1+1D 强子使其双部分子 Rényi 自由能最小化

Pouya Asadi[1], * 和 Varun Vaidya[2], †
[1] *Institute for Fundamental Science and Department of Physics, University of Oregon, Eugene, OR 97403, USA*
[2] *Department of Physics, University of South Dakota,Vermillion, SD 57069, USA.*

我们使用变分方法，计算 1+1 维中各种规范理论的基态强子的谱和部分子分布函数。我们的方法中的模板函数使一个自由能泛函最小化，该泛函由光锥上自由价部分子的动能与双部分子子系统的Rényi纠缠熵组合而成。我们的结果表明，这些理论中的强子会使所提出的自由能最小化。这种方法的成功促使我们将其应用于更高维度的禁闭规范理论。

arXiv:2301.03611v1 [hep-th] 9 Jan 2023

I. 引言

现代物理学中一个经久不衰的问题，是如何描述量子色动力学（QCD）等强耦合理论的谱；量子色动力学描述了将夸克和胶子束缚在无色强子中的强核力。我们对强子结构的了解来自实验上可测的结构函数，例如部分子分布函数（PDF），后者可通过因子化定理提取。虽然目前没有计算这些函数的解析方法，但在某些条件下可以通过格点量子色动力学进行数值计算 [1–7]。然而，这些工具在计算和经济成本上都十分昂贵，也无法让我们简单地洞察强相互作用的机制。

这促使人们提出了新的方法（例如 [8–21]），以理解禁闭理论，其中许多方法最初是在 1+1维（1+1D）中提出的。在这些理论中，胶子不是传播的自由度，也不存在自旋；而且由于规范耦合具有量纲，跑动效应受到幂次抑制。 1+1D 理论中强子内部夸克的部分子分布函数，简单地等于其波函数的模平方，且不会随能标跑动；更多细节请参见文献 [22]。

在本文中，我们提出，由于强耦合束缚态是一个复杂系统，其中各部分子之间存在大量相互作用，因此复杂系统、统计力学和信息论中的概念（关于后两个领域之间的联系，见参考文献 [23] ）可以在描述其性质时发挥更核心的作用。（量子信息科学的概念已用于研究禁闭规范理论的其他方面，例如见参考文献 [24–54]。）类似于经典统计力学所研究的一般系统（例如一容器气体），这些系统遵循自由能最小原理；我们猜想，强子内部部分子的分布也遵循一种自由能最小原理，其中包含对部分子对之间纠缠程度的度量——这种原理不应依赖于理论的特殊性质，例如其对称性，从而可以直接应用于更高维系统。

参见文献 [22], ，我们检验了这些理论中的强子波函数能否描述为热系综。波函数的试探形式是通过最小化所提出的自由能推导得到的

$$F = E - TS, \tag{1}$$

其中， E （S）是在光锥上的自由部分子动能（双部分子子系统的冯·诺伊曼纠缠熵）。我们发现，在部分子质量趋于无限的极限下，这一描述是精确的。随着夸克质量降低，该描述逐渐偏离精确的数值结果；进入深非微扰区域后，它甚至不再近似适用，也就是说，当$m_q/g \ll 1$时，其中 m_q 表示夸克质量，而g 表示 1+1D 中禁闭规范群的耦合。这促使我们探索对自由能原理的修正，同时牢记在夸克质量较大的极限下，该原理应渐近趋于文献 [22] 中的自由能。

在这封信中，我们的提议是用 Tsallis 熵 [55] 或 Rényi[56] 纠缠熵（这两种熵函数都适用于我们的问题）取代式（1）中的冯·诺依曼熵；为简便起见，本文通篇使用 Rényi 熵。这类熵函数在物理学中有多种应用，包括量子引力（例如，参见文献 [57–59]）、宇宙学[60], 、拓扑相 [61], 、非平衡多体系统 [62], 以及凝聚态物理 [63]。

我们可以将这一提议理解为一种变分方法，用于近似求解 1+1D 规范理论中最低几个束缚态的波函数和质量谱。

我们发现，所提出的自由能能够正确预测所有夸克质量下强子的质量谱和部分子分布函数。这一近似成功复现已有结果，因此促使我们提出最小自由能原理，作为支配禁闭规范群束缚态性质（包括更高维度中的束缚态）的第一性原理。

* pasadi@uoregon.edu
† varun.vaidya@usd.edu

II. 强子波函数的变分方法

我们提出，将参考文献中的双部分子自由能所含的冯·诺依曼熵 [22] 替换为其推广形式之一，即Rényi熵 [56][1]

$$S_\alpha(\rho) = \frac{1}{1-\alpha}\ln\left(\mathrm{Tr}\left[\rho^\alpha\right]\right), \tag{2}$$

其中， ρ 是约化密度矩阵， α 是阶数。在 $\alpha \to 1$ 的极限下，Rényi 熵 S_α 退化为冯·诺伊曼熵。因此，我们提出一个新的双部分子 *Rényi* 自由能 泛函

$$F_\alpha = E - TS_\alpha, \tag{3}$$

其中， E 表示光锥上自由价部分子的动能，而 S_α 是阶数为 α 的强子双部分子子系统 Rényi 熵，更多详情请参见文献 [22]。我们拟检验，最小化该泛函是否能更好地描述强子结构。

对于介子，在 1+1D 中，波函数由 $q\bar{q}$ 态描述，因为对于基态而言，高阶福克态的贡献受到抑制。根据参考文献 [22], ，我们对 $q\bar{q}$ 双粒子系统修正后的自由能为 by

$$F_\alpha = \frac{m_q^2}{P^-}\int dx|\phi(x)|^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right) - \frac{T}{1-\alpha}\ln\left(\int dx|\phi(x)|^{2\alpha}\right), \tag{4}$$

其中， P^- 是较大的光锥动量， $\phi(x)$ 是介子波函数， x 是夸克携带的 P^- 的动量分数， T 是一个拉格朗日乘子。该泛函由以下试探形式取极小值

$$|\phi(x)|^2 = \left(\frac{m_q^2}{\mathcal{T}^2}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\left[x(1-x)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{5}$$

其中

$$\mathcal{T}^2 = TP^-\frac{\alpha}{(1-\alpha)\int dx|\phi(x)|^{2\alpha}}, \tag{6}$$

其数值将由部分子分布函数的归一化条件确定。

类似地，按照文献 [22],中的方法，在最小化重子的双部分子 Rényi 自由能后，我们得到试探形式

$$|\phi(x,z_1,z_2,\cdots,z_{N-2})|^2 = \left(\frac{m_q^2}{\mathcal{T}^2}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\left(x\left[1-x-\sum_{k=1}^{N-2}z_k\right]\prod_{k=1}^{N-2}z_k\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{7}$$

其中 N 是颜色数，而 $\mathcal{T}$ 将通过要求波函数满足正确的归一化条件来数值确定。现在我们可以写出重子内部夸克部分布函数的表达式（更多细节请参见文献 [22] ）

$$f_q(x) = N\left(\frac{m_q^2}{\mathcal{T}^2}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\left(\prod_{i=1}^{N-2}\int_0^{1-x-\sum_{j=1}^{i-1}z_j}dz_i\right)\left(x\left[1-x-\sum_{k=1}^{N-2}z_k\right]\prod_{k=1}^{N-2}z_k\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{8}$$

我们将使用方程（5）和（8）作为模板函数，通过变分方法求出各种禁闭理论中基态强子的本征值和本征函数。在 1+1D 维中，变分参数为阶数 α ，其数值将通过要求波函数使哈密顿量的期望值最小来确定。因此，特定理论的性质将体现为 α 随 m_q变化的方式。现在我们可以考察 1+1D 维中的具体理论并进行这一计算。由于规范耦合 g在 1+1D 维理论中具有量纲，我们用 g对所有其他有量纲的量进行归一化。

[1] 可以证明，对于我们的研究，Rényi 和 Tsallis [55] 熵会得出完全相同的结果。全文中我们采用 Rényi 熵，但若改用 Tsallis 熵，所有结论仍然成立。

III. Schwinger模型

这是一个在 1+1D 中的 U(1)规范理论，其中质量为 m_q 的费米子与光子 [10]耦合。可以利用规范冗余和运动方程消去光子，也就是说，它在 1+1D 中不是传播模。我们在无限动量系（IMF）中工作，其中 $P^- \to \infty$, 而 P^+ 充当哈密顿量。在此参考系中，费米子场的右手分量 ψ_R也不是传播自由度，可以利用运动方程将其消去。将这些场积分掉后，我们得到哈密顿量中的一个有效四费米子相互作用项，其在位置空间中的表达式为 [64, 65]

$$H_{\rm int}(x^0) = g^2\int dx^1dy^1J(x^0,x^1)|x^1-y^1|J(x^0,y^1), \tag{9}$$

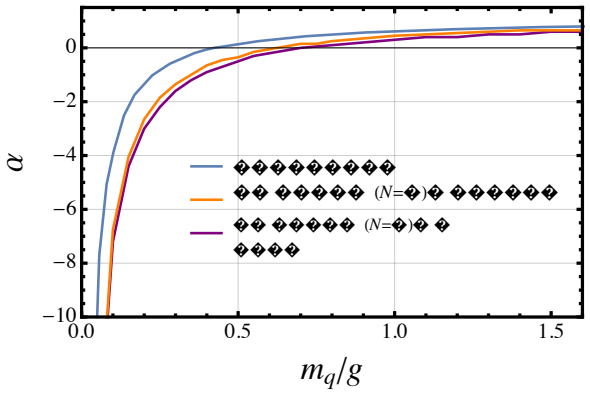


图 1. α Schwinger模型的阶数（蓝色）、带有 $N = 3$ 的 't Hooft模型介子（紫色），以及带有 $N = 3$ 的 't Hooft模型重子（橙色）。我们发现，当 m_q/g 取值 $\alpha \to 1$较大时，也就是说，我们的双部分子 Rényi 自由能趋近于参考文献 [22]中的热自由能。

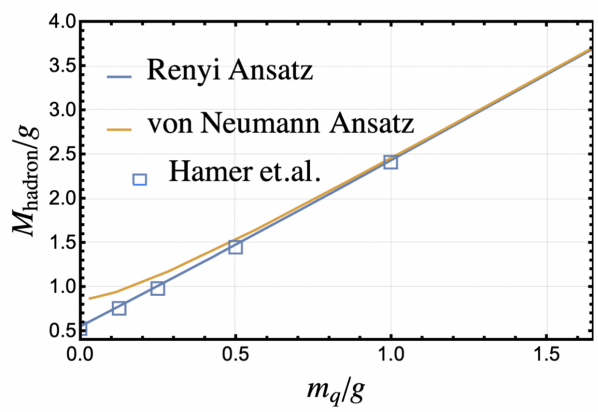


图 2. 我们对 Schwinger模型中基态介子质量的预测（蓝色实线）与现有结果（蓝色方块）完全吻合 [66]。在 $m_q/g \gg 1$ 极限下，$\alpha \to 1$，我们的结果收敛于文献 [22] 中采用冯·诺伊曼熵而非 Rényi熵得到的热描述（金色）。

其中 J 是双线性左手费米子流 $\psi_L^\dagger \psi_L$。该模型中基态介子的哈密顿量期望值为

$$M^2_{\text{hadron}} = \langle\phi|P^-P^+|\phi\rangle = \langle\phi|P^-(H^0 + H_{\text{int}})|\phi\rangle \tag{10}$$
$$= m_q^2 \int dx|\phi(x)|^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) + \frac{g^2}{\pi}\int dxdy\phi(x)\phi^*(y)$$
$$+ \frac{g^2}{2\pi}\int dxdy\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{(x-y)^2}.$$

这里 M^2_{hadron} 是介子束缚态的不变质量平方。现在我们代入方程（5）中的试探形式，并对 M^2_{hadron} 关于 α 进行最小化，以求得介子的质量和波函数。

我们在图 α 中展示了不同夸克质量下阶数 1的取值。该阶数随 m_q单调增加，并在 $-\infty$ 处渐近；当 $m_q \to 0$ 时趋近于该值，而当 $m_q \to \infty$时趋近于 1。值得注意的是，在夸克质量较小时，阶数为负。我们观察到，转入非微扰（$m_q \ll g$）区间时，阶数会变为负值。

将计算得到的 α 代入式（5）中的试探形式，我们得到不同 m_q取值下的介子质量（图2）和部分子分布函数（图3）。对于所有夸克质量取值，我们都发现结果高度吻合（与文献 [66]相比），这支持了我们的自由能猜想。

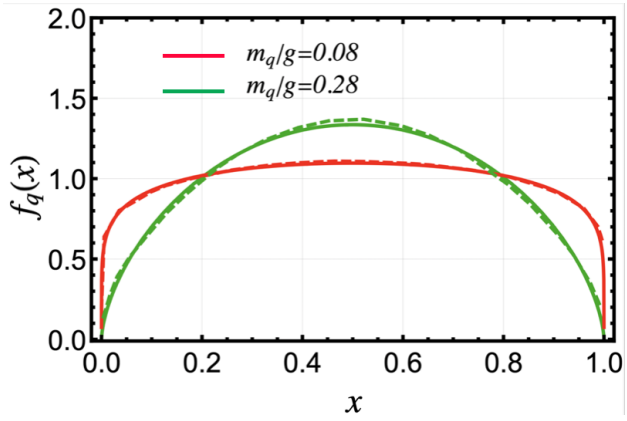


图 3. 两种不同夸克质量下 Schwinger模型基态介子的部分子分布函数。我们的结果（实线）与现有结果（虚线）完全吻合 [66]。

IV. 't HOOFT模型

N 维中的非阿贝尔规范群 SU(N) 统称为 't Hooft模型，以纪念 't Hooft 在研究其大 N 极限下性质方面所作的贡献 [11, 14]。推导了光锥中束缚态的哈密顿量，并通过求解定态薛定谔方程，计算出强子质量谱（作为夸克质量的函数）以及束缚态的波函数 [11, 14, 67]。

在本文余下部分，我们聚焦于 $N = 3$；将我们的结果推广到更高的 N 值也很直接。对于 SU(N) 基本表示中的一种夸克味，介子态的哈密顿量期望值为

$$M^2_{\text{hadron}} = m_q^2 \int dx|\phi(x)|^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) \tag{11}$$
$$+ \frac{g^2}{2\pi}\frac{3^2-1}{3}\int dxdy\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{(x-y)^2},$$

而对于重子，则为

$$M^2_{\text{hadron}} = m_q^2 \int dx \int_0^{1-x} dz|\phi(x,z)|^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x-z} + \frac{1}{z}\right)$$
$$+ \frac{g^2}{2\pi}\frac{3}{2}\frac{3^2-1}{3}\int dz\int_0^{1-z} dxdy\frac{|\phi(x,z)-\phi(y,z)|^2}{(x-y)^2}. \tag{12}$$

这里，$\phi(x,z)$ 是三个价夸克的联合波函数。

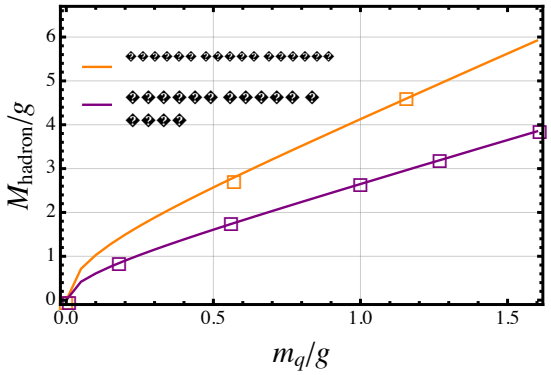


图 4. 't Hooft模型中基态介子（紫色）和重子（橙色）质量随夸克质量变化的预测m_q 对于 $N=3$ 。我们的结果与通过求解光锥薛定谔方程得到的已有结果完全一致，分别对应介子¨（标记为 □）和重子 [11] 。 [67]

现在，我们将式（5）或（8）中的模板试探形式代入式（11）–（12），并将本征值最小化，视为阶数 α 的函数。所得的 α 随夸克质量的变化如图 1 所示。与Schwinger模型的情况类似，我们发现 α 随 m_q/g 单调增大，并在 $m_q \gg g$ 的极限下渐近于 1。注意，$\alpha \to 1$ 对应于冯·诺伊曼熵，因此在此极限下，我们的自由能泛函与文献 [22] 中使用的自由能完全相同。

现在我们可以使用这些 α 值，并计算不同夸克质量下基态强子质量谱的近似结果，见图 4。据我们所知，目前尚无低质量夸克极限下重子的数值精确结果；我们的发现与已有结果完全一致。我们还在图 m_q/g 的上图（下图）中展示了不同 5值对应的基态介子（重子）部分子分布函数。对于介子，我们再次发现结果与精确求解光锥薛定谔方程所得结果完全一致，进一步支持了我们的双部分子 Rényi 自由能猜想。据我们所知，文献中尚无重子的相关结果。¨

V. 讨论

在这封短文中，我们提出了一种变分方法，用于计算 1+1D 中强子的基态波函数和谱。我们从一个具有物理动机的自由能泛函推导出模板函数，该泛函由光锥参考系中自由部分子的动能，以及束缚态中固定动量双部分子子系统的 Tsallis/Rényi 纠缠熵构成。变分参数为熵的阶数，通过最小化给定理论的哈密顿量期望值求得。我们发现，该方法能够正确复现 Schwinger 模型和 't Hooft 模型中强子的质量谱及部分子分布函数的已有结果

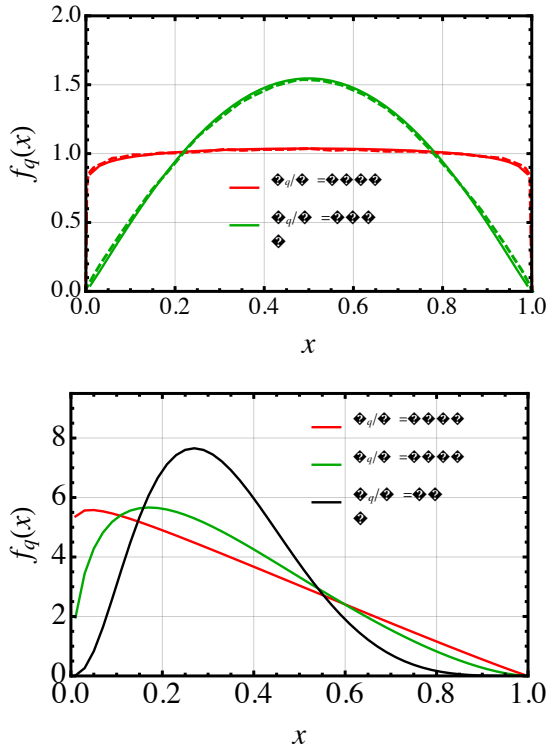


图 5. **上图：** 't Hooft 模型中基态介子的部分子分布函数，其中 $N=3$ ，且夸克处于基本表示，只有一种味，展示了不同夸克质量下的结果。我们的结果（实线）与已有结果一致，参见文献 [68]。 **下图：** 同一理论中基态重子的部分子分布函数，展示了几种不同夸克质量下的结果。在 $m_q \to 0$ 极限下，我们趋近于文献 [67]中的解析结果。据我们所知，目前尚无有限质量下这些部分子分布函数的数值计算。

（其中 $N=3$ ，且夸克为基本表示中的一种味）。

我们的结果表明，这些模型中的强子会使我们提出的双部分子 Rényi 自由能泛函最小化。我们还观察到，无论具体理论或束缚态如何，熵的阶数都会随着裸部分子质量单调增加：从零夸克质量时的 $\alpha \to -\infty$ 增至无限夸克质量极限时的 $\alpha \to 1$ 。我们发现，部分子质量较低、刚进入非微扰区时，熵的阶数会变为负值。从统计角度看，这可以理解为从最大化高概率构型转变为最小化低概率构型。除此之外，我们对 α 还没有更深入的物理直觉。

根据我们的构造，我们推测，在具有固定总动量的双部分子子系统中（在任何禁闭理论的任何束缚态中），单个部分子的约化密度矩阵可由一个系综有效描述：该系综在质量为零时处于最大纠缠态，而在质量较大时趋近于热态。

我们的方法可以扩展到其他 1+1维模型。我们的最终目标是将该方法扩展到更高维度的模型，以应对一系列新的复杂因素——

（例如重整化群演化、自旋和胶子自由度）。我们将这些研究以及许多其他唯象学探索留待未来开展。

致谢

我们感谢 Chris Akers 和 Tim Cohen 提供的有益讨论。PA 的研究部分由美国能源部通过资助编号 DE-SC0011640 提供支持。VV 获得南达科他大学的启动经费支持。

[1] X. Ji, 物理评论快报 110, 262002 (2013), arXiv:1305.1539 [高能物理-ph]. [2] X. Xiong, X. Ji, J.-H. Zhang, and Y. Zhao, 物理评论D辑 90, 014051 (2014), arXiv:1310.7471 [高能物理-ph]. [3] X. Ji, Sci. China Phys. Mech. Astron. 57, 1407 (2014), arXiv:1404.6680 [高能物理-ph]. [4] Y.-Q. Ma and J.-W. Qiu, 物理评论D辑 98, 074021 (2018), arXiv:1404.6860 [高能物理-ph]. [5] J.-W. Chen, T. Ishikawa, L. Jin, H.-W. Lin, Y.-B. Yang, J.-H. Zhang, and Y. Zhao, 物理评论D辑 97, 014505 (2018), arXiv:1706.01295 [高能物理-lat]. [6] Y.-Q. Ma and J.-W. Qiu, 物理评论快报 120, 022003 (2018), arXiv:1709.03018 [高能物理-ph]. [7] J.-H. Zhang, J.-W. Chen, L. Jin, H.-W. Lin, A. Sch¨afer, and Y. Zhao, 物理评论D辑 100, 034505 (2019), arXiv:1804.01483 [高能物理-lat]. [8] T. H. R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. Lond. A 260, 127 (1961). [9] T. H. R. Skyrme, Nucl. Phys. 31, 556 (1962). [10] J. S. Schwinger, 物理评论 128, 2425 (1962). [11] G. ’t Hooft, Nucl. Phys. B 72, 461 (1974). [12] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf, 物理评论D辑 9, 3471 (1974). [13] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, and C. B. Thorn, 物理评论D辑 10, 2599 (1974). [14] G. ’t Hooft, Nucl. Phys. B 75, 461 (1974). [15] T. A. DeGrand, R. L. Jaffe, K. Johnson, and J. E. Kiskis, 物理评论D辑 12, 2060 (1975). [16] C. G. Callan, Jr., R. F. Dashen, and D. J. Gross, 物理评论D辑 17, 2717 (1978). [17] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B 147, 385 (1979). [18] E. Witten, Nucl. Phys. B 160, 57 (1979). [19] E. Witten, Nucl. Phys. B 223, 433 (1983). [20] G. S. Adkins, C. R. Nappi, and E. Witten, Nucl. Phys. B 228, 552 (1983). [21] Z. Komargodski, (2018), arXiv:1812.09253 [高能物理-th]. [22] P. Asadi and V. Vaidya, (2022), arXiv:2211.14333 [nucl- th]. [23] E. T. Jaynes, 物理评论 106, 620 (1957). [24] V. Simak, M. Sumbera, and I. Zborovsky, 物理快报B辑 206, 159 (1988). [25] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 505 (1998), arXiv:hep-th/9803131. [26] O. Aharony, J. Marsano, S. Minwalla, K. Papadodimas, and M. Van Raamsdonk, Adv. Theor. Math. Phys. 8, 603 (2004), arXiv:hep-th/0310285. [27] I. R. Klebanov, D. Kutasov, and A. Murugan, Nucl. Phys. B 796, 274 (2008), arXiv:0709.2140 [高能物理-th]. [28] I. Bah, A. Faraggi, L. A. Pando Zayas, and C. A. Terrero-Escalante, Int. J. Mod. Phys. A 24, 2703 (2009), arXiv:0710.5483 [高能物理-th].

[29] M. Fujita、T. Nishioka 和 T. Takayanagi, 《高能物理学杂志》09, 016 2008 0806 ( ), arXiv: .3118 [高能物理]-th。[30] K. Kutak, 物理快报B辑 705, 217 (2011), arXiv:1103.3654 [高能物理]-ph。[31] U. Kol、C. Nunez、D. Schofield、J. Sonnenschein 和 M. Warschawski, 《高能物理学杂志》**06**, 005 2014 1403 2721 ( ), [ ] arXiv: . 高能物理-th。[32] R. Wang 和 X. Chen, 物理评论D辑 91, 054026 (2015), arXiv:1410.3598 [高能物理]-ph。[33] D. E. Kharzeev 和 E. M. Levin, 物理评论D辑 95, 114008 (2017), arXiv:1702.03489 [高能物理]-ph。[34] E. Shuryak 和 I. Zahed, 物理年刊 396, 1 (2018), arXiv:1707.01885 [高能物理]-ph。[35] O. K. Baker 和 D. E. Kharzeev, 物理评论D辑 98, 054007 2018 1712 ( ), arXiv: .04558 [高能物理]-ph。[36] Y. Hagiwara、Y. Hatta、B.-W. Xiao 和 F. Yuan, 物理评论D辑 97, 094029 (2018), arXiv:1801.00087 [高能物理]-ph。[37] Y. Liu 和 I. Zahed, 物理评论D辑 100, 046005 (2019), arXiv:1803.09157 [高能物理]-ph。[38] C. Han、H. Xing、X. Wang、Q. Fu、R. Wang 和 X. Chen, 物理快报B辑 800, 135066 (2020), arXiv:1809.01549 [高能物理]-ph。[39] Z. Tu、D. E. Kharzeev 和 T. Ullrich, 物理评论快报 124, 062001 (2020), arXiv:1904.11974 [高能物理]-ph。[40] I. Y. Aref’eva、A. Patrushev 和 P. Slepov, 《高能物理学杂志》07, 043 2020 2003 ( ), arXiv: .05847 [高能物理]-th。[41] P. Castorina、A. Iorio、D. Lanteri 和 P. Luke˘s, 国际现代物理学杂志E辑 **30**, 2150010 2021 2003 00112 ( ), [ ] arXiv: . 高能物理-ph。[42] G. Iskander、J. Pan、M. Tyler、C. Weber 和 O. K. Baker, 物理快报B辑 811, 135948 (2020), arXiv:2010.00709 [高能物理]-ph。[43] N. Jokela 和 J. G. Subils, 《高能物理学杂志》02, 147 (2021), arXiv:2010.09392 [高能物理]-th。[44] C. Han、G. Xie、R. Wang 和 X. Chen, 欧洲物理学杂志C辑 81, 302 (2021), arXiv:2010.14284 [高能物理]-ph。[45] D. E. Kharzeev 和 E. Levin, 物理评论D辑 104, L031503 (2021), arXiv:2102.09773 [高能物理]-ph。[46] R. da Rocha, 物理评论D辑 103, 106027 (2021), arXiv:2103.03924 [高能物理]-ph。[47] A. Baty、P. Gardner 和 W. Li, (2021), arXiv:2104.11735 [高能物理]-ph。[48] G. Dvali 和 R. Venugopalan, 物理评论D辑 105, 056026 (2022), arXiv:2106.11989 [高能物理]-th。[49] D. E. Kharzeev, 哲学学报A辑：数学、物理与工程科学 380, 20210063 (2021), arXiv:2108.08792 [高能物理]-ph。[50] K. Zhang、K. Hao、D. Kharzeev 和 V. Korepin, 物理评论D辑 105, 014002 (2022), arXiv:2110.04881 [量子物理]。[51] M. Hentschinski 和 K. Kutak, 欧洲物理学杂志C辑 82, 111 (2022), arXiv:2110.06156 [高能物理]-ph。[52] A. Dumitru 和 E. Kolbusz, 物理评论D辑 105, 074030 (2022), arXiv:2202.01803 [高能物理]-ph。

[53] R. Wang, (2022), arXiv:2208.13151 [高能物理-ph]。[54] G. Benito-Calvi¯no、J. Garc´ıa-Olivares 和 F. J. Llanes- Estrada, (2022), arXiv:2209.13225 [高能物理-ph]。[55] C. Tsallis, 《统计物理学杂志》52, 479 (1988)。[56] A. R´enyi *et al.*, *Proceedings of the fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability* 1 见，卷（加利福尼亚州伯克利，美国，1961年）。[57] M. Headrick, 物理评论D辑 82, 126010 (2010), arXiv:1006.0047 [高能物理-th]。[58] T. Faulkner, (2013), arXiv:1303.7221 [高能物理-th]。[59] X. Dong, 《自然通讯》7, 12472 (2016), arXiv:1601.06788 [高能物理-th]。[60] H. Moradpour、S. A. Moosavi、I. P. Lobo、J. P. Morais Gra¸ca、A. Jawad 和 I. G. Salako, 欧洲物理学杂志C辑 78, 829 (2018), arXiv:1803.02195 [physics.gen-ph]。[61] S. T. Flammia、A. Hamma、T. L. Hughes 和 X.-G. Wen, 物理评论快报 103, 261601 (2009), arXiv:0909.3305 [凝聚态物理.str-el]。[62] T. Rakovszky、F. Pollmann 和 C. W. von Keyserlingk, 《物理评论快报》 **122**, 250602 2019 1901 10502 ( ), [ ] arXiv: 。凝聚态物理.str-el。[63] M. B. Hastings、I. Gonz´alez、A. B. Kallin 和 R. G. Melko, 《物理评论快报》104, 157201（2010）, arXiv:1001.2335 [凝聚态物理.str-el]。[64] S. R. Coleman, 《物理评论D辑》11, 2088 (1975)。[65] S. Coleman, （ *Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures* 剑桥大学出版社，英国剑桥，1985）。[66] P. Sriganesh、R. Bursill 和 C. J. Hamer, 《物理评论D辑》62, 034508（2000）, arXiv:高能物理-lat/9911021。[67] K. Hornbostel、S. J. Brodsky 和 H. C. Pauli, 《物理评论D辑》41, 3814（1990）。[68] Y. Jia、S. Liang、L. Li 和 X. Xiong, 《高能物理学杂志》 11, 151 （2017 年）, arXiv:1708.09379 [高能物理-ph]。