arXiv:2301.03521v1 [math.SP] 9 Jan 2023

不具备唯一延拓性质的常微分方程一阶系统的格林函数

STEVEN REDOLFI 和 RUDI WEIKARD

Abstract. 本文是对微分方程 $Ju' + qu = wf$ 在实区间（a, b）上相关谱理论的一项贡献，其中 J 是常数可逆斜厄米矩阵，而 q 和 w 是元素为零阶分布的矩阵，且 q 厄米、 w 非负。在这些假设下，可能无法将一个点处的解唯一延拓到另一个点，因此标准谱理论工具的效用会受到限制。尽管如此，我们仍能描述与 $Ju' + qu = wf$ 相关的极大关系的对称限制，并证明即使解的唯一延拓失败，自伴关系的格林函数依然存在。

1. 引言

本文是对以下微分方程谱理论的一项贡献

$$Ju' + qu = wf$$

定义在实区间（a， b）上，其中 J 是常数、可逆且斜厄米的$n \times n$矩阵，而矩阵 q 和 w 的元素是零阶分布[1]，其中 q 厄米且 w 非负。Ghatasheh 和 Weikard [7] 在初值问题具有唯一平衡[2] 解且解属于局部有界变差函数空间这一附加假设下研究了该方程。

方程 $Ju' + qu = wf$ 在系数 q 和 w 局部可积时，当然已受到许多人的研究。在这种情况下，初值问题总有唯一解。当由 q 或 w 诱导的测度具有离散分量时，情况则未必如此。据信，带测度系数的方程最早于 1952 年被研究，当时 Krein [8] 对振动弦进行了建模。1964 年，Atkinson [2] 提出将微分方程和差分方程统一处理，把它们写成积分方程组，并将其中的积分视为矩阵值黎曼–斯蒂尔杰斯积分。Atkinson 解释说，点质量的存在可能会阻碍解在这些点处的延拓，并提出了一个避免这一问题的条件，不过该条件更

Date: 2022 年 5 月 11 日。本文是发表于 *I*ntegral Equations and Operator Theory 的一篇文章的预印本，该文可在线获取，网址为 https://doi.org/10.1007/s00020-022-02703-6。©2022。本手稿版本依据知识共享署名-非商业性使用-禁止演绎 4.0 国际许可协议 http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/提供。[1]回顾一下，零阶分布是局部有界变差函数的分布导数，因此在（a， b）的紧子区间上可以视为测度。为简便起见，下文有时用“测度”一词代替“零阶分布”。局部有界变差函数若在任一点的函数值等于该点左极限和右极限的平均值，则称为平衡函数。

比 [7]中提出的条件限制更多。1999 年，Savchuk 和 Shkalikov [10] 研究了势函数属于 Sobolev 空间 W^{-1}的薛定谔方程，2 loc 。他们的论文影响深远，推动了许多后续研究。尽管如此，Eckhardt 等人[5] 于 2013 年证明，借助准导数，或者等价地，将方程写成方程组，无须离开局部可积系数的范畴也能进行处理。同年，Eckhardt 和 Teschl [6]研究了 2×2系统，其对角矩阵为测度值矩阵 q 和 w，并且基本上要求满足 Atkinson 条件。

关于该主题历史的更详尽介绍见 [7]。上述提到的论文[5] 和 [6], 也可作为了解这段历史的极佳资料来源，只是侧重点或许有所不同。

一阶方程组的一个特点是，通常它们表示为线性关系，而非线性算子。线性关系的谱理论已发展成熟，其研究由 Arens [1], 开创；另见 Orcutt [9], 和 Bennewitz [3]。对我们而言最重要的结果也在 [7]的附录 B 中有所综述。

当某个 $x \in (a,b)$处的矩阵 $Ju'+qu=wf$不可逆时， $Ju'+qu=wf$的初值问题的解的存在性或唯一性便无法保证：

$$B_\pm(x,0) = J \pm \frac{1}{2}\Delta_q(x)$$

这里，当 Q 表示 q的一个原函数时， $\Delta_q(x) = Q^+(x)-Q^-(x)$。等价地， $\Delta_q(x) = dQ(\{x\})$，其中 dQ 是由 q（局部）生成的测度。在假设解满足唯一延拓性质的条件下，Ghatasheh 和 Weikard 定义了与微分方程 $Ju' + qu = wf$ 相关的极大关系 $T_{\max}$ 和极小关系 $T_{\min}$，并证明 $T_{\max}$是 $T_{\min}$的伴随。他们借助边界条件刻画了 $T_{\max}$的自伴限制（若存在），并证明其预解式可表示为积分算子，即任何此类自伴关系 T都存在格林函数。在更严格的条件下，他们还证明存在一个可将 T 对角化的傅里叶变换。

Campbell、Nguyen 和 Weikard [4] 定义了极大关系和极小关系，并证明了 $T_{\max} = T^*_{\min}$ 无需假设解具有唯一延拓性质。我们的目标是在此基础上进一步发展他们的思路。具体而言，尽管方程 $Ju' + qu = w(\lambda u + f)$ 可能有无穷多个线性无关的解，但亏指数（即 $Ju' + qu = \pm iwu$ 中范数有限且为正的线性无关解的数目）仍由 n（即系统的阶数）所界定。我们证明， $T_{\max}$的对称限制，尤其是自伴限制，仍可通过施加边界条件来给出；此外，我们还通过证明格林函数的存在性，说明自伴限制的预解式是积分算子。

我们暂不探讨傅里叶变换和特征函数展开的问题，但希望在今后的工作中再回到这一问题。

本文的内容安排如下。在第2 节中，我们回顾初值问题的解何时满足存在唯一性，并考察导致问题的那些 $x \in (a,\ b)$和 $\lambda \in \mathbb{C}$ 。接着，在第3 节中，我们讨论特殊情况下微分方程的解流形，其中 a 和 b 是正则端点。这些结果为第4 节研究极小关系及其对称扩张的亏指数

提供了依据，但不假设 a 和 b 是正则端点。在第6 节证明极大关系的自伴限制存在格林函数之前，我们先在第5节讨论非平凡零范数解所起的作用。

我们再简要说明一下记号。 $\mathcal{D}'^0((a,b))$ 是零阶分布空间，也就是局部有界变差函数的分布导数所构成的空间。任意局部有界变差函数 u 都有左极限和右极限，分别记为 u^- 和 u^+。此外，若 u 满足 $u = u^\# = (u^+ + u^-)/2$，则称其为平衡函数。定义在 (a,b) 上的有界变差平衡函数空间记为 $\mathrm{BV}^\#((a,b))$，而 $\mathrm{BV}^\#\,\mathrm{loc}((a,b))$ 表示局部有界变差平衡函数空间。我们用 $\mathbb{I}$ 表示适当阶数的单位矩阵，上标 $^\top$ 和 * 分别表示转置和伴随。希尔伯特空间中两个仅交于零向量的闭子空间 S 和 T 的和（即它们的直和）记为 $S \uplus T$；若 S 和 T 还彼此正交，则可用 $\oplus$ 代替 $\uplus$。希尔伯特空间 H 的子空间 S 的正交补记为 $H \ominus S$ 或 $S^\perp$。对于 c_1, ..., $c_N \in \mathbb{C}^n$，我们将列向量 $(c_1^\top, ..., c_N^\top)^\top \in \mathbb{C}^{nN}$ 简记为 $(c_1, ..., c_N)^\diamond$。

2. Preliminaries

本文中我们始终假设以下假设成立。

假设 2.1. J 是一个常数、可逆的斜厄米 $n \times n$矩阵。 q 和 w 均属于 $\mathcal{D}'^0((a,b))^{n\times n}$，$w$ 是非负且厄米的。

由于 w 是非负的，因此它在(a,b)上诱导出一个正测度。我们将满足 $\int f^* w f < \infty$ 的函数 f 所在的空间记为 $\mathcal{L}^2(w)$。此空间允许定义半内积 $\langle f, g\rangle = \int f^* w g$（注意， $\langle f, f\rangle$可以为 0，而f 不必为 0）。

考虑微分方程

$$Ju' + (q - \lambda w)u = wf \tag{2.1}$$

其中 λ 是一个复参数， f 是 $\mathcal{L}^2$（w）中的一个元素。后一条件保证 wf 属于 $\mathcal{D}'^0$（（a， b））^{n}。我们将在 $\mathrm{BV}^\#{}_{\mathrm{loc}}$（（$a$， b））^{n}中寻找解。在这种情况下，式（2.1）中的每一项都是 0 阶分布，因此该方程的表达是有意义的。

若存在一点$c \in$ （a,b），使得 q 和 w 的左连续原函数 Q 和 W 在（a,c）上有界变差，则称点 a 是 $Ju' + qu = wf$的正则端点。在这种情况下，可以将 q 和 w 视为（a,c）上的有限测度。类似地，若 Q 和 W 在（c,b）上有界变差，则称 b 是正则的。若端点不是正则的，则称其为奇异端点。毫不意外，当端点为正则端点时，我们的问题研究起来较为简单，因此我们将利用这一点。

尽管我们先前贬低了初值问题解的存在唯一性定理，但它仍然发挥着关键作用。下述定理证明见 [7]。

定理 2.2. 假设 $r \in \mathcal{D}'^0((a,b))^{n\times n}$, $g \in \mathcal{D}'^0((a,b))^n$ ，并且矩阵 $\mathbb{I} \pm \Delta_r(x)/2$ 对所有 $x \in (a,b)$ 都可逆。设 x_0 是 (a,b) 中的一点。则初值问题 $u' = ru + g$, $u(x_0) = u_0 \in \mathbb{C}^n$ 有唯一的平衡解 $u \in \mathrm{BV}^\#{}_{\text{局部}}((a,b))^n$。

如果 a 是正则端点，我们可以在 a 处给出初始条件（针对 u^+）。类似地，如果 b 正则，我们可以指定 $u^-(b)$ 作为初始条件。

现在假设 u 是方程（2.1）的一个解。将该方程任一侧视为测度（限制在 (a,b) 的某个紧子集上），在单点集 $\{x\}$处取值可得

$$J(u^+(x) - u^-(x)) + \Delta_{q-\lambda w}(x)u^{\#}(x) = \Delta_w(x)f(x)$$

或者，等价地，

$$B_+(x,\lambda)u^+(x) - B_-(x,\lambda)u^-(x) = \Delta_w(x)f(x) \tag{2.2}$$

当我们定义

$$B_\pm(x,\lambda) = J \pm \frac{1}{2}\big(\Delta_q(x) - \lambda\Delta_w(x)\big).$$

注意，若 $B_+(x,\lambda)$ 不可逆，则可能出现以下两种情况之一：(i) 在 (a,x) 上给出的解可能无法在 (x,b) 上存在；或 (ii) 将 (a,x) 上的一个解延续到 (x,b) 上有无穷多种方式。当然，若 $B_-(x,\lambda)$ 不可逆，也有类似的结论。

现在我们来考察一对 (x,λ) 会导致此类问题的情形。定义集合 $\Lambda_x = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(B_+(x,\lambda))\det(B_-(x,\lambda)) = 0\}$ 以及 $\Xi_\lambda = \{x \in (a,b) : \det(B_+(x,\lambda))\det(B_-(x,\lambda)) = 0\}$。首先注意，由于 $B_-(x,\lambda) = -B_+(x,\overline{\lambda})^*$，我们有 $\Xi_\lambda = \Xi_{\overline{\lambda}}$，并且每个 Λ_x 都关于实轴对称。此外，除非 $\Delta_q(x)$ 和 $\Delta_w(x)$ 中至少有一个不等于 0，否则 Λ_x 为空，因此除可数多个 x 外均如此。接下来，我们声称，只要 Λ_x 缺少一个点，它就是有限的。为此，假设 $B_+(x,\lambda_0)$ 可逆且 $\lambda \neq \lambda_0$。由于

$$B_+(x,\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)B_+(x,\lambda_0)\big(\frac{1}{2}B_+(x,\lambda_0)^{-1}\Delta_w(x) - 1/(\lambda - \lambda_0)\big)$$

我们看到，只有当 $1/(\lambda-\lambda_0)$ 是某个$n\times n$-矩阵的特征值时，$B_+(x,\lambda)$ 才不可逆。当然，B_- 也有类似的结论，这就证明了我们的断言。

因此，最糟糕的点 x，也就是 $\Lambda_x = \mathbb{C}$ 的点，包含于 Ξ_0。这里我们希望去掉 $\Xi_0 = \emptyset$ 中提出的假设[7]。在 (a,b) 的任意子区间上，只要 q 产生有限测度，我们就能发现 $\sum_{k=1}^{\infty}\|\Delta_q(x_k)\|$ 必须是有限的，其中 $k \mapsto x_k$ 是该区间内互不相同的点组成的序列。由此可知，Ξ_0 是离散集。类似地可以证明，对于任意固定的复数λ，集合 Ξ_λ 是离散的。

引理 2.3. 设 $[s,t] \subset (a,b)$ 和 $(s,t) \cap \Xi_0 = \emptyset$。那么我们有 $\Lambda_{(s,t)} = \bigcup_{x\in(s,t)}\Lambda_x$ 是实数集的离散子集。

证明。满足 $\|J^{-1}\Delta_q(x)\| > 1$ 的点 x 只有有限个，其中 $x \in (s,t)$。利用诺伊曼级数可知，只有在这些点处，$B_+(x,0)^{-1}$ 的范数才可能大于 $2\|J^{-1}\|$。因此存在一个正数 C，使得对所有 $x \in (s,t)$，$\|B_+(x,0)^{-1}\| \leq C$。现在假设 $B_+(x,\lambda)$ 不可逆，且 $|\lambda| \leq R$。那么 $1/\lambda$ 是 $\frac{1}{2}B_+(x,0)^{-1}\Delta_w(x)$ 的特征值。这要求 $\|\Delta_w(x)\| \geq 2/(RC)$，因此这种情况只会在有限个 $x \in (s,t)$ 处发生。由于对 B_- 也可以进行类似论证，$\bigcup_{x\in(s,t)}\Lambda_x$ 中位于以 0 为中心、半径为 R 的圆盘内的点必定有限。□

我们指出，当 q 和 w 的某个原函数仅局部具有有界变差时，即使每个 Λ_x 都是有限的，集合 $\bigcup_{x\in(a,\ b)}\Lambda_x$ 也未必是离散的。

定理 2.4. 设 $[s,t] \subset (a,b)$ 和 $(s,t) \cap \Xi_0 = \emptyset$。若 $u_0 \in \mathbb{C}^n$ 且 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_{(s,t)}$，则初值问题 $Ju' + qu = \lambda wu$, $u^+(s) = u_0$ 在 (s,t) 中有唯一的平衡解。此外，对于 $x \in (s,t)$，$u(x,\cdot)$ 以及 $u^-(t,\cdot)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \Lambda_{(s,t)}$ 上是解析的，在 $\mathbb{C}$ 上是亚纯的。当初始条件设在 t 处时，也有类似结论。

证明。第一个断言直接由定理 2.2得出。当 $x \in (s, t)$ 时，$u(x, \cdot)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \Lambda_{(s,t)}$ 中的解析性已在 [7]的第 2.3 节中证明；这是一个开集。若将 q 和 w 在 $[t,b)$ 上设为 0，则不会改变（s, t）上的解。修改后的问题在 t 处的解是解析的，并且与 $u^-(t, \cdot)$ 相同，由此证明了其解析性。剩下要证明的是，一个点$\lambda_0 \in \Lambda_{(s,t)}$ 至多只能产生极点。

我们已经知道，在（s,t）中只有有限多个点 x 使得$B_\pm(x,\lambda_0)$不可逆。假设 x' 和 x'' 是两个相邻的此类点。若已知（s,x'）上的解，且 $u^-(x',\cdot)$在 λ_0处至多有一个极点，那么（x',x''）上的解便由初始值确定

$$u^+(x',\lambda) = B_+(x',\lambda)^{-1} B_-(x',\lambda) u^-(x',\lambda)$$

它在 λ_0 处至多也有一个极点，因为 $B_+(x',\lambda)^{-1}$ 具有这一性质。对于 $x \in (s,t)$，现在可由归纳法得出该结论。为了证明 $u^-(t,\cdot)$ 也是亚纯的，我们按之前的方法进行，并修改 q 和 w 在 $[t,b)$ 上的取值。□

3. Solving the differential equation

本节的目标是在加强的假设下，考察微分方程 $Ju' + (q - \lambda w)u = wf$ 在 (a,b) 上的解集。

假设 3.1。除了假设 2.1 之外，我们还要求 a 和 b 是 $Ju' + qu = wf$的正则端点。

此外，给定划分

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N < x_{N+1} = b \tag{3.1}$$

对于 (a,b) 的划分，我们要求 $\Xi_0 \subset \{x_1, \ldots, x_N\}$。接下来只考虑满足以下条件的 λ：除非 x 属于 $\{x_1, \ldots, x_N\}$，否则 $B_+(x,\lambda)$ 和 $B_-(x,\lambda)$ 均可逆。

本节中始终采用这一假设，但在后文中仅在明确提及时采用。我们强调，当 a 和 b 正则时，Ξ_0 有限。此外，允许的 λ 集合（记作 Ω_0, ）关于实轴对称，且仅避开一个离散集。

在每个区间（x_j, x_{j+1}）上，我们令 $U_j(\cdot, \lambda)$ 为齐次微分方程 $Ju' + (q - \lambda w)u = 0$ 的一个平衡解基本矩阵，使得 $\lim_{x \downarrow x_j} U_j(x, \lambda) = \mathbb{I}$。根据定理 2.2，这些基本矩阵的存在性得到保证。非齐次方程$Ju' + (q - \lambda w)u = wf$ 在（x_j, x_{j+1}）上的一般平衡解 u 根据引理 3.3（见 [7],

$$u^-(x) = U_j^-(x,\lambda)\big(c_j + J^{-1} \int_{(x_j,x)} U_j(\cdot,\overline{\lambda})^* wf\big)$$

对任意 $c_j \in \mathbb{C}^n$。定义

$$U_j(x_{j+1},\lambda) = \lim_{x \uparrow x_{j+1}} U_j(x,\lambda) \quad \text{and} \quad I_j(f,\lambda) = \int_{(x_j,x_{j+1})} U_j(\cdot,\overline{\lambda})^* wf.$$

利用 $u^+(x_j) = c_j$和 $u^-(x_j) = U_{j-1}(x_j,\lambda)(c_{j-1} + J^{-1}I_{j-1}(f,\lambda))$ 代入方程（2.2）可得

$$(-B_-(x_j,\lambda)U_{j-1}(x_j,\lambda), B_+(x_j,\lambda))\begin{pmatrix} c_{j-1} \\ c_j \end{pmatrix} = \Delta_w(x_j)f(x_j) + B_-(x_j,\lambda)U_{j-1}(x_j,\lambda)J^{-1}I_{j-1}(f,\lambda).$$

我们需要同时考虑关于 $j = 1$、...、 N 的这些方程。这将得到如下系统

$$\mathbb{B}(\lambda)\tilde{u} = \mathcal{F}_0(f,\lambda) \tag{3.2}$$

其中 $\tilde{u} = (c_0, ..., c_N)^\diamond$, $\mathbb{B}(\lambda)$（将在下文给出）, 属于 $\mathbb{C}^{nN\times n(N+1)}$; 而$\mathcal{F}_0(f,\lambda)$ 属于 $\mathbb{C}^{nN}$。 $\mathbb{B}$ 的双对角分块矩阵结构表明, 应引入矩阵 $E_\top$ 和 $E_\perp$, 它们分别从其定义域 $\mathbb{C}^{n(N+1)}$ 中的向量去掉第一个和最后一个n 分量。若再定义分块矩阵

$$\mathcal{B}(\lambda) = \operatorname{diag}(B_+(x_1,\lambda), ..., B_+(x_N,\lambda)),$$
$$\mathcal{U}(\lambda) = \operatorname{diag}(U_0(x_1,\lambda), ..., U_{N-1}(x_N,\lambda)),$$

以及 $\mathcal{J} = \operatorname{diag}(J, ..., J)$, 并注意到

$$\mathcal{B}(\overline{\lambda})^* = \operatorname{diag}(-B_-(x_1,\lambda), ..., -B_-(x_N,\lambda)),$$

我们得到

$$\mathbb{B}(\lambda) = \mathcal{B}(\overline{\lambda})^*\mathcal{U}(\lambda)E_\perp + \mathcal{B}(\lambda)E_\top. \tag{3.3}$$

向量 $\mathcal{F}_0(f,\lambda)$ 由下式给出

$$\mathcal{F}_0(f,\lambda) = \mathcal{R}(f) - \mathcal{B}(\overline{\lambda})^*\mathcal{U}(\lambda)\mathcal{J}^{-1}\mathcal{I}(f,\lambda)$$

其中 $\mathcal{R}(f) = ((\Delta_w f)(x_1) ..., (\Delta_w f)(x_N))^\diamond$ 以及 $\mathcal{I}(f,\lambda) = (I_0(f,\lambda) ..., I_{N-1}(f,\lambda))^\diamond$。

现在我们有以下定理。

定理 3.2. 微分方程 $Ju' + (q - \lambda w)u = wf$ 在 (a,b) 上有解 u, 当且仅当 $\tilde{u} = (u^+(x_0) ..., u^+(x_N))^\diamond$ 是方程 (3.2) 的一个解。特别地, 在齐次情形下, 即 $f = 0$, 解空间的维数为 $n(N+1) - \operatorname{rk}\mathbb{B}(\lambda) \geq n$。

注意, 当 $N = 1$ 时, $\operatorname{rk}\mathbb{B}(\lambda) = n$, 因此 $Ju' + (q - \lambda w)u = 0$ 的解空间恰好是 n 维的。然而, 对于 $N = 2$, 考虑例子 $(a,b) = \mathbb{R}$, $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)(\delta_1 - \delta_2)$, $w = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)(\delta_1 + \delta_2)$, 其中$\delta_k$ 是集中在 $\{k\}$ 上的狄拉克点测度。这表明, $Ju' + (q - \lambda w)u = 0$ 的解空间维数可能严格大于 n。

接下来, 我们研究齐次方程 $Ju' + (q - \lambda w)u = 0$ 的解 u 在点 x_0、...、 x_N 处的右极限（由向量 $\tilde{u}$ 给出）与向量 $\hat{u} = (u(x_1) ..., u(x_N))^\diamond$ 之间的联系。我们有 $\hat{u} = \mathbb{D}(\lambda)\tilde{u}$, 其中

$$\mathbb{D}(\lambda) = \frac{1}{2}(\mathcal{U}(\lambda)E_\perp + E_\top) \tag{3.4}$$

仍然是一个双对角分块矩阵。如果 $N \geq 2$, 我们还将引入矩阵$\mathbb{B}_m(\lambda)$ 和 $\mathbb{D}_m(\lambda)$, 它们分别由从$\mathbb{B}(\lambda)$ 和 $\mathbb{D}(\lambda)$ 中删去首列和末尾 n 列得到。如果 $N = 1$, 我们应将 $B_m(\lambda)$ 和 $D_m(\lambda)$ 视为从平凡向量空间映射到 $\mathbb{C}^n$的映射。它们的伴随算子是从 $\mathbb{C}^n$ 到 $\{0\}$ 的映射。按照这种理解, 以下结果对 $N = 1$ 也成立, 尽管此时会涉及没有行或列的“矩阵”。

引理 3.3. $\mathbb{D}(\overline{\lambda})^*\mathbb{B}(\lambda) - \mathbb{B}(\overline{\lambda})^*\mathbb{D}(\lambda) = \mathrm{diag}(-J, 0, ..., 0, J)$，且 $\mathbb{D}_m(\overline{\lambda})^*\mathbb{B}(\lambda) - \mathbb{B}_m(\overline{\lambda})^*\mathbb{D}(\lambda) = 0$。

证明。这是因为 $\mathcal{U}(\overline{\lambda})^*\mathcal{J}\mathcal{U}(\lambda) = \mathcal{J}$ 而这又由 [7]中的引理 3.2 得出。□

引理 3.4。映射 $v \mapsto \mathbb{B}(\lambda)v$ 限制在 $\ker\mathbb{D}(\lambda)$ 上时，是到 $\ker\mathbb{D}_m(\overline{\lambda})^*$ 的双射。类似地，映射 $v \mapsto \mathbb{D}(\lambda)v$ 限制在 $\ker\ \mathbb{B}(\lambda)$ 上时，是到 $\ker\ \mathbb{B}_m(\overline{\lambda})^*$ 的双射。特别地，$\dim\ker\ \mathbb{D}(\lambda) = \dim\ker\ \mathbb{D}_m(\overline{\lambda})^*$，且 $\dim\ker\mathbb{B}(\lambda) = \dim\ker\mathbb{B}_m(\overline{\lambda})^*$。

证明。恒等式 $\mathbb{D}_m(\overline{\lambda})^*\mathbb{B}(\lambda) - \mathbb{B}_m(\overline{\lambda})^*\mathbb{D}(\lambda) = 0$ 表明，$\mathbb{B}(\lambda)$ 将 $\ker\ \mathbb{D}(\lambda)$ 映射到 $\ker\ \mathbb{D}_m(\overline{\lambda})^*$，并且 $\mathbb{D}(\lambda)$ 将 $\ker\mathbb{B}(\lambda)$ 映射到 $\ker\ \mathbb{B}_m(\overline{\lambda})^*$。

若 $v \in$ 核 $\mathbb{B}(\lambda) \cap$ 核 $\mathbb{D}(\lambda)$ 可得 $E_\perp v = E_\top v = 0$ 利用 和 的定义（3.3）和（3.4），以及 $\mathcal{B}(\lambda) - \mathcal{B}(\overline{\lambda})^* = 2\mathcal{J}$ 这一事实。显然，这意味着 $v = 0$，从而说明 $\mathbb{B}(\lambda)|_{\ker\mathbb{D}(\lambda)}$ 和 $\mathbb{D}(\lambda)|_{\ker\mathbb{B}(\lambda)}$ 都具有单射性。

显然，$\mathbb{D}(\lambda)$ 和 $\mathbb{D}_m(\overline{\lambda})^*$ 的主对角线上都有可逆矩阵，因此它们都是满秩的。因此，秩-零化度定理表明，它们的核的维数都是 n。这证明了 $\mathbb{B}(\lambda)|_{\ker\mathbb{D}(\lambda)}$ 的满射性。

最后，假设 $v \in$ 核 $\mathbb{B}_m(\overline{\lambda})^*$。那么，对于某个 $x \in \mathbb{C}^{n(N+1)}$，有 $v = \mathbb{D}(\lambda)x$，这意味着 $0 = \mathbb{B}_m(\overline{\lambda})^*\mathbb{D}(\lambda)x = \mathbb{D}_m(\overline{\lambda})^*\mathbb{B}(\lambda)x$。证明的第一部分表明，存在一个 $y \in$ 核 $\mathbb{D}(\lambda)$，使得 $\mathbb{B}(\lambda)y = \mathbb{B}(\lambda)x$。因此，$v = \mathbb{D}(\lambda)(x-y)$，其中 $x - y \in$ 核 $\mathbb{B}(\lambda)$。□

下述定理建立了微分方程 $Ju' + (q - \lambda w)u = 0$ 的解与 $\ker\mathbb{B}_m(\overline{\lambda})^*$ 中元素之间的联系。

定理 3.5. 若 u 是方程 $Ju' + (q - \lambda w)u = 0$ 在 (a, b) 上的一个解，则 $\hat{}u = (u(x_1)\ ...,\ u(x_N))^\diamond$ 属于 $\ker\ \mathbb{B}_m(\overline{\lambda})^*$。此外，若 $u^+(a) = u^-(b) = 0$，则 $\hat{}u \in \ker\mathbb{B}(\overline{\lambda})^*$（$\ker\ \mathbb{B}_m(\overline{\lambda})^*$ 的一个子空间）。

反过来，若 $\hat{}u \in \ker\mathbb{B}_m(\overline{\lambda})^*$，则 $Ju' + (q - \lambda w)u = 0$ 在 (a, b) 上有唯一解 u，使得 $(u(x_1)\ ...,\ u(x_N))^\diamond = \hat{}u$。事实上，若 $\hat{}u \in \ker\ \mathbb{B}(\overline{\lambda})^*$，还可得 $u^+(a) = u^-(b) = 0$。

我们强调，当 $u^+(a) = u^-(b) = 0$ 时，$\mathrm{supp}\ u \subset [x_1, x_N]$。

证明。若 u 是 $Ju' + (q - \lambda w)u = 0$ 的解，则由定理 3.2，$\tilde{u} \in \ker\mathbb{B}(\lambda)$。于是，引理 3.4 表明，$\hat{}u = \mathbb{D}(\lambda)\tilde{u}$ 属于 $\ker\mathbb{B}_m(\overline{\lambda})^*$。若 $u^+(a) = u^-(b) = 0$，则由引理 3.3 得到 $0 = \mathbb{B}(\overline{\lambda})^*\mathbb{D}(\lambda)\tilde{u} = \mathbb{B}(\overline{\lambda})^*\hat{}u$。

反过来，假设 $\hat{}u \in \ker\mathbb{B}_m(\overline{\lambda})^* = \mathbb{D}(\lambda)(\ker\ \mathbb{B}(\lambda))$。那么存在唯一的向量 $\tilde{u} \in \ker\mathbb{B}(\lambda)$，使得 $\hat{}u = \mathbb{D}(\lambda)\tilde{u}$；由此又定义了 $Ju' + (q - \lambda w)u = 0$ 的唯一解 u，满足 $(u(x_1)\ ...,\ u(x_N))^\diamond = \hat{}u$。若 $\hat{}u \in \ker\ \mathbb{B}(\overline{\lambda})^*$，则根据引理 3.3，$\mathrm{diag}(-J, 0, ..., 0, J)\tilde{u} = 0$，这表明 $u^+(a) = u^-(b) = 0$。□

给定代数系统 $Ax = b$，我们知道，只有当 $b \in \mathrm{ran}\,A = (\ker\ A^*)^\perp$ 时，才存在解。对于具有可积系数 q 和 w 的微分方程 $Ju' + (q - \lambda w)u = wf$，解的唯一延拓性质导出了常数变易公式，进而保证了任意非齐次项 f（在合理范围内）都存在解。在当前情形下，

然而，存在性问题浮现出来了，因此我们现在着手给出 f 存在解的充要条件，其思路与线性代数相同。

引理 3.6. 若 $\tilde{v} \in \ker \mathbb{B}(\overline{\lambda})$ 且 $\hat{v} = \mathbb{D}(\overline{\lambda})\tilde{v}$，则

$$\tilde{v}^* E_\perp^* = -\hat{v}^* \mathcal{B}(\overline{\lambda})^* \mathcal{U}(\lambda) \mathcal{J}^{-1} \quad and \quad \tilde{v}^* E_\top^* = \hat{v}^* \mathcal{B}(\lambda) \mathcal{J}^{-1}.$$

此外，若 $f \in \mathcal{L}^2(w)$ 且 $Jv' + (q - \overline{\lambda} w)v = 0$，则

$$\int v^* w f = \hat{v}^* \mathcal{F}_0(f, \lambda) + \hat{v}^* \mathcal{B}(\lambda) \mathcal{J}^{-1} \tilde{\mathcal{I}}(f, \lambda) = \hat{v}^* \mathcal{F}_0(f, \lambda) + \tilde{v}^* E_\top^* \tilde{\mathcal{I}}(f, \lambda)$$

其中 $(v(x_1), ..., v(x_N))^\diamond = \hat{v} = \mathbb{D}(\overline{\lambda})\tilde{v}$ 且 $\tilde{\mathcal{I}}(f, \lambda) = (0, ..., 0, I_N(f, \lambda))^\diamond \in \mathbb{C}^{nN}$。

证明。 根据 3.3 和 3.4 中 $\mathbb{B}$ 和 $\mathbb{D}$ 的定义，以及 $\mathcal{B}(\lambda) - \mathcal{B}(\overline{\lambda})^* = 2\mathcal{J}$ 和 $\mathcal{U}(\lambda)^* \mathcal{J} \mathcal{U}(\overline{\lambda}) = \mathcal{J}$，我们得到 $\mathbb{B}(\overline{\lambda})\tilde{v} = 0$ 蕴含

$$\mathcal{B}(\overline{\lambda})\mathbb{D}(\overline{\lambda})\tilde{v} = \mathcal{U}(\lambda)^{*-1} \mathcal{J} E_\perp \tilde{v} \quad \text{and} \quad \mathcal{B}(\lambda)^* \mathbb{D}(\overline{\lambda})\tilde{v} = -\mathcal{J} E_\top \tilde{v}.$$

取伴随算子可得第一个结论，因为 $\hat{v} = \mathbb{D}(\overline{\lambda})\tilde{v}$。

第二个断言是由此立即得到的，因为

$$\begin{aligned}
\int v^* w f &= \hat{v}^* \mathcal{R}(f) + \tilde{v}^* (I_0(f, \lambda), ..., I_N(f, \lambda))^\diamond \\
&= \hat{v}^* \mathcal{R}(f) + \tilde{v}^* E_\perp^* \mathcal{I}(f, \lambda) + \tilde{v}^* E_\top^* \tilde{\mathcal{I}}(f, \lambda) \\
&= \hat{v}^* \mathcal{R}(f) - \hat{v}^* \mathcal{B}(\overline{\lambda})^* \mathcal{U}(\lambda) \mathcal{J}^{-1} \mathcal{I}(f, \lambda) + \hat{v}^* \mathcal{B}(\lambda) \mathcal{J}^{-1} \tilde{\mathcal{I}}(f, \lambda) \\
&= \hat{v}^* \mathcal{F}_0(f, \lambda) + \hat{v}^* \mathcal{B}(\lambda) \mathcal{J}^{-1} \tilde{\mathcal{I}}(f, \lambda).
\end{aligned}$$

□

定理 3.7. 微分方程 $Ju' + (q - \lambda w)u = wf$ 在区间 (a, b) 上有解，当且仅当 $\int v^* w f = 0$ 对于每个在 a 处为零且满足 b的方程 $Jv' + (q - \overline{\lambda} w)v = 0$ 的解 v。

证明. 根据定理 3.2，解 u 存在，当且仅当系统 (3.2) 有解 $\tilde{u} = (u^+(x_0), ..., u^+(x_N))^\diamond$。而这又当且仅当 $\mathcal{F}_0(f, \lambda) \in \operatorname{ran} \mathbb{B}(\lambda) = (\ker \mathbb{B}(\lambda)^*)^\perp$。

根据定理 3.5，微分方程 $Jv' + (q - \overline{\lambda} w)v = 0$ 在 a 和 b 处为零的解，与 $\ker \mathbb{B}(\lambda)^*$ 中的元素一一对应。由于 $v^+(x_N) = 0$，我们有 $\tilde{v}^* E_\top^* \tilde{\mathcal{I}}(f, \lambda) = 0$，于是根据引理 3.6，得到 $\hat{v}^* \mathcal{F}_0(f, \lambda) = \int v^* w f$。□

在解具有唯一延拓的情况下，v 在 a处消失或在 b 处消失的条件当然意味着 $v = 0$。因此，对于任意 $f \in \mathcal{L}^2(w)$，$Ju' + (q - \lambda w)u = wf$ 都有一个解。于是，所有解都可通过加上 $Ju' + (q - \lambda w)u = 0$ 的通解得到，其维数为 $n(N + 1) - \operatorname{rk} \mathbb{B}(\lambda) \geq n$。

定理 3.8. 微分方程 $Ju' + (q - \lambda w)u = wf$ 在 (a, b) 上有一个解，该解在 a 和 b 处消失，当且仅当对于 $Jv' + (q - \overline{\lambda} w)v = 0$ 的每个解 v，都有 $\int v^* w f = 0$。

证明。 对于 u 在 a 和 b 处消失，要求 $u^+(x_0) = 0$ 以及 $u^+(x_N) = -J^{-1} I_N(f, \lambda)$。因此，系统（3.2）等价于

$$\mathbb{B}_m(\lambda)(c_1, ..., c_{N-1})^\diamond = \mathcal{F}_0(f, \lambda) + \mathcal{B}(\lambda) \mathcal{J}^{-1} \tilde{\mathcal{I}}(f, \lambda).$$

证明过程与定理 3.7 的证明类似。 □

我们通过“计数”来结束本节，考察 $Ju'+qu=\lambda wu$ 中不具有紧支撑的解。更准确地说，我们将确定所有 $Ju'+qu=\lambda wu$ 的解空间模去紧支撑解空间所得商空间的维数。定理3.5 表明，$Ju'+qu=\lambda wu$ 的所有解空间与 $\ker \mathbb{B}_m(\overline{\lambda})^*$ 一一对应，而 $Ju'+qu=\lambda wu$ 的紧支撑解空间与 $\ker \mathbb{B}(\overline{\lambda})^*$ 一一对应。因此，我们定义

$$\tilde{n}(\lambda)=\dim(\ker \mathbb{B}_m(\overline{\lambda})^*/\ker \mathbb{B}(\overline{\lambda})^*)=\dim\ker \mathbb{B}_m(\overline{\lambda})^*-\dim\ker \mathbb{B}(\overline{\lambda})^*.$$

引理 3.9. $\tilde{n}(\lambda)+\tilde{n}(\overline{\lambda})=2n$。

证明。由于 $\operatorname{rk}\mathbb{B}(\lambda)=\operatorname{rk}\mathbb{B}(\lambda)^*$，秩-零化度定理推出

$$\dim\ker \mathbb{B}(\lambda)=n(N+1)-\operatorname{rk}\mathbb{B}(\lambda)^*=n+\dim\ker \mathbb{B}(\lambda)^*.$$

因此，再利用关于 $\overline{\lambda}$ 的类似等式，

$$\dim\ker \mathbb{B}(\lambda)-\dim\ker \mathbb{B}(\lambda)^*+\dim\ker \mathbb{B}(\overline{\lambda})-\dim\ker \mathbb{B}(\overline{\lambda})^*=2n.$$

引理 3.4 表明 $\dim\ker \mathbb{B}(\lambda)=\dim\ker \mathbb{B}_m(\overline{\lambda})^*$ 从而得到所要证明的结论。 □

根据定理 2.4 我们知道，矩阵 $U_j(x_{j+1},\cdot)$ 在 $\mathbb{C}$上是亚纯的，其极点至多位于 Ω 的补集中的点$_0$。因此，$\mathbb{B}$ 的各个元素也都是亚纯函数。由于 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数构成一个域，因此存在一个˜具有亚纯元素的行阶梯矩阵 $\mathbb{B}$，使得 $\mathbb{B}\tilde{u}=0$ 与˜具有相同的解。$\mathbb{B}\tilde{u}=0$现在定义集合 Ω 为 Ω_0 去掉 $\mathbb{B}$ 的所有极点及其复共轭，再去掉其任一˜主元的零点及其复共轭所构成的集合 $\mathbb{B}$。

定理 3.10. 若 $\lambda\in\Omega$，则 $\dim\ker\mathbb{B}(\lambda)=\dim\ker\mathbb{B}(\overline{\lambda})$，且 $\tilde{n}(\lambda)=n$。

˜证明。由 Ω 的构造可知，若 $\lambda\in\Omega$，则 $\operatorname{rk}\mathbb{B}(\lambda)=\operatorname{rk}\mathbb{B}(\overline{\lambda})=\operatorname{rk}\mathbb{B}(\overline{\lambda})$。由于 $\tilde{n}(\lambda)=\dim\ker\mathbb{B}(\lambda)-\dim\ker\mathbb{B}(\overline{\lambda})^*=\dim\ker\mathbb{B}(\lambda)+n-\dim\ker\mathbb{B}(\overline{\lambda})$，我们得到 $\tilde{n}(\lambda)=n$。
□

4. 对极大关系 Tmax 的对称限制

给定一个微分方程 $Ju'+qu=wf$，现在我们定义与之相关的极小关系与极大关系。回顾一下，$\mathcal{L}^2(w)$ 是由满足 $\int f^*wf<\infty$ 的函数 f 构成的空间。首先我们定义

$$\mathcal{T}_{\max}=\{(u,f)\in\mathcal{L}^2(w)\times\mathcal{L}^2(w):u\in \mathrm{BV}^{\#}_{\mathrm{loc}}((a,b))^n, Ju'+qu=wf\}.$$

随后，当使用u'时，我们将始终默认假设 $u\in \mathrm{BV}^{\#}$ 局部$((a,b))^n$。接下来，令

$$\mathcal{T}_{\min}=\{(u,f)\in\mathcal{T}_{\max}:\operatorname{supp}u \text{ is compact in } (a,b)\}.$$

请注意，这些是由函数对构成的空间。为了运用泛函分析的力量，我们需要在希尔伯特空间中实现这些关系。因此，我们照常引入空间 $L^2(w)$，将其定义为 $\mathcal{L}^2(w)$ 对满足 $\|u\|^2=\int u^*wu=0$ 的所有 $u\in\mathcal{L}^2(w)$ 所成子空间取商。将与 u 对应的等价类记为 $[u]$ 后，我们现在定义

$$T_{\max}=\{([u],[f])\in L^2(w)\times L^2(w):(u,f)\in\mathcal{T}_{\max}\}$$

and

$$T_{\min} = \{([u],[f]) \in T_{\max} : (u,f) \in \mathcal{T}_{\min}\}.$$

这里（以及其他地方）我们宁可简洁，也不求精确：每当有一个属于 $T_{\max}$ 的函数对 $([u],[f])$ 时，我们就选取 u 和 f，使得 $(u,f) \in \mathcal{T}_{\max}$。

定义向量空间

$$\mathcal{L}_0 = \{u \in \mathrm{BV}^{\#}_{\mathrm{loc}}((a,b))^n : Ju' + qu = 0 \text{ and } \|u\| = 0\}.$$

在许多情况下，这个空间是平凡的，有些作者会将注意力限制在该空间为平凡空间的情形；这称为定性条件。不过，我们这里不这样做。注意，$\|u\| = 0$ 当且仅当 wu 是零分布。$\mathcal{L}_0$ 的重要性源于以下事实。假设 $([u], [f]) \in T_{\max}$，且存在 u、$v \in [u]$ 和 f、$g \in [f]$，使得 $Ju' + qu = wf$ 且 $Jv' + qv = wg$。那么，$J(u-v)' + q(u-v) = w(f-g) = 0$，并且 $w(u-v) = 0$，即 $u - v \in \mathcal{L}_0$。换言之，当非平凡空间 $\mathcal{L}_0$存在时，类 $[u]$ 有许多局部有界变差的代表元，它们满足给定类 $[f]$ 对应的微分方程（另一方面，$[f]$代表元的选择无关紧要）。在第5节中，我们将介绍一种以独特方式选取 $[u]$ 代表元的方法。

在 [4] 中已证明 $T_{\min}$ 是对称的，事实上 $T^*_{\min} = T_{\max}$。在这种情况下，冯·诺依曼定理众所周知是成立的。令 $D_\lambda = \{([u], \lambda[u]) \in T_{\max}\}$ 它表明

$$T_{\max} = \overline{T_{\min}} \uplus D_\lambda \uplus D_{\overline{\lambda}}$$

当 $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$。此外，当 $\lambda = \pm i$ 时，这些直和甚至是正交的。我们还知道，D_λ 的维数不会随着 λ 在上半平面或下半平面内变化而改变。数值 $n_\pm = \dim D_{\pm i}$ 称为 $T_{\min}$ 的亏指数，我们现在着手研究这些亏指数。

若 u 是 $Ju' + qu = \lambda wu$ 的一个紧支撑解，则 $(u, \lambda u) \in \mathcal{T}_{\min}$ 且 $([u], \lambda[u]) \in T_{\min} \cap D_\lambda$。若 λ 不是实数，则 $T_{\min} \cap D_\lambda$ 是平凡的，因此 $Ju' + qu = \lambda wu$ 的紧支撑解不会对相应的亏指数产生贡献。由定理3.10的推论可知，$T_{\min}$ 的亏指数不会超过 n，前提是 a 和 b 是正则端点。我们不单独陈述这一结果，因为它包含在下一定理关于一般情形的论述中。

因此，特别强调一下，以下我们允许 a 和 b 为正则端点或奇异端点。设 τ_k，$k \in \mathbb{Z}$ 是 (a,b) 中的严格递增序列，其仅有的极限点为 a 和 b，且 Ξ_0 中的所有点都属于τ_k。现在仅考虑区间 $I_k = (\tau_{-k}, \tau_k)$，我们对 $j = 0, \ldots, N+1 = 2k$ 定义 $x_j = \tau_{-k+j}$。然后可以引入第3节中的对象。为强调它们对 k 的依赖，我们将在这些对象上添加上标 (k)。于是，特别有矩阵 $\mathbb{B}^{(k)}$, $\mathbb{B}^{(k)}_m$以及允许值集合 $\Omega^{(k)}$（对应于 λ）。现在定义 $\Omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega^{(k)}$，并注意到 Ω 关于实轴对称，且从 $\mathbb{C}$中至多遗漏可数多个值。

现在固定一个非实数 $\lambda \in \Omega$。若 u 是 $Ju' + qu = \lambda wu$ 在 (a,b) 上的一个解，我们将其在区间 I_k 上的限制记为 $u^{(k)}$。我们感兴趣的是 X_k，即 $Ju' + qu = \lambda wu$ 在 I_k 上所有解对紧支撑解取商所得的商空间。若 u 是 $Ju' + qu = \lambda wu$ 在 I_k 上的一个解，我们将其在 X_k 中对应的等价类记为 $\lfloor u \rfloor_k$。$Ju' + qu = \lambda wu$ 在 I_k 上的一个紧支撑解 u 可通过在区间外取 0 延拓至整个 (a,b)，从而得到 $T_{\min} \cap D_\lambda$ 中的一个元素。这意味着，由于

虚部 $\lambda \neq 0$，因此 $\|u\|^2 = \int_{I_k} u^* w u = 0$，并且表明 X_k 是一个赋范空间，其范数定义为 $\|u\|_k^2 = \int_{I_k} u^* w u$。根据定理 3.5 商空间 X_k同构于 $\ker \mathbb{B}_m^{(k)}(\overline{\lambda})^* / \ker \mathbb{B}^{(k)}(\overline{\lambda})^*$，并且根据定理 3.10，其维数等于 n，因为 $\lambda \in \Omega \subset \Omega^{(k)}$。

定理 4.1. $T_{\min}$ 的亏指数小于或等于 n。

证明. 取一个非实数 $\lambda \in \Omega$。设 u_1，...，u_m 是 $Ju' + qu = \lambda w u$的解，且 $[u_1]$，...，$[u_m]$ 是 D_λ中的线性无关元素。下面将证明存在一个区间 $I_p = (\tau_{-p}, \tau_p)$，使得 $\lfloor u_1^{(p)} \rfloor_p$，...，$\lfloor u_m^{(p)} \rfloor_p$ 是 X_p中的线性无关元素。因此，$m \leq n$，即 X_p的维数。由于亏指数在任一半平面内都是常数，因此它们不可能大于 n。

现在我们将用归纳法证明 I_p 的存在。也就是说，我们证明，对于每个 $k \in \{1, ..., m\}$，都存在一个区间 I_{ℓ_k}，使得 u_1，...，u_k在 I_{ℓ_k}上的限制生成线性无关元素 $\lfloor u^{(\ell_k)}{}_1 \rfloor_{\ell_k}$，...，$\lfloor u^{(\ell_k)}{}_k \rfloor_{\ell_k}$，这些元素属于 X_{ℓ_k}。一旦完成这一步，我们就令 $p = \ell_m$。

假设 $k = 1$，并令 I_{ℓ_1} 为满足 $\|u^{(\ell_1)}{}_1\| > 0$的区间。根据上面的论证，我们知道 $u^{(\ell_1)}{}_1$ 在 I_{ℓ_1} 中不是紧支撑的，因此产生了 X_{ℓ_1}中的一个非零（从而也是线性无关的）元素。

现在假设我们已经对某个 $k < m$证明了我们的断言。如果 $\lfloor u^{(\ell_k)}{}_1 \rfloor_{\ell_k}$、...、$\lfloor u^{(\ell_k)}{}_{k+1} \rfloor_{\ell_k}$ 作为 X_{ℓ_k} 中的元素已经线性无关，我们就选取 $\ell_{k+1} = \ell_k$，归纳步骤即告完成。否则，存在唯一的复数 α_1、...、α_k，使得

$$\|(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k + u_{k+1})^{(\ell_k)}\|_{\ell_k} = 0.$$

然而，必定存在一个区间 $I_{\ell_{k+1}} \supset I_{\ell_k}$，使得

$$\|(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k + u_{k+1})^{(\ell_{k+1})}\|_{\ell_{k+1}} > 0$$

由于 $[u_1]$、...、$[u_{k+1}]$ 线性无关。由此可知，作为 $X_{\ell_{k+1}}$ 中的元素，向量 $\lfloor u^{(\ell_{k+1})}{}_1 \rfloor_{\ell_{k+1}}$、...、$\lfloor u^{(\ell_{k+1})}{}_{k+1} \rfloor_{\ell_{k+1}}$ 线性无关。在这种情况下，我们的归纳步骤也就完成了。□

推论 4.2. 若 a 和 b 正则，则 $n_+ = n_-$。

证明。取 Ω 中一个非实数 λ。由于 a 和 b 正则，集合 $\Xi_\lambda = \Xi_{\overline{\lambda}}$ 是有限的。因此，我们可以假设它包含于某个适当的 k 所对应的 $I_k = (\tau_{-k}, \tau_k)$ 中。于是，$\dim \ker \mathbb{B}^{(k)}(\lambda)$ 等于 $Ju' + qu = \lambda w u$ 的线性无关解的个数。定理 3.10 表明，$Ju' + qu = \overline{\lambda} w u$ 具有相同数量的线性无关解。这些解的范数均有限，但其中一些的范数可能为 0。现在注意，若 u 是 $Ju' + qu = \lambda w u$ 的一个范数为 0 的解，则有 $wu = 0$，因此 u 也是 $Ju' + qu = \overline{\lambda} w u$ 的一个解。因此 $n_+ = n_-$。□

如上所述，即使对于关系，冯·诺依曼定理也是众所周知的：$E^* = E \oplus D_i \oplus D_{-i}$ 当 E 是 $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ 中的闭对称关系时，$\mathcal{H}$ 是希尔伯特空间。在我们的情形中，如我们刚才所证明的，当 $d =$ 维数 $D_i \oplus D_{-i}$ 有限时，我们可以利用 [7] 中的定理 B.5，根据边界条件刻画 $T_{\max}$ 的对称限制。为便于查阅，我们在此陈述该定理。定理中出现的算子 $\mathcal{J}$定义为 $\mathcal{J}(u, f) = (f, -u)$，其中 $u, f \in \mathcal{H}$。

定理 4.3。设 E 是 $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 中的闭对称关系，且 d =维数 $D_i\oplus D_{-i}<\infty$，并且 $m\le d/2$ 是一个自然数或 0。若 $A\colon E^*\to\mathbb{C}^{d-m}$是满射线性算子，使得 $E\subset$ 核 A 且 $A\mathcal{J}A^*$ 的秩为 $d-2m$，则核 A 是 E^* 的闭对称限制，并且 (核 A)$\ominus E$的维数为 m。反过来，E^* 的每个闭对称限制都是某个这样的线性算子 A的核。最后，核 A 是自伴的，当且仅当 $A\mathcal{J}A^*=0$ (蕴含$m=d/2$)。

我们接下来讨论的另一个要素是拉格朗日恒等式（或格林公式）。若 (u,f) 和 (v,g) 属于 $\mathcal{T}_{\max}$，则 v^*wf 和 g^*wu 是有限测度。因此，$v^*Ju'+v'^*Ju=v^*wf-g^*wu$ 也是有限测度。它的原函数v^*Ju 有界变差，因而在 a 和 b处有极限。积分后得到拉格朗日恒等式

$$(v^*Ju)^-(b)-(v^*Ju)^+(a)=\langle v,f\rangle-\langle g,u\rangle. \tag{4.1}$$

请注意，右侧以及由此可知的左侧，在用不同的代表元替换 u、f、v 或 g 时均保持不变。

现在，若 (v,g) 是 $D_i\oplus D_{-i}$的一个元素，则 $(u,f)\mapsto\langle(v,g),(u,f)\rangle$ 是 $T_{\max}$ 上的有界线性泛函。反过来，由于 $T_{\max}$ 是希尔伯特空间，$T_{\max}$ 上的有界线性泛函可表示为 $(u,f)\mapsto\langle(v,g),(u,f)\rangle$，其中某个 $(v,g)\in T_{\max}$。若还知道 $\overline{T_{\min}}$ 属于该泛函的核，则可令 (v,g) 属于 $D_i\oplus D_{-i}$。因此，在我们的情形中，定理 4.3 中的算子 A 由 $D_i\oplus D_{-i}$中的 $d-m$ 个线性无关元素给出。拉格朗日恒等式表明，矩阵 $A\mathcal{J}A^*$ 的各项于是为

$$(A\mathcal{J}A^*)_{k,\ell}=\langle(v_k,g_k),(g_\ell,-v_\ell)\rangle=(g_k^*Jg_\ell)^-(b)-(g_k^*Jg_\ell)^+(a). \tag{4.2}$$

因此，我们得到以下定理 .

定理 4.4. 设 $d=n_++n_-$ 并假设 $m\le\min\{n_+,n_-\}$。若 $(v_1,g_1),\dots,(v_{d-m},g_{d-m})$ 是 $D_i\oplus D_{-i}$ 中的线性无关元素，且在 (4.2) 中定义的矩阵的秩为 $d-2m$，则

$$T=\{(u,f)\in T_{\max}:(g_j^*Ju)^-(b)-(g_j^*Ju)^+(a)=0\ for\ j=1,\dots,d-m\} \tag{4.3}$$

是 $T_{\max}$ 的闭对称限制 .

反过来，若 T 是 $T_{\max}$ 的闭对称限制，且 m是 $T\ominus\overline{T_{\min}}$的维数，则 T 由 (4.3) 给出，其中适当选取元素 $(v_1,g_1),\dots,(v_{d-m},g_{d-m})$ 属于 $D_i\oplus D_{-i}$，使得在 (4.2) 中定义的矩阵的秩为 $d-2m$。

因此，对于 $T_{\max}$ 的自伴限制，必要且充分的条件是 $n_+=n_-=m=d-m$，并且 $(g_k^*Jg_\ell)^-(b)-(g_k^*Jg_\ell)^+(a)=0$ 对所有 $1\le k,\ell\le m=d/2$ 均成立。

5. The space $\mathcal{L}_0$

我们前面提到，如果空间 $\mathcal{L}_0$ 中存在非平凡元素，那么当 $([u],[f])\in T_{\max}$ 时，类 $[u]$ 并没有唯一的平衡代表元。本节将介绍一种以独特方式选取代表元的方法。

为此，不失一般性地假设 $B_+(\tau_0,0)=B_-(\tau_0,0)=J$，从而我们的微分方程的解在 τ_0 处连续。定义 $N_0=\{h(\tau_0):h\in\mathcal{L}_0\}$，并且对每个 $k\in\mathbb{N}$，$N_k=\{h^+(\tau_k):h\in\mathcal{L}_0,\ \operatorname{supp}h\subset[\tau_k,b)\}$ 以及 $N_{-k}=\{h^-(\tau_{-k}):h\in\mathcal{L}_0,\ \operatorname{supp}h\subset(a,\tau_{-k}]\}$。于是，对于 $k\in\mathbb{N}_0$，我们称函数 $u\in\mathrm{BV}^{\#}{}_{\mathrm{loc}}((a,b))^n$ 满足条件 $(\pm k)$，如果 $u^\pm(\tau_{\pm k})$ 与 $N_{\pm k}$ 垂直（始终取上号或始终取下号）。

引理 5.1. 假设 $([u],[f]) \in T_{\max}$。那么存在唯一的平衡 $v \in [u]$，使得 $(v,f) \in \mathcal{T}_{\max}$，并且 v 对每个 $k \in \mathbb{Z}$ 都满足条件 (k)。

证明。首先考虑唯一性。假设 u 和 v 是满足给定条件的两个函数。则 $u-v \in \mathcal{L}_0$，因此 $(u-v)(\tau_0)^* t(\tau_0) = 0$ 对 $t = u$ 和$t = v$成立。将这些方程相减，得到 $(u-v)(\tau_0) = 0$，从而在 (τ_{-1},τ_1) 上 $u = v$。此外，$h_1 = (u-v)\chi_{[\tau_1,b)}$ 和 $h_{-1} = (u-v)\chi_{(a,\tau_{-1}]}$ 都属于 $\mathcal{L}_0$。因此，条件 (1) 和 (−1) 表明，$(u-v)^+(\tau_1)$ 和 $(u-v)^-(\tau_{-1})$ 也都为 0，这证明了 $u = v$ 在 (τ_{-2},τ_2) 上成立。现在利用归纳法可知，$u = v$ 处处成立。

现在转而证明存在性。选取一个平衡代表元 $u \in [u]$，使得 $(u,f) \in \mathcal{T}_{\max}$。存在一个元素 $h_0 \in \mathcal{L}_0$，使$u(\tau_0)$在 N_0 上的正交投影等于 $h_0(\tau_0)$。因此，$v_0 = u - h_0$ 满足 $(v_0,f) \in \mathcal{T}_{\max}$, $v_0 \in [u]$，以及条件 (0)。

接下来，存在一个元素 $h_1 \in \mathcal{L}_0$，其支集包含于 $[\tau_1,b)$，使得 $v_0^+(\tau_1)$ 在 N_1 上的正交投影等于 $h_1^+(\tau_1)$。现在定义 $v_1 = v_0 - h_1$。于是 $(v_1,f) \in \mathcal{T}_{\max}$, $v_1 \in [u]$，且 v_1 满足条件 (1)。注意，$v_1 = v_0$ 在 (a,τ_1) 上，这意味着 v_1 也满足条件 (0)。

递归地进行下去，我们可以对每个 $k \in \mathbb{N}$ 定义函数 $h_k \in \mathcal{L}_0$，其支集包含于 $[\tau_k,b)$，使得 $v_k = u - \sum_{j=0}^{k} h_j$ 满足条件 (0)、.....、(k)、$v_k \in [u]$，且 $(v_k,f) \in \mathcal{T}_{\max}$。

由于对固定的 $x \in [\tau_0,b)$，数 $h_k(x)$ 中只有有限个不等于 0，因此我们发现序列 $k \mapsto v_k$ 逐点收敛到函数 $\tilde{v} \in [u]$，该函数对所有 $k \in \mathbb{N}_0$ 满足条件 (k)，且 $(\tilde{v},f) \in \mathcal{T}_{\max}$。现在，我们可以从函数 $\tilde{v}$ 出发，而不是从 u 出发，对负整数重复这一过程，最终得到函数 $v \in [u]$，该函数对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 满足条件 (k)，且 $(v,f) \in \mathcal{T}_{\max}$。□

我们将把刚构造出的函数 v 赋给给定元素 $([u],[f]) \in T_{\max}$ 的算子记为 E。若 $I_m = (\tau_{-m},\tau_m)$，我们还通过与限制到区间 I_m的运算复合，定义 E_m：$T_{\max} \to \mathrm{BV}^{\#}(I_m)^n$。注意，$\mathrm{BV}^{\#}(I_m)^n$ 是一个巴拿赫空间，其范数 $|||u|||_m$ 定义为 u 在 I_m 上的变差与 $u(\tau_0)$的范数之和。

定理 5.2. 算子 $E_m : T_{\max} \to \mathrm{BV}^{\#}(I_m)^n$ 是有界的。

证明。根据闭图定理，我们只需证明 E_m 是闭算子。因此，假设序列 $([u_j],[f_j])$ 在 $T_{\max}$ 中收敛到 $([u],[f])$，且 $E_m([u_j],[f_j])$ 在 $\mathrm{BV}^{\#}(I_m)^n$ 中收敛到 v，因而逐点收敛。为简化记号，假设 $E_m([u_j],[f_j])$ 和 $E_m([u],[f])$ 分别是 u_j 和 u 在区间 I_m 上的限制。我们需要证明 $u = v$ 在 I_m上成立。

首先注意，$u_j^{\pm}(\tau_{\pm k}) \in N_{\pm k}^{\perp}$和 $\left|u_j^{\pm}(\tau_{\pm k}) - v^{\pm}(\tau_{\pm k})\right| \to 0$ 意味着 v对每个 $k \in \{0,...,m-1\}$都满足条件（$\pm k$）。对于 $\ell \in \{-m, m-1\}$ 和$x \in (\tau_\ell,\tau_{\ell+1})$，我们有

$$u_j^-(x) = U_\ell^-(x)\Big(u_j^+(\tau_\ell) + J^{-1}\int_{(\tau_\ell,x)} U_\ell^* w f_j\Big)$$

其中，U_ℓ 表示 $Ju' + qu = 0$ 在区间（τ_ℓ，$\tau_{\ell+1}$）上的基本矩阵，且满足 $U_\ell^+(\tau_\ell) = \mathbb{I}$。令 $j \to \infty$ 趋于极限，得到

$$v^-(x) = U_\ell^-(x)\Big(v^+(\tau_\ell) + J^{-1}\int_{(\tau_\ell,x)} U_\ell^* w f\Big)$$

因为该积分可视为由标量积组成的向量，而这些标量积当然是连续的。常数变易公式表明， v 是 $Jv' + qv = wf$ 在（τ_ℓ， $\tau_{\ell+1}$）上的平衡解。我们还得到

$$J(u_j^+(\tau_\ell) - u_j^-(\tau_\ell)) + \Delta_q(\tau_\ell)u_j(\tau_\ell) = \Delta_w(\tau_\ell)f_j(\tau_\ell). \tag{5.1}$$

$[f_j]$ 在 $L^2(w)$中收敛到 $[f]$ 这一事实，鉴于 w的正性，意味着 $\Delta_w(\tau_\ell)f_j(\tau_\ell)$收敛到 $\Delta_w(\tau_\ell)f(\tau_\ell)$。因此，在（5.1）中取极限，并结合前面的观察，得到 $Jv' + qv = wf$ 在 I_m区间上成立。由于 u 满足相同的方程，我们有 $u - v$ 满足$J(u - v)' + q(u - v)$，且 $= 0$ 在 I_m上成立。

接下来我们证明 $w(u - v)$在 I_m上 $= 0$ 。法图引理表明

$$0 \le \int_{I_m} (u-v)^* w(u-v) \le \liminf_{j\to\infty} \int_{I_m} (u-u_j)^* w(u-u_j) = 0.$$

由此可得， $w(u - v)$在 I_m上 $= 0$ 。

最后 y，引理的一个变体5.1现在表明 u $= v$. □

6. Green's function

现在设我们有 T 的一个自伴限制。 $T_{\max}$的预解集是满足以下条件的 λ 所组成的集合： $T - \lambda$: dom(T) $\to L^2(w)$ 是双射，即

$$\varrho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T-\lambda) = \{0\}, \operatorname{ran}(T-\lambda) = L^2(w)\}$$

这是一个开集。我们将其补集，即 T的谱，记为 $\sigma(T)$。由于 T 是自伴的， $\sigma(T)$ 是 $\mathbb{R}$ 的子集。如果 $\lambda \in \varrho(T)$，则预解式 $R_\lambda = (T - \lambda)^{-1}$ 是从 $L^2(w)$ 到 dom(T) 的有界线性算子。现在我们定义 $\mathcal{R}_\lambda$: $L^2(w)$ $\to$ BV$^{\#}{}_{\text{loc}}((a, b))^n$ 为

$$\mathcal{R}_\lambda[f] = E((R_\lambda[f], \lambda R_\lambda[f] + [f])).$$

因此， $\mathcal{R}_\lambda[f]$是在 $\mathcal{L}^2(w)$ 中满足条件（k）且对于每个 $k \in \mathbb{Z}$ 都成立的 $Ju' + qu = w(\lambda u + f)$ 的唯一解。

现在我们将证明 $\mathcal{R}_\lambda$ 是一个积分算子。其核 G 称为 T的格林函数。

定理 6.1. 若 T 是 $T_{\max}$的自伴限制，则对于给定的$x \in (a, b)$ 和 $\lambda \in \varrho(T)$，存在一个矩阵 $G(x, \cdot, \lambda)$，使得 $G(x, \cdot, \lambda)^*$ 的各列属于 $L^2(w)$，并且

$$(\mathcal{R}_\lambda[f])(x) = \int G(x, \cdot, \lambda) wf. \tag{6.1}$$

证明. 固定 $x \in I_m$ 和 $\lambda \in \varrho(T)$。考虑 $\mathcal{R}_\lambda[f]$ 在区间I_m上的限制。由于 E_m 和 R_λ 是有界算子，映射 $[f] \mapsto (\mathcal{R}_\lambda[f])(x)$ 是从 $L^2(w)$ 到 $\mathbb{C}^n$的有界线性映射。因此，存在元素 $[g_1], ..., [g_n] \in L^2(w)$，使得 $(\mathcal{R}_\lambda[f])(x)$ 的第 k 个分量等于 $\langle [g_k], [f]\rangle$。令这些元素为矩阵值函数 $G(x, \cdot, \lambda)^*$的列。于是得到 (6.1)。□

人们希望通过一个更具体的结果来补充这一相当抽象的存在性结果：像经典情形中那样，用微分方程的解来表示格林函数，参见例如 Zettl [11]。在 [7] 假设 Ξ_0 为空的情况下，也得到了这一结果；当然，还可以对其作一些小的推广。在可能的情况下，这种格林函数的显式构造是许多其他谱理论结果的基石，尤其是

谱变换的发展以及关于预解式的更详细信息，例如正则情形下预解式的紧性。由于初值问题缺少存在唯一性定理所带来的困难，我们迄今尚未能在一般情况下得到这样的构造。不过，我们希望今后能重新探讨这一问题。

7. Example

本节讨论一个例子，其中矩阵 $B_{\pm}(x,\lambda)$ 对无穷多个 x 以及所有 λ都不可逆，换言之，Ξ_0 是无限的，且对所有 $\Lambda_x=\mathbb{C}$都有 $x\in\Xi_0$ (回想一下，在 [7] 中，假设 $\Xi_0=\emptyset$ 成立，因此每个 Λ_x都是有限的)。该例定义在 $Ju'+qu=wf$ (a,b) 上， $=\mathbb{R}$ 其中

$$J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\ q=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\delta_{2k}-\delta_{2k+1}),\ \text{and},\ w=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k$$

其中 δ_k 表示集中于 $\{k\}$的狄拉克点测度。由于我们要寻找平衡解，因此需要矩阵

$$B_-(2k-1,\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda&0\\2&0\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad B_+(2k-1,\lambda)=\begin{pmatrix}-\lambda&-2\\0&0\end{pmatrix}$$

以及

$$B_-(2k,\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda&-2\\0&0\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad B_+(2k,\lambda)=\begin{pmatrix}-\lambda&0\\2&0\end{pmatrix}.$$

如果 x 不是整数，则有 $B_{\pm}(x,\lambda)=J$。注意， $f\in\mathcal{L}^2(w)$ 当且仅当 $k\mapsto f_1(k)$ 属于 $\ell^2(\mathbb{Z})$，并且 $L^2(w)$ 中的任意元素都由这些值唯一确定（此处 f_1 表示 f的第一分量）。

在任意区间（$k,k+1$）内， $Ju'+qu=w(\lambda u+f)$的解都是常数，记为（α_k,β_k）$^{\top}$。在 $x=2k-1$ 处，方程

$$B_+(2k-1,\lambda)u^+(2k-1)-B_-(2k-1,\lambda)u^-(2k-1)=(2f_1(2k-1),0)^{\top}$$

推出 $\alpha_{2k-2}=0$ 以及

$$-\lambda\alpha_{2k-1}-2\beta_{2k-1}=2f_1(2k-1).\tag{7.1}$$

类似地，在 $x=2k$ 处，我们得到 $\alpha_{2k}=0$ 以及

$$-\lambda\alpha_{2k-1}+2\beta_{2k-1}=2f_1(2k).\tag{7.2}$$

现在可以描述空间 $\mathcal{T}_{\max}$。当且仅当序列 $k\mapsto f_1(k)$和 $k\mapsto u_1(k)$属于 $\ell^2(\mathbb{Z})$、 $f_1(2k)=-f_1(2k-1)$ 、 $u_1(2k)=u_1(2k-1)$，并且

$$u=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\begin{pmatrix}2u_1(2k)\\f_1(2k)\end{pmatrix}\chi^{\#}_{(2k-1,2k)}+\begin{pmatrix}0\\\beta_{2k}\end{pmatrix}\chi^{\#}_{(2k,2k+1)}\right)$$

取任意数 β_{2k}。注意， $\|u\|^2=4\sum_{k\in\mathbb{Z}}|u_1(2k)|^2$。

此处取 $f=0$ 表明 0 是 $T_{\max}$ 的一个特征值，且其重数为无穷。取 $f=0$ 并要求 $\|u\|=0$ ，即可确定空间 $\mathcal{L}_0$。事实上，

$$\mathcal{L}_0=\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\begin{pmatrix}0\\\beta_{2k}\end{pmatrix}\chi^{\#}_{(2k,2k+1)}:\beta_{2k}\in\mathbb{C}\right\}$$

该空间是无限维的。现在我们定义序列 τ：令 $\tau_0 = 1/2$，并且对于 $k \in \mathbb{N}$，令 $\tau_k = k$ 和 $\tau_{-k} = 1 - k$。方程 $Ju' + qu = w(\lambda u + f)$ 的一个解 u 总是满足条件（$2k+1$），且当且仅当 $\beta_{2k} = 0$ 时满足条件（$2k$）。

对于 $f = 0$ 方程（7.1）和（7.2）可知，非零 λ 不可能是 $T_{\max}$的特征值。特别地，亏指数 $n_\pm$ 为 0，即 $T_{\max}$ 是自伴的。现在取 $\lambda \neq 0$ 和 f 为 $L^2(w)$ 中的任意元素。那么

$$(\mathcal{R}_\lambda f)(x) = -\frac{1}{2\lambda} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} 2f_1(2k-1) + 2f_1(2k) \\ \lambda f_1(2k-1) - \lambda f_1(2k) \end{pmatrix} \chi^{\#}_{(2k-1,2k)}(x) \tag{7.3}$$

是满足条件（k）的 $Ju' + qu = w(\lambda u + f)$ 的唯一解，其中 $k \in \mathbb{Z}$ 任意。由于

$$\|\mathcal{R}_\lambda f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2|(\mathcal{R}_\lambda f)_1(k)|^2 = \frac{1}{|\lambda|^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_1(2k-1) + f_1(2k)|^2 \tag{7.4}$$

是有限的，因此 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 是 $T_{\max}$ 的预解集。

现在定义 $\mathcal{H} = \{u \in L^2(w) : u_1(2k-1) = u_1(2k)\}$ 以及 $\mathcal{H}_\infty = \{f \in L^2(w) : f_1(2k-1) = -f_1(2k)\}$。这些空间彼此正交，且它们的直和为 $L^2(w)$。方程（7.4）表明 $\ker R_\lambda = \mathcal{H}_\infty$。此外，我们有

$$T_{\max} = (\mathcal{H} \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times \mathcal{H}_\infty).$$

这是自伴线性关系 T 的一个普遍特征：若 $\mathcal{H}$ 是 T 的定义域的闭包，$\mathcal{H}_\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的正交补，且 $T_0 = T \cap (\mathcal{H} \times \mathcal{H})$，则 $T = T_0 \oplus (\{0\} \times \mathcal{H}_\infty)$。前一项是一个在 $\mathcal{H}$ 中稠密定义的线性算子，称为 T 的算子部分。后一项称为 T 的多值部分。

我们以确定本例的格林函数来结束这个例子。通过观察方程（7.3），或许可以猜出它。无论如何，直接验证可知 $(\mathcal{R}_\lambda f)(x) = \int G(x, \cdot, \lambda) w f$。注意，$G$的第二列无关紧要，因为 w 的第二行为 0。当 x 不是整数时 $G(x, y, \lambda)$ 由下式给出

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \operatorname{sgn}(x-y) \right] \chi^{\#}_{(2k-1,2k)}(x) \chi^{\#}_{(2k-1,2k)}(y).$$

若 x 是整数，则有

$$G(2k-1, y, \lambda) = \frac{1}{2} \lim_{x \downarrow 2k-1} G(x, y, \lambda) \quad \text{and} \quad G(2k, y, \lambda) = \frac{1}{2} \lim_{x \uparrow 2k} G(x, y, \lambda).$$

References

[1] Richard Arens. 线性关系的运算演算。 *Pacific J. Math.*, 11:9–23, 1961。[2] F. V. Atkinson。 *Discrete and continuous boundary problems*。《科学与工程数学》第8卷。Academic Press，纽约—伦敦，1964。[3] Christer Bennewitz。希尔伯特空间上的对称关系。第212–218页。《数学讲义》第280卷，1972年。[4] Kevin Campbell、Minh Nguyen 和 RUDI WEIKARD。关于不具有唯一延拓性质的一阶系统的谱理论。 *Linear Multilinear Algebra*，69(12):2315–2323，2021。在线发表：2019年10月4日。[5] Jonathan Eckhardt、Fritz Gesztesy、Roger Nichols 和 Gerald Teschl。具有分布势的斯图姆-刘维尔算子的 Weyl-Titchmarsh 理论。 *Opuscula Math.*，33(3):467–563，2013。[6] Jonathan Eckhardt 和 Gerald Teschl。系数为测度的斯图姆-刘维尔算子。 *J. Anal. Math.*，120:151–224，2013。

[7] Ahmed Ghatasheh 和 RUDI WEIKARD。具有分布系数的常微分方程系统的谱理论。 *J. Differential Equations*，268(6):2752–2801，2020。[8] M. G. Kre

Doklady Akad. Nauk SSSR in。关于 *(N.S.)* 87 881 884, 1952 Stieltjes 研究成果的一般化。，：–。[9] Bruce Call Orcutt。 *Canonical differential equations*。博士论文，弗吉尼亚大学，1969年。[10] A. M. Savchuk 和 A. A. Shkalikov。具有奇异势的斯图姆-刘维尔算子。 *Mathematical Notes* 66 6 741 753, 1999 66, 897 912 , （）：–。译自《数学札记》，第卷，第页–（1999年）。[11] Anton Zettl。 *Sturm-Liouville theory*，《 *Mathematical Surveys and Monographs*》第121卷。美国数学会，普罗维登斯（罗得岛州），2005年。

Department of Mathematics, University of Alabama at Birmingham, Birmingham, AL35226-1170, USA*Email address*: stevenre@uab.edu, weikard@uab.edu