arXiv:2301.03555v2 [math.AP] 28 May 2024

直角三角形上狄利克雷特征函数的能量分布

HANS CHRISTIANSON 和 DANIEL PEZZI

Abstract. 本文继续研究三角形上的特征函数，这项研究由第一作者在 [Chr17] 和 [Chr19]中开启。三角形上狄利克雷特征函数的诺伊曼数据遵循等分布定律，即在每条边上均等分布。该结果的证明非常简单，只用到径向向量场和 Rellich 型分部积分。包括高维单纯形在内的这一等分布定律，与量子遍历限制的预测一致。然而，人们对边上子集上的诺伊曼数据分布仍知之甚少，初等方法似乎不足以得出结论。

本文首先仅用傅里叶级数，就证明一个“显而易见”的猜想即使对最简单的等腰直角三角形也不成立。接着，我们利用 Marklof-Rudnick 的一项结果 [MR12] ：作者证明了特征函数密度为一的子序列满足内部$spatial$ 等分布定律；据此，我们给出特征函数内部能量分布的一个估计。最后，我们展示了一些数值计算结果，这些结果表明，几乎为等腰三角形的三角形上特征函数的行为相当复杂。

1. Introduction

有界欧几里得区域上的特征函数用于模拟许多物理和力学现象，也可用于构造可分离偏微分方程（如波动方程和薛定谔型方程）的解。特征函数的研究与波动型方程解的研究密切相关，因此人们常借助传播和流动等概念来理解特征函数。由于波沿直线传播，因此可以合理地认为特征函数也沿直线分布。波横向遇到光滑边界时会按照斯涅尔定律反射，因此特征函数也包含入射和出射分量。而波在角点及其他不连续点附近会变得十分复杂，特征函数也同样如此。

本文研究直角三角形上特征函数内部能量的分布，这是相空间集中的一种度量。如果某个适当区域上的台球流是遍历的，那么量子遍历性 [Shn74,Zel87,CdV85,ZZ96]意味着存在一个密度为一的特征函数子序列，在空间和相空间中均等分布。本文考察三角形上的类似性质，但不对经典遍历性作任何假设；相反，本文的理论部分依据若干先前结果，包括第一作者在 [Chr17] 中证明的关于边上诺伊曼数据质量分布的结果，以及 Marklof-Rudnick [MR12] 关于有理多边形空间均匀分布的结果。

本文有若干结果。首先，我们利用分部积分将内部能量与某些加权边界积分联系起来。与

[Chr17] 中的结果比较表明，特征函数似乎具有良好的相空间分布性质，但这似乎并不成立。事实上，即使在等腰直角三角形上，加权边界积分也颇为微妙，尽管相空间分布可由对称性推出。其次，借助 [MR12], 中关于有理多边形空间分布的结果，我们证明，在有理直角三角形上存在一个密度为一的子序列，其具有频率局部化估计，但其渐近行为尚不明确。对于一个序列 a_j，密度为一的子序列是指满足以下条件的子序列 a_{j_k}

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{k : j_k \leq N\}}{N} = 1. \tag{1}$$

最后，我们提供了一些数值数据，表明加权边界积分不存在渐近行为，或者至少对于特征函数的整个序列而言不存在。

致谢。 作者感谢 Jeremy Marzuola 和 Idris Assani 阅读本文的早期草稿。他们也感谢匿名审稿人，其评论和建议帮助澄清了本文证明中的若干重要部分。D.P. 获得了北卡罗来纳大学教堂山分校暑期本科生研究奖学金的部分资助。

2. Theoretical results on right triangles

我们的第一组结果针对直角等腰三角形。

定理 1. 设 T 为 xy平面中的直角等腰三角形，取向为

$$T = \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

考虑 T 上的狄利克雷特征函数问题：

$$\begin{cases} -h^2\Delta u = u, \ on\ T, \\ u|_{\partial T} = 0, \\ \|u\|_{L^2(T)} = 1, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ 和 h^{-2} 表示 $-\Delta$ 的特征值，取离散值。于是， L^2 存在一组由特征函数组成的正交归一基，满足

$$\|h\partial_x u\|^2_{L^2(T)} = \|h\partial_y u\|^2_{L^2(T)} = 1/2.$$

另一方面，这些特征函数存在一个子序列，其诺伊曼数据满足

$$\liminf_{h\to 0} \int_{0\leq x\leq 1/2} |h\partial_\nu u(x,0)|^2 dx > \limsup_{h\to 0} \int_{1/2\leq x\leq 1} |h\partial_\nu u(x,0)|^2 dx.$$

注 2. 该定理表明，这列特征函数存在一个子序列，该子序列在边界上不具有量子遍历性，尽管这些特征函数在相空间中弱等分布。

我们的第二个主要结果讨论有理直角三角形上的相空间分布。该结果很大程度上取决于三角形的取向，旋转三角形会改变结果。因此，这个结果仅仅是为了展示运用初等方法能够证明什么。

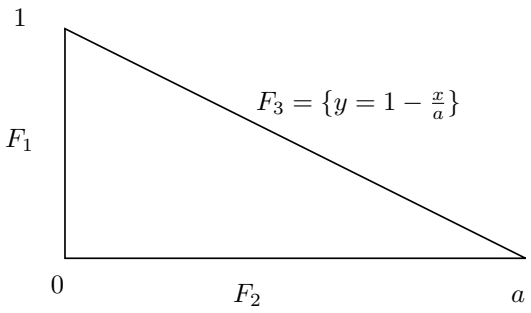


FIGURE 1. 直角三角形的设置

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为一个直角三角形，并考虑半经典拉普拉斯特征函数问题 (2)。

经缩放和旋转后，不妨设 Ω 的朝向使其可写为 $\Omega = \{(x,\ y) :\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le 1 - \frac{x}{a}\}$。令 F_1，F_2，F_3 为图1所示的边。

我们进一步假设 Ω 是有理的，即所有角都是 π 的有理倍数。Marklof-Rudnick [MR12] 的一个结果表明，在这种情况下，存在一个密度为一（按 (1) 的意义）的特征函数子序列 u_{j_k}，它们在空间中均匀分布

$$\int_U |u_{j_k}|^2 dV \to \frac{\mathrm{Area}(U)}{\mathrm{Area}(\Omega)}$$

当 $h_{j_k} \to 0$。

我们将使用这个子序列，并证明以下定理：

定理 3. 设Ω 为按图*1*所示取向的直角三角形。设 $\{u_j\}$ 是定义在Ω上的正交归一狄利克雷特征函数序列。存在一个密度为一的子序列 $\{u_{j_k}\}$，使得

$$\limsup_{k\to\infty} \int_\Omega |h\partial_x u_{j_k}|^2 dV \le \frac{7}{8}.$$

注 4. 我们再次强调，此估计高度依赖于三角形的取向。对 y 阶导数，同样的证明也成立，因此给定 $\epsilon > 0$，存在 K，使得 $k \ge K$ 蕴含

$$\frac{1}{8} - \epsilon \le \int_\Omega |h\partial_x u_{j_k}|^2 dV \le \frac{7}{8} + \epsilon.$$

将三角形旋转到不同的坐标(s,t) 后，得到

$$h\partial_x = \alpha h\partial_s + \beta h\partial_t,\ \ h\partial_y = -\beta h\partial_s + \alpha h\partial_t,$$

其中 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$。代入我们的估计可得

$$\frac{1}{8} - \epsilon \le \int_\Omega |(\alpha h\partial_s + \beta h\partial_t)u_{j_k}|^2 dV \le \frac{7}{8} + \epsilon$$

类似地

$$\frac{1}{8} - \epsilon \le \int_\Omega |(-\beta h\partial_s + \alpha h\partial_t)u_{j_k}|^2 dV \le \frac{7}{8} + \epsilon.$$

展开这些量并不能为我们提供太多信息，除非 α 或 β 接近零。

注 5。 证明的主要思路是估计条带中 $h\partial_x u$ 的质量，并与条带中 u 的质量进行比较。然后，我们利用这一点以及关于一整条边上的诺伊曼数据的结果 *[Chr17]*，得到关于部分诺伊曼数据的弱估计。

2.1. 量子遍历性。 粗略地说，对于平面区域，量子遍历性（QE）指出：如果经典台球流是遍历的，那么存在一个密度为一的特征函数子序列，它们在相空间中等分布[Shn74,Zel87,CdV85,ZZ96]。也就是说，这个特征函数子序列在区域和频率上都均匀分布。Lindenstrauss [Lin06]的研究表明，量子遍历性可能对整个特征函数序列成立，这称为量子唯一遍历性（QUE）。Hassell [Has10] 的研究表明，QUE 可能不成立，因此 QUE 是否成立这一问题十分微妙。

在相关研究中，Hassell-Zelditch [HZ04] 证明，狄利克雷特征函数的边界诺伊曼数据（以及诺伊曼特征函数的狄利克雷数据）满足一种自然的量子遍历性质，称为限制的量子遍历性（QER）。Toth-Zeldtich [TZ12,TZ13] 将这些结果推广到内部超曲面，同样是在一个密度为一的子序列上。第一作者与 Toth-Zelditch [CTZ12] 的研究证明，QUE 蕴含内部超曲面上的限制的量子唯一遍历性（QUER）；但要实现等分布，必须同时使用（加权的）狄利克雷数据和诺伊曼数据。

在 [Chr17] （更高维情形另见 [Chr19] ）中，第一作者证明，对于任意平面三角形，狄利克雷特征函数的诺伊曼数据在每条边上都满足一个等分布恒等式：

定理 6 ([Chr17,Chr19])**.** 设 T 是一个平面三角形，其三边 A、B、C 的长度分别为 a、b、c。考虑（半经典）狄利克雷特征函数问题(2)，并假设特征函数已归一化（$||u||^2_{L^2(T)} = 1$）。

那么，边界上的（半经典）诺伊曼数据满足

$$\int_A |h\partial_\nu u|^2 dS = \frac{a}{Area(T)} \tag{3}$$

$$\int_B |h\partial_\nu u|^2 dS = \frac{b}{Area(T)} \tag{4}$$

$$\int_C |h\partial_\nu u|^2 dS = \frac{c}{Area(T)} \tag{5}$$

其中，$h\partial_\nu$ 是 ∂T 上的半经典法向导数，dS 是弧长测度，而 $Area(T)$ 是三角形 T 的面积。

注 7. 这一性质称为“等分布”，因为每条边上的诺伊曼数据都与该边的长度成比例，而且这些量正是边界上满足限制的量子唯一遍历性时所能预期的结果。不过，我们强调，积分必须取遍整条边。本文研究边的子集上的诺伊曼数据分布；事实上，定理 *1* 表明，即使在最简单的情形——等腰直角三角形中，这种性质也不成立。

基于这一结果，会自然地产生几个问题。关于边的子集上的诺伊曼数据，我们能得出什么结论？对于这些子集，我们能否得到类似的结果，即使只考虑高能极限或某个特定密度的子序列？那么，同一区域上的体积分又如何呢？

为了在欧几里得空间中回答这些问题，我们将先研究等腰直角三角形的情形，因为我们有可供研究的显式解。接下来我们将

转向数值结果，以便从三角形中获取数据，为解决这些棘手的分析问题设定合理预期。

2.2. **直接问题**。 基于这一结果，本文关注两个直接问题。

问题 1。 是否成立：

$$\forall \omega \subset \partial T,\ \lim_{h\to 0}\int_{\omega}|h\partial_{\nu}u|^2dS \to \frac{m(\omega)}{Area(T)}, \tag{6}$$

其中 $m(\omega)$ 是集合 ω的测度?

这只是将等分布结果推广到任意子集。第二个显而易见的问题如下：

问题 2。 是否成立：

$$\forall h>0,\ \int_T |h\partial_y u|^2dV = \int_T |h\partial_x u|^2dV = \frac{1}{2}? \tag{7}$$

2.3. **将边界积分与内部能量联系起来**。我们继续讨论图1所示的直角三角形。我们重复[Chr17] 中的论证，但采用向量场 $X = x\partial_x$。关键在于， $X = 0$ 在 $\{x = 0\}$ 上，而 X 在 $\{y = 0\}$上是切向的。沿着边 $F_3 = \{0 \le x \le a :\ \ y = 1 - \frac{x}{a}\}$, 切向导数为 $\partial_\tau = \gamma^{-1}(a\partial_x - \partial_y)$，其中 $\gamma = (1 + a^2)^{1/2}$。因此，法向导数为 $\partial_\nu = \gamma^{-1}(\partial_x + a\partial_y)$。由于沿着 F_3有 $u = 0$ ，我们有$\partial_\tau u = \gamma^{-1}(a\partial_x - \partial_y)$ $u = 0$，或者说 $\partial_y u = a\partial_x u$ 在 F_3上。因此

$$\partial_\nu u = \gamma^{-1}(\partial_x + a\partial_y)u = \gamma^{-1}(1 + a^2)\partial_x u = \gamma\partial_x u,$$

因此

$$\partial_x u = \gamma^{-1}\partial_\nu u$$

沿着 F_3。

然后，使用与 [Chr17], 中相同的分部积分，我们得到

$$\int_\Omega ([-h^2\Delta - 1, X]u)\bar{u}dV = 2\int_\Omega (-h^2\partial_x^2 u)\bar{u}dV = 2\int_\Omega |h\partial_x u|^2dV. \tag{8}$$

另一方面，展开交换子并像在 [Chr17], 中那样应用格林公式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega ([-h^2\Delta - 1, X]u)\bar{u}dV \\
&\quad = \int_{\partial\Omega}(hXu)h\partial_\nu\bar{u}dS \\
&\quad = \int_{F_3} x(h\partial_x u)h\partial_\nu\bar{u}dS \\
&\quad = \gamma^{-1}\int_{F_3} x|h\partial_\nu u|^2dS. \qquad (9)
\end{aligned}$$

这表明，如果 我们知道 F_3 边上的诺伊曼数据具有量子唯一遍历性，那么我们就会得到

$$\gamma^{-1}\int_{F_3} x|h\partial_\nu u|^2dS = \frac{1}{2}\gamma^{-1}\int_{F_3}|h\partial_\nu u|^2dS + o(1).$$

于是，根据 [Chr17]，我们知道右侧的积分等于 1。重新整理并令其等于 (8)，这一计算将 告诉我们

$$\int_\Omega |h\partial_x u|^2 dV = 1/2 + o(1),$$

然而，这个“显而易见”的猜想似乎是错误的。

利用类似于 $X = y\partial_x$ 的向量场进行类似计算，可将量 $\int_\Omega (h\partial_x u)(h\partial_y \bar{u}) dV$ 与其他加权边界积分联系起来，因此，加权边界积分对于理解特征函数在区域内部的能量分布至关重要。

3. Analytical Results for Right Isosceles Triangle

3.1. 引入直角等腰三角形上的特征函数。 由于我们有拉普拉斯算子在等腰直角三角形上的特征函数的显式公式，因此我们将研究这些函数，既用于确切证明一些结果，也将其作为基准，以便讨论后续关于近似等腰三角形的结果。本节中，T将是欧几里得空间中的一个三角形，其顶点为 $(0,0), (1,0)$, 和 $(0,1)$。本文其余部分将讨论顶点位于原点和 (0,1) 的三角形。我们将以第三个顶点的 x 坐标来标识三角形，该顶点始终位于正 x 轴上。

定理 8. 设 T 如前所述。则下列公式涵盖了所有满足狄利克雷边界条件 m、$n \in \mathbb{Z}$、$m \neq n$ 的 T 上拉普拉斯算子的特征函数。

$$u_{mn} = c_{mn} \sin(n\pi x)\sin(m\pi y) + d_{mn}\sin(m\pi x)\sin(n\pi y). \tag{10}$$

另有约束：若 m 和 n 奇偶性相反，则 $c_{mn} = d_{mn}$；若 m 和 n 奇偶性相同，则 $c_{mn} = -d_{mn}$。此外，经过归一化，$c_{mn}^2 = d_{mn}^2 = 4$。

证明。 我们将证明这些函数涵盖了所有情形、满足边界条件，并满足特征函数方程。我们通过注意到将 T 沿直线 $y = 1 - x$ 反射后会得到一个正方形，从而得到这一表达式。正方形上拉普拉斯算子的特征函数众所周知，因此我们立刻知道这个列表涵盖了所有情形。接下来只需检查所有常见条件，以验证这些确实是等腰三角形上的特征函数。

显然，$x = 0 \implies u_{mn} = 0$ 和 $y = 0 \implies u_{mn} = 0$。检查 $y = 1 - x$ 可得以下表达式：

$$\begin{aligned} u_{mn}(x, 1-x) &= c_{mn}\sin(n\pi x)\sin(m\pi - m\pi x) + d_{mn}\sin(m\pi x)\sin(n\pi - n\pi x) \\ &= (-1)^{m+1} c_{mn}\sin(n\pi x)\sin(m\pi x) + (-1)^{n+1} d_{mn}\sin(m\pi x)\sin(n\pi x) \end{aligned}$$

u_{mn} 满足特征函数方程这一点，源于这些函数是正方形上特征函数的限制。通过简单计算可得特征值为 $h^{-2} = \pi^2(n^2 + m^2)$，与正方形情形相同。□

3.2.计算直角等腰三角形的体积分。我们感兴趣的度量之一是 $\int_T |h\partial_y u_{mn}|^2 dV$。为便于说明，我们将其称为“$y$ 体积分”。导数积分与函数积分之间的关系由方程 $\int_T |h\partial_x u_{mn}|^2 + |h\partial_y u_{mn}|^2 dV = \int_T |u_{mn}|^2 dV = 1$ 给出。通过简单的分部积分即可得到这一表达式，具体如下

$$h^2 \int_T \partial_x u_{mn}\partial_x u_{mn} + \partial_y u_{mn}\partial_y u_{mn} dV = \int_T u_{mn}(-h^2\Delta u_{mn}) dV = \int_T u_{mn}^2 dV, \tag{11}$$

由于我们假设满足狄利克雷边界条件，边界项为零；最后一步代换则利用了 u_{mn} 是一个特征函数。

量子遍历性可以理解为大多数特征函数趋于等分布，其结果之一是两个导数的体积分都趋于1 2。对于简单的等腰直角三角形，由于对称性， L^2 的 $\partial_x u$ 范数与 $\partial_y u$ 范数相等，因此实际上对每个特征值都成立。由于这种情况下体积度量已完全得到理解，因此自然会进一步研究边界上的类似度量。

之后， y 体积分将作为检验量子遍历性的一种方法，成为本文中的重要度量。我们可以计算整个区域上的积分，以检验函数是否满足量子遍历性；与处理区域的子集相比，这在数值计算上要容易得多。

3.3.证明等腰直角三角形边界子集上的等分布不成立。为了初步探讨边的子集上会发生什么，我们将考察 x-轴一侧半边上的诺伊曼数据量与另一半边上的量相比如何。由于底边两半上的数据之和为常数，我们只考虑左下侧面。由于具有 xy 对称性，左侧面的计算也相同。因此，我们定义：

$$I_l(m,n) = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} |h\partial_\nu u_{mn}(x,0)|^2 dx \tag{12}$$

$$I_r(m,n) = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} |h\partial_\nu u_{mn}(x,0)|^2 dx. \tag{13}$$

根据 [Chr17] 中关于整条边上的诺伊曼数据的结果，我们总有 $I_l(m,\ n) + I_r(m,\ n) = 1$。 $I_l = I_r = \frac{1}{2}$ 表示在两半上的等分布。这还不足以说明诺伊曼数据是均匀分布的，但我们几乎立刻就会看到，即使在这个简单的情形下，等分布也不成立。

定理 9。存在 m, n，使得 $I_l(m,n) \neq \frac{1}{2}$。此外，子序列$I_l(k, k+1)$ 收敛到一个不同于 $1/2$ 的值。

证明。在底边上，法向导数就是 $-\partial_y$。通过直接计算可得：

$$\left|h\partial_\nu u|_{y=0}\right|^2 = h^2\Big(c_{mn}^2 m^2\pi^2 \sin^2(n\pi x) + 2c_{mn}d_{mn}\pi^2 nm \sin(n\pi x)\sin(m\pi x) + d_{mn}^2 n^2\pi^2 \sin^2(m\pi x)\Big),$$

利用基本三角恒等式，其反导数为 $F\ (m \neq n)$:

$$\begin{aligned} F(x) &= h^2 c_{mn}^2 m^2 \pi^2 \Big(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4n\pi} \sin(2n\pi x) \Big) \\ &\quad + h^2 c_{mn} d_{mn} \pi^2 nm \Big(\frac{1}{\pi(n-m)} \sin(\pi(n-m)x) - \frac{1}{\pi(n+m)} \sin(\pi(n+m)x) \Big) \\ &\quad + h^2 d_{mn}^2 n^2 \pi^2 \Big(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4m\pi} \sin(2m\pi x) \Big) + C \end{aligned}$$

这使我们能够明确计算:

$$\begin{aligned} F(0) &= 0, \\ F(1/2) &= \frac{h^2 \pi^2 (c_{mn}^2 m^2 + d_{mn}^2 n^2)}{4} + h^2 c_{mn} d_{mn} \pi nm \Big(\frac{\sin(\frac{1}{2}\pi(n-m)}{(n-m)} - \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi(n+m))}{(n+m)} \Big) \\ &= 1 + h^2 c_{mn} d_{mn} \pi nm \Big(\frac{\sin(\frac{1}{2}\pi(n-m)}{(n-m)} - \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi(n+m))}{(n+m)} \Big), \text{ and} \\ F(1) &= \frac{h^2}{2} (c_{mn}^2 m^2 \pi^2 + d_{mn}^2 n^2 \pi^2) = 2. \end{aligned}$$

由此可得:

$$\begin{aligned} 2I_l(m,n) &= F(1/2) - F(0) \\ &= 1 + h^2 c_{mn} d_{mn} \pi nm \Big(\frac{\sin(\frac{1}{2}\pi(n-m))}{(n-m)} - \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi(n+m))}{(n+m)} \Big). \end{aligned}$$

注意，如果 $m+n$ 是偶数，那么 $2I_l(m,\ n) = 1$。接下来我们将考虑 $m+n$ 为奇数的情况；当 m 和 n 奇偶性不同时，$c_{mn} d_{mn} = 4$ 必为奇数。此外，当我们令 m 和 n 趋于无穷时，乘以 $\frac{1}{n+m}$ 的项将趋于 0，因为 $h^2 = (\pi^2 n^2 + \pi^2 m^2)^{-1}$。稍后我们会用数值说明这些值分别是多少；但要构造我们的子序列，考虑 $m_k = k$ 和 $n_k = k+1$。对于这个子序列，乘以 $\frac{1}{n-m}$ 的项的绝对值最大。限定在这个子序列上，并代入 $h^2 c_{mn} d_{mn}$ 的精确值，可得:

$$\begin{aligned} 2I_1(m_k, n_k) &= 1 + 4(\pi^2(2k^2+2k+1))^{-1} \pi(k^2+k) \Big(\sin(\frac{\pi}{2}) - \frac{\sin(\frac{\pi}{2}(2k+1))}{2k+1} \Big) \\ &\sim 1 + \frac{2}{\pi} + \mathcal{O}(k^{-1}) \end{aligned}$$

这意味着，对于这个比例子序列 $I_l(k,\ k+1)$，有 $I_l(k,\ k+1) \to \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \approx .8183$。因此显然 $I_r(k,\ k+1) \to \approx 。1817$。这就是我们的子序列:在极限下，它在子集上不等分布。□

即使在极限情况下，边的子集上也不存在等分布，这比 y 体积分结果更令人惊讶。这与第一作者最初提出的猜想相矛盾；该猜想认为在极限情况下会呈现均匀分布。在这种情况下，这些比例的长期行为可以得到完整描述。下面的计算与前面的计算相同，只是将其推广到一般情形。

推论 10. 设 m 和 n 为整数，满足 $n-m=j$，其中 j 为奇整数。那么我们有 $I_l(m,n)$ 的显式公式。

证明。 我们沿用前一个证明的方法。代入假设的取值可得：

$$\begin{aligned}2I_l(m,m+j) &= 1+4\pi^{-1}(2m^2+2mj+j^2)^{-1}(m^2+mj)\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2}j)}{j}-\frac{\sin(\frac{\pi}{2}(2m+j))}{2m+j}\right)\\ &\sim 1+\delta(j)\frac{2}{j\pi}+\mathcal{O}(m^{-1})\end{aligned}$$

因此

$$I_l(m,n)\sim\frac{1}{2}\left(1+\delta(j)\frac{2}{j\pi}+\mathcal{O}(k^{-1})\right)$$
$$I_r(m,n)\sim\frac{1}{2}\left(1-\delta(j)\frac{2}{j\pi}+\mathcal{O}(k^{-1})\right),$$

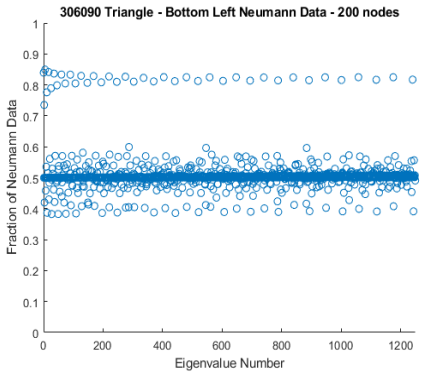
其中，若 $j\equiv 1$ (模 4)，则 $\delta(j)=1$；若 $j\equiv 3$ (模 4)，则 $\delta(j)=-1$。 □

这项计算还表明，在极限情况下，这两个值的运行平均值都将为 1/2。m,n 中彼此相隔固定整数的子序列，在 m,n序列中的密度为零。我们还可以看到，当间隔整数 k 趋于无穷时，这些子序列的极限 $I_l(m,m+j)$ $I_r(m,m+j)$ 趋于 $1/2$。通过直接的极限论证，这确保了各部分的运行平均值也趋于 $1/2$。

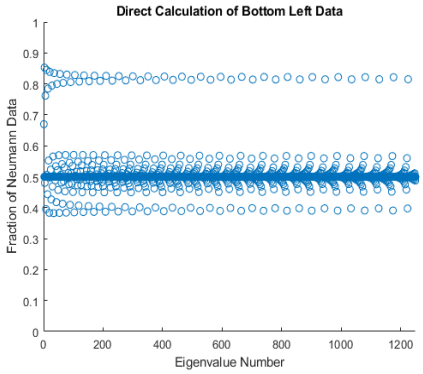
显式计算清楚地说明了其中的原因：m,n 中彼此接近的值所产生的扰动，其大小不会因m 和 n 趋于无穷而改变，只要保持该间隔不变。然而，随着 m和 n 增大，遇到间隔为该值的 m 和 n 数对的可能性越来越小。所有这些都已得到数值验证。

这两张图与直接计算的结果并不完全相同，因为直接计算对点的排序方式不同。此外，边界积分的精度还不够，尤其是由于我们要对它们进行相除，因此无法使这些图完全对齐。

这一结果表明，即使在简单三角形的简单子集上，等分布也会失效。在下一节中，我们将拓展这一结果，说明这些比例甚至不必有界。



(A) 直角等腰三角形的左下角诺伊曼数据计算值



(B) 使用以下方法绘制的左下角诺伊曼数据图导出公式

FIGURE 2. 左下角诺伊曼数据图：计算值与解析值

4. PROOF OF THEOREM 3

在本节中，我们利用 Marklof-Rudnick [MR12] 的结果来证明定理 3。其思路是比较三角形中条带内 $|h\partial_x u|^2$ 与 $|u|^2$ 的积分，然后利用 [Chr17] 中的结果，将 $|h\partial_x u|^2$的积分与诺伊曼数据的边界积分进行比较。

证明。我们省略下标和子序列的记号，直接用 u 表示密度为一的子序列。

在边 F_1 上，法向导数为 $\partial_\nu = -\partial_x$；在 F_2 上，法向导数为 $\partial_\nu = -\partial_y$；在 F_3 上，切向导数为 $\partial_\tau = \gamma^{-1}(a\partial_x - \partial_y)$，法向导数为 $\partial_\nu = \gamma^{-1}(\partial_x + a\partial_y)$。这里 $\gamma = (1+a^2)^{\frac{1}{2}}$ 是归一化常数。这意味着，在 F_1 上，$\partial_y u = 0$；在 F_2 上，$\partial_x u = 0$；而在 F_3 上，$\partial_x u = \frac{1}{\gamma}\partial_\nu u$ 和 $\partial_y u = \frac{a}{\gamma}\partial_\nu$，如常。

固定与 h 无关的 $0 < \beta < a$ 和 $\delta > 0$，其中 δ 足够小，使得 $0 < \beta - \delta^2 < \beta + \delta < \beta + \delta + \delta^2 < a$。设 $\chi(x)$ 为满足以下条件的光滑函数

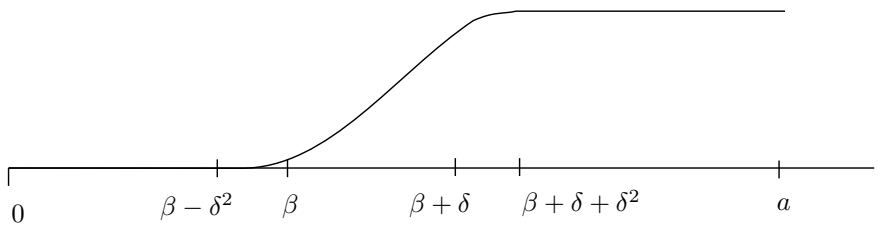


FIGURE 3. 函数 χ。

- $\chi(x) \equiv 0$，当 $0 \le x \le \beta - \delta^2$ 时,
- $\chi(x) \equiv 1$ 对于 $\beta + \delta + \delta^2 \le x \le a$,
- $\chi'(x) \ge 0$,
- $\chi' = \frac{1}{\delta} + \mathcal{O}(\delta)$，对于 $\beta \le x \le \beta + \delta$
- $|\chi^{(k)}| = \mathcal{O}(\delta^{-k})$。

此类函数的示意图见图3。

设 $X = \chi(x)\partial_x$，并按照 [Chr17] 中的方法进行常见的 Rellich 交换子论证：

$$\int ([-h^2\Delta - 1, X]u)\bar{u}dV = -2\int (\chi' h^2 \partial_x^2 u)\bar{u}dV + \mathcal{O}(h) = 2\int \chi' |h\partial_x u|^2 dV + \mathcal{O}(h).$$

设 $\Omega_\beta = \Omega \cap \{\beta - \delta^2 \le x \le \beta + \delta + \delta^2\}$，使得 $\operatorname{supp}\chi' \subset \Omega_\beta$。进一步设 $\tilde{\Omega}_\beta = \Omega \cap \{\beta \le x \le \beta + \delta\}$，使得 $\chi' = \delta^{-1} + \mathcal{O}(\delta)$ 在 $\tilde{\Omega}_\beta$ 上成立。

记

$$\begin{aligned}
2\int_\Omega \chi' |h\partial_x u|^2 dV &= 2\int_{\Omega_\beta} \chi' |h\partial_x u|^2 dV \\
&\le 2\int_{\Omega_\beta} \chi'(|h\partial_x u|^2 + |h\partial_y u|^2) dV \\
&= 2\int_{\Omega_\beta} \chi'(-h^2\Delta u)\bar{u}dV - 2\int_{\Omega_\beta} (h\nabla\chi')\cdot(h\nabla u)\bar{u}dV \\
&= 2\int_{\Omega_\beta} \chi'(-h^2\Delta u)\bar{u}dV + \mathcal{O}(h\delta^{-2}) \\
&= 2\int_{\Omega_\beta} \chi' |u|^2 dV + \mathcal{O}(h\delta^{-2}) \\
&\le 2(\delta^{-1} + \mathcal{O}(\delta))\int_{\Omega_\beta} |u|^2 dV + \mathcal{O}(h\delta^{-2}).
\end{aligned} \tag{14}$$

我们有

$$\operatorname{Area}(\Omega_\beta) = \left[\frac{1 - \frac{(\beta-\delta^2)}{a} + 1 - \frac{(\beta+\delta+\delta^2)}{a}}{2}\right](\delta + 2\delta^2) = (1 - \frac{\beta}{a})\delta + \mathcal{O}(\delta^2).$$

因此

$$\frac{\operatorname{Area}(\Omega_\beta)}{\operatorname{Area}(\Omega)} = \frac{(1 - \frac{\beta}{a})\delta}{a/2} + \mathcal{O}(\delta^2).$$

那么，Marklof-Rudnick [MR12] 的结果表明

$$2(\delta^{-1}+\mathcal{O}(\delta))\int_{\Omega_\beta}|u|^2dV=4\frac{(1-\frac{\beta}{a})}{a}+\mathcal{O}(\delta)+o(1),$$

因此

$$\int([-h^2\Delta-1,X]u)\bar{u}dV\leq 4\frac{(1-\frac{\beta}{a})}{a}+\mathcal{O}(\delta)+\mathcal{O}(h\delta^{-2})+o(1). \tag{15}$$

另一方面，

$$\int([-h^2\Delta-1,X]u)\bar{u}dV=\int_{\partial\Omega}\chi(x)(h\partial_x u)h\partial_\nu\bar{u}dS.$$

在 F_1 上， $\chi(0)=0$ ；而在 F_2 上， ∂_x 与切向相切，因此 $\partial_x u=0$。在 F_3 上，$\partial_x u=\gamma^{-1}\partial_\nu u$，因此

$$\int([-h^2\Delta-1,X]u)\bar{u}dV=\gamma^{-1}\int_{F_3}\chi(x)|h\partial_\nu u|^2dS.$$

综合以上，

$$\gamma^{-1}\int_{F_3}\chi(x)|h\partial_\nu u|^2dS\leq\frac{4}{a}(1-\frac{\beta}{a})+\mathcal{O}(\delta)+o(1). \tag{16}$$

我们将利用 (16) 估计 F_3 上一部分的诺伊曼数据。由于 $\chi\equiv 1$ 在 $\{\beta+\delta+\delta^2\leq x\leq a\}$上，我们有

$$\gamma^{-1}\int_{F_3\cap\{\beta+\delta+\delta^2\leq x\leq a\}}|h\partial_\nu u|^2dS\leq\gamma^{-1}\int_{F_3}\chi(x)|h\partial_\nu u|^2dS\leq\frac{4}{a}(1-\frac{\beta}{a})+\mathcal{O}(\delta)+o(1). \tag{17}$$

现在我们再用一种交换子型论证，将 $h\partial_x u$在整个三角形上的质量与边界部分上的诺伊曼数据进行比较。为此，令 $X=(1-x/a)\partial_x$。于是 $[-h^2\Delta-1,X]=2a^{-1}h^2\partial_x^2$，从而

$$\int_\Omega([-h^2\Delta-1,X]u)\bar{u}dV=\frac{2}{a}\int_\Omega(h^2\partial_x^2u)\bar{u}dV=-\frac{2}{a}\int_\Omega|h\partial_x u|^2dV.$$

另一方面，

$$\int_\Omega([-h^2\Delta-1,X]u)\bar{u}dV=\int_{\partial\Omega}(1-x/a)h\partial_x uh\partial_\nu\bar{u}dS.$$

在 F_1 上， $x=0$ ，因此 $X=\partial_x=-\partial_\nu$。在 F_2 上， ∂_x 是切向的，因此 $Xu=0$ 在 F_2 上。在 F_3 上，我们与之前一样有 $\partial_x u=\gamma^{-1}\partial_\nu u$ 。这意味着

$$\int_{\partial\Omega}(1-x/a)h\partial_x uh\partial_\nu\bar{u}dS=-\int_{F_1}|h\partial_\nu u|^2dS+\gamma^{-1}\int_{F_3}(1-x/a)|h\partial_\nu u|^2dS.$$

由 [Chr17], , 我们知道 $\int_{F_1}|h\partial_\nu u|^2dS=\frac{2}{a}$ ，因此

$$\int_{\partial\Omega}(1-x/a)h\partial_x uh\partial_\nu\bar{u}dS=-\frac{2}{a}+\gamma^{-1}\int_{F_3}(1-x/a)|h\partial_\nu u|^2dS.$$

重新整理可得

$$\frac{2}{a}\int_\Omega|h\partial_x u|^2dV=\frac{2}{a}-\gamma^{-1}\int_{F_3}(1-x/a)|h\partial_\nu u|^2dS. \tag{18}$$

为了得到左端的上界，我们需要积分的下界

$$\gamma^{-1}\int_{F_3}(1-x/a)|h\partial_\nu u|^2dS,$$

我们通过与截断函数 χ 所隔离出的边界部分进行比较来完成这一点。 $\chi(x) \equiv 1$ 对于 $x \geq \beta+\delta+\delta^2$，在这一范围内，我们对边界数据有上界，而不是下界。我们写作

$$\begin{aligned}(19)\qquad &\gamma^{-1}\int_{F_3}(1-x/a)|h\partial_\nu u|^2dS\\ &\quad=\gamma^{-1}\int_{F_3\cap\{x\geq\beta+\delta+\delta^2\}}(1-x/a)|h\partial_\nu u|^2dS\\ &\qquad+\gamma^{-1}\int_{F_3\cap\{x\leq\beta+\delta+\delta^2\}}(1-x/a)|h\partial_\nu u|^2dS\\ &\quad\geq(1-(\beta+\delta+\delta^2)/a)\gamma^{-1}\int_{F_3\cap\{x\leq\beta+\delta+\delta^2\}}|h\partial_\nu u|^2dS.\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\gamma^{-1}\int_{F_3\cap\{x\leq\beta+\delta+\delta^2\}}|h\partial_\nu u|^2dS\\ &\quad=\gamma^{-1}\int_{F_3}|h\partial_\nu u|^2dS-\gamma^{-1}\int_{F_3\cap\{x\geq\beta+\delta+\delta^2\}}|h\partial_\nu u|^2\end{aligned}$$

现在，我们在区域 $x \geq \beta+\delta+\delta^2$ 中的上界 **(17)** 就派上用场了。再次利用 [Chr 17]，中的主要结果，我们得到

$$\gamma^{-1}\int_{F_3}|h\partial_\nu u|^2dS=\frac{2}{a},$$

so

$$\begin{aligned}&\gamma^{-1}\int_{F_3\cap\{x\leq\beta+\delta+\delta^2\}}|h\partial_\nu u|^2dS\\ &\quad=\gamma^{-1}\int_{F_3}|h\partial_\nu u|^2dS-\gamma^{-1}\int_{F_3\cap\{x\geq\beta+\delta+\delta^2\}}|h\partial_\nu u|^2\\ &\quad\geq\frac{2}{a}-\frac{4}{a}(1-\frac{\beta}{a})+\mathcal{O}(\delta)+o(1).\end{aligned}$$

代入（19），得到

$$\begin{aligned}&\gamma^{-1}\int_{F_3}(1-x/a)|h\partial_\nu u|^2dS\\ &\quad\geq(1-(\beta+\delta+\delta^2)/a)\gamma^{-1}\int_{F_3\cap\{x\leq\beta+\delta+\delta^2\}}|h\partial_\nu u|^2dS\\ &\quad\geq(1-(\beta+\delta+\delta^2)/a)\left(\frac{2}{a}-\frac{4}{a}(1-\frac{\beta}{a})+\mathcal{O}(\delta)+o(1)\right).\end{aligned}$$

结合（18），得到

$$\begin{aligned}\frac{2}{a}\int_\Omega |h\partial_x u|^2 dV &= \frac{2}{a} - \gamma^{-1}\int_{F_3}(1-x/a)|h\partial_\nu u|^2 dS \\ &\leq \frac{2}{a} - (1-(\beta+\delta+\delta^2)/a)(\frac{2}{a} - \frac{4}{a}(1-\frac{\beta}{a}) + \mathcal{O}(\delta) + o(1))\end{aligned}$$

并重新整理，

$$\begin{aligned}\int_\Omega |h\partial_x u|^2 dV &\leq 1 - (1-(\beta+\delta+\delta^2)/a)(1-2(1-\frac{\beta}{a}) + \mathcal{O}(\delta) + o(1) \\ &= 1 - (1-\beta/a)(1-2(1-\beta/a)) + \mathcal{O}(\delta) - o(1). \qquad (20)\end{aligned}$$

对变量 $(1-\beta/a)$ 进行优化得到 $(1-\beta/a) = 1/4$，或者

$$\int_\Omega |h\partial_x u|^2 dV \leq 1 - (1/4)(1/2) = 7/8 + \mathcal{O}(\delta) + o(1)$$

如定理中所述。

□

注释 11. 证明中最大的损失来自于对条带中$|h\partial_x u|^2$ 的积分进行粗略估计，将其估为 $|u|^2$的积分；这显然是一个非常粗糙的估计。不过，有趣的是，即使我们知道条带中 $|h\partial_x u|^2$ 的积分是 $|u|^2$的一半（量子遍历性会预言这一点），证明仍无法给出整个三角形上的预期估计。事实上，在(15)中，量子遍历性本会给出$2_{(1-\frac{\beta}{a})}$ $_a$ $+\mathcal{O}(\delta)+o(1)$，而不是$4_{(\underline{1-\frac{\beta}{a}})_a}$ $+\mathcal{O}(\delta)+o(1)$。如同证明末尾所示，这将得到

$$\int_\Omega |h\partial_x u|^2 dV \leq 1 - (1-\beta/a)(1-(1-\beta/a)) + \mathcal{O}(\delta) - o(1)$$

代替(20)。再次对变量$(1-\beta/a)$进行优化，得到$(1-\beta/a) = 1/2$，从而得到界 $3/4+\mathcal{O}(\delta)+o(1)$。因此，即使我们对能量分布相较于分布了解得更多，本文中的证明技巧仍会给出不令人满意的答案。

注释 12。 请注意，这一点是三角形所特有的。事实上，若$\Omega = [0,\pi]^2$，则一组特征函数基为 $u_{mn} = c_{mn}\sin(mx)\sin(ny)$，其中 $c_{mn} = 2/\pi$ 是相应的归一化常数。设 $U \subset \Omega$ 为一个开集。我们有

$$\begin{aligned}\int_U |u|^2 dV &= \int_U |c_{mn}|^2 (1/2 - 1/2\cos(2mx))(1/2 - 1/2\cos(2ny)) dV \\ &= \pi^{-2}\int_U (1 - \cos(2mx) - \cos(2nx) + \cos(2mx)\cos(2ny)) dV \\ &= \frac{Area(U)}{Area(\Omega)} + \mathcal{O}(m^{-1} + n^{-1}).\end{aligned}$$

另一方面，

$$\int_\Omega |h\partial_x u|^2 dV = \int_\Omega h^2 m^2 (4/\pi^2)|\cos(mx)\sin(ny)|^2 dV = h^2 m^2,$$

类似地，$\int_\Omega |h\partial_y u|^2 dV = h^2 n^2$.

假设我们关注 $\{n \geq Mm\}$，且 M 很大。那么 $\#\{m^2+n^2 \leq R^2 : n \geq Mm\} \sim R^2/M$，因此具有密度 $\sim 1/M > 0$，但 $\int_\Omega |h\partial_x u|^2 dV \leq M^{-2}$。

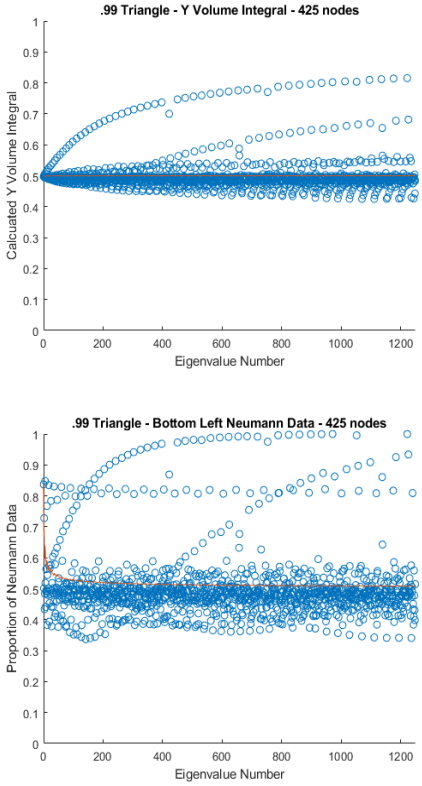
这表明，这些满足 $n \geq Mm$ 的特征函数具有与 *Marklof-Rudnick* 中所述相同的空间等分布性质：

$$\int_{\Omega} |u|^2 dV = \frac{Area(U)}{Area(\Omega)} + \mathcal{O}(Mh)$$

但不具有频率下界性质 $\int_{\Omega} |h\partial_x u|^2 dV \geq 1/8$。

5. An Almost Right Isosceles Triangle

研究了直角等腰三角形后，自然会想看看区域稍微受到扰动时会发生什么。我们将考察“0.99 三角形”，即顶点为 {(0，0)、(0，1)、(。99，0)} 的三角形。我们无法找到解析解，但可以使用数值技术。借助 FreeFEM（一种用于通过有限元方法求解偏微分方程的在线工具），我们计算了前 1250 个特征函数，并绘制了相关数据。



0.99 三角形 - 1250 个特征值 - Y体积积分和左下方诺伊曼图

此时，y 体积分图不再是常数，而是呈现出明显的结构。在我们的特征值范围内，至少可以看到两个分支。这些分支对应于一系列特征函数子序列，其 y 体积分似乎并未趋近于$_{1\ 2}$。此外，还有一个较宽的带状区域，与

– $_1$ $_2$有较大的间隔。随着能量增加，即使是那些不太特殊、具有 y 体-积分的特征函数，其取值似乎也逐渐偏离$_1$ $_2$。下一节将通过数值分析讨论这些现象。

第二幅图显示了 .99 三角形中 $I_l(m,\ n)$ 的取值，并将积分上下限从 (0，$1/2$) 调整为 (0，.495)。图中的部分结构延续自 y 体积分的情形，但连贯性较差。此外，似乎存在一些子序列，其左下侧的诺伊曼数据积分趋近于 1，这表明所有诺伊曼数据都集中在底边的一半上。这意味着，即使是边界子集上的诺伊曼数据下界也可能无法实现，至少并非对每个特征函数序列都成立。

我们已经验证，y 体积分图中明显的两个分支由同一批特征函数构成，这些特征函数的左下诺伊曼积分趋近于 1。本文中提及的其他三角形的类似图像见附录。

6. Statistical Analysis of Eigenfunctions on Almost Isosceles RightTriangles

本节将介绍几种新的度量，用以衡量一列特征函数在多大程度上偏离具有量子遍历性（QE）或量子遍历限制（QER）性质。

6.1. 引入运行平均值。 关于量子遍历性的论述允许存在密度为零的例外子序列。对于 y 体积分，我们认为 $1/2$ 表示量子遍历性；然而，如果区域确实是遍历的，更准确的说法是，每个正密度子序列的运行平均值都应收敛到 $1/2$。或者用数学语言来说，对于密度为 1 的子序列u_{i_k}：

$$a_j = \frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}\int_T |h\partial_y u_{i_k}|^2 dV \to \frac{1}{2}. \tag{21}$$

对于给定一侧上的诺伊曼数据比例，我们也可以作类似的论述。在这里，如果区域确实是遍历的，那么对于每个具有正密度的比例子序列，$I_l(m_j,\ n_j)$，我们都有

$$\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} I_l(m_j, n_j) \to \frac{1}{2}. \tag{22}$$

对于边界子集上以类似方式定义的任何数据，当然也同样如此。

6.2. 计算结果的运行平均值。随着三角形逐渐偏离直角等腰的情形，我们计算相关指标的运行平均值，以便更深入地了解该三角形的量子遍历性质。本文始终使用“y 体积分”和“左下部分比例”这两个指标。节点数越大，精度越高，但我们发现，在数值计算中增加节点数所带来的收益逐渐减小。因此，我们认为 200 已经足够。计算采用了前 1250 个特征函数。

三角形	节点	y 左下部分的体积分比例	
.99	425	.4998	.5083
.98	200	.4996	.5098
.97	200	.4996	.5103
.96	200	.4993	.5097
.95	200	.4992	.5100

各项指标总体上呈现出一致的趋势。三角形越偏离等腰直角三角形，这些指标就越偏离量子遍历性所预测的值。这还不足以证明这些平均值会收敛到一个不同于区域为遍历区域时预期值的数值，但确实强烈表明，三角形越偏离等腰形状，收敛速度至少越慢。

6.3. **特征函数百分比方法**。本章前文所述方法的问题在于，它们并未触及我们真正关心的核心。在这些频率下，运行平均值可能会受到零密度子序列的影响；这些子序列虽然很有趣，却不足以确切证明该区域本身不是遍历的。为了判断这些实验是否会使我们预期存在一个收敛到非预期值的正密度子序列，我们转而将重点放在特征函数的百分比上。

关于序列密度的表述，是对人们熟悉的离散百分比概念的延伸。它们描述的是我们预期某个特定子序列有多么常见。在高频极限下，密度为 1 的子序列应当在几乎每个值处出现。由于这些是极限，因此存在相当大的弹性空间。

我们可以利用这一概念制定一些指标，以表明是否存在具有所需性质的正密度子序列。假设我们认为 .99 三角形的 y 体积分的运行平均值收敛到小于 .5 的某个值。那么，只需证明：对于每个有限的 N、某个固定的$\epsilon > 0$以及某个其他固定的 $\delta > 0$，前 N 个特征函数中 y 体积分小于 $.5 - \epsilon$ 的特征函数所占百分比，对于每个 N都大于 δ。如果满足这一条件，那么所有 y 体积分小于 $.5 - \epsilon$ 的特征函数构成的子序列，其密度将大于 δ。这将表明该区域本身不是遍历的。

当然，考察低于某个阈值的特征函数所占的百分比并无特别之处。由于我们只需要一个具有正密度的子序列，因此可以考察所有体积分与 0.5 相差足够大的特征函数。为了采用一种无论体积分值如何分布都同样有效的度量，我们考察满足以下条件的特征函数的运行百分比：

$$\left| \int_T |h\partial_y u|^2 - .5 \right| > \epsilon \tag{23}$$

对于不同的容差 ϵ。部分运行的数值列于下表。

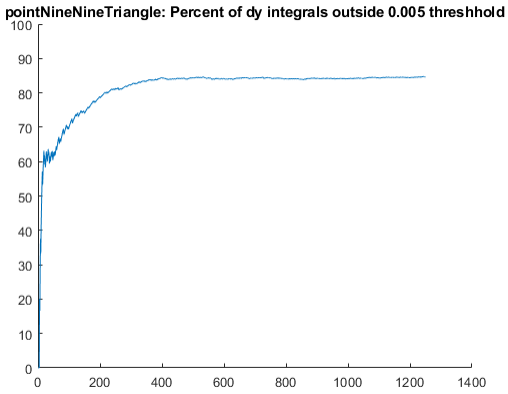


FIGURE 5. 累计百分比图——展示单调和渐近行为。之前表格中的每个三角形和范围都具有相似的形状。

三角形	$\epsilon = .01$	$\epsilon = .005$	$\epsilon = .001$
.99	80.32	84.64	98.8
.98	82.9	93.0	99.3
.97	89.1	95.7	99.6
.96	91.0	95.6	99.04
.95	92.7	96.6	99.52

或许比精确数值更值得关注的是其变化趋势。.99、.98、.97、.96 和 .95 三角形在三个阈值下的所有图表都具有相同的基本形状：曲线递增，并存在一条垂直渐近线。

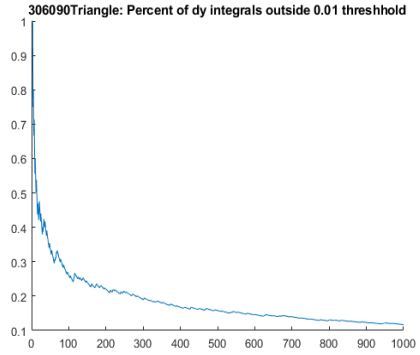
6.4. 建立具有不同表现的三角形。一个有趣的测试案例是30-60-90三角形。尽管它作为有理平面多边形具有空间等分布性质，但众所周知它是可积的。这个三角形具有许多对称性，例如将其关于y轴反射即可得到等边三角形，而这正是其可积性的原因。通过考察接近30-60-90三角形的三角形，我们可以了解这些数值计算的敏感程度。

我们进行了两次运行，底边长度分别为.575和.58。30-60-90三角形的底边长度为 $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx .5774$，因此这些其他三角形虽接近30-60-90三角形，却不具备那些对特征函数产生深远影响的几何对称性。它们产生了以下结果：

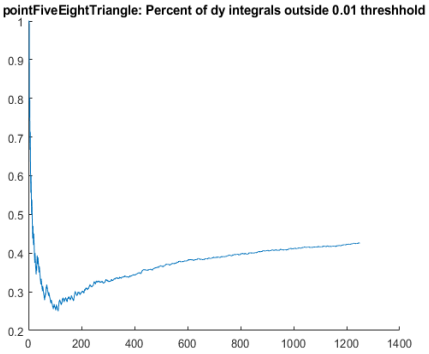
三角形	$\epsilon = .01$	$\epsilon = .005$	$\epsilon = .001$
.58	42.6	65.0	96.8
30-60-90	11.7	16.4	30.9
.575	41.8	61.1	97.2

不仅百分比明显低于其他三角形，累计百分比散点图的形状还表明，随着特征值数量增加，这些数值显著下降。这种行为通常是遍历域所预期的，但我们看到的行为却更接近

此前讨论的那两组三角形实验结果，它们都接近 30-60-90 三角形。这让我们的解读变得复杂，因为这个非遍历三角形呈现出了遍历域通常会有的行为。



(A) 30-60-90 - 450 个节点 - 1000 个特征值



(B) .58 三角形 - 200 个节点 - 1250 个特征值

7. Accuracy and Sanity Checks

7.1. **网格收敛测试**。 如果能够证明随着网格细化，精度指标也会收敛，我们对数值计算的信心就会增强。为此，我们选取了两个指标：一个用于特征值，另一个用于特征函数。

最大特征值差就是在不同网格上计算得到的特征值之间的最大差值。 L^2 运行平均值是指在不同网格上计算得到的特征函数之差的 L^2 范数的运行平均值。为评估这一差值，我们将精度较高的函数插值到较粗的网格上。这会带来另一种误差来源。

我们将 256 节点的计算结果与 .99 三角形的 128、64 和 32 节点计算结果进行了比较。计算了前 1000 个特征值和特征函数。下表显示，这两项指标均明显收敛。

比较	最大特征值差。	L^2 运行平均值。
256 和 128	8.87	.0091
256 和 64	122.23	.0838
256 和 32	377.87	.4762

第1000个特征值的大小约为30,000，因此最大差值8.87相当于约0.03%的差异。这表明，超过某个阈值后，将周界节点数加倍并不能显著提高精度。这让我们确信数值实验的表现良好。

7.2. **报告的误差**。 FreeFEM本身也可以报告误差。它会报告3种误差：相对误差、绝对误差和后向误差。这些误差通常都在增大，因此我们只报告第1250个特征值的误差。

误差类型	数值
绝对误差	8.77e-8
相对误差	3.04e-15
后向误差	7.292e-12

Appendix A. Volume and Boundary Data for Near IsoscelesTriangles

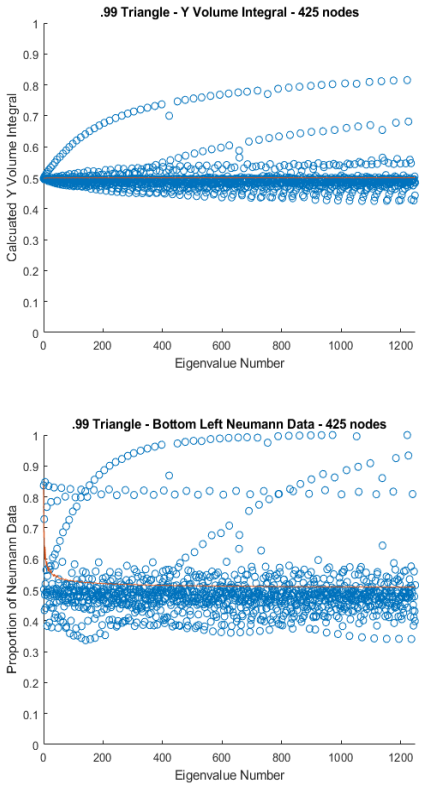


FIGURE 7. .99 三角形 - 1250 个特征值 - Y体积积分和左下角诺伊曼图

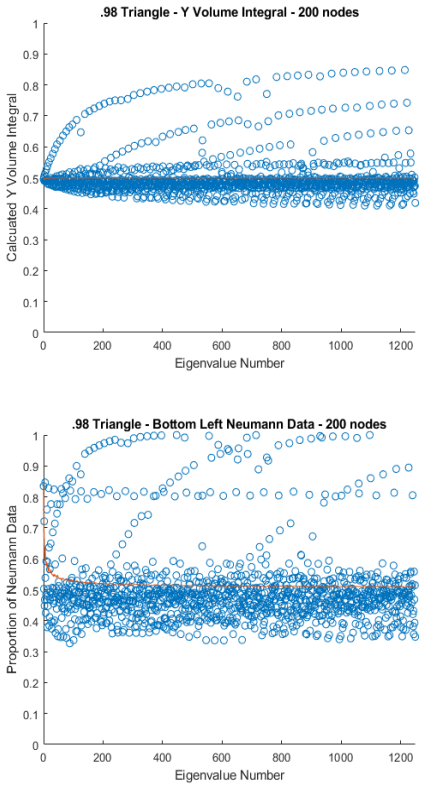


FIGURE 8. .98 三角形 - 1250 个特征值 - Y体积积分和左下方诺伊曼图

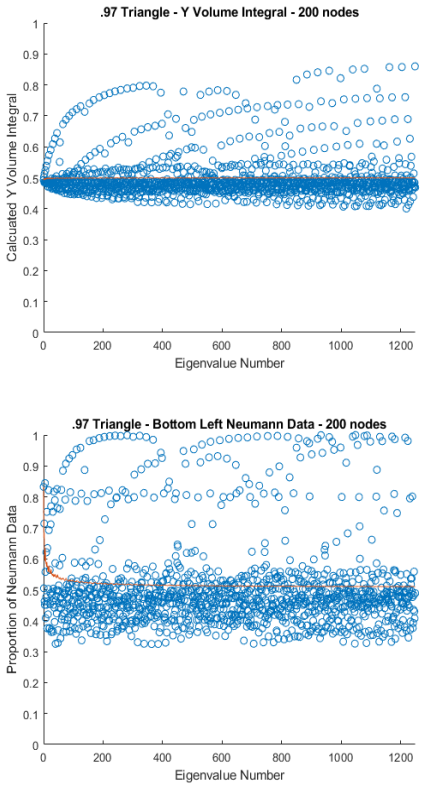


FIGURE 9. .97 三角形 - 1250 个特征值 - Y体积积分和左下角诺伊曼图

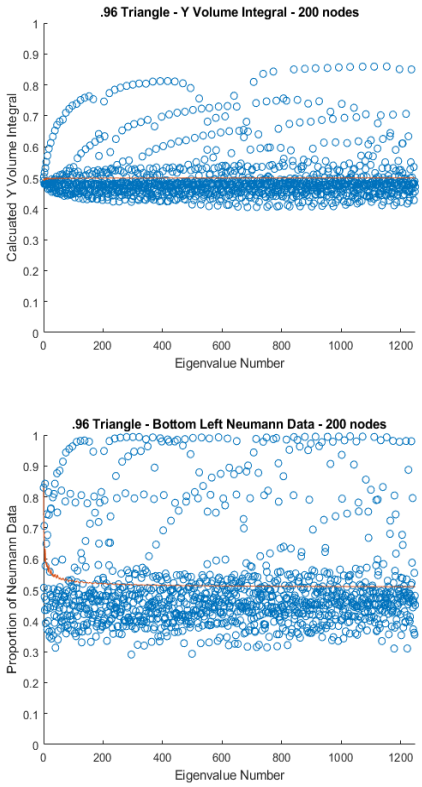


FIGURE 10. .96 三角形 - 1250 个特征值 - Y体积积分和左下角诺伊曼图

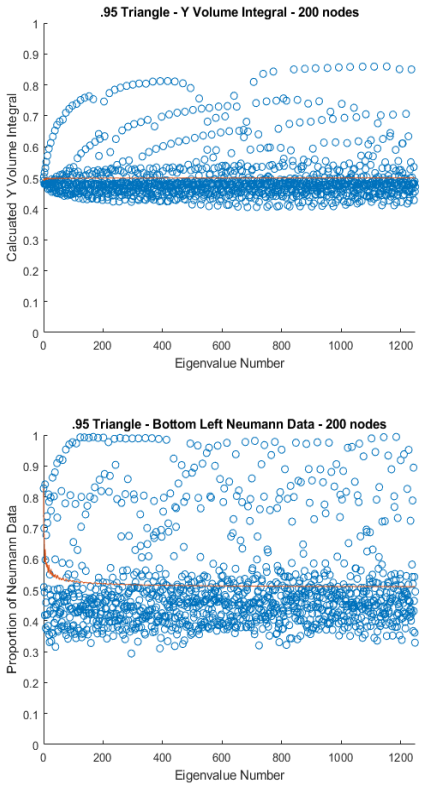


FIGURE 11. .95 三角形 - 1250 个特征值 - Y体积积分和左下角诺伊曼图

References

[CdV85] Y. Colin de Verdi`ere. 拉普拉斯算子特征函数的遍历性。 *Comm. Math. Phys.*，102 3 497( ): – 502，1985。[Chr17] Hans Christianson。三角形上诺伊曼数据质量的等分布。

Proc. Amer. , ( ): – 。[

Math. Soc. 145 12 5247 5255, 2017

Chr19] Hans Christianson。单纯形上诺伊曼数据质量的等分布及一个简单的反问题。 *Math. Res. Lett.*，26(2):421–445，2019。[CTZ12] Hans Christianson、John Toth 和 Steve Zelditch。柯西数据的量子遍历限制：内部量子唯一遍历与限制量子唯一遍历。 *preprint*，2012。[Has10] Andrew Hassell。并非量子唯一遍历的遍历台球。

Ann. of Math. , ( ): – 。附录

(2) 171 1 605 618, 2010

由作者和 Luc Hillairet 撰写。[HZ04] Andrew Hassell 和 Steve Zelditch。特征函数边界值的量子遍历性。 *Comm. Math. Phys.*，248(1):119–168，2004。[Lin06] Elon Lindenstrauss。不变测度与算术量子唯一遍历。 *Ann.* , ( ): – 。

of Math. (2) 163 1 165 219, 2006

[MR12] Jens Marklof 和 Ze´ev Rudnick。有理多边形上几乎所有特征函数都是均匀分布的。 *J. Spectr. Theory*，2(1):107–113，2012。[Shn74] A. I. Shnirelman。特征函数的遍历性质。 *Uspehi Mat. Nauk*，29(6(180)):181–182，1974。[TZ12] J.A. Toth 和 S. Zelditch。量子遍历限制定理 I: 遍历台球区域中的内部超曲面。 *Annales Henri Poincaré*，13:599–670，2012。[TZ13] John A. Toth 和 Steve Zelditch。量子遍历限制定理：无边界流形。 *Geom. Funct. Anal.*，23(2):715–775，2013。[Zel87] Steven Zelditch。紧致双曲曲面上特征函数的均匀分布。*Duke Math. J.*，55(4):919–941，1987。[ZZ96] Steven Zelditch 和 Maciej Zworski。遍历台球中特征函数的遍历性。*Comm. Math. Phys.*，175(3):673–682，1996。

（H. Christianson） Department of Mathematics,
University of North Carolina.*Email address*: hans@math.unc.edu(D. Pezzi)
Department of Mathematics, Johns Hopkins.*Email address*: dpezzi1@jhu.edu