N_Y)$。

设 $\gamma \in N_{X \smallsetminus a}$。令 $\mathcal{U} \subset X$和 $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathfrak{g})$ 如引理 19 和 (iii) 中所述。 (ii)

令 $x \in \mathrm{supp}(\xi_1)$。由于 $x \in X \smallsetminus \{a\}$，根据第一步，存在 $\mathcal{U}(x)$ 的一个开邻域 x，它位于 X中，且满足 $N_{\mathcal{U}(x)} \subset N$。由于 $\mathrm{supp}(\xi_1)$ 是紧的，存在 $\mathrm{supp}(\xi_1)$ 的一个有限子集 $\{x_1, \dots, x_\ell\}$，使得 $\mathrm{supp}(\xi_1) \subset \bigcup_{1 \le j \le \ell} \mathcal{U}(x_j)$。令 $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_\ell\}$ 为从属于 $(X \smallsetminus \mathrm{supp}(\xi_1)\ \mathcal{U}(x_1) \dots, \mathcal{U}(x_\ell)\}$ 的光滑单位分解。对于 $j \in \{1, \dots, \ell\}$，$\lambda_j \xi_1$彼此可交换，因此我们有

$$\exp(\xi_1(x)) = \prod_{j=1}^{\ell} \exp(\lambda_j(x) \xi_1(x)) \quad \text{for all } x \in X.$$

根据 $\mathcal{U}(x_j)$ 的定义，映射 $x \mapsto$指数映射$(\lambda_j(x)\xi_1(x))$ 属于 $N_{\mathcal{U}(x_j)}$，因此也属于 N，故映射 $x \mapsto$指数映射$(\xi_1(x))$ 属于 N。

同样地，对于所有 $i \in \{1, \dots, k\}$，$x \mapsto \exp(\xi_i(x))$ 都属于 N。因此，它们的乘积 γ 也属于 N，从而有 $N_{X \smallsetminus a} \subset N$。□

命题 I 的证明结束。设 N 是 $M_0(G)$ 中的一个极大正规子群。根据引理 22，存在 $a \in X$，使得 N 包含 $N_{X \smallsetminus a}$。令 ρ_a: $M_0(G) \to \mathcal{C}^\infty_{n,G}$ 为引理 21 中的满同态，其核为 $N_{X \smallsetminus a}$。那么 $\rho_a(N)$ 是 $\mathcal{C}^\infty_{n,G}$ 的极大正规子群，因此根据命题 II，$\rho_a(N) = N_O \mathcal{C}^\infty_{n,G}$，从而 $N = N_a M_0(G)$。□

References

[Azof–74] E.A. Azoff，线性代数中的博雷尔可测性。《美国数学会会议录》42（1974），346–350。[Bore–01] A. Borel，关于李群和代数群历史的论文集。美国数学会和伦敦数学会，2001。[BoLG2–3]N. Bourbaki，李群与李代数。第二章：自由李代数。第三章：李群。Hermann，1972。[BoLG4–6]N. Bourbaki，李群与李代数。第四章：Coxeter 群与 Tits 系。第五章：由反射生成的群。第六章：根系。Hermann，1968。[BoLG7–8] N. Bourbaki，李群与李代数。第七章：嘉当子代数，′正则元素。第八章：分裂半单李代数。Hermann，1975[BoLG9] N. Bourbaki，李群与李代数。第九章：实紧李群。Masson，1982。[BoTS] N. Bourbaki，谱理论。第一章：赋范代数。第二章：局部紧交换群。Hermann，1967。[Cart–30] E. Cartan，关于闭群的线性表示。《瑞士数学杂志》2（1930），第1期，269–283。[DuSc–58] N. Dunford 和 J.T. Schwartz，线性算子。第一部分：一般理论。Interscience，1958。[Harp–88] P. de la Harpe，关于映入单连通紧李群的光滑映射群。《瑞士数学杂志》63（1988），第3期，450–463。[KhWe–09] B. Khesin 和 R. Wendt，无限维群的几何。Springer，《数学及其边缘领域成果》第3辑，第51卷，2009。[Miln–84] J. Milnor，关于无限维李群的注记。载于《相对论、群与拓扑II（Les Houches）》，北荷兰出版社，1984，第1007–1057页。[论文集，第V卷，代数，美国数学会，2010，第91–141页。][Neeb–06] K.-H. Neeb，走向局部凸群的李理论。《日本数学杂志》1（2006），第2期，291–468。[PrSe–86] A. Pressley 和 G. Segal，环群。牛津大学出版社，1986。[Rell–69] F. Rellich，特征值问题的微扰理论。Gordon and Breach，1969。[Serr–10] D. Serre，矩阵：理论与应用。第二版。《数学研究生教材》第216卷，Springer，2010 [第一版 2001]。[Texi–18] B. Texier，基本矩阵微扰理论。《数学教学》64（2018），第3–4期，249–263。[vdWa–33] B.L. van der Waerden，半单李群的连续性定理。《数学杂志》36（1933），第1期，780–786。

Pierre de la Harpe, Section de mathématiques, Université de Genève,Uni Dufour, 24 rue du Général Dufour, Case postale 64, CH–1211 Genève 4.电子邮件地址: Pierre.delaHarpe@unige.ch