arXiv:2301.03586v1 [math.NT] 7 Jan 2023

素数定理与素数阶乘数

JONATAN GOMEZ
JGOMEZPE@UNAL.EDU.CO 哥伦比亚国立大学

摘要。对不超过某个自然数的素数数量进行计数，并描述这一计数函数的渐近行为，曾是高斯、勒让德、狄利克雷和欧拉等著名数学家的研究课题。素数定理指出，这种渐近行为与该数除以其自然对数所得结果的渐近行为相似。本文利用数的乘法表示以及对数函数的性质，将素数定理表示为素数阶乘数和 n-素数阶乘互素数的形式。素数阶乘数是前 n 个素数的乘积，而 n-素数阶乘互素数则是与第n个素数阶乘数互素的数。借此，我们可以定义若干不同的函数，用以渐近地近似素数计数函数的行为。

1. 引言

1.1. 素数。 素数是恰好有两个因子的自然数：1 和它本身 [Nar00]。自然数 1 不被视为素数，因为它只有一个因子（1）。从现在起， p_n 表示第 n**个** 素数，此处 $n \geq 1$。前十一个素数是 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31。

1.2. 素数定理。 [Nar00]。令 $\pi(x)$为素数计数函数，即确定小于或等于自然数 x 的素数个数的函数。阿达马 [Had96] 和德拉瓦莱普桑 [Val96], 分别独立证明的素数定理，描述了 $\pi(x)$ 的渐近行为，如下所示：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\left(\frac{x}{\log(x)}\right)} = 1 \tag{1.1}$$

使用渐近记号，我们可以将素数定理改写如下：

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)} \tag{1.2}$$

表1.2展示了 $\pi(x)$和$x^{\log(x)}$的渐近行为。 $\pi(x)$的数据取自 https://en.wikipedia.org/wiki/Prime_number_theorem，而$log^{x}(x)$ 的数据则由 ~~Pytho~~n 程序（PNTprimorials.py）获得，该程序可在 Jonatan Gomez 教授的 GitHub 仓库 [Gom] 中免费获取。

x	$\pi(x)$	$\pi(x)/\frac{x}{\log(x)}$
10^1	4	0.921
10^2	25	1.151
10^3	168	1.161
10^4	1229	1.132
10^5	9592	1.104
10^6	78498	1.084
10^7	664579	1.071
10^8	5761455	1.061
10^9	50847534	1.054
10^{10}	455052511	1.048
10^{11}	4118054813	1.043
10^{12}	37607912018	1.039
10^{13}	346065536839	1.036
10^{14}	3204941750802	1.033
10^{15}	29844570422669	1.031
10^{16}	279238341033925	1.029
10^{17}	2623557157654233	1.027
10^{18}	24739954287740860	1.025
10^{19}	234047667276344607	1.024
10^{20}	2220819602560918840	1.023
10^{21}	21127269486018731928	1.022
10^{22}	201467286689315906290	1.021
10^{23}	1925320391606803968923	1.020
10^{24}	18435599767349200867866	1.019
10^{25}	176846309399143769411680	1.018

表1.　$\pi(x)$和$\frac{x}{\log(x)}$的渐近行为。$log\ x()$ 的数据由 Python 程序（PNT- primorials.py）获得，该程序可在 Jonatan Gomez 教授的 GitHub 仓库　[Gom] 中免费获取。　$\pi(x)$的数据取自 https://en.wikipedia.org/wiki/Prime_number_theorem，并且

现在，我们列出文献中先前已证明的一些关于素数的定理，并从这些定理推导出一些技术性质。

定理 1. (伯特兰猜想) 对于任意正自然数 n，我们有 $p_{n+1} \leq 2p_n - 1$。

证明。 切比雪夫在 [Tch52] 中证明了这一定理。 □

推论 2。 对于任意正自然数 n，我们有 对数 $\left(\frac{p_{n+2}}{p_n}\right) < 2$

证明。 将定理 1 应用两次可得，对于所有正自然数 n，$p_{n+2} < 2p_{n+1} < 4p_n$。显然，$\frac{p_{n+2}}{p_n} < 4$，因此，$\log\left(\frac{p_{n+2}}{p_n}\right) < \log(4) < 2$。□

定理 3. 对于任意正自然数 m，都存在一个正自然数 N，使得对所有 $n \geq N$，$p_{n+1}^m < \prod_{i=1}^n p_i$。

证明. Suzuki 在 [Suz13] 中证明了这个定理。 □

推论 4. 对于任意正自然数 m ，都存在一个正自然数 N，使得 $\log(p_{n+1})\log(\prod_{i=1}^{n} p_i) < \frac{1}{m}$ 对所有 $n \geq N$ 均成立。

证明。 考虑定理4中的不等式，对不等式两边应用对数函数，将两边除以右边，在左边应用性质 $\log(x^m) = m * \log(x)$，并将不等式两边除以 m。 □

定理5。 函数 $f(x) = \prod_{p \leq x} \frac{p}{p-1}$ 和 $h(x) = e^{\gamma} * \log(x)$ 具有相同的渐近行为。这里 γ 是欧拉常数。

证明。 此定理可作为 Mertensin [Mer74] 所证明定理的推论来证明。 □

推论6。 函数 $f^{\bullet}(x) = \prod_{p \leq x} p$ 和 $h^{\bullet}(x) = e^{\gamma} * \log(x) * \prod_{p \leq x} p - 1$ 具有相同的渐近行为。这里 γ 是欧拉常数。

1.3. **素数阶乘**。 可以对素数定义许多有趣的运算，例如，我们可以将第 n个 素数的**素数阶乘** 定义为前 $n \in \mathbb{N}^{+}$ 个素数的乘积 [Dub87], 即，$\#(n) = p_n\#$ $= \prod_{i=1}^{n} p_k$。这个定义类似于阶乘函数的定义，因此可以将素数阶乘定义为递归函数：$\#(0) = 1$ 且 $\#(n) = p_n\#(n-1)$，其中$n \geq 1$。前五个素数阶乘是 2、6、30、210、2310。

1.4. **互素数或互质数**。 两个自然数 $a, b \in \mathbb{N}$ 是互素数或互质数，当且仅当它们的最大公约数为 1（$gcd(a, b) = 1$）。根据这个定义，*i)* 1 与任何其他正自然数互素，*ii)* 0 与任何自然数都不互素，*iii)* 任意素数都与其他任意素数互素。注意，我们可以用互素数来定义素数：自然数 $p > 1$ 是素数，当且仅当对于所有自然数 $1 \leq q < p$， p 都与 q 互素。

1.5. **小于 n ($\mathbb{Z}_n$) 的自然数**。 令 $n \in \mathbb{N}$ 表示小于 n 的自然数集合，则该集合为 $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$。例如， $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ 和 $\mathbb{Z}_{\#(2)} = \mathbb{Z}_{2*3} = \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 3, 4, 5\}$。在 $\mathbb{Z}_n$ 所具有的诸多性质中，我们尤其关注与 $\#(n)$ 互素的自然数子集的结构（有时称为 $\#(n)$ 的互素数）。例如，考虑 $\mathbb{Z}_{\#(2)} = \mathbb{Z}_6$，即由与 6 互素的自然数构成的 $\mathbb{Z}_6$ 的子集，其为 $\{1, 5\}$。显然，任何满足 $p_n < q <$ $\#(n)$ 的素数 q 都与 $\#(n)$ 互素。

1.6. **欧拉函数（$\varphi(n)$）**。欧拉函数 [Eul63] 计算集合 $\mathbb{Z}_n$ 中与 n 互素的自然数的数量。例如， $\mathbb{Z}_{\#(3)} = \mathbb{Z}_{30}$，与 30 互素的自然数子集为 $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$，因此 $\varphi(30) = 8$。欧拉函数是一个积性函数，即，对于两个互素数 a 和 b，有$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$。此外，对于素数$p$，我们有 $\mathbb{Z}_p - \{0\}$ 是 p 的互素数集合，因此 $\varphi(p) = p - 1$。利用欧拉函数的这两个性质，我们可以轻松计算素数阶乘数上的欧拉函数： $\varphi(\#(n)) = \prod_{i=1}^{n}(p_k - 1) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(p_k)$。

1.7. 素数阶乘集合。我们通过将 $\mathbb{Z}_{\#(n)}$ 中的数字 0 和 1 分别“替换”为数字 #(n) 和 #(n) + 1，定义一个 n-素数阶乘集合 [Gom23]。令 $n \in \mathbb{N}$，则n-素数阶乘集合定义为 $\mathbb{Z}_n^{\#} = \{2, 3, \ldots, \#(n)、\#(n) + 1\}$。以下是前五个 n-素数阶乘集合的列表：

(1) $\mathbb{Z}_1^{\#} = \{2, 3\}$(2)
$\mathbb{Z}_2^{\#} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$(3)
$\mathbb{Z}_3^{\#} = \{2, 3, \ldots, 30, 31\}$(4)
$\mathbb{Z}_4^{\#} = \{2, 3, \ldots, 210, 211\}$(5)
$\mathbb{Z}_5^{\#} = \{2, 3, \ldots, 2310, 2311\}$

1.8. 素数阶乘的互素数。我们可以将 #(n) 的互素数概念扩展到集合$\mathbb{Z}_n^{\#}$，方法是考察 $\mathbb{Z}_n^{\#}$ 中与 #(n) 互素的自然数子集。以下是前三个 n-互素数集合的列表：

(1) 1-互素数集合为 $tot(1) = \{3\}$(2) 2-互素数集合为 $tot(2)$ $= \{5, 7\}$(3) 3-互素数集合为 $tot(3) = \{7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$

注意，任何素数 $p \in \mathbb{Z}_n^{\#}$要么是某个 p_i（对于 $i = 1$、2、.....、n），要么是一个 n-互素数，即我们可以用互素数来表述素数定理。我们将在第4节探讨这种关系。

引理7。 n-互素数的数量为 $tot(n) = \prod_{i=1}^{n}(p_k - 1)$。

证明。 #(n) 和（#(n) + 1）是互素数，因此 n-互素数的数量等于 #(n) 的互素数数量，即 n-互素数的数量为 $\varphi(\#(n)) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(p_k) = \prod_{i=1}^{n}(p_k - 1) = tot(n)$。□

2. 对数函数与数的乘法表示

如果我们用素数或素数阶乘数的乘法分数来表示大于或等于1的数，就可以建立素数定理与素数阶乘数之间的关系。在此之前，我们将推导一个用于分析渐近行为的技术引理。

引理 8. 设 f、g 和 h 为实值函数，使得对所有 x 大于某个数 N 时，$0 < f(x) \le g(x) \le h(x)$。如果 f 和 h 具有相同的渐近行为，那么 f、g 和 h 也具有相同的渐近行为。

证明。显然，由 $1 = \frac{f(x)}{f(x)} \le \frac{g(x)}{f(x)} \le \frac{h(x)}{f(x)}$，根据夹逼定理，有 $1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{f(x)} \le \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} \le \lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{f(x)} = 1$。 □

定义 9. 设 $A = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}^+}$ 为单调递增数列，使得$a_1 \ge 1$。对于任意数 $x \ge a_1$、任意正自然数 n 以及 $0 \le r < 1$:

(1) $n(x)$ 为满足 $a_{n(x)} \le x < a_{n(x)+1}$ 的正自然数。(2) $r(x) = \frac{x - a_{n(x)}}{a_{n(x)+1} - a_{n(x)}}$，(3) $s(n, r) = 1 + \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) r$，(4) $s(x) = s(n(x)\ r(x))$，以及 (5) $y(n, r) = a_n * s(n, r)$。

注意，$s(n, r) = 1 + \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) r = 1 + \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}\right) r = \frac{a_{n+1} r + a_n}{a_n}(1 - r)$ 可以看作相对于数列 A而言，a_{n+1} 的第 r个乘法分数。

引理 10. 设$A = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}^+}$ 是一个单调递增数列，满足$a_1 \geq 1$。对于任意数 $x \geq a_1$、任意正自然数 n以及 $0 \leq r < 1$

(1) $a_n \leq y(n,r) < a_{n+1}$, (2) $x = y(n(x)\ r(x)) = a_{n(x)} * s(x)$ (3) $m = n(y(m,t))$，且 $t = r(y(m,t))$

证明。(1) $y(n,r) = a_n * s(n,r) = a_n \underbrace{\left(\frac{a_{n+1}r+a_n(}{a_n}\right.}^{1-r} = a_{n+1}r + a_n)(1-r)$。显然，$y(n,r)$ 是 a_{n+1} 与 a_n 之间的凸组合，因此 $a_n \leq y(n,r) < a_{n+1}$。(2) $a_{n(x)} * s(x) = a_{n(x)}\left(1 + \left(\frac{a_{n(x)+1}-a_{n(x)}}{a_{n(x)}}\right)\left(\frac{x-a_{n(x)}}{a_{n(x)+1}-a_{n(x)}}\right)\right) = a_{n(x)} * s(x)$，即 $a_{n(x)} * s(x) = a_{n(x)}\left(1 + \frac{x-a_{n(x)}}{a_{n(x)}}\right) = a_{n(x)}\left(\frac{x}{a_{n(x)}}\right) = x$。(3) 由 (1) 和 (2) 得出。□

特别地，根据引理 10，我们可以定义数 $x \geq 2$ 的两种不同表示:

(1) $x \geq 2$ 的素数表示使用素数序列 ($A = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$)。因此，$x = p_{n^\star(x)} * s^\star(x)$，其中 $n^\star(x)$，满足 $p_{n^\star(x)} \leq x < p_{n^\star(x)+1}$, $s^\star(x) = 1 + \left(\frac{p_{n^\star(x)+1}}{p_{n^\star(x)}} - 1\right) r^\star(x)$，且 $r^\star(x) = \frac{x-p_{n^\star(x)}}{p_{n^\star(x)+1}-p_{n^\star(x)}}$。(2) $x \geq 2$ 的素数阶乘表示使用素数阶乘数序列 ($A = \{\#(n)\}_{n\in\mathbb{N}^+}$)。因此，$x = \#(n'(x)) * s'(x)$，其中 $n'(x)$，满足 $\#(n'(x)) \leq x < \#(n'(x)+1)$，$s'(x) = 1 + \left(p_{n'(x)+1} - 1\right) r'(x)$，且 $r'(x) = {}^{x-}\#(n'(x))\ \#(n'(x)+1)-\#(n'(x))$。

我们可以利用一个数的素数表示来计算 $\log(x)$ 函数，见公式 2.1。

$$\log(x) = \log\left(p_{n^\star(x)} * s^\star(x)\right) = \log(p_{n^\star(x)}) + \log(s^\star(x)) \tag{2.1}$$

我们可以对公式 2.1 进行变换，从而得到具有 $\log(x)$ 渐近行为的函数，见公式 2.2 和 2.3。

$$\log^-(x) = \log\left(p_{n^\star(x)-1}\right) \tag{2.2}$$

$$\log^+(x) = \log\left(p_{n^\star(x)+1}\right) \tag{2.3}$$

定理 11。 函数$\log^-(x)$ 和$\log^+(x)$ 具有相同的渐近行为，即，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log^-(x)}{\log^+(x)} = 1$$

证明。给定一个实数 $\epsilon > 0$，我们可以取 n 为满足 ^{2} $\log(p_n) < \epsilon$ 的最小自然数。现在考虑 ~~$M = p_n$~~。若 $x > M$，则 $n^\star(x) > n$。我们有 $\log^+(x) - \log^-(x) = \log(p_{n^\star(x)+1}) - \log(p_{n^\star(x)-1}) = \log\left(\frac{p_{n^\star(x)+1}}{p_{n^\star(x)-1}}\right)$。根据推论 2，我们有 $\log^+(x) - \log^-(x) < 2$。显然，$\left|{}^{\log^+}_{-}(x)\ \log(x) - 1\right| = \log^+(x) - \log^-(x)\ \log^-(x) \leq 2\log(x) < \epsilon$。□

推论 12。 函数:

(1) $\log^-(x)$

(2) $\log^a(x) = \log^-(x) + log(a(x))\ with\ 1 \le a(x) \le \frac{p_{n^\star(x)+1}}{p_{n^\star(x)-1}}$
(3) $\log(x)$
(4) $\log^\star(x) = \log(p_{n^\star(x)})$
(5) $\log^*(x) = \log^-(x) + \log\left(1 + \left(\frac{p_{n^\star(x)}}{p_{n^\star(x)-1}} - 1\right) r^\star(x)\right),\ and$
(6) $\log^+(x)$

具有相同的渐近行为。

证明。由于 (2)-(6) 中定义的每个函数 $\log^?(x)$ 都满足 $\log^-(x) \le \log^?(x) \le \log^+(x)$，因此根据定理 11 和引理 8，证明得以完成。□

现在，我们利用一个数的素数阶乘表示来计算 $\log(x)$ 函数，见公式 2.4。

(2.4)
$$\log(x) = \log\left(\#(n'(x)) * s'(x)\right) = \log(s'(x)) + \log\left(\prod_{i=1}^{n'(x)} p_i\right) = \log(s'(x)) + \sum_{i=1}^{n'(x)} \log(p_i)$$

我们可以对公式 2.4 进行变换，得到具有 $\log(x)$ 渐近行为的函数，见公式 2.5 和 2.6。

$$\log_-(x) = \log\left(\#(n'(x) - 1)\right) = \log\left(\prod_{i=1}^{n'(x)-1} p_i\right) \tag{2.5}$$

$$\log_+(x) = \log\left(\#(n'(x) + 1)\right) = \log\left(\prod_{i=1}^{n'(x)+1} p_i\right) \tag{2.6}$$

定理 13。函数$\log_-(x)$ 和$\log_+(x)$ 具有相同的渐近行为，即，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_-(x)}{\log_+(x)} = 1$$

证明。给定一个实数 $\epsilon > 0$，我们可以取 m 为满足 $\frac{2}{m} < \epsilon$ 的最小自然数。现在，根据定理 3，我们可以取 N 为满足 $p_{n+1}^m < \#(n)$ 对所有 $n \ge N$ 都成立的最小自然数；根据推论 4，对于所有 $n \ge N(\star)$，我们有 $\log(p_{n+1})\ \log(\#(n)) < \frac{1}{m}$。若 ~~$x > M =$~~ $\#(N)$，则 $n'(x) \ge N$，且 $\log(p^{n'(x)+1})\ \log(\#(n'(x))) < \frac{1}{m}$。注意，$\log(\#(n'(x) + 1)) - \log(\#(n'(x) - 1)) = \log\left(\frac{\#(n'(x)+1)}{\#(n'(x)-1)}\right) = \log(p_{n'(x)}\ p_{n'(x)+1}) < \log(p_{n'(x)+1}^2)$。显然，$\left|\frac{\log_-}{+}(x)\ \log(x) - 1\right| = \log_+(x) - \log_-(x)\ \log_+(x) < 2\log(p_{n'(x)+1})\ \log(\#(n'(x)+1)) < 2\log(p_{n'(x)+1})\ \log(\#(n'(x)))$。最后，利用结果 $(\star)$，我们有 $\left|\log^*(x)\ \log(x) - 1\right| < \frac{2}{m} < \epsilon$。□

推论 14. 函数:

(1) $\log_-(x)$
(2) $\log_{a(x)}(x) = \log_-(x) + log(a(x))\ with\ 1 \le a(x) \le p_{n'(x)} * p_{n'(x)+1}$
(3) $\log(x)$
(4) $\log_\#(x) = \log(\#(n'(x)))$
(5) $\log_*(x) = \log_-(x) + \log(1 + (p_{n'(x)} - 1)r'(x))$

(6) $\log_{\diamond}(x) = \log_{-}(x) + \log(n'(x) + r'(x))$, *and*
(7) $\log_{+}(x)$

具有相同的渐近行为。

证明。由于式（2）—（6）中定义的每个函数 $\log_?(x)$ 都满足 $\log_{-}(x) \leq \log_?(x) \leq \log_{+}(x)$，因此由定理 13 和引理 8 可完成证明。□

3. 素数阶乘与 n-互素数

注意，若考虑 $x = p_n$，定理16和推论17表明，当 $n \to \infty$ 时，素数阶乘数 $\#(n)$ 与 n-互素数的数量之间存在关联。基于这一启示，我们通过考察一个数的素数阶乘表示，并定义一个近似计算不超过 x 的 n-互素数数量的函数，提出任意正数 $x \geq 2$ 与 n-互素数之间的一种关系，见方程3.1。

$$tot_*(x) = tot(n'(x)) * t_*(x) = t_*(x) * \prod_{i=1}^{n'(x)} p_i - 1 \tag{3.1}$$

这里，$t_*(x) = 1 + (p_{n'(x)+1} - 2) * r'(x)$，其中 $n'(x)$ 和 $r'(x)$ 的定义见第2节，而 $tot(n)$ 的定义见第1.8节。在建立这种关系之前，我们需要以下技术引理。

引理15. $1 \leq {}^{1+}_{(a-1)\overline{1+\,a-2}}{}^{r}_{()r} < \frac{a}{a-1}$ 对所有 $a > 1$ 以及所有 $0 \leq r < 1$均成立。

证明. 考虑 $r = 0$: 显然，${}^{1+}_{(a-1)\overline{1+\,a-2}}{}^{r}_{()r} = \frac{1}{1} = 1$。考虑 $0 < r < 1$: 显然$a - 2 < a - 1$，于是 $1 + (a-2)r < 1 + (a-1)r$，因此 $1 < {}^{1+}_{(a-1)\overline{1+\,a-2}}{}^{r}_{\,r}()$。现在，$r < 1$，即$-1 + r < 0$。在不等式两边同时加上 $a + a^2r - 2ar$ 并整理各项，得到 $a - 1 + a^2r - 2ar + r < a + a^2r - 2ar$。合并同类项，得到 $(a-1)(1 + (a-1)r) < a(1 + (a-2)r)$；将不等式两边同时除以 $(a-1)(1 + (a-2)r)$，得到 ${}^{1+}_{(a-1)\overline{1+\,a-2}}{}^{r}_{()r} < \frac{a}{a-1}$。□

现在，我们按照与上一节类似的思路来确立这种关系。

定理16. 函数 $f(x) = \prod^{n'}(_{i=1}^{x} \frac{p_i}{p_i - 1})$ 和 $g(x) = \prod^{n'}(_{i=1}^{x+1} \frac{p_i}{p_i - 1})$具有相同的渐近行为。

证明. 显然，$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{p_{n'(x)+1}}{p_{n'(x)+1}-1} = 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{p_{n'(x)+1}-1} = 1$ □

推论17. 函数 $f^{\circ}(x) = {}^{x}_{tot_*(x)}$ 与函数 $f(x) = \prod^{n'}(_{i=1}^{x} \frac{p_i}{p_i - 1})$ 和 $g(x) = \prod^{n'}(_{i=1}^{x+1} \frac{p_i}{p_i - 1})$具有相同的渐近行为。

证明. 显然，${}^{x}_{tot_*(x)} = {}^{s'(x)\#(n'(x))\, t_*(x) \prod_{i=1}^{n'(x)} p_i - 1}_{(p_{n'(x)+1}-1)r'(x)\,(p_{n'(x)+1}-2)r'(x)}$ 根据引理15，我们有 $f(x) \leq {}^{x}_{tot_*(x)} < f(x) * \frac{p_{n'(x)+1}}{p_{n'(x)+1}-1} = g(x)$。然后，根据定理16和引理 8，证明完成。□

最后，我们利用定理16确立所需的关系。

定理18. 函数 $f(x) = \prod^{n'(}{}_{i=1}^{x} \frac{p_i}{p_i-1})$ 以及 $g^{\circ}(x) = e^{\gamma} * \log(y(x))$ （其中 γ为欧拉常数）和 $y(x) = p_{n'(x)} * \left(1 + \left(\frac{p_{n'(x)+1}}{p_{n'(x)}} - 1\right) r'(x)\right)$ 具有相同的渐近行为。

证明。 给定一个实数 $\epsilon > 0$，我们考虑定理16，并取 M，使得 $\left|\frac{\prod_{p\le z} \frac{p}{p-1}}{e^{\gamma} * z} \log() - 1\right| < \epsilon$对所有 $z > y(M)$ 都成立。如果 $x > M$，那么 $y(x) > y(M)$ 且 $\left|\frac{\prod_{p\le y(}{}_{x}^{} \frac{p}{p-1})}{e^{\gamma} * x} \frac{\log(y())}{\prod^{n'(x)}_{i=1} \frac{p_i}{p_i-1}} - 1\right| < \epsilon$。我们可以看到 $\prod^{n'(}{}_{i=1}^{x} \frac{p_i}{p_i-1} = \prod_{p\le y)\,(x)} \frac{p}{p-1}$，因此，$\left|\frac{}{e^{\gamma} * y\ x} \log(()) - 1\right| < \epsilon$。 □

推论 19. 函数 $f^{\circ}(x) = {}_{tot_*}^{x}(x)$ 和 $g^{\circ}(x) = e^{\gamma} * \log(y(x))$ 与 γ 欧拉常数及 $y(x) = p_{n'(x)} * \left(1 + \left(\frac{p_{n'(x)+1}}{p_{n'(x)}} - 1\right) r'(x)\right)$ 具有相同的渐近行为。

证明. 由推论17和定理18得出。 □

推论 20. 函数 $id(x) = x$ 和 $h^{\circ}(x) = tot_*(x) * e^{\gamma} * \log(y(x))$ 与 γ欧拉常数及 $y(x) = p_{n'(x)} * \left(1 + \left(\frac{p_{n'(x)+1}}{p_{n'(x)}} - 1\right) r'(x)\right)$ 具有相同的渐近行为。

证明。 由推论 19 得出。 □

4. 综合起来

注意，在素数定理中，可以用与函数 $id(x)$ 和 $\log(x)$ 渐近行为相同的函数来替代它们。因此，我们可以用多种方式表述素数定理，其中一种是使用 n-互素数。表 4 展示了 $\pi(x)$ 与 ${}^{x}\log(x)$、${}^{x}\log_*(x)$、${}^{x}\log_{\circ}(x)$、$h^{\circ}(x)\log(h^{\circ}(x))$ 以及$x\log(h^{\circ}(x))$的渐近行为。这些结果由 Python 程序 (PNTprimorials.py) 得出，该程序可在 Jonatan Gomez 教授的 GitHub 仓库 [Gom] 中免费获取。

5. 结论与未来工作

我们构造了若干函数，其渐近行为与素数计数函数 $\pi(x)$ 相同。为此，我们用素数阶乘数和素数的乘法分数来表示任意正数。我们还定义了一个函数，其渐近行为与 $\pi(x)$ 相同，但该函数以素数阶乘数的 n-互素数来定义。我们研究这种关系，是因为任何小于或等于 $\#(n) + 1$ 的素数，p_i 都是 $i = 1$、2、.....、n 中的一个素数，或者是一个素数阶乘数的 n-互素数；也就是说，$\pi(x)$ 可以用 $tot(n)$ 来表示。

我们未来的工作将着重于定义一类与 $\pi(x)$具有相同渐近行为的函数，并定义一个在 x取较小值时收敛比 $\pi(x)$更小的函数。我们将深入研究这类函数，同时研究以素数阶乘 n-互素数为基础定义的函数，并以我们处理基于 n-互素数的 $\pi(x)$ 的相同方式，定义一些用于计数孪生素数、表亲素数、性感素数以及素数星座的函数近似。

	$\pi(x)/$				
x	$\frac{x}{\log(x)}$	$\frac{x}{\log^*(x)}$	$\frac{x}{\log^\circ(x)}$	$\frac{h^\circ(x)}{\log(h^\circ(x))}$	$\frac{x}{\log(h^\circ(x))}$
10^1	0.921	0.392	0.702	1.101	0.787
10^2	1.151	0.683	0.988	1.327	1.106
10^3	1.161	0.770	1.018	1.305	1.137
10^4	1.132	0.820	1.025	1.236	1.119
10^5	1.104	0.840	1.014	1.227	1.093
10^6	1.084	0.858	1.011	1.180	1.077
10^7	1.071	0.875	1.013	1.186	1.064
10^8	1.061	0.881	1.004	1.145	1.057
10^9	1.054	0.885	0.997	1.137	1.050
10^{10}	1.048	0.893	0.998	1.103	1.045
10^{11}	1.043	0.902	0.998	1.089	1.041
10^{12}	1.039	0.905	0.995	1.102	1.037
10^{13}	1.036	0.910	0.996	1.081	1.034
10^{14}	1.033	0.914	0.995	1.069	1.032
10^{15}	1.031	0.919	0.996	1.072	1.030
10^{16}	1.029	0.924	0.997	1.061	1.028
10^{17}	1.027	0.926	0.996	1.077	1.026
10^{18}	1.025	0.929	0.996	1.076	1.024
10^{19}	1.024	0.931	0.995	1.065	1.023
10^{20}	1.023	0.933	0.995	1.061	1.022
10^{21}	1.022	0.935	0.995	1.046	1.021
10^{22}	1.021	0.938	0.995	1.049	1.020
10^{23}	1.020	0.940	0.996	1.042	1.019
10^{24}	1.019	0.941	0.995	1.054	1.018
10^{25}	1.018	0.943	0.996	1.048	1.017

表 2. $\pi(x)$ 的渐近行为、$\frac{x}{\log(x)}$、$\frac{x}{\log_*(x)}$、~~$\frac{x}{\log\circ(x)}$~~、~~$\frac{h^\circ(x)}{\log(h^\circ(x))}$~~ 和 $\frac{x}{\log(h^\circ(x))}$。结果由 Python 程序 (PNTprimorials.py) 得出，该程序可在 Jonatan Gomez 教授的 GitHub 仓库 [Gom]中免费获取。

参考文献

[欧拉63] 莱昂哈德·欧拉。《以新方法证明的算术定理》。载于：圣彼得堡帝国科学院新纪要8（1763），第74–104页。[切比雪夫52] 帕夫努季·切比雪夫。《关于素数的论文》。载于：纯粹与应用数学，第一辑 （1852），第371–382页。网址：http://sites.mathdoc.fr/JMPA/PDF/JMPA_18

[Mer74] 弗朗茨·梅滕斯。《对解析数论的贡献》。德文。载于：纯粹与应用数学杂志 78（1874），第 46–62 页。网址：http://eudml.org/doc/148244。[Had96] 雅克·阿达马。《关于函数 $\zeta(s)$ 的零点分布及其算术后果》。载于：法国数学会通报 24（1896）。

[Val96] Charles-Jean de la Vallée Poussin。《素数理论的解析研究》。载于：布鲁塞尔科学学会年刊（1896）
[Suz13] T. Suzuki。《关于素数级数的一个定理》。载于：东北数学 3（1913），第 83–86 页。网址：https://www.jstage.jst.go.jp/article/tmj1911/3/0/3_0_83/_pd

[Dub87] Harvey Dubner。“阶乘素数与原数阶乘素数”。载于：休闲数学21(4)（1987）。[Nar00] WładysławNarkiewicz。素数理论的发展：从欧几里得到哈代与利特尔伍德。数学专著。施普林格，2000。isbn：9783642085574。[Gom23] Jonatan Gomez。关于原数阶乘数。2023。[Gom] Jonatan Gomez。素数程序。网址：https://github.com/jgomezpe/primenumbers。（访问日期：2023年5月1日）。