arXiv:2301.03557v1 [math.DS] 9 Jan 2023

利用猎物丰度同步两个混沌GLV模型

SHUBHANGI DWIVEDI 电子邮件：SHUBHANGI.DWIVEDI176@GMAIL.COM，NITU KUMARI 电子邮件：NITU@IITMANDI.AC.IN 印度理工学院曼迪分校数学与统计科学学院，卡曼德，喜马偕尔邦，175005，印度；以及 Ranjit Kumar Upadhyay 印度理工学院（ISM）丹巴德分校应用数学系，贾坎德邦，826004，印度 电子邮件：RANJIT.CHAOS@GMAIL.COM

（录用日期：2021年11月2日）

ABSTRACT. 过剩猎物这一概念，即斑块生态系统中某些区域内猎物数量过多，对捕食者种群的同步具有重要影响。这些区域称为“热点区域”，其猎物密度高于其他区域，因此会吸引更多捕食者聚集。由此，捕食者种群变得更加稳定且易于预测，因为它们较少为了觅食而迁移到其他区域。这一现象会对捕食者、猎物以及生态系统的整体运作产生重要影响。本研究采用由一个猎物种群和两个捕食者种群构成的广义洛特卡–沃尔泰拉（GLV）模型，考察两个混沌食物网之间的同步。首先，我们研究三种功能反应（线性、Holling II 型和 Holling III 型）对系统动力学的影响。研究中，我们考虑具有线性功能反应且呈现混沌振荡的模型，并应用控制器使其不稳定定点稳定下来。本研究有助于理解如何将混沌生态模型用于预测一个栖息地中竞争物种的种群数量，方法是利用另一个系统中类似种群的信息。为此，我们构建了一个驱动-响应系统，其中猎物作为驱动变量，而两个捕食者都仅依赖于猎物。我们采用主动与自适应控制方法，使两个耦合GLV模型实现同步，并通过数值模拟验证分析结果。

AMS 分类：—

关键词：李雅普诺夫指数、慢流形方程、混沌控制、完全替代同步、主动与自适应控制技术

©*TARU PUBLICATIONS*

1. Introduction

在古代哲学和神话学中，“混沌”一词指的是有序宇宙形成之前，据说曾经存在的未成形物质的无序状态。在探寻真理的过程中，科学遇到了被称为混沌的惊人现象。自 20 世纪 60 年代发现混沌系统以来，混沌掀起了非线性动力学研究热潮。混沌理论源于爱德华·洛伦兹的研究。他于 1963年发表的论文《确定性非周期流》[1], 被认为奠定了混沌理论的基础。Hunt 和 Ott [2] 回顾了这一问题，并提出了一种在计算上可行、基于熵的混沌良好定义。他们将混沌定义为“在给定约束区域（有界正体积子集）上存在正扩张熵（EE）（对于无穷可微映射，扩张熵等于拓扑熵）”，这证实了这两种概念（COS 和 OS）。由于扩张熵具有简洁、可计算和普遍适用等特性，他们称之为混沌的“良好”定义。混沌系统对初始条件敏感，在拓扑意义上具有混合性，且周期轨道稠密 [3], [4]。哪怕是极其微小的差异，混沌动力系统也可能产生截然不同的轨迹。混沌的主要特征是系统不会重复其过去的行为。从数学上说，混沌动力系统被归类为至少具有一个正李雅普诺夫指数的非线性动力系统[5]。

混沌理论不只是关于混沌——它还包含两个方面：混沌控制和混沌同步。对混沌控制的研究以及对混沌模型行为的理解已受到广泛关注，并应用于安全通信、生物学、神经网络、金融等诸多领域。而混沌同步指的是不同混沌过程在时间上的一致。乍看之下，混沌系统似乎难以实现同步，但在不同情境下，人们已观察并研究过这种现象。

1665年，荷兰物理学家惠更斯观察到通过耦合实现节律调整的现象。他注意到，悬挂在同一根横梁上的摆钟会缓慢地调整相位。1984年，Kuramoto提出了同步发生的理论，而Pecora和Carroll [6] 回顾了混沌系统中的同步研究，并借助同步流形提出了一种更具几何学视角的观点。1999年，Blasius阐释了季节性同步的混沌种群周期的理论分析 [7]。这些贡献都促使研究者认识到，同步是

物理系统和生物系统中的一种基本现象。在文献中，这种现象根据同步的程度或类型，被称为不同形式，例如相位锁定、频率牵引、广义同步和完全锁定。

混沌系统的同步可以通过配置驱动系统和响应系统来实现，其目标是利用驱动系统的输出控制响应系统，使响应系统的输出渐近地跟踪驱动系统。然而，构建完全相同的混沌同步生态系统值得商榷，因为这可能对生物多样性构成威胁。正如 Pecora 和 Carroll 在开创性研究中发现的那样，实现两个系统完全同步的另一种方式，就是如今所称的完全替换技术。完全替代同步对斑块生态系统网络大有裨益，因为它有助于识别在剧烈混沌振荡下驱动群体协调的潜在机制。在种群生物学中，如果种群通过环境或生物相互作用相互耦合，其混沌动力学可能会同步。

从生态学角度来看，确定一种生态上可行的耦合方案至关重要，该方案须确保多斑块生态系统中所有物种的持久性和全局吸引性。Upadhyay 和 Rai [8] 已证明，具有不同类型顶级捕食者的两个非同一混沌生态系统，可以使用 Lu 和 Cao[9] 提出的算法实现同步。该方法的思路是处理参数估计中涉及的不确定性。控制理论中有许多用于实现混沌系统同步的方法，包括自适应控制法、反步法、主动控制法、时滞反馈方法等。

在上述方法中，用于混沌同步的线性主动控制技术广受欢迎，并且在同步相同和不同的混沌系统方面十分有效。在本研究中，我们将采用主动控制和自适应控制方法，实现相同或不同系统之间的混沌同步。主动控制法最初由 E.W. Bai 和 K.E. Lonngren 用于混沌同步 [10], [11]。在此方法中，基于李雅普诺夫稳定性理论设计非线性控制器，并利用驱动系统和响应系统的已知参数，实现耦合系统的同步。

由于我们研究的是生态模型，因此无法精确获知系统参数。自适应控制是控制和同步具有不确定参数的非线性系统的一种常用技术 [12]。该方法能够使模型在运行过程中适应数据同化，这可能有助于预测真实系统未来的行为 [13], [14]。在此方法中，通过设计控制律和参数更新律，使混沌响应系统的行为与混沌驱动系统一致。该方案能够在存在不确定性和参数变化的情况下维持系统的稳定性能。因此，混沌系统的渐近全局同步控制可确保误差动力学收敛至平衡点。

本文研究三维混沌广义洛特卡–沃尔泰拉系统。与洛特卡–沃尔泰拉类型的竞争性捕食者–猎物模型相比，该系统是一个更一般的模型。我们考察了该模型的性质，包括平衡点分析、耗散性质、最大李雅普诺夫指数和慢流形分析。我们采用线性反馈控制，使模型稳定在其平衡点。我们的目标是在生态学背景下，利用完全替换同步，使两个具有相同驱动变量但初始条件不同的相同GLV模型实现同步。我们假设猎物种群十分丰富，以至于附近斑块的捕食者也会以其为食。为在双斑块系统中仅通过小幅调整便无限期维持同步，我们分别以数学方式设计主动控制律（系统参数已知时）和自适应控制律（系统参数未知时），并通过数值模拟验证分析结果。

2. The Model

广义洛特卡-沃尔泰拉方程是自治且确定性的。模型更一般形式下的动力学定义如下：

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t)(r_i + f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

初始条件为

$$x_i(0) = x_{(i,0)},\ for\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

其中， n 表示物种数量， $x_i(t)$表示种群 i的规模， $\dot{x}_i(t)$表示物种 i的时间导数， t 是时间变量， $x_{(i,0)}$ 是物种的初始种群数量

物种 i的数量， r_i 表示物种 i的自增长，而 $f_i(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$是一个非线性多变量函数，其中包含每个$i$的种内和种间竞争项。尽管种群通常以整数计数，但对于每个 i ， $x_i(t)$都是实数，可解释为密度、生物量或其他与物种数量相关的度量。令 R^n 表示欧几里得空间，函数 f_i 对每个 i都是连续、光滑且取实值的函数。我们对 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ [15]的 f_i 作如下假设。

(i) 对每个 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$， f_i 在定义域 $D \subset R^n$ 上有界。
(ii) 存在常数 $K_i > 0$，使得对每个 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$||f_i(X) - f_i(Y)|| \leq K_i \, ||X - Y|| \quad \forall \quad X, Y \in D \subset R^n.$$

2.1. 具有线性功能反应的模型。广义洛特卡－沃尔泰拉（GLV）模型及其变体已被许多作者研究过 [16],[17],[18]。我们主要关注三维广义洛特卡－沃尔泰拉混沌系统，该系统由 Samardzija 和 Greller 于 1988 [19] 提出。我们假设该模型的向量场具有上述性质，其形式如下

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1(1 - x_2 + rx_1 - px_3x_1), \\ \dot{x_2} &= x_2(-1 + x_1), \\ \dot{x_3} &= x_3(-q + px_1^2). \end{aligned} \tag{1}$$

其中 x_1、 x_2、 x_3 是状态变量，分别代表猎物、中级捕食者和顶级捕食者种群。这里 p、 q、 r 是正参数。作者 [18] 发现该系统在特定参数范围 $p = 2.9851$、q =3、$r = 2$ 内呈现混沌，并展现出有趣的复杂动力学行为。对于这组参数值，两个不同初始条件（(1.0023, 1.0589, 0.6503) 和 ($1.0023 + 10^{-3}$、$1.0589 + 10^{-3}$、$0.6503 + 10^{-3}$)）下三个状态的轨道均对初始条件具有敏感依赖性（SDIC），如图 2.1 所示。图 2.1 展示了系统中的初值敏感依赖性：长期来看，初始条件为 ($1.0023 + 10^{-3}$、$1.0589 + 10^{-3}$、$0.6503 + 10^{-3}$) 的轨迹占据优势，超过初始条件为 (1.0023, 1.0589, 0.6503) 的轨迹。

此外，我们展示了 GLV系统 在三组不同参数下的动力学，以刻画其参数敏感性。系统中涉及的不同参数组

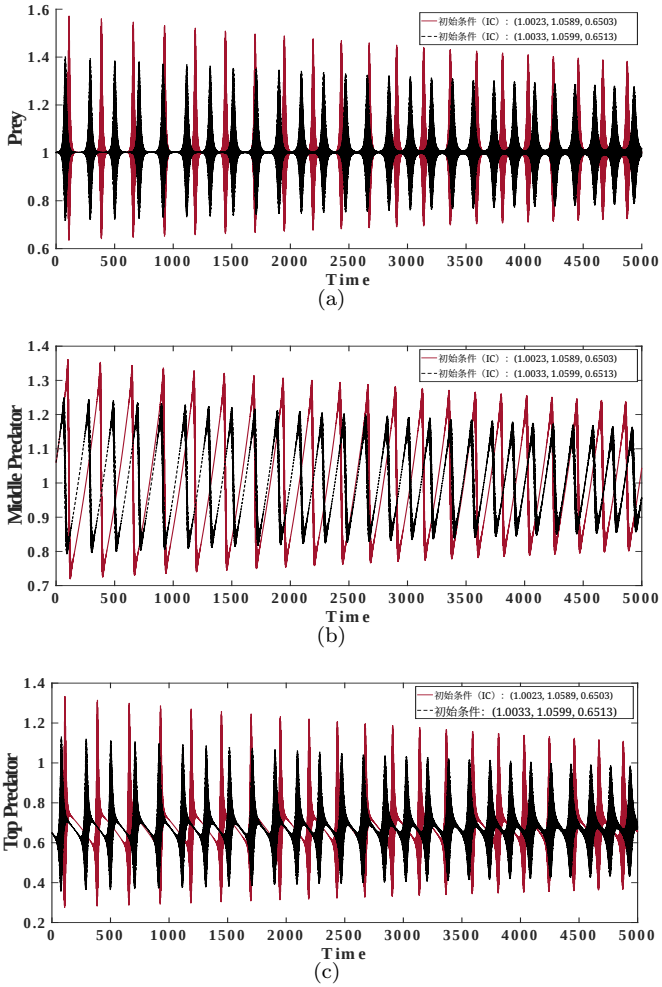

FIGURE 1. (a)、(b) 和 (c)：两个相近初始条件 ((1.0023, 1.0589, 0.6503) 和 $(1.0023+10^{-3}, 1.0589+10^{-3}, 0.6503+10^{-3})$) 下 x_1、x_2 和 x_3 的时间序列。

取值如下：

$$(p, q, r) \in \{(2.0451, 2.129, 2), (2.9851, 2.99, 2.1), (2.98098, 2.9799, 2)\}.$$

仿真中，我们将 GLV系统的初始条件设为 $x_1(0) = 1.0023$, $x_2(0) = 1.0589$, $x_3(0) = 0.6503$。图2、图3和图4展示了该系统的三维吸引子，以及在（x_1, x_2）、（x_1, x_3）和（x_2, x_3）平面上的二维投影

。从这些图中可以推断，系统对参数的敏感性有助于从其混沌动力学中恢复隐藏的秩序。

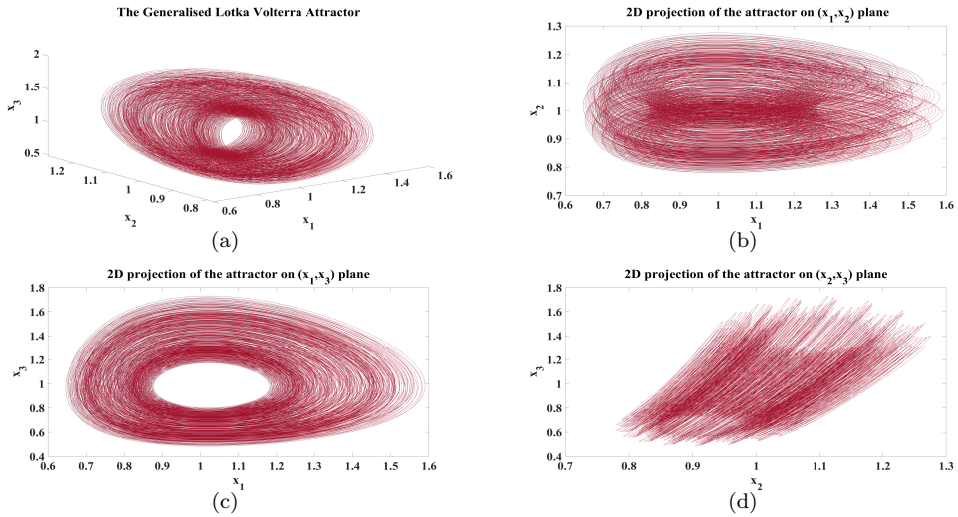

FIGURE 2. (a)：三维吸引子；(b)、(c) 和 (d)：分别为吸引子在 (x_1, x_2)、(x_1, x_3) 和 (x_2, x_3) 平面上的二维投影，对应于 $(p, q, r) = (2.0451, 2.129, 2)$。

接下来的小节将介绍另外两种具有不同功能反应的广义Lotka–Volterra模型变体。

2.2. 具有曲线型（HT II）功能反应的模型。为阐明功能反应的作用，我们用 Holling II 型功能反应（$(\frac{x_1}{x_1+d})x_2$）替换猎物与中级捕食者之间的线性交互项。猎物与中级捕食者之间非线性交互作用的生态学含义是，猎物对中级捕食者增长率的贡献为 $\frac{x_1x_2}{x_1+d}$。采用 Holling II 型功能反应后，新广义Lotka–Volterra模型的动力学可表示为

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1 - \frac{x_1x_2}{x_1+d} + rx_1^2 - p{x_1}^2x_3, \\ \dot{x_2} &= -x_2 + (\frac{x_2x_1}{x_1+d}), \\ \dot{x_3} &= -qx_3 + px_3x_1^2. \end{aligned} \tag{2}$$

仿真中，我们取参数值和初始条件为 $p = 2.514, q =$2.9089, $r = 2.1990507$, $d = .00198$ 和 x_1(0) $= 1.78$, x_2(0) $= 0.5020$, x_3(0) $= 1.01$

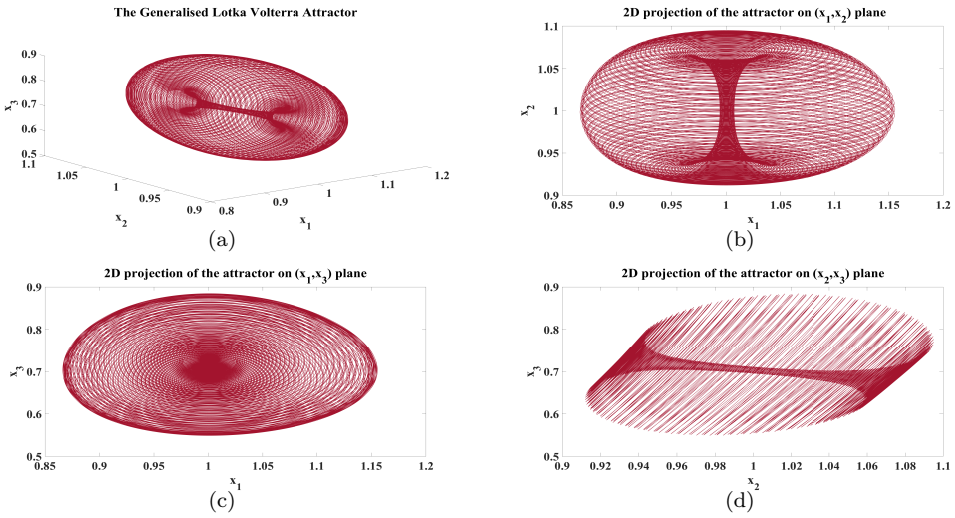

FIGURE 3. (a)：三维吸引子；(b)、(c) 和 (d)：吸引子分别在 (x_1, x_2)、(x_1, x_3) 和 (x_2, x_3) 平面上的二维投影，其中 $(p, q, r) = (2.9851, 2.99, 2.1)$。

分别。图5展示了具有 HT II型功能响应的 GLV系统的三维相图，其为“稳定焦点”。因此，对于一组合适的参数值和初始条件，GLV系统中功能响应的变化可以带来稳定动力学。

2.3. S形类型（HT III）功能反应模型。接下来，我们将猎物与顶级捕食者种群之间的相互作用项改为 Holling III 型功能反应。引入 Holling III 型功能反应会提高顶级捕食者对猎物的搜索活动。假设猎物密度增加，则具有 Holling III 型功能反应的新广义Lotka–Volterra模型的动力学可表示为

$$
\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_1 - x_1x_2 + rx_1^2 - p\frac{x_1^2x_3}{x_1^2+d},\\
\dot{x_2} &= -x_2 + x_1x_2,\\
\dot{x_3} &= -qx_3 + p\frac{x_1^2x_3}{x_1^2+d}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

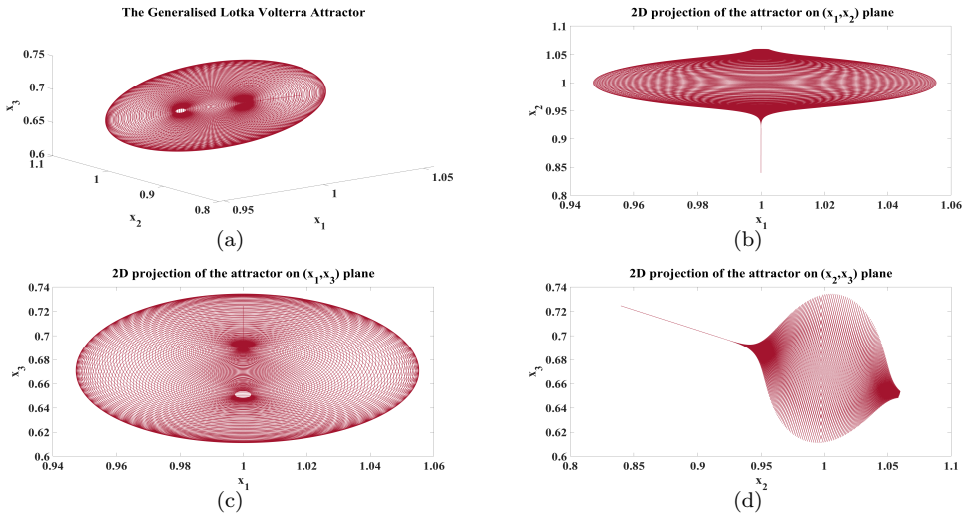

FIGURE 4. (a)：三维吸引子；(b)、(c) 和 (d)：吸引子在 (x_1, x_2)、(x_1, x_3) 和 (x_2, x_3) 平面上的二维投影，分别对应 $(p, q, r) = (2.98098, 2.9799, 2)$。

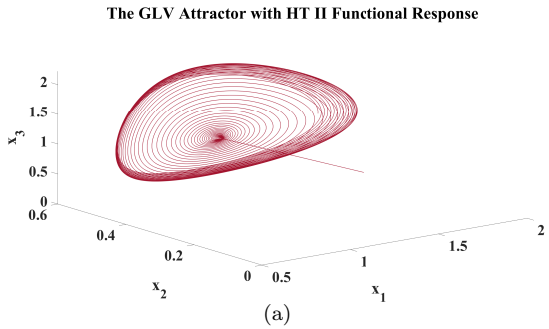

FIGURE 5. 具有 HT II型功能响应的 GLV方程的三维吸引子。

当参数值为 $p = 7.34$, $q = 2.0$, $r = 0.507$, $d = 3.198$ 时，系统 (3) 具有类似“极限环”的吸引子，这意味着模型 (3) 具有稳定的动力学。

对于每种变化，我们都找到了不同的参数值，使模型（1）、（2）和（3）呈现完全不同的动力学行为。我们推断，采用线性功能反应的GLV模型的不稳定动力学，在将线性功能反应改为HT II或HT III后，可以转变为稳定动力学。然而，这种方法

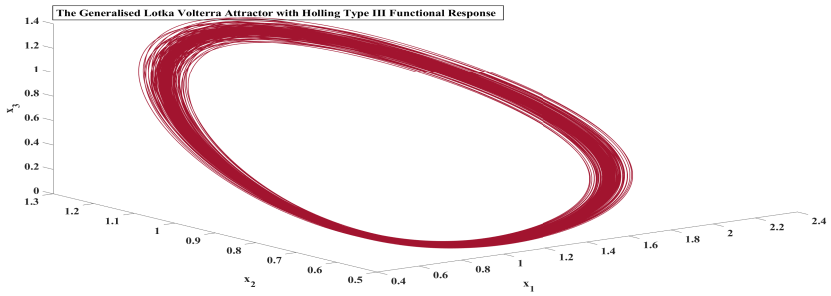

FIGURE 6.具有 HT III功能反应的广义 Lotka-Volterra 方程的三维吸引子。

未必适用于任意给定的情形。例如，当猎物种群数量充足时，捕食者通常不会遵循HT II或HT III功能反应所描述的捕食率。为解决这一问题，我们通过同步来控制模型（1）中的混沌，并使采用线性功能反应的两个耦合GLV模型实现完全替换同步。鉴于已有研究表明，GLV系统在多组参数下均存在混沌吸引子，我们从中选取参数组 $p = 2.9851, q = 3, r = 2$ （如 [18]所示）作进一步研究。

3. MATHEMATICAL PROPERTIES

本节讨论系统 (1) 的动力学和解析性质，包括正李雅普诺夫指数、慢流形方程、不变性、耗散、可行平衡点的稳定性，以及对不稳定平衡点不稳定性的控制。

3.1. 李雅普诺夫指数。对于三维系统，动力学的局部行为会沿着状态空间中的三个正交方向发生变化。在给定的混沌系统中，具有不同初始条件的邻近点可能沿一个轴相互远离，同时沿另一个轴彼此靠近。李雅普诺夫指数描述了在流 [3]作用下，具有不同初始条件的两条邻近轨迹之间的平均分离速率。正李雅普诺夫指数则表明系统存在混沌。仿真时，我们取系统（1）的参数值为 $p =$

2.0451, $q = 2.129, r = 2$。李雅普诺夫指数的动力学如图7所示。模型（1）的李雅普诺夫指数如下

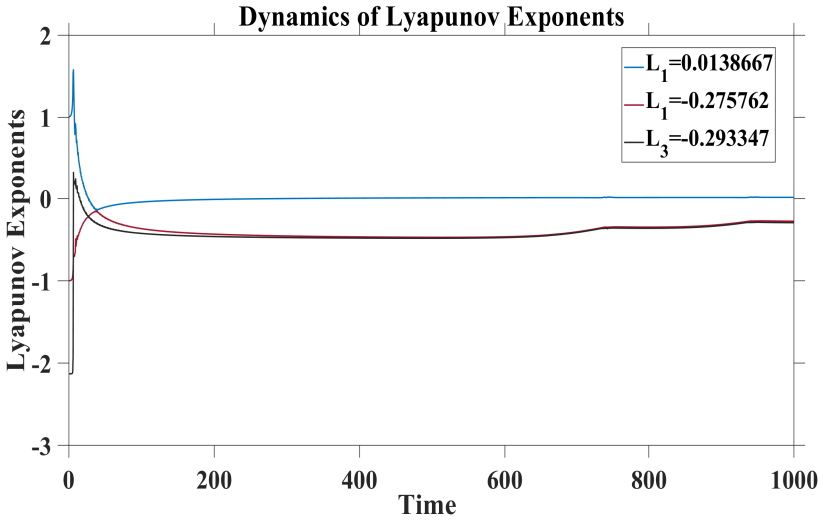

FIGURE 7. 系统（1）的李雅普诺夫谱动力学。

$$L_1 = 0.0138667 > 0, L_2 = -0.275762 < 0, L_3 = -0.293347 < 0.$$

其中， L_1 是系统（1）中混沌的判据。

3.2. 慢流形方程。将几何和拓扑技术引入混沌理论，促使数学家研究其潜在的几何结构。沿着这一思路，慢流形的表达式有助于恢复系统因初值敏感依赖性而丧失的部分确定性性质。为求得慢流形方程，我们将系统 (1) 视为慢—快自治动力系统（S-FADS）。在 S-FADS 中，变量分为两组：一组是快变量，另一组是慢变量；慢变量用于确定整个系统的行为。为得到该方程，我们假设慢流形局部由一个与切向系统的左快特征向量正交的平面定义。在参数值 $p = 2.9851$、$q = 3$、$r = 2$ 下，

广义Lotka–Volterra模型 (1) 的方程可写为

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1(1 - x_2 + 2x_1 - 2.9851x_3x_1), \\ \dot{x_2} &= x_2(-1 + x_1), \\ \dot{x_3} &= x_3(-3 + 2.9851x_1^2). \end{aligned} \tag{4}$$

点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ 处的雅可比矩阵 J 可表示为

$$J = \begin{bmatrix} 1 - x_2 + 4x_1 - 5.9702x_1x_3 & -x_1 & -2.9851x_1^2 \\ x_2 & -1 + x_1 & 0 \\ 5.9702x_1x_3 & 0 & -3 + 2.9851x_1^2 \end{bmatrix}$$

设 $\lambda_1(x_1, x_2, x_3)$ 是吸引子的相空间区域中很大一部分范围内雅可比矩阵的一个实数、负且占主导地位的特征值（即快特征值）。

此外，我们假设 $\lambda_2(x_1, x_2, x_3)$ 和 $\lambda_3(x_1, x_2, x_3)$ 是两个慢特征值。那么，与 $J^T(x_1, x_2, x_3)$ 的快特征值 λ_1 对应的特征向量 $Z_{\lambda_1}^T$ 为

$$|J - \lambda_1 I| \; Z_{\lambda_1} = 0. \tag{5}$$

其中 I 是 3×3 单位矩阵。方程 (6) 给出:

$$Z_{\lambda_1}^T = \begin{bmatrix} (-1 + x_1 - \lambda_1)(-3 + 2.9851x_1^2 - \lambda_1) \\ x_1(-3 + 2.9851x_1)^2) \\ 2.9851x_1^2(-1 + x_1 - \lambda_1) \end{bmatrix}.$$

在相空间的吸引部分（其中 $J(\mathbf{x})$ 具有快特征值 λ_1），慢流形的方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t).Z_{\lambda_1}^T = 0. \tag{6}$$

我们使用方程（7）定义慢流形方程。将 $\dot{\mathbf{x}}(t)$ 和 $Z_{\lambda_1}^T$ 代入方程（7），可将慢流形方程写为

(7)$\lambda_1^2(x_1 - x_1x_2 + 2x_1^2 - 2.9851x_1^2x_3) + \lambda_1(-4x_1 + 7x_1^2 - 4.9851x_1^3 - 3x_1x_2 + 2.9851x_1^3x_2 -$
$5.97020x_1^4 - 2.985100x_1^2x_3 + 2.9851x_1^3x_3) + ($
$3x_1 + x_1^2 - 8.985100x_1^3 - 2.9851x_1^4 + 5.970200x_1^5$
$+ 8.95530x_1x_3 - 17.910600x_1^2x_3 - 0.044478x_1^3x_3 + 17.821644x_1^4x_3 - 8.91082x_1^3x_3) = 0.$

其中， λ_1 是 J(x)的快特征值。由于 $\lambda_1(x_1, x_2, x_3)$是一个不确定的特征值，因此很难利用这个隐式方程在三维相空间中绘制慢流形表示。

3.3. 不变性性质。

定理3.1。设系统的向量表示法如下

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = H(\boldsymbol{x(t)}) = \begin{bmatrix} H_1(x_1, x_2, x_3) \\ H_2(x_1, x_2, x_3) \\ H_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$H_1(x_1, x_2, x_3) = x_1(1 - x_2 + rx_1 - px_3x_1),$$

$$H_2(x_1, x_2, x_3) = x_2(-1 + x_1),$$

$$H_3(x_1, x_2, x_3) = x_3(-q + p{x_1}^2).$$

其中 H_1、H_2 和 H_3 连续可微。假设 H 局部利普希茨，并生成流 ϕ_t(x)。令

$$L : D \subset R^3 \to R^3$$

是定义域 $D \subset R^3$ 上的连续可微函数，使得 $\dot{L}$(x) ≤ 0 在 D 中，则最大不变集 $\Sigma \subset D$ 是该集合；其中 $\nabla L.H$(x) $= 0$ $\forall$x $\in \Sigma$。

证明。考虑

$$L : D \subset R^3 \to R^3$$

是定义域 $D \subset R^3$ 上的连续可微函数，并定义为

$$L(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2}. \tag{9}$$

由方程 (9) 可得,

$$\dot{L}(x_1, x_2, x_3) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + x_3\dot{x}_3. \tag{10}$$

如果对于任意点 x $\in D$，集合 $D \subset R^3$ 在流 ϕ_t 下均为不变集

$$\phi_t(\mathbf{x}) \in D \ \forall \ t \in R.$$

设 Σ 是 $D \subset R^3$ 中一个无边界的光滑闭曲面，并假设 n 是曲面 Σ 在点 (x_1, x_2, x_3) 处的法向量。若有

$$\boldsymbol{n}. < \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3 >= 0 \ \forall \ (x_1, x_2, x_3) \in \Sigma. \tag{11}$$

考虑令 Σ 为 x_1x_2 平面，即 $x_3 = 0$。注意，向量 (0, 0, 1) 始终垂直于 Σ，且在点 $(x_1, x_2, 0)$ 处 $\in \Sigma$。因此我们有，

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = (x_1(1 - x_2 + rx_1 - px_3x_1), x_2(-1 + x_1), 0).$$

因此，

$$\langle (0, 0, 1).(x_1(1 - x_2 + rx_1 - px_3x_1), x_2(-1 + x_1), 0)\rangle = 0.$$

可以用类似的论证验证 x_1 和 x_2 平面，这表明每个坐标平面都是一个不变子集。这意味着，对于任意给定的正初始条件，$x_1(t)$ $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 在所有 t 时刻均为正；也就是说，任何从 R^3_+ 出发的轨迹都不会穿过坐标平面，这表明 R^3_+ 是该系统的一个不变集。□

3.4. 耗散。

定理 3.2。考虑自治向量场

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = H(\boldsymbol{x}) \ for \ \boldsymbol{x} \in R^3,$$

并假设它生成一个流 $\phi_t(\mathbf{x})$。设 D_0 是 R^3 中的一个定义域，其体积为 V_0，而 $\phi_t(D_0)$ 是它在该流作用下的演化。若 $V(t)$ 是 D_t 的体积，则体积随时间的变化率为

$$|\frac{dV}{dt}|_{t=0} = \int_{D_0} \nabla.H d\boldsymbol{x}.$$

如果对于所有 $t > 0$，系统 (1) 的时间-t 映射都会减小体积，则该系统是耗散的。

证明。任何动力系统中的耗散性都表现为相体积的平均收缩。为验证这一点，根据变换的雅可比矩阵的定义，我们将体积 $V(t)$ 表示为以下形式：

$$V(t) = \int_{D_0} |\frac{d\phi_t(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}| d\mathbf{x}. \tag{12}$$

在 $t = 0$ 的邻域内展开 $\phi_t(\mathbf{x})$。由于向量场 $H(\mathbf{x})$ 足够光滑，因此在 R^3 上的每一点都有一个切平面，所以我们可以通过泰勒级数展开 $\phi_t(\mathbf{x})$。于是得到：

$$\phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}t + O(t^2) \ for \ t \ \to 0 \tag{13}$$

由于

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = H(\mathbf{x}), \tag{14}$$

由方程（15）可得,

$$\phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + H(\mathbf{x})t + O(t^2)\ for\ t\ \to 0. \tag{15}$$

由此可得

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} = I + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}t + O(t^2),$$

$$|\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}| = |I + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}t| + O(t^2). \tag{16}$$

这里 I 是 3×3 单位矩阵，因此 $\det I$ 等于 1。通过对行列式进行展开，将表达式 (17) 展开后，我们得到

$$|\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}| = 1 + trace(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}})t + O(t^2). \tag{17}$$

注意

$$trace(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}) = \nabla.H, \tag{18}$$

因此，我们有

$$V(t) = V_0 + \int_{D_0}((\nabla.H)t + O(t^2))d\mathbf{x}. \tag{19}$$

可得

$$|\frac{dV}{dt}|_{t=0} = \int_{D_0} \nabla.H d\mathbf{x}, \tag{20}$$

也就是说，如果体积缩小，那么向量场的发散将严格为负 [3]。现在将模型 (1) 的方程用向量表示法表示，并计算其雅可比矩阵

$$J(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \tag{21}$$

该模型的雅可比矩阵 $J(x_1, x_2, x_3)$ 为

$$\begin{bmatrix} 1 - x_2 + 2rx_1 - 2px_1x_3 & -x_1 & -px_1{}^2 \\ x_2 & -1 + x_1 & 0 \\ 2px_1x_3 & 0 & -q + px_1^2 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

我们取参数值为

$$p = 2.9851, \quad q = 3, \quad r = 2. \tag{23}$$

上述论证表明，如果广义发散小于零，即，G.L.V 动力系统将是耗散的。

$$\sum_i \frac{\partial H_i}{\partial x_i} < 0. \tag{24}$$

其中使用了爱因斯坦求和约定。向量场 H 在 R^3上的发散如下

$$\begin{aligned} \nabla.H &= \tfrac{\partial H_1}{\partial x_1} + \tfrac{\partial H_2}{\partial x_2} + \tfrac{\partial H_3}{\partial x_3}, \\ \nabla.H &= -q - x_2 + (2r + 1 + px_1 - 2px_3)x_1. \end{aligned} \tag{25}$$

因此，若满足以下条件，系统 (1) 将是耗散的，

$$(2r + 1 + px_1 - 2px_3)x_1 < q + x_2. \tag{26}$$

□

3.5. 解的存在性与唯一性。由于我们研究的是种群动力学模型，因此至少存在一个解是必需的。然而，已存在解的唯一性将给出更为恰当的结果。这里我们提到两个定理，它们说明系统 (1) 的解对于所有 $t > 0$都唯一存在（证明的完整细节见 [18]）。

定理 3.3. 如果函数 f_1、 f_2 和 f_3 满足第 节中提到的假设 (1) 和 (2)，则函数 f_i 对于 $i \in \{1, 2, 3\}$ 的连续性保证了系统 (1) 的动力学在区域 $D \times I$ 中至少存在一个解，其中$I = (0, T]$，且区域 $D \subset R^3$ 的空间边界定义为

$$D = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) : \ max|x_i| \leq M, \ for \ i \in \{1, 2, 3\}\}$$

其中 $M > 0$。

定理 3.4. 设 D 是完备赋范线性空间 R^3 的闭子空间。考虑 $H: \ D \subset R^3 \to D$ 是利普希茨连续的，因此存在 $0 < K < 1$，使得

$$||H(\chi) - H(\psi)|| < K||\chi - \psi||$$

with

$$K = T.max(1 + 2M + 2rM + 4pM^2, 1 + 2M, q + 2pM^2)$$

对于 $0 < K < 1$，H(*t*) 将是一个压缩映射。借助巴拿赫不动点定理，可以确保 $0 < K < 1$ 是系统 (1) 解唯一性的充分条件。

3.6. 可行平衡点的稳定性。系统的平衡点

(1) 是以下代数方程的解

$$\begin{aligned} xx_1(1-x_2+rx_1-px_3x_1)&=0,\\ x_2(-1+x_1)&=0,\\ x_3(-q+px_1^2)&=0. \end{aligned} \tag{27}$$

通过求解系统 (27)，我们得到五个平衡点，

(28)

$$X_0^*=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad X_1^*=\begin{bmatrix}1\\1+r\\0\end{bmatrix},X_2^*=\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{q}{p}}\\0\\\frac{1+r\sqrt{\frac{q}{p}}}{\sqrt{pq}}\end{bmatrix},X_3^*=\begin{bmatrix}-\frac{1}{r}\\0\\0\end{bmatrix},X_4^*=\begin{bmatrix}-\sqrt{\frac{q}{p}}\\0\\\frac{-1+r\sqrt{\frac{q}{p}}}{\sqrt{pq}}\end{bmatrix}.$$

从生态学角度来看，负的种群密度并不现实，因为种群不可能为负值，因此，我们将向量 x $=(x_1,x_2,x_3)$ 视为 R_+^3的一个元素。 R_+^3 定义为

$$R_+^3=\{X\in R^3:x_i\geq 0\ for\ i\in\{1,2,3\}\}. \tag{29}$$

由于平衡点 X_0^*、 X_1^*和 X_2^*是集合 $Int(R_+^3)$的元素，因此，我们研究生态学上可行的平衡点 X_0^*、 X_1^*和X_2^*的局部稳定性。

(I) 平凡平衡点 X_0^*的稳定性。

定理3.5。考虑以下形式的模型 (1) 的动力学

$$\dot{\boldsymbol{x}}=H(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+f(\boldsymbol{x})\ for\ \boldsymbol{x}\in R^3. \tag{30}$$

若满足以下三个条件

(i) 常矩阵 $A_{3\times 3}$ 有 3 个实部非零的特征值，(ii) f(x) 光滑，且 (iii) $\lim_{||\boldsymbol{x}||\to 0}\frac{||f(\boldsymbol{x})||}{||\boldsymbol{x}||}=0$,

---

则在临界点 X_0^* = (0,0,0) 的某个邻域内，存在稳定流形 W_s 和不稳定流形 W_u ，其维数 n_s 和 n_u 分别与系统的稳定流形 E_s 和不稳定流形 E_u 的维数相同

$$\dot{Z}(t)=AZ.$$

在 x $=\boldsymbol{0}$ 中， E_s 和 E_u 与 W_s 和 W_u[20] 相切。

证明。对于 GLV系统， $X_0^* = (0,0,0)$ 是平凡平衡点。下面我们检查定理 I 中提到的全部三个条件。

(i) 注意，对于模型 **(1)**，常矩阵 $A_{3\times 3}$ 为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -q \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的行列式非零，当且仅当 $q \neq 0$。由于我们取了 $q = 3$，因此，A 的所有特征值实部均非零。

(ii) 对于模型 **(1)**，函数 $f_1(x_1, x_2, x_3)$、 $f_2(x_1, x_2, x_3)$ 和 $f_3(x_1, x_2, x_3)$ 被视为

$$\begin{aligned} x_1(-x_2 + rx_1 - px_3x_1) &= f_1(x_1, x_2, x_3), \\ x_2x_1 &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ x_3(px_1^2) &= f_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

这三个函数均连续，且对所有 $\mathbf{x} \in R^3$ 均具有连续偏导数，这意味着 $f(\mathbf{x})$ 在 R^3上光滑。因此，第二个条件也成立。

(iii) 对于任意 $\mathbf{x} \in R^3$，通过以下变换将笛卡尔坐标转换为球坐标

$$\begin{bmatrix} x_1 = r\sin\theta\cos\phi \\ x_2 = r\sin\theta\sin\phi \\ x_3 = r\cos\theta \end{bmatrix},$$

其中 $r \geq 0$、 $0 \leq \theta \leq \pi$ 和 $0 \leq \phi \leq \pi$.

在模型 **(1)** 中使用此变换，我们得到

$$\lim_{||\mathbf{x}||\to 0} \frac{||f(\mathbf{x})||}{||\mathbf{x}||} = 0.$$

因此，系统 **(1)** 的临界点 **(0,0,0)** 与该系统的临界点类型相同

$$\dot{Z}(t) = AZ.$$

A 的特征值为 1、 -1 和 $-q$ ，这表明 (0,0,0) 是系统 $\dot{Z(t)} = AZ$的鞍结点。因此，模型 (1) 的平凡稳态 $X_0^* =$ (0,0,0) 是一个鞍点。

□

(II) 轴向平衡点的稳定性 X_1^*。

参数值为 $p = 2.9851$, $q =$3, $r = 2$ 时，模型 (1) 的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} 1 - x_2 + 4x_1 - 5.9702x_1x_3 & -x_1 & -2.9851x_1^2 \\ x_2 & -1 + x_1 & 0 \\ 5.9702x_1x_3 & 0 & -3 + 2.9851x_1^2 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

模型 (1) 关于 $X_1^* =$ (1, 3, 0) 的雅可比矩阵 (31) 得到如下雅可比矩阵

$$J_{X_1^*} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2.9851 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.0149 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

矩阵 (32) 的特征方程 $|J_{X_1^*} - \lambda I| = 0$ 为

$$\lambda^3 - (1.9851)\lambda^2 + (2.9702)\lambda + 0.0447 = 0. \tag{33}$$

特征方程 (33) 的特征值如下

$$\lambda_1 = -0.014900,\ \lambda_2 = 1 + \sqrt{2}\iota,\ \lambda_3 = 1 - \sqrt{2}\iota. \tag{34}$$

由于 λ_2 和 λ_3 具有正实部，因此 $X_1^* =$ (1,3,0) 是不稳定平衡点。

(III) 平面平衡点 X_2^*的稳定性。

模型 (1) 在参数值 $p = 2.9851$, $q =$下的雅可比矩阵

3, $r = 2$ 给定为

$$J = \begin{bmatrix} 1 - x_2 + 4x_1 - 5.9702x_1x_3 & -x_1 & -2.9851x_1^2 \\ x_2 & -1 + x_1 & 0 \\ 5.9702x_1x_3 & 0 & -3 + 2.9851x_1^2 \end{bmatrix}. \tag{35}$$

模型（1）在 X_2^* = (1.002493,0,1.4159)处的雅可比矩阵（35）得到以下雅可比矩阵

$$J_{X_2^*} = \begin{bmatrix} 3.004986 & -1.002493 & 3.000002 \\ 0 & .002493 & 0 \\ 6.00887 & 0 & .000002 \end{bmatrix}. \tag{36}$$

矩阵 (36) 的特征方程 $|J_{X_2^*} - \lambda I| = 0$ 为

$$\lambda^3 + (0.997507)\lambda^2 + (18.027423)\lambda - 0.044949 = 0. \tag{37}$$

特征方程 (37) 具有以下特征值

$$\lambda_1 = -0.002493,\ \lambda_2 = -0.5 + 4.216\iota,\ \lambda_3 = -0.5 - 4.216\iota. \tag{38}$$

由于矩阵 (36) 的三个特征值的实部均为负，因此表明 X_2^* = (1002493,0,1.4159) 是局部稳定平衡点。

显然，平面平衡点是稳定的，而平凡平衡点和轴向平衡点是不稳定平衡点。由于平凡平衡点表示三个物种的密度均为零，因此我们忽略平凡平衡点的不稳定性。从生态学角度来看，我们主要关注非平凡不稳定平衡点 X_1^*，并尝试通过添加一些外部控制输入使其稳定。

3.7. 轴向平衡点不稳定性的控制。为了抑制 X_1^* = (1, 3, 0) 的不稳定性，我们考虑以下形式的受控 GLV 系统

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1(1 - x_2 + rx_1 - px_3x_1) + u_1, \\ \dot{x_2} &= x_2(-1 + x_1) + u_2, \\ \dot{x_3} &= x_3(-q + px_1^2) + u_3. \end{aligned} \tag{39}$$

我们引入外部控制律

$$\begin{aligned} u_1 &= -\mu_1(x_1 - 1), \\ u_2 &= -\mu_2(x_2 - 3), \\ u_3 &= -\mu_3(x_3 - 0). \end{aligned} \tag{40}$$

其中，x_1、x_2、x_3 为反馈变量，μ_1、μ_2、μ_3 为正反馈增益。将控制律 (40) 代入 (39)，受控系统

(39) 的形式如下

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1(1 - x_2 + rx_1 - px_3x_1)) - \mu_1(x_1 - 1), \\ \dot{x_2} &= x_2(-1 + x_1) - \mu_2(x_2 - 3), \\ \dot{x_3} &= x_3(-q + px_1^2) - \mu_3(x_3 - 0). \end{aligned} \tag{41}$$

定理 3.6. 若正增益 μ_1、μ_2 和 μ_3 满足以下不等式[21]，则模型 (1) 的平衡点 $X_1^* =$ (1,3,0) 将渐近稳定。

$$\begin{aligned} &\mu_1 && > 2, \\ &\mu_1\mu_2 && > 1 + 2\mu_2, \\ &\mu_1\mu_2(\mu_3 + 0.0149) && > \mu_2(2\mu_3 + 2.2528) + \mu_3 + 0.0149. \end{aligned} \tag{42}$$

证明. 系统 (41) 的雅可比矩阵 J 为

$$\begin{bmatrix} 1 - x_2 + 2x_1(r - px_3) - \mu_1 & -x_1 & -px_1^2 \\ x_2 & -1 + x_1 - \mu_2 & 0 \\ 2px_1x_3 & 0 & -q + px_1^2 - \mu_3 \end{bmatrix} \tag{43}$$

让我们考虑一下

$$\begin{aligned} e_1 &= (x_1 - 1), \\ e_2 &= (x_2 - 3), \\ e_3 &= (x_3 - 0). \end{aligned} \tag{44}$$

由 (44) 可得误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e_1} &= (2 - \mu_1)e_1 - e_2 - 2.9851e_3, \\ \dot{e_2} &= 3e_1 - \mu_2e_2, \\ \dot{e_3} &= -(0.014900 + \mu_3)e_3. \end{aligned} \tag{45}$$

若误差系统 (45) 稳定到 (0,0,0)，则具有常数且已知参数的系统 (1) 将稳定到稳态 $X_1^* =$ (1,3,0)。

为研究误差系统平衡点 (0, 0, 0) 的稳定性，我们考虑如下李雅普诺夫函数 $L(e_1, e_2, e_3)$:

$$L = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2). \tag{46}$$

L 在 (0, 0, 0) 邻域内的时间导数为

$$\dot{L} = (2 - \mu_1)e_1^2 + 2e_1e_2 - \mu_2e_2^2 - 2.9851e_1e_3 - (0.0149 + \mu_2)e_3^2. \tag{47}$$

李雅普诺夫函数的时间导数可改写为以下形式

$$\dot{L} = \mathbf{e}^T M \mathbf{e}. \tag{48}$$

其中，$\mathbf{e} = ((x_1 - 1), (x_2 - 3), (x_3 - 0))$ 是 R^3 中的误差向量，$\mathbf{e}^T$是误差向量 $\mathbf{e}$ 的转置，矩阵 M是 3×3 表示为

$$M = \begin{bmatrix} 2 - \mu_1 & 1 & -1.49250 \\ 1 & -\mu_2 & 0 \\ -1.49250 & 0 & -(0.0149 + \mu_3) \end{bmatrix}$$

根据李雅普诺夫稳定性理论，若 $L < 0$，系统 (45) 的平衡点 (0, 0, 0) 将渐近稳定。并且，若矩阵 M 为负定，则 $L < 0$ 。考虑到这一点，我们发现，当正反馈增益 μ_1和 μ_2 满足以下不等式时，上述条件将得到满足，

$$\begin{aligned} &\mu_1 && > 2, \\ &\mu_1\mu_2 && > 1 + 2\mu_2, \\ &\mu_1\mu_2(\mu_3 + 0.0149) && > \mu_2(2\mu_3 + 2.2528) + \mu_3 + 0.0149. \end{aligned} \tag{49}$$

□

4. Complete Replacement Synchronization

为研究完全替代同步技术，我们考虑两个参数相同、初始条件不同的相同混沌GLV系统。由于需要通过模型间的耦合来维持同步状态，我们用两个控制器耦合两个模型的状态，并以猎物种群 x_1驱动响应系统。为此，我们从响应系统中移除猎物，并驱动其对应系统。在这里，我们可以将猎物种群 x_1 视为响应系统的驱动变量，并假设它在两个耦合GLV模型构成的系统中是多余的。由此构造出一个新的五维驱动—响应系统，其驱动变量和响应变量分别为(x_{1d}, x_{2d}, x_{3d})和(x_{2r}, x_{3r})

。具有 x_{1d} 驱动配置的耦合混沌系统如下：

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\textbf{(Drive System)} & \\
\dot{x}_{1d} & = x_{1d}(1 - x_{2d} + rx_{1d} - px_{3d}x_{1d}), \\
\dot{x}_{2d} & = x_{2d}(-1 + x_{1d}), \\
\dot{x}_{3d} & = x_{3d}(-q + px_{1d}^2), \\
 & \\
\textbf{(Response System)} & \\
\dot{x}_{2r} & = x_{2d}(-1 + x_{1d}) + u_1, \\
\dot{x}_{3r} & = x_{3r}(-q + px_{1d}^2) + u_2.
\end{array}
\right\} \tag{50}
$$

$$x_{2d}(0) \neq x_{2r}(0) \; and \; x_{3d}(0) \neq x_{3r}(0).$$

4.1. 同步流形稳定性的主动控制律。

定理4.1. 对于方程（24）中驱动系统与响应系统之间的耦合，当 μ_1 和 μ_2为正，且 μ_1 和 μ_2 足够大时，完全同步流形 $\Omega = [x_{2d} = x_{2r},\ x_{3d} = x_{3r}]$全局渐近稳定。

$$\mu_1 + 1 > x_{1d}, \qquad \mu_2 + q > px_{1d}^2.$$

证明。我们考虑由方程（50）给出的驱动-响应系统，并通过正的线性常数μ_1 和 μ_2，将单向控制器添加到响应系统中。我们为响应系统选择两个控制器，如下所示：

$$
\begin{array}{ll}
u_1 & = -\mu_1(x_{2r}(t) - x_{2d}(t)), \\
u_2 & = -\mu_2(x_{3r}(t) - x_{3d}(t)).
\end{array} \tag{51}
$$

任何动力系统（无论是否混沌）中各种形式的完全同步的存在，实际上都是动力学行为受限于相空间中的一个平坦超平面的体现；也就是说，运动始终被限制在一个可称为同步流形 [22]的超平面上。因此，我们将方程（50）中系统的完全同步流形表示为

$$\Omega = [x_{2d} = x_{2r}, x_{3d} = x_{3r}].$$

此外，我们考虑系统 (50) 中驱动系统与响应系统状态之间的误差，如下所示

$$
\begin{array}{ll}
e_2(t) & = x_{2r}(t) - x_{2d}(t), \\
e_3(t) & = x_{3r}(t) - x_{3d}(t).
\end{array} \tag{52}
$$

误差系统的动力学如下

$$\begin{aligned} \dot{e_2} &= (-1-\mu_1+x_{1d})e_2, \\ \dot{e_3} &= (-q-\mu_2+px_{1d}^2)e_3. \end{aligned} \tag{53}$$

现在，我们关注原点的稳定性。(53) 式右端的雅可比矩阵为

$$J(e_2,e_3)=\begin{bmatrix} -1+\mu_1+x_{1d} & 0 \\ 0 & -q+\mu_2+px_{1d}^2 \end{bmatrix} \tag{54}$$

我们将响应系统 ($x_{2d}(t)$ $x_{3r}(t)$) 视为由 x_{1d} 驱动的独立系统，那么方程 (54) 的解反映了 $\{x_{2r}(t)$ $x_{2d}(t)\}$ 和 $\{x_{3r}(t)$ $x_{3d}(t)\}$ 两条初始位置彼此接近的轨迹的收敛与发散情况。

接下来，我们采用李雅普诺夫函数构造法分析同步的可能性。我们将李雅普诺夫函数设为

$$L(e_2,e_3)=\frac{1}{2}(e_2^2+e_3^2). \tag{55}$$

$$\frac{dL}{dt}=e_2\dot{e_2}+e_3\dot{e_3}. \tag{56}$$

将误差的动力学方程 (53) 代入 (55)，得到

$$\frac{dL}{dt}=-[(\mu_1+1-x_{1d})e_2^2+(\mu_2+q-px_{1d}^2)e_3^2], \tag{57}$$

当 μ_1 和 μ_2 满足以下条件时，该式将严格为负

$$\begin{aligned} \mu_1+1 &> x_{1d}, \\ \mu_2+q &> px_{1d}^2. \end{aligned} \tag{58}$$

对所有 $t>0$。条件 (58) 确保我们考虑的是猎物种群的有界密度，因此可以对正反馈增益进行界定。因此，如果 μ_1 和 μ_2 满足 (58)，那么可以确保对于所有 $t>0$， $\frac{dL}{dt}<0$；换言之，当 $t\to\infty$ 时，完全替代同步随 $e_2\ and\ e_3\to 0$ 而成立。□

4.1.1. 数值模拟。由于适当的耦合既能影响频率，也能影响混沌振幅，因此，两个状态会重合（或近似重合），并进入同步状态。因此，预先设定所选择的耦合应在不扰动其混沌节律的情况下，促使耦合状态重合。我们对系统（50）进行数值积分，并展示结果

如图4.1.1所示，当选取正反馈增益 $\mu_1 = 0.000024$、$\mu_2 = 1.345$时，驱动系统和响应系统实现同步。

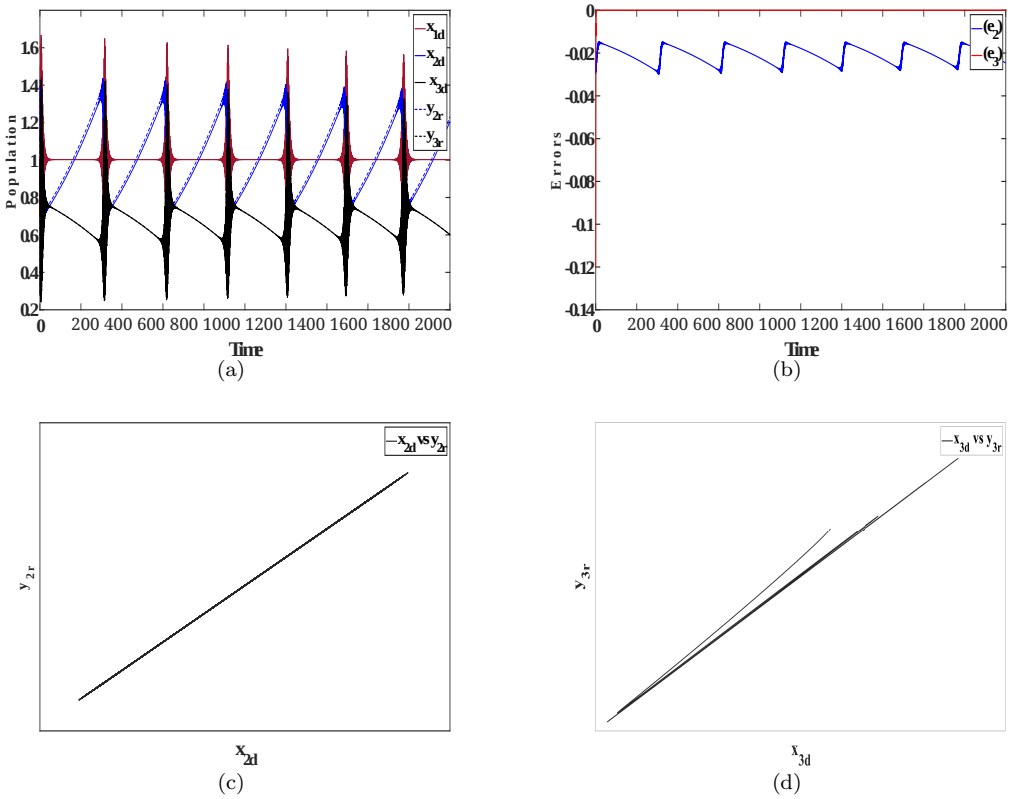

FIGURE 8. (a)：驱动系统和响应系统的解随时间的变化；(b)：驱动系统和响应系统之间的误差随时间的变化；(c)：$\{x_{2d}, x_{2r}\}$的同步图；(d)：$\{x_{3d}, x_{3r}\}$的同步图

4.1.2. 驱动-响应系统的李雅普诺夫谱。同步流形稳定的必要条件是最大的横向李雅普诺夫指数为负。在完全替代同步的情况下，横向李雅普诺夫指数也称为条件李雅普诺夫指数。这是因为新系统的李雅普诺夫指数取决于来自驱动系统的耦合[23]。李雅普诺夫谱是系统的全局指标，

它汇总了整个系统轨迹在相空间中的行为。观察这些转变的典型方法是查看系统李雅普诺夫指数的符号是否发生变化，这些指数由系统（50）的雅可比矩阵特征值的系综平均值求得 [24]。我们求解系统（50）的方程，得到雅可比矩阵如下：

$$J(x_{1d}, x_{2d}, x_{3d}, x_{2d}, x_{3r}) = A_{5\times 5},\ where\ A = [a_{ij}]. \tag{59}$$

矩阵 A 的各项如下：

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1 - x_{2d} + 2(r - px_{3d})x_{1d},\\
a_{12} &= -x_{1d}, \quad a_{13} = -px_{1d}^2,\\
a_{21} &= x_{2d}, \quad a_{22} = -1 + x_{1d},\\
a_{31} &= 2px_{1d}x_{3d}, \quad a_{33} = -q + px_{1d}^2,\\
a_{41} &= x_{2d}, \quad a_{42} = \mu_1, \quad a_{44} = -1 + x_{1d} - \mu_1 x_{2d},\\
a_{51} &= 2px_{3r}x_{1d}, \quad a_{53} = \mu_2, \quad a_{55} = -q + px_{1d}^2 - \mu_2,\\
a_{14} &= \quad a_{15} = \quad a_{23} = \quad a_{24} = \quad a_{25} = \quad a_{32} = 0,\\
a_{34} &= \quad a_{35} = \quad a_{43} = \quad a_{45} = \quad a_{52} = \quad a_{54} = 0.
\end{aligned}$$

对混沌轨迹所构成的所有相空间构型下的雅可比矩阵 J 特征值取平均，得到两个耦合GLV模型系统的五个李雅普诺夫指数。

对于参数值 $\{p, q, r\} = \{2.9851, 3, 2\}$，驱动-响应系统的李雅普诺夫指数为

$$\begin{aligned}
L_1 &= -0.011320,\\
L_2 &= -0.174464,\\
L_3 &= -0.22221,\\
L_4 &= -5.011,\\
L_5 &= -5.0059.
\end{aligned} \tag{60}$$

由于所有李雅普诺夫指数均为负，这证实了同步流形是稳定的，因此可以得出结论：耦合GLV系统的状态已实现同步。

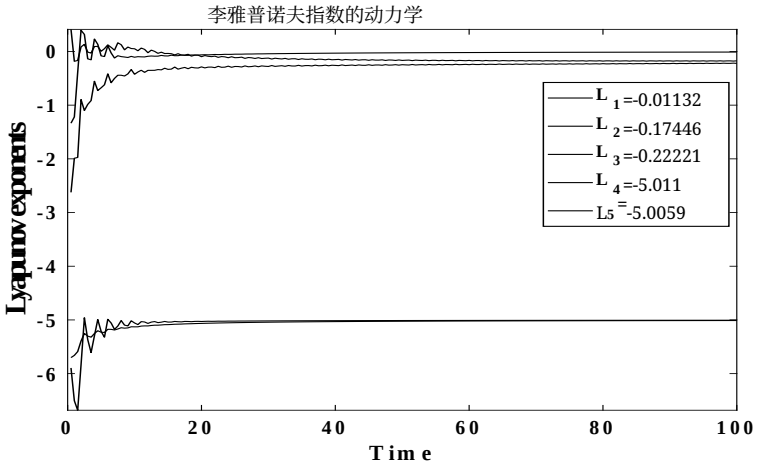

FIGURE 9. 采用正反馈增益 $\mu_1 = 0.000024$ 和 $\mu_2 = 1.345$ 耦合的两个 GLV 模型的李雅普诺夫指数。

4.2. 同步流形稳定性的自适应控制律。利用方法 [25], , 我们设计了一种非线性自适应控制器，用于实现两个具有未知参数的混沌GLV系统之间的全局完全替代同步。我们将驱动系统视为

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1d} &= x_{1d}(1 - x_{2d} + r x_{1d} - p x_{3d} x_{1d}), \\ \dot{x}_{2d} &= x_{2d}(-1 + x_{1d}), \\ \dot{x}_{3d} &= x_{3d}(-q + p x_{1d}^2). \end{aligned} \tag{61}$$

响应系统由受控混沌系统给出

$$\begin{aligned} \dot{x}_{2r} &= x_{2r}(-1 + x_{1d}) + u_1, \\ \dot{x}_{3r} &= x_{3r}(-q + p x_{1d}^2) + u_2. \end{aligned} \tag{62}$$

驱动系统与响应系统之间的同步误差定义为

$$\begin{aligned} e_2(t) &= x_{2r}(t) - x_{2d}(t) \\ e_3(t) &= x_{3r}(t) - x_{3d}(t). \end{aligned} \tag{63}$$

驱动系统与响应系统之间的误差动力学计算如下:

$$\begin{aligned} \dot{e_2} &= -e_2 + x_{1d} e_2 + u_1, \\ \dot{e_3} &= -q e_3 + p x_{1d}^2 e_3 + u_2. \end{aligned} \tag{64}$$

在（64）中，未知参数 p 和 q 分别通过使用参数估计值 $P(t)$ 和 $Q(t)$ 来确定。为此，我们考虑自适应控制

律 u_1 和 u_2，其正反馈增益为 μ_1 和 μ_2，形式如下

$$\begin{aligned} u_1 &= e_2 - x_{1d}e_2 - \mu_1 e_2, \\ u_2 &= Q(t)e_3 - P(t)x_{1d}^2 e_3 - \mu_2 e_3. \end{aligned} \tag{65}$$

将控制律 (65) 代入误差动力学 (64)，得到

$$\begin{aligned} \dot{e_2} &= -\mu_1 e_2, \\ \dot{e_3} &= -(q - Q(t))e_3 + (p - P(t))x_{1d}^2 e_3 - \mu_2 e_3. \end{aligned} \tag{66}$$

我们将参数估计误差定义为

$$\begin{aligned} e_p(t) &= (p - P(t)), \\ e_q(t) &= (q - Q(t)). \end{aligned} \tag{67}$$

利用 (67)，可将误差动力学 (66) 化简为

$$\begin{aligned} \dot{e_2} &= -\mu_1 e_2, \\ \dot{e_3} &= -e_q(t)e_3 + e_p(t)x_{1d}^2 e_3 - \mu_2 e_3. \end{aligned} \tag{68}$$

对 t 求 (67) 的导数，得到

$$\begin{aligned} \dot{e_p} &= -\dot{P}(t), \\ \dot{e_q} &= -\dot{Q}(t) \end{aligned} \tag{69}$$

定理 4.2. 对于方程 (50) 中驱动系统与响应系统之间的耦合，当 μ_1 和 μ_2 为正时，完全同步流形 $\Omega = [x_{2d} = x_{2r},\ x_{3d} = x_{3r}]$ 全局渐近稳定。

证明。方程 (24) 中系统的完全同步流形可写为

$$\Omega = [x_{2d} = x_{2r}, x_{3d} = x_{3r}].$$

使用坐标变换

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2d} - x_{2d} \\ x_{3r} - x_{3d} \end{bmatrix}, \tag{70}$$

使得 Ω 可写为

$$\Omega = (0, 0).$$

接下来，我们利用李雅普诺夫稳定性理论来求出参数估计值的更新律。我们考虑如下二次李雅普诺夫函数:

$$L = \frac{1}{2}(e_2^2 + e_3^2 + e_p^2 + e_q^2) \tag{71}$$

注意，李雅普诺夫函数 L 在 R^4上是正定的。沿着 (66) 和 (69) 的轨迹对 L 求导，可得：

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= e_2\dot{e_2} + e_3\dot{e_3} + e_p\dot{e_p} + e_q\dot{e_q}, \\ \frac{dL}{dt} &= -\mu_1 e_2^2 - \mu_2 e_3^2 + e_p(t)(-\dot{P}(t) + x_{1d}^2 e_3) + e_q(t)(-\dot{Q}(t) - e_3^2). \end{aligned} \tag{72}$$

我们希望误差系统渐近稳定，即

$$\frac{dL}{dt} < 0. \tag{73}$$

根据（72），我们将参数更新律设为

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= x_{1d}^2 e_3, \\ \dot{Q}(t) &= -e_3^2. \end{aligned} \tag{74}$$

将参数更新律（74）代入李雅普诺夫函数，可得 L 的时间导数为

$$\frac{dL}{dt} = -\mu_1 e_2^2 - \mu_2 e_3^2, \tag{75}$$

由（75）可知， $\dot{L}$ 是 R^4上的负半定函数。因此，我们可以得出同步误差向量 e(t) 和参数估计误差均全局有界，即

$$[e_2, e_3, e_p, e_q]^T \in \mathbf{L}_\infty. \tag{76}$$

我们定义 $\mu = min\{\mu_1, \mu_2\}$，由（75）可得

$$\frac{dL}{dt} \leq -\mu||\mathbf{e}||^2. \tag{77}$$

对不等式 (77) 关于 τ 从 0 到 t进行积分，得到：

$$\int_0^t \mu||\mathbf{e}(\tau)||^2 d\tau \leq L(0) - L(t). \tag{78}$$

由 (78) 可知，e $\in$ L_2 ，因此， $\dot{\mathrm{e}}(t)$ $\in$ L_∞。
借助巴巴拉特引理 [26],[27], ，我们得出结论：对于所有初始条件 e(0) $\in R^2$，当 $t \to \infty$ 时，e(t) $\to 0$ 指数收敛。□

4.2.1. 数值模拟。进行数值模拟时，我们采用经典的四阶龙格-库塔法求解 GLV 系统。参数估计值的初始值取为 $P(0) = 3.9$, $Q(0) = 4$。驱动系统和响应系统的状态初值分别取为 $(x_{1d}(0)\ x_{2d}(0)\ x_{3d}(0)) = (4, 1.4, 1.41)$ 和 $(x_{2r}(0), x_{3r}(0)) = (1, 1.414)$。通过图4.2.1所示的仿真结果验证了控制律的有效性。该图展示了系统 (50) 的解。显然，尽管初值不同，误差动力学仍会随着时间趋于 ∞ 而收敛至零。因此，我们的数值结果证实，在所设计的控制律作用下，响应系统状态变量的振幅和频率会与驱动系统相同。

5. Conclusion

本研究探讨生态系统中的捕食者-猎物系统，以了解其如何促进环境可持续发展。我们重点研究如何利用广义洛特卡–沃尔泰拉（GLV）方程，对不同物种之间的竞争和营养关系进行建模。我们考察了三种不同形式的三维GLV模型，它们分别采用不同的功能反应（线性、Holling II 型和 Holling III 型）。研究发现，采用线性功能反应的模型呈现不稳定动力学，而在特定情形下，改变功能反应可以使系统动力学稳定下来。为使斑块生态系统中的动力学稳定，本研究后续将聚焦于采用线性功能反应的广义Lotka–Volterra模型。我们研究其基本性质，并考察平衡点的稳定性以及平衡状态下对不稳定性的抑制。通过计算李雅普诺夫指数，我们发现，对于常数参数 $p = 2.9851$、$q = 3$、$r = 2$，该模型因存在一个正李雅普诺夫指数而呈现混沌，并具有两个不稳定平衡点。

此外，我们采用两种控制方案——主动控制技术和自适应控制技术，研究两个混沌GLV模型的同步。我们考虑这样一种配置：驱动系统中的猎物种群作为响应系统的驱动变量，使另外两个捕食者种群仅依赖于猎物种群。利用主动控制技术，我们应用两个简单的线性控制器，使GLV系统的状态实现同步。

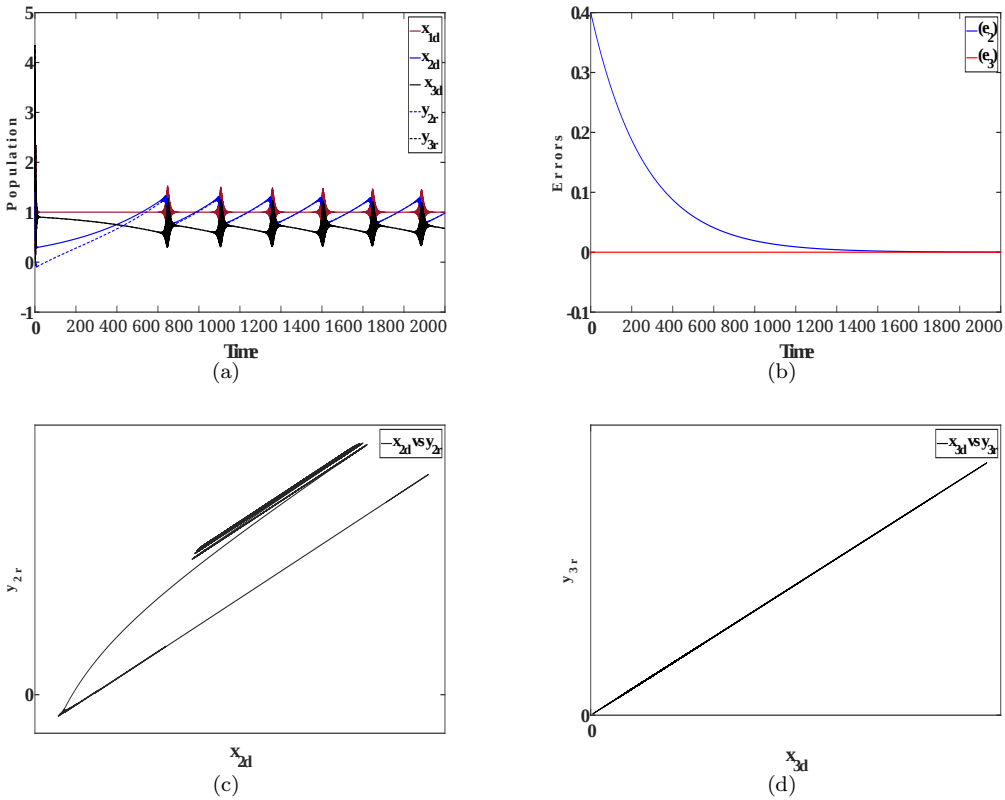

FIGURE 10. (a)：驱动系统和响应系统随时间变化的解；(b)：驱动系统和响应系统随时间变化的误差；(c)： $\{x_{2d}, x_{2r}\}$的同步图；(d)：耦合强度为 $\mu_1 = 0.0038$ 和 $\mu_2 = 2$时$\{x_{3d}, x_{3r}\}$ 的同步图。

这些控制器易于实现，且比以往的结果更加简洁。通过将正的条件李雅普诺夫指数转变为负值，确保同步流形的稳定性。我们还利用自适应控制技术，研究具有未知参数的两个混沌GLV系统的同步。基于李雅普诺夫稳定性理论，我们设计了两条参数自适应律，以确保系统实现全局指数同步。结果表明，主动控制技术和自适应控制技术对于实现混沌系统的全局同步均十分有效。

Funding

第二作者的研究获得了科学与工程研究委员会（SERB）的资助，分别来自两项独立拨款，拨款编号为 MTR/2018/000727 和 EMR/2017/005203。

Disclosure statement

作者声明不存在任何利益冲突。

References

[1]Lorenz EN. 确定性非周期流。《大气科学杂志》。1963年；20(2):130–141。[2] Hunt BR, Ott E. 混沌的定义。《混沌：非线性科学跨学科期刊》。2015；25(9):097618。[3] Solari HG, Natiello MA, Mindlin GB. 非线性动力学：物理学与数学之间的双向旅程。CRC出版社；1996年。[4] Strogatz SH. 非线性动力学与混沌：及其在物理学、生物学、化学和工程学中的应用。CRC出版社；2018年。[5] Janaki T, Rangarajan G. 连续时间动力系统的李雅普诺夫指数 [dis- sertation]。理学硕士论文，印度科学教育学院，印度；2003年。[6] Pecora LM, Carroll TL. 混沌系统中的同步。《物理评论快报》。1990年；64(8):821。[7] Blasius B, Huppert A, Stone L. 空间扩展生态系统中的复杂动力学与相位同步。《自然》。1999年；399(6734):354。[8] Upadhyay RK, Rai V. 两个非同一混沌生态系统中的复杂动力学与同步。《混沌、孤子与分形》。2009年；40(5):2233–2241。[9] Lu J, Cao J. 参数完全未知的两个相同或不同混沌（超混沌）系统的自适应完全同步。《混沌：非线性科学跨学科期刊》。2005年；15(4):043901。[10] Bai EW, Lonngren KE. 利用主动控制实现两个洛伦兹系统的同步。《混沌、孤子与分形》。1997年；8(1):51–58。[11]Njah A, Vincent U. 利用主动控制实现扩展 Bonhoeffer–van der Pol 振荡器中的混沌同步与反同步。《声学与振动杂志》。2009年；319(1-2):41–49。[12] Chen S, L¨u J. 通过自适应控制实现不确定统一混沌系统的同步。《混沌、孤子与分形》。2002年；14(4):643–647。[13] Dai D, Ma XK. 利用间歇参数自适应控制方法实现混沌同步。《物理快报 A》。2001年；288(1):23–28。

[14] Park JH. 不确定参数统一混沌系统的自适应同步。《非线性科学与数值模拟国际期刊》。2005年；6(2):201–206。[15] Rao VSH, Phaneendra BR. 涉及传输时滞和死区的双向联想记忆神经网络的全局动力学。《神经网络》。1999年；12(3):455–465。[16] Ackleh AS, Marshall DF, Heatherly HE. 广义洛特卡–沃尔泰拉捕食者–猎物模型中的灭绝。《随机分析国际期刊》。1900年；13(3):287–297。[17] Malcai O, Biham O, Richmond P, et al. 广义洛特卡–沃尔泰拉模型的理论分析与仿真。《物理评论 E》。2002年；66(3):031102。[18] Elsadany A, Matouk A, Abdelwahab A, et al. 广义洛特卡–沃尔泰拉系统的动力学分析、线性反馈控制与同步。《动力学与控制国际期刊》。2018年；6(1):328–338。[19] Samardzija N, Greller LD. 广义洛特卡–沃尔泰拉模型中经由分形环面通向混沌的爆发性路径。《数学生物学通报》。1988年；50(5):465–491。[20] Simmons GF. 微分方程及其应用与历史注释。CRC出版社；2016年。[21] Yassen M. 不确定新型混沌动力系统的自适应混沌控制与同步。《物理快报 A》。2006年；350(1-2):36–43。[22] Pecora LM, Carroll TL. 同步耦合系统的主稳定函数。《物理评论快报》。1998年；80(10):2109。[23] Frisk M. 混沌动力系统中的同步；2016年。[24] Lahav N, Sendi˜na-Nadal I, Hens C, et al. 混沌系统的同步：一种微观描述。《物理评论 E》。2018年；98(5):052204。[25] Fotsin H, Daafouz J. 基于参数辨识的不确定混沌科尔皮茨振荡器自适应同步。《物理快报 A》。2005年；339(3-5):304–315。[26] Min YY, Liu YG. Barbalat 引理及其在系统稳定性分析中的应用。《山东大学学报（工程科学版）》。2007年；37(1):51–55。[27] Sun M. 一个类 Barbalat 引理及其在学习控制中的应用。《IEEE 自动控制汇刊》。2009年；54(9):2222–2225。