《皇家天文学会月刊》**000**，1–29 (2023)　　预印本，2023年11月6日　　使用 MNRAS LATEX 样式文件 v3.0 编译

宇宙学模拟代码 OpenGadget3——无网格有限质量法的实现

Frederick Groth,[1★] Milena Valentini[2] 和 Klaus Dolag[1,3,4] Ulrich P. Steinwandel[1,5]
[1]慕尼黑路德维希-马克西米利安大学大学天文台物理系，*Scheinerstr. 1*，*81679* 慕尼黑，德国
[2]计算天体物理中心，*Flatiron*研究所，*162 Fifth Avenue*，纽约，*NY 10010*，美国
[3]天文学部，的里雅斯特大学物理系，*via Tiepolo 11*，*I-34131* 的里雅斯特，意大利
[4]意大利国家天体物理研究所—的里雅斯特天文台，*via Tiepolo 11*，*I-34131* 的里雅斯特，意大利
[5]马克斯·普朗克天体物理研究所，*Karl-Schwarzschild-Straße 1*，*85741* 加兴，德国

接受日期 XXX。收到日期 YYY；原稿 ZZZ

摘要
亚声速湍流在决定星系团内介质（ICM）的性质方面发挥着重要作用。我们在 OpenGadget3 中实现了一种新的无网格有限质量法（MFM），并将其应用于这一具体问题。为此，我们给出一组测试案例，以验证代码中无网格有限质量框架的实现。这些案例包括但不限于：用于探查稳定性的平滑情形——声波和开普勒盘；作为常见混合不稳定性的瑞利–泰勒不稳定性和开尔文-亥姆霍兹不稳定性；同时涉及混合与激波、情形更复杂的团块测试；具有不同马赫数的激波管；塞多夫爆炸波；若干涉及自引力的测试，包括引力自由落体、流体静力平衡球体、泽尔多维奇薄饼，以及作为宇宙学应用的 $10^{15} M_{\odot}$ 星系团。与光滑粒子流体动力学（SPH）相比，该方法具有混合增强、收敛行为更佳等优点。我们证明，无网格有限质量求解器（MFM-solver）具有良好的稳健性，在宇宙学背景下也不例外。证据表明，该求解器在处理衰减亚声速湍流时表现出色，而这一问题对许多方法而言都极难处理。MFM 能够高精度地捕捉预期的速度功率谱，并展现出良好的收敛行为。在 OpenGadget3 中使用 MFM 或 SPH，湍流能量因数值耗散而衰减的程度相近。研究不同初始湍动能占比下的能量衰减时，我们发现，MFM 在马赫数低至 $\mathcal{M} \approx 0.01$ 时仍表现良好。最后，我们展示了斜率限制器和能量-熵切换对于控制流体的行为及演化有多么重要。

关键词：流体动力学 – 方法：数值 – 星系：星系团：一般 – 湍流

arXiv:2301.03612v2 [astro-ph.IM] 2 Nov 2023

1 引言

湍流在各种尺度的天体物理系统中都发挥着关键作用，范围从恒星结构、星际介质（ISM）中的恒星形成，一直到星系团内介质（ICM）。湍流会增强小尺度混合，并对系统的整体压力作出贡献。星际介质中的湍流大多为超声速，而星系团内介质中的湍流则主要为亚声速（例如，参见Schuecker 等，2004年，关于后发座星系团的观测）。假设各向同性，柯尔莫哥洛夫 (1941) 提供了亚声速湍流的理论框架。模拟是深入理解天体物理湍流的物理性质及其对局部可观测量的影响（例如星际介质中的恒星形成或其对星系团内介质加热的贡献）的重要工具。

从历史上看，在共动/宇宙学背景下求解流体动力学方程有多种不同的方法。对此，可以按质量或体积对流体动力学方程进行离散化。前者衍生出“拉格朗日”（基于粒子）代码，以及光滑粒子流体动力学（SPH），还有较新的无网格有限质量法（MFM）和无网格有限体积法（MFV）。后者则衍生出“欧拉”（基于网格）代码的概念，以及 Godunov 有限体积方法。

常用的光滑粒子流体动力学代码包括不同版本的 Gadget，其中有 Gadget-1（Springel 等，2001）、Gadget-2（Springel，2005）和 Gadget-4（Springel 等人，2021）；Phantom（Lodato 和 Price，2010；Price 等人，2018）以及 gasoline（Wadsley 等人，2004，2017）。一种带有非常规改进的增强型光滑粒子流体动力学方案已在 magma2 中实现（Rosswog，2020）。MFM 已在 gizmo（Hopkins 2015）、GANDALF（Hubber 等（2018））、Gadget-3（Steinwandel 等，2020）和 pkdgrav-3（Alonso Asensio 等，2023）等代码中实现。

网格代码有两种形式：一种采用静止网格，可能带有自适应网格细化，例如 Zeus（Stone & Norman 1992）、TVD（Ryu 等人 1993, 1998）、Enzo（Bryan 等人 1995, 2014）、FLASH（Fryxell 等人 2000）、RAMSES（Teyssier 2002）、athena（Stone 等人 2008）和 athena++（Stone 等人 2020）；另一种采用移动网格，如 Arepo（Springel 2010；Weinberger 等人 2020）和 shadowfax （Vandenbroucke & De Rijcke 2016 ）。后者的优势在于具有伪拉格朗日特性。网格代码和 MFM 均采用 Godunov方法，并计算邻居粒子之间的通量（Godunov 1959）；而光滑粒子流体动力学（SPH）则直接通过核密度估计获取流体的流体动力学矢量

★ 电子邮箱：fgroth@usm.lmu.de

© 2023 作者

核密度估计通过对一定数量（通常并非常数）的邻居粒子进行加权求和得到。

它们都可用于湍流计算。早期的计算主要在超声速区域进行，这与星际介质中调节恒星形成的情况相关。许多研究结果是在假设受驱动湍流的情况下获得的，即在整个模拟过程中持续向大尺度注入能量。与受驱动湍流不同，我们预计星系团中存在衰减湍流。例如，大尺度结构的坍缩及其后的并合活动会在大尺度注入湍流（Roettiger & Burns 1999；Subramanian 等 2006年），之后能量会传递到更小的尺度（“湍流级联”），并在那里耗散（通常低于任意给定代码的分辨率尺度）。

在Federrath 等（2008年、2009年、2010年）的一系列论文中，他们使用静态网格代码计算了受驱动湍流的湍流盒。他们发现，驱动方案的选择对决定湍流的性质起着重要作用，并会导致密度统计特征显著不同。其结果表明，不同的恒星形成区采用的驱动机制组合也有所不同。总体而言，他们发现，无论采用何种驱动机制，结果都与观测及其他研究结果吻合良好。最近，Federrath 等（2021年）提高了分辨率，甚至能够分辨声速尺度；他们从分辨率为 $\sim 10000^3$ 个网格单元的超声速湍流开始。

Kitsionas 等(2009年) 和 Price &Federrath (2010年) 也比较了不同光滑粒子流体动力学实现与静止网格流体力学方案的性能，并发现这两种方法在高马赫数下吻合良好。网格代码在获取功率谱等体积统计量方面效率更高，而光滑粒子流体动力学由于能够自动调整分辨率，因此对高密度尾部的重现效果更好。

尽管所有这些方法在超声速湍流状态下表现良好，但在处理亚声速湍流时却存在问题。当马赫数（$\mathcal{M}$)Padoan 等(2007) 的值降低时，研究表明，与有限体积法相比，光滑粒子流体动力学的表现并不理想。基于这项研究，Bauer &Springel (2012年) 研究了光滑粒子流体动力学在 $\mathcal{M} = 0.3$ 亚声速湍流中的能力。他们发现，经典（原始）光滑粒子流体动力学无法重现预期的速度功率谱和耗散区间。主要原因是所采用的人工黏性方案以及核函数引入的速度噪声。这些结果引出了一个普遍问题：光滑粒子流体动力学究竟能否处理亚声速湍流。

Price （2012年）指出，这些局限并非 SPH 本身固有的，而是源于某些用于研究亚声速湍流的 SPH 设置。与早期研究的结论相反，采用能够降低亚声速状态下人工黏度的较新 SPH 公式，SPH 便能重现预期的功率谱。

星系团中亚声速湍流的作用已从观测和理论两个角度进行了分析。对星系团内介质中湍流的模拟主要采用网格代码（Vazza et al. 2009，2018；Mohapatra et al. 2021，2022；Iapichino& Niemeyer2008；Iapichinoet al.2017）。Miniati（2014年，2015年）发现，小尺度上的湍流能量不足，且其程度取决于细化技术。此外，他们还讨论了微观物理对湍流演化的重要性。Maier 等人提出了一种可能改进湍流建模的方法，即将自适应网格细化与大涡模拟相结合。Maier et al. （2009年）Dolag et al. （2005年）的模拟表明，只要适当降低人工黏度，SPH 也能模拟星系团中的湍流。

除了对气体动力学的影响外，湍流还负责通过湍流发电机放大磁场。 Schekochihin 等 (2001年、2004年）以及 Steinwandel 等 (2021年）的模拟聚焦于这种湍流发电机，并分析了其增长过程。Kritsuk 等人的另一项研究Kritsuk 等人(2020年）再次研究了采用随机驱动的湍流盒，比较了不同的流体动力学方法，发现其收敛性相当不错，但计算成本存在显著差异。

近来，Sayers 等人 （2021年）将模拟得到的星系团与观测结果进行了比较。尤其是，星系团的动力学状态应会造成差异：动力学状态更弛豫的星系团，其湍流应更弱。然而，模拟并不总能发现这种差异。因此，准确捕捉湍流级联及湍流能量的衰减十分重要。后者需要纳入黏度等额外微观物理过程，而前者也取决于流体力学格式。

我们采用无网格有限质量法（MFM）作为上述方法之外的一种较新方法来研究亚声速湍流。MFM结合了光滑粒子流体动力学（SPH）和移动网格的思想，旨在解决它们各自的一些问题。MFM的发展可追溯到 Vila（1999）提出的早期构想、尚不稳定的 Godunov 光滑粒子流体动力学（ Inutsuka 2002 年；Cha 和 Whitworth 2003年），以及 Idelsohn 等人（2003年）提出的无网格有限元法，最终发展为 Lanson & Vila（2008a,b）首次提出的现行版本。我们在 Gadget 衍生代码 OpenGadget3 中实现了这一新版本。该实现最初基于代码 GANDALF：MFM实现的主体最初取自其代码基础，随后经过了调整。与专注于恒星与行星形成的 GANDALF 实现相比，我们加入了若干扩展，使其能够用于宇宙学模拟。这为恒星与行星形成尺度上的应用提供了一个稳定的基础框架，并将其扩展至 OpenGadget3 的宇宙学积分框架。OpenGadget3 是 Gadget-2 的重新构建版本，能够使用 C++ 编译器进行编译，并大量采用模板化技术。它包含多个模块，涵盖先进物理过程和亚分辨率模型，例如：自相互作用暗物质（Fischer 等人 2022年）、磁流体力学（MHD）（Dolag & Stasyszyn 2009年；Stasyszyn 等人 2013）、热传导（Arth 等人 2014年）、宇宙射线（Böss 等人 2023）、根据 Magneticum 模型进行的恒星形成与恒星/黑洞反馈（Springel 和 Hernquist 2003 年；Tornatore 等人 2003 、 2004 、 2007 ；Hirschmann 等人 2014年；Steinborn 等人 2015年；Dolag 2015年），以及用于非平衡恒星形成的 MUPPI（多相粒子积分器）扩展（Murante 等人 2010、2015；Valentini 等人 2017、2020）。目前，这些扩展仅与光滑粒子流体动力学求解器耦合。还需开展后续工作，使它们也能与 MFM 耦合。

为了利用现代计算机架构，OpenGadget3 采用了混合 MPI-OpenMP 并行化。此外，引力、密度、SPH 流体力和热传导的计算均可在图形处理器上进行。这些模块占用了大部分运行时间（Ragagnin 等，2020年），GPU 卸载在某些应用中可能很有用，可将速度提升数倍（2–4 倍，具体取决于应用）。我们的长期目标是公开提供适用于 OpenMP 和 OpenACC 的更新版 *Gadget* 。

在本文介绍之前，该代码使用Springel & Hernquist (2002年) 提出的现代SPH方法求解流体力学方程，其中包括现代的、随时间变化的人工黏度（Beck 等（2016a））和传导（Price 2008）。通过将 MFM 作为一种现代无网格方法加以实现，我们既能发挥这种方法的优势，也能结合此前为优化现有代码库所做的工作。这还包括

为处理强激波而采取的措施：我们需要非局部的时间步长限制器，这通过唤醒方案实现（Saitoh & Makino 2009年；Pakmor 2010年；Pakmor 等人 2012年）。OpenGadget3 基本遵循Beck 等人(2016a)中描述的实现。

本文的一个主要目标是采用无网格有限质量法，研究星系团中存在的衰减亚声速湍流。为此，我们在宇宙学模拟代码 OpenGadget3 中实现了一种新的流体求解器，以替代目前实现的光滑粒子流体动力学（SPH）求解器。

本文结构如下。首先，我们在第 OpenGadget3 节介绍代码基础，包括其 SPH 实现。2。随后，我们简要概述 MFM，并在第 3节介绍 MFM实现。4中，我们使用一组测试案例验证MFM实现的性能，每个案例都针对代码的特定方面和属性。所有测试案例均采用完全相同的设置，不因具体案例而异，也不进行额外调参。接着，我们在第 4.6节分析采用新实现研究的衰减亚声速湍流。所有案例均提供不同代码和方法之间的比较，包括 OpenGadget3中的 MFM 和 SPH、gizmo 中的 MFM，以及公开提供的 Arepo 版本中的移动网格和静止网格。我们在第 4.8节分析特定数值参数的影响。主要发现将在第 5节讨论。

斜率限制器的公式以及对已实现的黎曼求解器进行比较等补充材料，分别见附录 A 和 B。

2 OPENGADGET3 – 核心架构

求解描述气体演化的微分方程组需要对其进行离散化。在时间维度上，引入一个足够小的时间步 Δt。空间离散化则可采用多种不同的方法。在 OpenGadget3 中，流体动力学采用光滑粒子流体动力学（SPH）或新近实现的无网格有限质量（MFM）方法进行离散化。引力则通过 TreePM 方法求解。

2.1 积分器与时间步进

在时间积分中，我们采用踢-漂移-踢（KDK）形式的蛙跳格式，以达到二阶精度（例如参见 Hernquist & Katz 1989），其实现遵循 Verlet (1967)； Springel (2005年)。

从第 n 个时间步的数值出发，先通过第一次半步踢步更新速度 $\boldsymbol{v}$。随后漂移位置 $\boldsymbol{r}$，再进行第二次半步踢步：

$$\boldsymbol{v}^{n+1/2} = \boldsymbol{v}^{n} + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^{\tilde{n}}\Delta t \tag{1}$$

$$\boldsymbol{r}^{n+1} = \boldsymbol{r}^{n} + \boldsymbol{v}^{n+1/2}\Delta t \tag{2}$$

$$\boldsymbol{v}^{n+1} = \boldsymbol{v}^{n+1/2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^{\widetilde{n+1}}\Delta t. \tag{3}$$

~ ~加速度 $\boldsymbol{a}^{n} = \boldsymbol{a}^{n}\mathrm{hydro} + \boldsymbol{a}^{n}\mathrm{grav}$ 由流体动力学加速度 $\boldsymbol{a}\mathrm{hydro}$ 和引力加速度 $\boldsymbol{a}\mathrm{grav}$ 组成。按照算子分裂方法，二者分别计算。引力和流体动力学加速度在漂移与第二次半步踢之间进行计算。引力相互作用仅取决于位置，因此可以在时间步 n 计算。对于传统的光滑粒子流体动力学，熵不会发生变化，因此也可以在时间步 n 计算流体动力学力；而现代SPH的熵会演化，且黏性项具有速度依赖性。因此，我们使用基于前一个时间步中计算出的变化量得到的预测值，并在漂移时更新。预测变量的依赖关系用 $\tilde{n}$ 表示。

对于光滑粒子流体动力学，熵函数

$$A = (\gamma - 1)U/\rho^{\gamma-1} \tag{4}$$

在踢步时分两个半步积分

$$A^{n+1/2} = A^{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\right)^{\tilde{n}}_{\mathrm{hydro}}\Delta t, \tag{5}$$

$$A^{n+1} = A^{n+1/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\right)^{\widetilde{n+1}}_{\mathrm{hydro}}\Delta t. \tag{6}$$

传统光滑粒子流体动力学守恒熵，而在现代SPH实现中，熵则可能因人工黏性和热传导率等因素而发生变化。

OpenGadget3采用分层时间步进以确保同步，同时允许根据不同的时间步长限制器（例如类似Courant条件的时间步判据）使用自适应时间步

$$\Delta t_i^{\mathrm{Courant}} = \frac{C_{\mathrm{Courant}} a h_i}{c_{\mathrm{max},i}} \tag{7}$$

其中包含邻居粒子中的最大信号速度 $c_{\mathrm{max},\,i}$、尺度因子a、平滑长度 h_i以及自由参数 $C\mathrm{Courant}$，详见 Springel （2005年）。时间步取满足 $\Delta t_i = 2^{-n}\Delta t\mathrm{global} \le \Delta t\mathrm{Courant}_i$ 且时间箱为 $n \in \mathbb{N}_0$ 的最大时间步。

仅计算与当前时间步同步的活动粒子的加速度；对于位于较小时间箱、对应较长时间步的粒子，则不进行修改。

在强激波中，彼此接近的粒子之间可能出现很大的时间步差异。唤醒方案可以避免这一问题，详情参见 Pakmor （2010年）；Pakmor 等人 （2012年）；Beck 等人 （2016a）。OpenGadget3 使用基于信号速度的判据。如果任一邻居 j 的信号速度变化显著 $c_{\mathrm{max},i} > f_w c_j$，且容差因子为 $f_w = 3$，则触发唤醒。在这种情况下，该粒子被视为活动粒子，并被移至较短的时间步，从而仍能确保同步。

虽然该方案会破坏守恒，但其效果相当不错，并能避免强激波中的数值误差。

2.2 引力求解器 – TreePM

对于宇宙学模拟而言，准确处理引力至关重要（Springel 2010）。原则上，可以通过直接求和精确求解，但这种方法计算开销很大（$O(N^2)$）。因此，我们采用效率高得多的八叉树-粒子网格（PM）组合方法（Xu 1995；Bode 等人 2000；Springel 2005，2010年；Springel 等人 2021）。OpenGadget3主要沿用了Gadget-2中的实现，该实现已由Springel (2005年详细阐述。下面简要回顾其主要概念。势被分解为短程和长程两部分。短程力通过八叉树算法计算，而长程力则使用粒子网格计算。树算法的思想由Appel (1985年和Barnes 与 Hut(1986提出。八叉树的节点通过将计算域逐级划分为立方体来构建。对于满足开角判据的节点，计算其力的贡献。出于数值方面的考虑，为了使节点中添加或移除粒子时方程保持线性，仅考虑

单极项贡献。 GADGET 中的实现由Springel 等人(2001年进行了描述。粒子 i 受到其他节点/粒子 j（质量为 m_j，位于$\boldsymbol{r}ij$ 处，相对于粒子 i，其（引力）软化长度为ϵ_j）所产生的总引力加速度为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{grav},i} = G\sum_{j}^{N_{\mathrm{tot}}} \boldsymbol{r}_{ij} \begin{cases} \frac{m_j}{r_{ij}^3} & \text{if } r_{ij} > \epsilon_j \\ \frac{m_j}{\epsilon_j^3}\mathrm{Corr}(r_{ij}/\epsilon_j) & \text{if } r_{ij} \le \epsilon_j, \end{cases} \tag{8}$$

粒子和节点的总数 N_{tot}。Corr 是一个修正项，用于考虑软化效应。 G 是引力常数。对于粒子网格（Eastwood 和 Hockney 1974年），所有粒子都会被分配到网格单元中，以便计算离散傅里叶变换，并在波数 k 处计算傅里叶空间中的引力势 Φ_k，计算公式如下

$$-k^2\Phi_k = 4\pi G\rho_k. \tag{9}$$

通过在傅里叶空间中进行乘法运算，完成短程截断和周期边界的修正。实空间中的引力势通过逆傅里叶变换计算得出，并插值到粒子的原始位置，最终获得引力加速度。 OPENGADGET3 采用更现代的 FFTW3（“西方最快傅里叶变换”）库（Frigo 和 Johnson 2005 年）来实现傅里叶变换，而非使用 FFTW2。

2.3 流体动力学求解器– 光滑粒子流体动力学

对于光滑粒子流体动力学（SPH），计算域被划分为有限数量的“粒子”。每个点处的物理量由附近（邻近）粒子的贡献表示，并根据核函数 $\mathcal{W}_i(r_i, h_i)$进行加权，该核函数取决于距离 r_i 与粒子 i之间的距离，以及其平滑长度 h_i。核函数必须连续、径向对称、具有紧支撑，并满足极限条件 $\lim h\to 0\mathcal{W} = \delta$，除此之外则可任意选取。 OPENGADGET3 提供多种常用核函数供选择，包括三次样条（Monaghan 和 Lattanzio 1985年）、五次样条（Morris 1996）或 Wendland C2/C4/C6 核函数（Wendland 1995年；Dehnen 和 Aly 2012年）。每个粒子的有效体积可由下式很好地近似 $V_i^{-1} = \mathcal{W}(r_i)$，因此密度可表示为

$$\rho(\boldsymbol{r}_i) = \sum_{j\in\mathrm{Ngb}} m_j \mathcal{W}\left(\left|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\right|, h_i\right), \tag{10}$$

对邻近粒子（Ngb）求和。我们允许自适应平滑，使高密度区域的分辨率相较于低密度区域自动提高。平滑长度和有效邻居数 $N\mathrm{Ngb}$ 与密度的关系如下：

$$\frac{4\pi}{3}\rho_i h_i^3 = \bar{m} N_{\mathrm{Ngb}} \tag{11}$$

平均邻居质量为 $\bar{m}$。由于在邻居数固定时，方程（10）和（11）相互耦合，因此通过求根迭代求解平滑长度和密度。密度以外的量标记为 X，其近似计算方法为

$$X(\boldsymbol{r}_0) \approx \sum_{i\in\mathrm{Ngb}} \frac{X_i}{\rho_i}\mathcal{W}(|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_i|, h_i) m_i. \tag{12}$$

可以推导出不同形式的流体动力学加速度。在 OpenGadget3 中，流体动力学加速度（Springel 和 Hernquist 2002年）

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{hydro},i} = -\sum_{j\in\mathrm{Ngb}} m_j \left(f_i \frac{P_i}{\rho_i^2}\nabla_i \mathcal{W}_{ij}(h_i) + f_j \frac{P_j}{\rho_j^2}\nabla_i \mathcal{W}_{ij}(h_j)\right), \tag{13}$$

$$f_i = \left(1 + \frac{h_i}{3\rho_i}\frac{\partial\rho_i}{\partial h_i}\right)^{-1} \tag{14}$$

采用光滑粒子流体动力学（SPH）的完全守恒形式。空间导数不再通过计算物理量的梯度获得，而是全部表示为核函数的梯度。传统光滑粒子流体动力学在处理激波以及再现混合不稳定性方面存在问题（Morris 1996；Agertz 等，2007）。加入人工黏性和人工导热可以解决这些问题。在OPENGADGET3中，采用随时间和空间变化的人工黏性（Beck 等（2016a））和人工导热（Price 2008），以尽可能减小它们在不需要这些机制的区域所产生的影响。

3 无网格有限质量法

作为第二种新实现的选项，流体动力学方程可以采用无网格有限质量法（MFM）进行离散化和求解。概念上，该方法将光滑粒子流体动力学（SPH）与移动网格相结合，按照一种与 SPH 类似的方案计算邻近粒子之间的通量，其中也包括使用核函数进行加权。因此，该方法兼具这两种方法的优点。与 SPH 不同，与粒子相关联的区域并非球形，而是对应于平滑的 Voronoi 镶嵌（Hopkins 2015）。

3.1 基本流体力学方程

任何理想流体的演化都由三个主要方程描述。质量守恒导出连续性方程。第二个方程是运动方程（欧拉方程），对应于牛顿第二定律。热力学第一定律确保能量守恒。在惯性参考系中，所有这些方程可以合并为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t} + \nabla\cdot(\mathbf{F} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{frame}}\otimes\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{S} \tag{15}$$

外积为 $\otimes$，对于纯流体动力学，场矢量为 $\boldsymbol{U} = (\rho, \rho\boldsymbol{v}, \rho e)$，通量为 $\mathbf{F} = (\rho\boldsymbol{v}, \rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v} + P\mathbb{1}, (\rho e + P)\boldsymbol{v})$，且源项 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$ 为零。

总之，方程（15）为 6 个变量提供了 5 个约束：流体密度 ρ、能量密度 e、压力 P 以及速度 $\boldsymbol{v}$ 的三个分量。缺少的约束由状态方程给出，该方程将压力与内能密度联系起来 u。对于理想气体，其形式为

$$P = (\gamma - 1)\rho u \tag{16}$$

其中，若气体为单原子气体，绝热指数 γ 为 5/3。

3.1.1 膨胀宇宙中的方程

在宇宙学背景下，必须考虑宇宙的膨胀。一种可能的做法是将宇宙尺度因子为15的情况下的方程（ a重写，以计入这些效应，正如

例如在 Gadget-1 中：

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{1}{a}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\frac{\dot{a}}{a}\boldsymbol{v}=-\frac{1}{a\rho}\nabla P-\frac{1}{a}\nabla\Phi, \tag{17}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{3\dot{a}}{a}\rho+\frac{1}{a}\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{1}{a}\vec{v}\cdot\nabla(\rho u)=-(\rho u+P)\left(\frac{1}{a}\nabla\cdot\boldsymbol{v}+3\frac{\dot{a}}{a}\right). \tag{19}$$

在OpenGadget3 中，我们采用不同的方法，使用所谓的超共动坐标进行计算；该坐标最早由Martel&Shapiro (1998年提出。代码单位（以下标表示c）与物理单位（p）之间的关系为

$$x_c = a^{-1}x_p \tag{20}$$

$$\rho_c = a^3\rho_p \tag{21}$$

$$v_c = av_p \tag{22}$$

$$P_c = a^{3\gamma}P_p \tag{23}$$

$$u_c = a^{3(\gamma-1)}u_p, \tag{24}$$

因此，方程（15）用代码单位表示时形式保持不变，但能量和动量演化中会因哈勃膨胀而额外出现一项。由于我们使用本动速度，动量对哈勃流的显式依赖被吸收到单位的选取中。

3.2 MFM离散化

在数学上，通过乘以一个分割函数，对方程（15）进行离散化

$$\psi_i = \frac{1}{\sum_{j\in\mathrm{Ngb}}\mathcal{W}_j}\mathcal{W}_i \tag{25}$$

其中，$\mathrm{W}_k = \mathrm{W}(|r-r_k|,\ h_k)$ 并在体积上积分。Lanson & Vila (2008a)；Gaburov & Nitadori (2011年)给出了更详细的推导。本文仅关注与实现相关的关键结果。对于每个粒子 i，量$\boldsymbol{U}_i = (\rho_i,\ \rho_i v_i,\ \rho_i e_i)$ 的变化由源项$\boldsymbol{S}_i$和与邻居粒子 j之间的成对通量$\mathbf{F}ij$ 决定；纯流体动力学中源项为零。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V_i\boldsymbol{U}_i)^{\tilde{n}}+\sum_{j\in\mathrm{Ngb}}\left(\mathbf{F}_{ij}^{\tilde{n}}\cdot\boldsymbol{A}_{ij}^{\mathrm{eff},n}\right)=\boldsymbol{S}_i^{\tilde{n}}V_i^n. \tag{26}$$

计算成对通量可自动确保质量、动量和能量守恒。有效界面面积 $\boldsymbol{A}\mathrm{eff}ij$ 取决于分割函数和有效体积 V_i,

$$\boldsymbol{A}_{ij}^{\mathrm{eff}} = V_i\tilde{\boldsymbol{\psi}}_j - V_j\tilde{\boldsymbol{\psi}}_i. \tag{27}$$

其中

$$\tilde{\psi}_j^{\alpha}(\boldsymbol{x}_i) = B_i^{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_i)^{\beta}\psi_j(\boldsymbol{x}_i) \tag{28}$$

采用爱因斯坦求和约定，对 β 在方程式（28）中求和。矩阵 $\mathbf{B}$ 的选取旨在保证二阶精度（Lanson & Vila2008a）

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{E}_i^{-1} \tag{29}$$

$$E_i^{\alpha\beta} = \sum_{j\in\mathrm{Ngb}}(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_i)^{\alpha}(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_i)^{\beta}\psi_j(\boldsymbol{x}_i). \tag{30}$$

此外，有效体积取决于积分分区函数，并可用数密度 n_i表示：

$$V_i = \int\psi_i \approx n_i^{-1} \tag{31}$$

对于高度各向异性的粒子排列，矩阵$\mathbf{E}$ 可能会变得病态，导致无法准确进行数值矩阵求逆。按照Hopkins （2015年）所述，我们使用条件数 $N\mathrm{cond},_i = N^{-1}\mathrm{dimensions}\sqrt{\|\mathbf{E}_i^{-1}\|\,\|\mathbf{E}_i\|}$ 来衡量矩阵的条件良好程度。对于 $N\mathrm{cond},_i > 100$梯度仅以类似SPH的方式按一阶精度计算。

最重要的是，无需像移动网格那样显式计算剖分，而是采用类似SPH的邻居搜索，与网格重构相比，这大幅降低了计算成本。

与SPH不同，SPH的质量密度是根据方程式（11）估算的；对于MFM，数密度 n_i 则与平滑长度一同通过迭代过程估算，求解

$$n(\boldsymbol{r}_i) = \sum_{j\in\mathrm{Ngb}}\mathcal{W}\left(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|,h_i\right), \tag{32}$$

$$\frac{4\pi}{3}n_i h_i^3 = N_{\mathrm{Ngb}}. \tag{33}$$

对于MFM， NNgb也对应有效邻居数。

方程（26）中的通量通过黎曼求解器进行数值计算。我们采用精确黎曼求解器，其实现遵循 Toro(2009) 的方法，容差为 10^{-4}，最多进行 8 次迭代。此外，我们还实现了能够精确求解线性化方程组的黎曼求解器（Roe 求解器，Roe 1981），以及两种最常用的 Harten-Lax-van-Leer 求解器（HLL）变体：HLL 和 HLLC（Toro2009）。对于这些求解器，如果速度更快的近似求解器失效，则会回退使用精确黎曼求解器。求解器选择的影响将在附录 B 中进一步讨论。

黎曼求解器需要知道界面处的速度、密度和压力值，这些值汇总在原始流体变量向量中

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix}\rho\\ \boldsymbol{v}\\ P\end{pmatrix}. \tag{34}$$

原则上，可以直接使用粒子中心处的值，进行零阶插值。虽然这种方案稳定，但其精度仅为一阶，且数值扩散较大（Godunov 1959年；Barth & Jespersen, 1989）。为此，我们采用两步法，如图 1 所示，这与基于网格的方法以及其他MFM实现中通常采用的做法类似。第一步，使用二阶精度的矩阵梯度估计器计算原始流体变量向量的梯度

$$(\nabla\otimes\boldsymbol{W})_i^{\alpha} = \sum_{j\in\mathrm{Ngb}}(\boldsymbol{W}_j-\boldsymbol{W}_i)\tilde{\psi}_j^{\alpha}(\boldsymbol{x}_i). \tag{35}$$

面的 位置 和 速度 估算如下

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{ij}^{\mathrm{frame}} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{ij}s_i, \tag{36}$$

$$\boldsymbol{v}_{ij}^{\mathrm{frame}} = s_j\boldsymbol{v}_j + s_i\boldsymbol{v}_i, \tag{37}$$

其中我们设定

$$s_i = \frac{h_i}{h_i+h_j} \tag{38}$$

使其达到二阶精度，而非用于一阶精度插值的 $s_i = 1/2$。

通过选择与界面静止系相对应的参考系，该格式便成为拉格朗日格式。在 MFM 中，边界也被假定以拉格朗日方式形变，从而消除邻居粒子之间的质量通量。由于实际的界面速度和

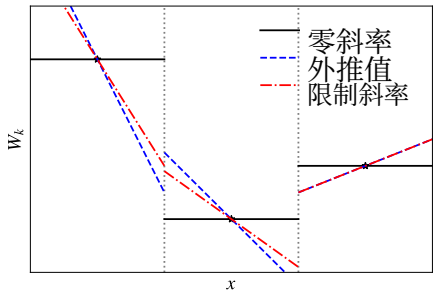

图1. 从粒子/单元中心值外推至面值的示意图。使用中心值对应于零阶插值，会形成一阶格式（黑色实线）。通过使用由相邻粒子/单元定义的斜率进行外推（蓝色虚线），可将其扩展为二阶格式；然而，这可能导致面值过高或过低（见左侧面），甚至出现负密度/压力（见右侧面）。通过采用不同方法限制斜率（红色点划线），可以解决这一问题。更多细节请参见正文。

形变与一个时间步内所假定的情况并不完全一致，因此会引入二阶误差（Hopkins 2015）。另一种方法是采用无网格有限体积（MFV）方法允许质量通量，但该方法的精度也仅为二阶。此外，已有研究表明，在宇宙学模拟中，当粒子被加速进入低密度环境时，MFV 可能会因粒子质量被耗尽而出现问题（Alonso Asensio 等（2023））。因此，我们在此不采用这种格式，而是专注于 MFM 方法。与光滑粒子流体动力学（SPH）相比，MFM 和有限体积格式还有一个普遍优势：无需额外的耗散项。

面值根据以下方式进行外推

$$\boldsymbol{W}_i^{\text{frame}} = \boldsymbol{W}_i + \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i^{\text{frame}} \cdot \nabla \otimes \boldsymbol{W}_i. \tag{39}$$

为避免流体中出现强梯度时发生过冲或欠冲，甚至产生不符合物理规律的负密度或负压力，我们在面插值的第二步中将这些梯度乘以因子 $\nabla W_{i,k} \rightarrow \alpha_{i,k}\nabla W_{i,k}, 0 \leq \alpha_{i,k} \leq 1$，其中 $\alpha_{i,k}$ 可因粒子 i 和分量 k而异。我们实现了多种斜率限制器选项，包括总变差递减（TVD）限制器（Duffell 与 MacFadyen（2011））、Arepo 中采用的限制器（Springel 2010），其最初由 Barth & Jespersen（1989）提出、GANDALF 代码中的标量限制器（Hubber 等（2018）），以及 gizmo 代码中使用的限制器（Hopkins 2015），相关说明详见附录 A。此外，还可以使用 gizmo 代码中的成对限制器。

最后，第三步使用黎曼求解器计算通量，然后将其转换为流体动力学加速度和能量变化。[1] 所有这些步骤仅应用于当前位于活动时间箱中的粒子。尽管这种工作流程在计算上很方便，但由于通量计算使用的是旧梯度，因此会降低方案的精确度。尽管如此，正如Hopkins（2015年）所论证的那样，该方案在实际应用中仍具有足够高的精度。

此外，在我们的实现中，通量只针对活动粒子进行更新，这会破坏守恒。可以通过同时更新两个粒子的通量，并且只考虑时间箱较低的邻居粒子来改进这一点。由于我们发现这在实际应用中没有显著缺点，因此保留了计算上更方便的版本。

[1] 由于黎曼求解器需要使用物理单位，而非（共动）代码单位，因此必须相应地转换变量（另见Hopkins 2015，附录 H5）。由于通量计算是在界面处进行的，因此计算动量变化时无需考虑哈勃膨胀。

3.3 能量-熵切换

虽然黎曼求解器输出的是总能量变化，但代码的其余部分需要的是内能。代码中从未使用总能量本身。根据Gaburov & Nitadori （2011年）的式（26），可将总能量变化直接转换为内能变化；由于时间步虽小但有限，因此将其改写为差分方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\right)^n = \left(\frac{\mathrm{d}E_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t}\right)^n - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2\right)\right)^n \tag{40}$$

$$\approx \left(\frac{\mathrm{d}E_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t}\right)^n - \frac{1}{2}m^n\left(\frac{(\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})^2 - \boldsymbol{v}^2}{\mathrm{d}t}\right)^n \tag{41}$$

$$\approx \left(\frac{\mathrm{d}E_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t}\right)^n - m^n\left(\boldsymbol{v}^n + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)^n \Delta t^n\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)^n. \tag{42}$$

速度变化可以直接根据黎曼求解器返回的动量变化计算，因为对于 MFM，质量保持不变。因此，总能量和速度的时间导数均可从黎曼求解器的输出中获得。我们在括号中引入附加项 $\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\boldsymbol{v}\mathrm{d}t\right)^n \Delta t^n$，这是一个二阶修正，可提高离散方程的精度；该离散方程是离散时间步的结果。虽然这种从总能量到内能的转换无法达到机器精度的总能量守恒，但能提高内能演化本身的精度。对于非常冷的流动，内能演化仍由数值误差主导。对于这些罕见情况，我们通过假定变化完全为绝热变化来避免这一问题。我们沿用 gizmo 代码中的实现思路，其中该开关仅针对泽尔多维奇薄饼等特定测试问题启用。若启用，内能

$$U_{\text{est},i} = U_i + \mathrm{d}U_i \tag{43}$$

与势能和/或动能进行比较

$$E_{\text{pot},i} = m_i a_{\text{grav}} \cdot 0.5 h_i, \tag{44}$$

$$E_{\text{kin},i} = 0.5 m_i \max_{j\in\text{Ngb}} \left(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i\right)^2. \tag{45}$$

如果内能相对于其他能量贡献足够小

$$U_{\text{est},i} < \alpha_1 E_{\text{pot},i} + \alpha_2 E_{\text{kin},i} \tag{46}$$

以物理单位表示时，粒子 i 的新内能则通过假设绝热膨胀或收缩来计算。参数 $\alpha_{1/2}$ 必须经过调节，使其只在必要时影响粒子的演化。我们在第 4.8.2 节比较了不同取值。

内能的更新方式与光滑粒子流体动力学（SPH）中熵的更新类似：在踢步时分为两个半步，并采用与 SPH 中熵相似的二阶时间积分。

$$U^{n+1/2} = U^n + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\right)^{\tilde{n}} \Delta t, \tag{47}$$

$$U^{n+1} = U^{n+1/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\right)^{\widetilde{n+1}} \Delta t. \tag{48}$$

对于宇宙学模拟，还会加入由哈勃流引起的额外绝热贡献。

3.4 在 OpenGadget3 中切换光滑粒子流体动力学与 MFM

要用 MFM 替代光滑粒子流体动力学，通常无需更改代码的整体结构。主要是将光滑粒子流体动力学特有的力计算替换为 MFM 计算的三个步骤，即梯度计算、斜率限制和实际的通量计算。由于黎曼求解器既需要物理量作为输入，也会输出物理量，而代码的其余部分使用代码单位，因此必须在通量计算之前，按照式（20）至（24）进行单位转换。在所有使用该计算结果（包括流体动力学加速度）的地方，都必须先将其转换回物理单位。

此外，MFM 根据黎曼求解器的输出计算内能变化，而光滑粒子流体动力学则演化熵。

3.5 与先前 MFM 实现的差异

尽管就 gizmo 和 GANDALF 中介绍的实现而言，MFM 的总体概念保持不变，但与这些先前的实现相比仍存在若干差异。我们的实现基于 GANDALF 中的实现，该实现最初旨在适用于恒星与行星形成。我们在此基础上加入共动积分及其他扩展，例如用于宇宙学应用的能量-熵切换。此外，我们将时间积分方案从二阶精度的 MUSCL-Hancock 改为二阶精度的 Leapfrog KDK，与 OpenGadget3 中的光滑粒子流体动力学保持一致。

OpenGadget3 与 gizmo 相比，主要区别在于：默认使用迭代式精确黎曼求解器计算通量，而 gizmo 使用近似的 HLLC 黎曼求解器；精确黎曼求解器仅作为备用方案。

与 pkdgrav-3 （Alonso Asensio 等（2023））相比，能量-熵切换以及各向异性粒子分布的处理实现有所不同，并且更接近 gizmo。

此外，还存在一些细微差异，例如公式（42）中的二阶修正。我们还按照附录 A中的描述，使成对限制器采用拉格朗日形式；pkdgrav-3也独立完成了这一改动。不同代码中的密度计算收敛性略有差异。我们遵循 OpenGadget3中针对光滑粒子流体动力学所采用的相同实现方式，只是将质量密度替换为数密度。最后，我们的实现采用了混合 MPI-OpenMP 并行化，这与 Open- Gadget3的其他模块相同。

4 测试案例

我们使用若干测试案例，考察不同流体力学方法准确追踪气体演化的能力。只有少数测试具有解析解，包括声波和不同类型的激波。Berlok (2022年) 提出了一组具有解析解的磁流体力学波，可用于后续磁流体力学扩展的测试。许多其他测试可用于定性分析。它们都探究了对宇宙学模拟至关重要的特定数值方面。

我们使用这些测试，将 OpenGadget3 中新的 MFM实现与 OpenGadget3 中的光滑粒子流体动力学、公开版 gizmo[2] 版本以及公开可用的移动网格代码 Arepo[3] 进行比较。

4.1 设置

本文旨在对不同代码进行公平比较，同时采用适用于宇宙学模拟的一般设置，包括斜率限制器、黎曼求解器（MFM）以及人工扩散项（光滑粒子流体动力学）。尽管这样设置使所有求解器在几乎所有测试案例中总体表现良好，但仍有少数测试问题（例如第 4.3.3 节中的方形测试）无法理想地适用这一设置，我们将在本文后续部分详细讨论。如果未另行说明，我们假设气体为理想气体，且所有代码在所有测试中均采用自适应时间步长（即我们从不强制使用较小的恒定时间步长来提高结果的准确性）。$\gamma = 5/3$

MFM 使用三次样条核，并在三维（二维）中采用 32（24）个邻居粒子。使用来自 gizmo 的斜率限制器，并结合其成对限制器；两者均见附录 A。 OpenGadget3 与 gizmo采用一致的设置。对于光滑粒子流体动力学，使用 Wendland C6 核，并进行偏差校正（Dehnen 和 Aly 2012年）；在三维（二维）中采用 295（64）个邻居粒子。还采用了 Beck 等人 (2016a) 提出的现代时变人工黏性方案，以及人工导热（Price 2008）。对于 Arepo ，我们还采用了基于质心和单元“圆度”的网格正则化。所有设置的概览已公开发布[4]。除非另有说明，初始条件（初始条件）均采用相同的粒子质量生成。在大多数情况下，粒子排列在（受扰动的）规则网格上，以减少初始粒子分布引入的噪声。

4.2 稳定性

4.2.1 声波

作为第一项测试，我们采用密度为 $\rho = 1$、扰动振幅较小（$\Delta\rho = 10^{-4}$）的正弦声波，模拟区域在 x 方向上的长度为 1，在 y/z 方向上的长度为 0.75。粒子以受扰动的六方最密堆积（hpc）网格排列，分辨率各不相同。粒子数从 $643 \cdot 0.752$ 到 $1283 \cdot 0.752$ 不等。下文将 x 方向上单位长度内的粒子数定义为分辨率。我们采用波数 $k = 2\pi$ ，声速为 $c_s = 2/3$。该测试有解析解 $\rho(x,t) = \rho_0 + \Delta\rho \sin(k(x + c_s t)$，因此非常适合进行收敛性分析。为此，我们测量 L1 误差范数 $\frac{1}{N_{\rm tot}} \sum_i^{N_{\rm tot}} |\rho_i - \rho(x,t)|$，结果见图 2。所有方法都能演化声波，但不同代码的精度和具体收敛行为各有差异。我们观察到，gizmo 中的 MFM实现与 OpenGadget3 的收敛性相近，介于一阶和二阶之间。尽管理论上预期达到二阶收敛，但正如 Alonso Asensio 等人（2023）所述，斜率限制器会降低收敛阶。OpenGadget3 中光滑粒子流体动力学的收敛性与 Arepo 代码相近，但甚至低于一阶。对于 Arepo，造成这种低阶收敛的主要原因是网格正则化引入了微小的数值噪声，以及对总面面积贡献小于 10^{-5} 的面会被忽略（R. Pakmor，2023，私人通信）。收敛性

[2] 获取自https://bitbucket.org/phopkins/gizmo-public/src/master/ 2021年2月

[3] 获取自 https://gitlab.mpcdf.mpg.de/vrs/arepo 2021年6月[4] https://github.com/fgroth/hydro_tests

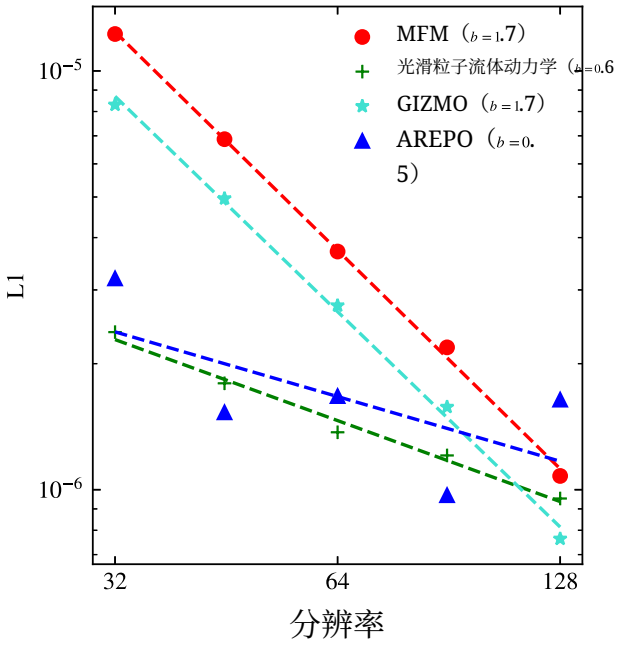

图 2. 不同分辨率下声波的 L1 范数。收敛阶 b 由拟合得到。两种实现中的 MFM 均表现出介于一阶和二阶之间的收敛性，而光滑粒子流体动力学和移动网格的收敛阶甚至低于一阶。

通过修正这两点可以改善收敛性，如附录所示。C，从而使其收敛性与 MFM 相近，且更接近二阶。不过，这些改动会降低该代码在宇宙学模拟中的稳定性。

为了进行更详细的分析，我们将误差分解为位置误差、振幅误差和散布误差，如图 3 所示。对密度分布拟合正弦声波，从而得到相对于预期波形的偏移和振幅差异。随后使用 L1 范数对剩余偏差（主要为散布）进行量化。

与预期声速的偏差与色散误差有关，并会导致相对于解析解的偏移。上图展示了这种偏移误差。我们观察到，两种实现中的 MFM 收敛阶均介于一阶和二阶之间，且两个代码的结果一致。对于光滑粒子流体动力学和 Arepo，最低分辨率下的总误差大约小一个数量级，但收敛阶甚至低于一阶。对于光滑粒子流体动力学，这一趋势可归因于低阶误差；此类误差在传统光滑粒子流体动力学中尤为显著，在现代SPH中也仍有部分残留。

中间面板所示的振幅误差与数值扩散有关。正如在其他测试中所见，黎曼求解器和斜率限制器会在 MFM 中引入数值扩散，因此 MFM 的误差最大。不同 MFM 实现之间的差异可用所采用的黎曼求解器不同来解释。光滑粒子流体动力学和 Arepo 的误差小得多。不过，与其他方法相比，MFM 的收敛行为再次更好。两种实现都大致呈二阶收敛，而其他方法则似乎约为一阶收敛。

最后需要指出的是，所得声波并不具有完美的正弦形状，而是在振幅上表现出散布。这主要是平滑长度/密度迭代以及所选取的、用于判定结果达到收敛的阈值所导致的。我们

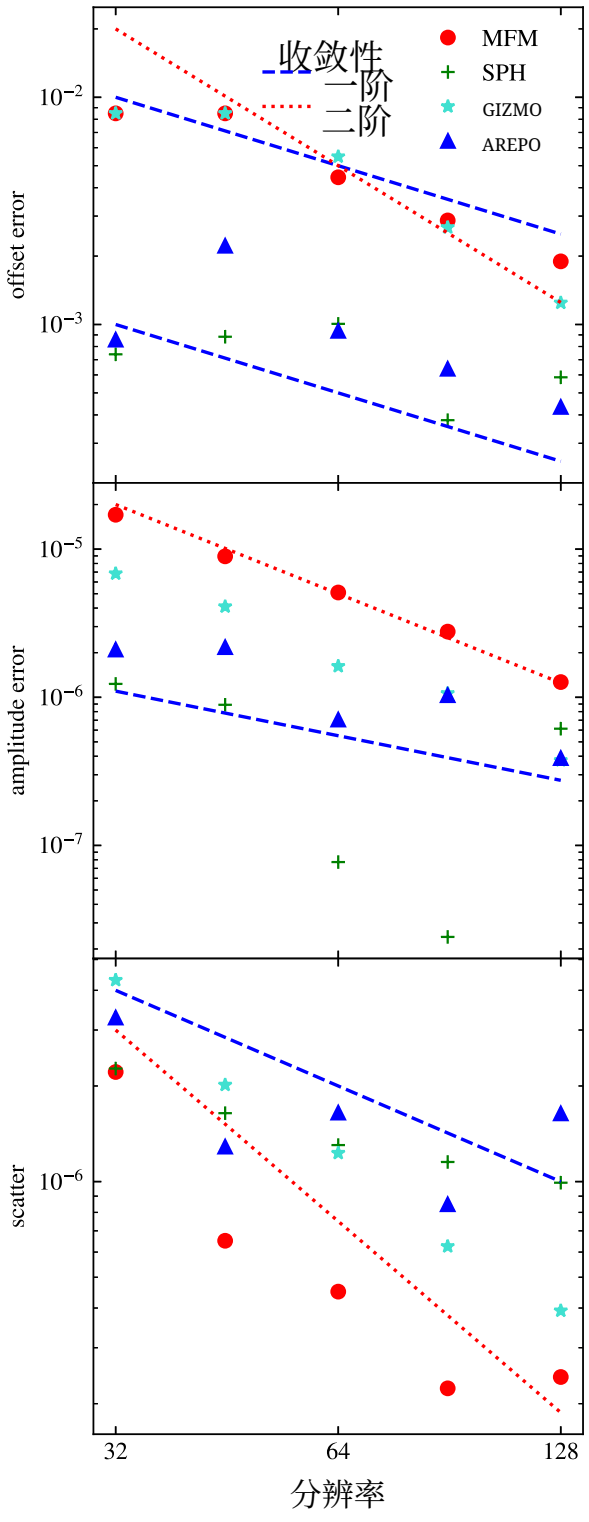

图3. 在不同分辨率下，使用 OpenGadget3 中的 MFM 和光滑粒子流体动力学、gizmo 中的 MFM 以及 Arepo 中的移动网格计算得到的 $t = \frac{2}{c_s}$ 处声波密度的偏移误差、振幅误差和散布误差。所有方法的散布误差均呈二阶收敛，而其他误差表现出不同的收敛行为。所有误差分量的 MFM 收敛阶数均介于一阶和二阶之间。

通过图3底部面板所示的 L1 误差范数对这一误差进行量化。所有方法都显示出大致二阶的收敛性，但误差的振幅有所不同。OpenGadget3 中 MFM 与光滑粒子流体动力学之间的差异可以由所使用的不同核函数解释，而其他代码在迭代方面存在差异，并且对收敛参数的处理略有不同。即使在更高分辨率下，Arepo的较大误差也使其他误差的数值更加不确定。除了前面提到的误差外，由于演化中的非线性项，声波还会发生变形并变陡。这种非线性会在图3底部面板的散射误差中引入一个额外但较小且恒定的项。降低振幅可以减小该项，但这也会使散布误差变得更加显著，或使达到收敛的计算代价更高。由于预计非线性贡献将在 $L1 \approx (\Delta\rho/\rho)^2 = 10^{-8}$ 时变得重要，因此对于所考虑的分辨率而言，该项并不相关。

4.2.2 开普勒盘

开普勒盘是宇宙学模拟中的一个重要测试案例，可用于研究代码随时间守恒角动量并维持稳定轨道的能力。尤其可以分析黏度的影响。为此，我们初始化一个足够大的二维盒子，以容纳所有粒子。初始条件取自 Hopkins (2015年，并初始化了 48240 个质量相等的气体粒子，将它们排列成网格状结构，并设置为零压力 $P = 10^{-6}$。气体的表面密度分布如下：

$$\Sigma = 0.01 + \begin{cases} (r/0.5)^3 & \text{if } r < 0.5 \\ 1 & \text{if } 0.5 \le r \le 2 \\ (1 + (r-2)/0.1)^{-3} & \text{if } 2 < r. \end{cases} \tag{49}$$

对于 Arepo 模拟，我们采用低密度网格，并将压力设为零；分辨率为每单位长度 16 个粒子，这些粒子分布在盘周围以及盘的中心空洞内。

我们采用外势 $\Phi = -(r^2 + \epsilon^2)^{-1/2}$，由此得到的引力加速度形式为

$$\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{r} \begin{cases} \left(\frac{(r/0.35)^2}{(r^2)^{1.5}} - \frac{(0.35-r)/0.35}{(r^2)^{1.5}} \right) & \text{if } r \le 0.35 \\ \left(\frac{1}{(r^2)^{1.5}} \right) & \text{if } 0.35 < r < 2.1 \\ \left(\frac{1+(r-2.1)/0.1}{(r^2)^{1.5}} \right) & \text{if } 2.1 \le r. \end{cases} \tag{50}$$

我们追踪盘的演化，直到 $t = 120$，对应于 ≈ 20 $r = 1$ $t = 120$ $t =$ 圈轨道。此时 12.5 的密度以及 。见图 。4 2 2 。。起初，所有方法都因初始条件中的扰动而产生螺旋结构。而对于采用 Balsara 黏度开关的传统光滑粒子流体动力学（ Balsara 1998）这会导致盘仅经过几个轨道后便遭到破坏，这与 Beck 等人 (2016a) 的研究结果一致。采用 OpenGadget3 实现的现代 SPH，结合 Beck 等人 (2016a) 提出的改进黏度方案，大幅提高了盘的稳定性。尽管内外区域仍有一定程度的衰减，但在整个模拟演化过程中，盘的主体部分保持稳定。对于 MFM，盘在超过20 个轨道后仍保持稳定。与 SPH 相比，我们观察到盘的内外部分退化程度要小得多。初始扰动在整个盘中扩散，使得盘主体部分的扰动略大于 SPH 计算结果。我们的实现与 gizmo 的实现均表现出定性相似的结果。 Arepo 的模拟则产生了最

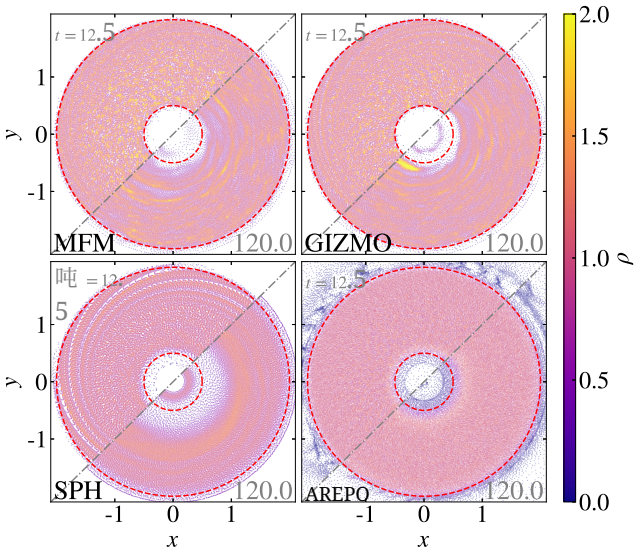

图 4. 采用不同流体力学方法演化开普勒盘。每种方法在两个时刻的表面密度： $t = 12.5$（左上）和 $t = 120$ （右下）。总体而言，所有方法都能演化出稳定的盘。然而，初始条件引入的扰动在不同方法中的演化方式各不相同。

稳定的盘。只观察到边界处有轻微退化。还需要进一步研究，以分析这是数值效应，还是由其他计算中不存在的环境介质相互作用所致。

4.3 流体混合不稳定性测试

流体混合会出现在各种宇宙学情境中，其中最常见的是冲压剥离。为此，我们分析不同代码和方法演化此类混合不稳定性的能力。

4.3.1 瑞利-泰勒不稳定性

一种常用的流体混合测试是瑞利-泰勒不稳定性。它可用于考察代码描述不稳定增长模态的能力。我们采用的设置取自 Hopkins (2015年）。计算在边长为 1 的二维周期性盒子中进行，其中包含 65536 个粒子；位于 $y < 0.1$ 和 $y > 0.9$ 处的粒子被固定为边界条件。与其他代码不同，对于 Arepo，边界粒子并未固定，而是采用了反射边界条件。

将高密度流体（$\rho = 2$）置于低密度介质（$\rho = 1$）之上，并使其处于流体静力平衡状态。对于此测试案例，我们取 $\gamma = 1_{\text{。}}4$，这与双原子气体（如分子氢）的情况相同，并施加恒定的引力加速度：

$$\boldsymbol{a}_{\text{grav}} = -0.5\hat{y}. \tag{51}$$

为使不稳定性发展，在相界面处引入一个小的速度扰动（详情请参阅 Hopkins 2015）。

在图 5 中，我们展示了所有方法都能完美地演化这种不稳定性。不同方法之间的一个主要差异在于是否出现不对称性和次级不稳定性。对于 MFM，这些现象都很明显，无论是在 OpenGadget3 还是 gizmo中；它们在 Arepo 的计算中也存在，但显得更加

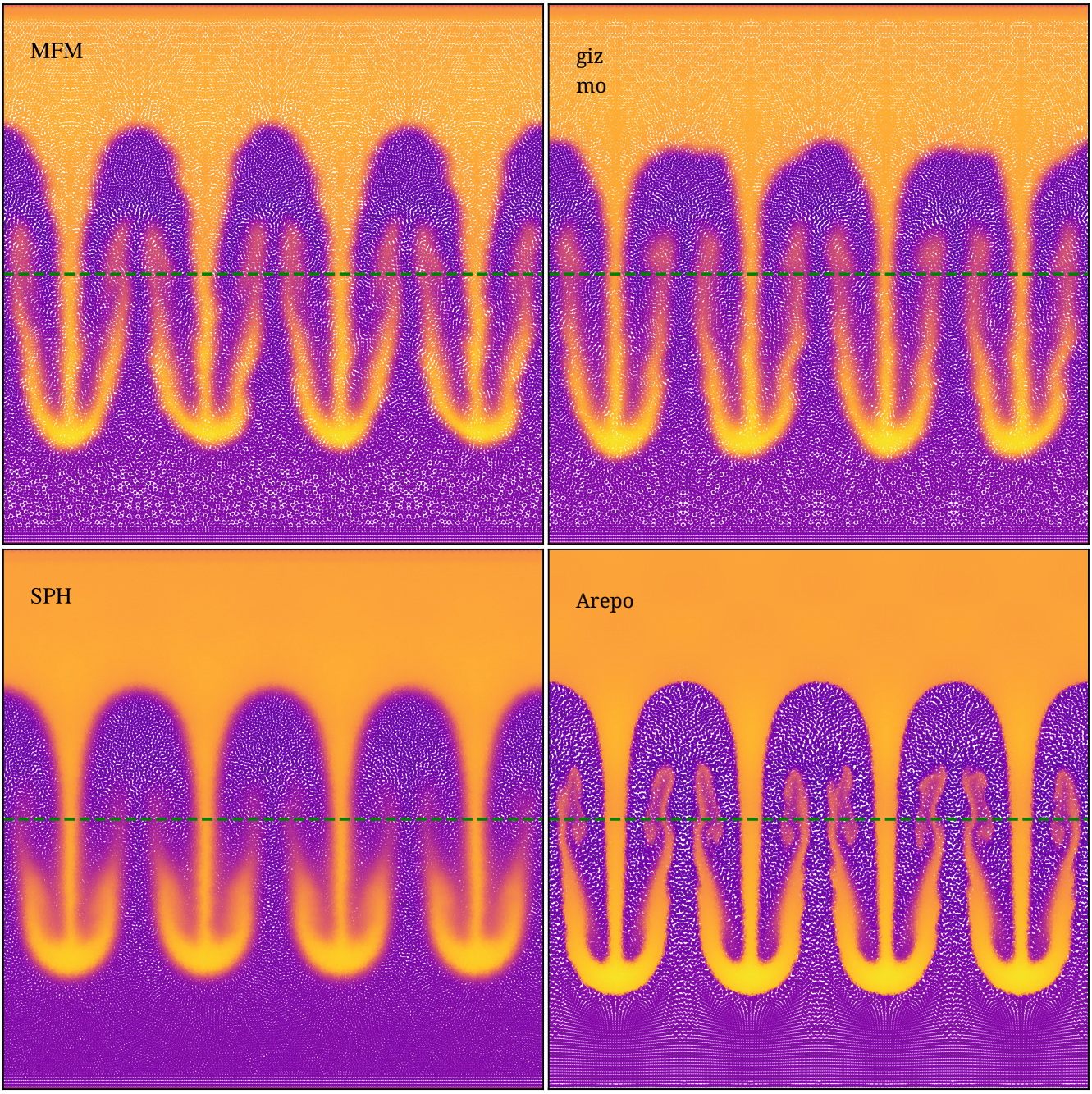

图5。 瑞利-泰勒不稳定性 a t 时间 $t = 3$。6. 不同流体力学方法之间的比较。垂直线标记了 ph 的初始位置 ase
边界。差异主要在于 p 次级不稳定性的存在或缺失。

对称。我们发现，由于较大的核函数带来的平滑作用以及实际上较低的空间分辨率，SPH 计算中并未出现这些现象（例如，参见 Marin-Gilabert 等人，2022，其中对次级不稳定性的出现及其物理意义进行了更详细的讨论）。Arepo 的结果显示出最清晰的边界和尖端处最高的密度，其次是 MFM。靠近边界的 Arepo 粒子仍清晰地呈现出初始网格状粒子分布的印记。我们注意到，现代 SPH 中的数值扩散使不稳定性的边界梯度较为平缓，并模糊了初始的不对称性。此外，由于邻居数较多，与 MFM 相比，有效空间分辨率降低了 ≈ 2 倍，因此光滑粒子流体动力学在不稳定性尖端达到的密度要低得多。

4.3.2 开尔文-亥姆霍兹不稳定性

与瑞利-泰勒不稳定性类似，开尔文-亥姆霍兹不稳定性也是流体混合的著名示例。我们再次采用Hopkins (2015年）提供的设置。两个密度分别为 $\rho_1 = 1$ 和 $\rho_2 = 2$、处于流体静力平衡状态的流体被初始化于一个二维周期性盒子中，

初始速度为$\boldsymbol{v}_1 = 0。5\hat{x}$、$\boldsymbol{v}_2 = -0。5\hat{x}$，并施加了遵循 McNally 等人 (2012年）的小扰动。该设置总共包含774144 个粒子。在时刻 $t = 2。5$ 、对应于 $\approx 1。2\tau_{\rm KH}$ 个开尔文-亥姆霍兹时间尺度的单位中$\tau_{\rm KH} = \frac{\lambda}{\Delta v_x}\frac{\rho_1+\rho_2}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}$（例如，参见Junk 等人 2010年），如图6所示，所有方法均已产生涡卷。

涡卷的内部结构存在差异。总体而言，定性结果与瑞利-泰勒不稳定性的结果非常相似。光滑粒子流体动力学会使涡卷变得平滑，不会出现次级不稳定性，并且随着时间推移，演化过程更加平缓。相比之下，两种实现中的 MFM 都显示出高密度涡卷与低密度介质之间的明显分界，并出现次级不稳定性。Marin-Gilabert 等人 (2022年) 也对开尔文-亥姆霍兹不稳定性进行了更详细的分析，其中也使用了我们新的 MFM 实现。他们还表明，结合使用更多邻居和更高阶核函数，可以避免次级不稳定性。这会增加内禀黏性，并防止以次级不稳定性形式出现的混合。Arepo 也会出现次级不稳定性，尤其是在涡卷内部。出现这些扰动时，它们最终会主导演化过程，而不是涡卷的形成过程，持续时间为 $t \gtrsim 3$。

4.3.3 静水平衡方块

由于前述两种流体混合测试都包含会因不稳定性而变形的锐利边界，因此，了解这些边界在初始条件中未施加扰动时的演化过程十分重要。静水平衡方块测试了这种行为，特别适合研究与数值表面张力相关的边缘稳定性。类似测试例如由 Hess 和 Springel (2010年) 以及 Hopkins (2013、2015年) 进行过。

我们设置了一个尺寸为 $L = 1$ 的二维盒子，并采用周期性边界条件。盒子内填充了 7168 个质量相等的气体粒子，排列成两个规则网格：一个网格用于环境介质（ρ_a=1， $P_a = 2。5$），另一个网格用于边长为 $L/2$ 、密度较高且处于流体静力平衡状态的正方形区域（ $\rho_s = 4$ ）。在图 7中，我们比较了采用不同方法演化至时间 $t = 10$时得到的密度分布。由于初始条件设置为流体静力平衡，我们预期系统不会发生变化。只有采用移动网格代码 Arepo才能达到这一理想状态。理论上，我们预期 MFM 也能达到同样效果，如 Hopkins (2015年) 所示。不过，他们采用的设置与我们的设置相比理想化程度很高。尤其是，他们对所有粒子都使用规则网格，并在正方形区域内增大粒子质量。在我们的设置中，边界处的梯度估计无法保持线性梯度。相反，由于两个独立网格形成的非均匀粒子分布，梯度估计会产生偏差，尤其是在与斜率限制器结合使用时。关于斜率限制器影响的更详细分析见第 4.8.1 节；我们在其中展示了表面张力的大小以及正方形由此产生的形变都强烈依赖于斜率限制器。使用我们的 MFM 实现和 gizmo，我们都观察到 MFM 中正方形的边缘开始变形，随后出现数值不稳定性，导致形变变得更加不对称。如图 8所示，将分辨率提高 4 倍后，这种不稳定性出现得更晚，正方形也更能保持原有形状。使用光滑粒子流体动力学（SPH）时，正方形也会变形。正如预期的那样，由于数值误差表现得如同表面张力，正方形会变得更圆（例如，参见 Price 2008）。对于传统光滑粒子流体动力学，这些误差应为低阶误差。不过，我们观察到，提高分辨率可以大幅减弱这一效应，如图 8所示。这表明，正如 OpenGadget3中采用的现代 SPH 实现，能够减少低阶误差并提高收敛性。总体而言，在这一特定测试中，SPH 和 MFM 都表现出表面张力效应。移动网格的表现最佳，能够完美保持原有状态。MFM 在较晚时刻会出现一些数值误差，导致形变更加不对称；随着分辨率提高，这些误差会逐渐消失。

4.3.4 “团块”测试

一个更复杂的问题是团块测试。该测试旨在通过激波演化与流体混合不稳定性的相互作用，模拟冲压剥离。我们采用 Hopkins (2015年) 描述的设置（另请参见 Agertz 等， 2007）。一个边长在 x 和 y 方向上为 2000、在 z 方向上为 6000 的三维盒子中布置了 9641651 个粒子。将一个密度较高的云团 $\rho_{\rm 云团} = 10\rho_{\rm 风}$ 置于风洞中，其中超声速流的马赫数为 M = 2。7，密度为 $\rho_{\rm 风} = 2。6 \cdot 10^{-8}$。两个相态处于压力平衡。

在 $t = \tau_{KH}$ 和$t = 4\tau_{\rm KH}$ 时刻，穿过云团的切片中所得的密度分布如图9所示。云团前方形成了弓形激波。在开尔文-亥姆霍兹时间尺度$\tau_{\rm KH} = 2$时，云团已出现不稳定性。MFM 和 Arepo中的不稳定性明显得多，而在光滑粒子流体动力学中，云团虽发生变形，却没有表现出不稳定性。我们的 MFM实现、gizmo 以及移动网格代码Arepo中的云团形态各不相同。尽管如此，按照满足 $\rho > 0$的粒子定义的云团质量$64\rho_{\rm cloud,\ i}$和$u < 0。9u_{\rm amb,\ i}$在 τ_{KH}之前对于所有方法都非常相似，如图10所示。正如预期，MFM 计算结果与Hopkins (2015年) 的计算结果一致。周期性起伏是由于边界条件的选择导致激波自相互作用的结果。

在后期，演化过程出现了显著差异。尽管 MFM 和移动网格方法中也会形成次级不稳定性并导致云团瓦解，但光滑粒子流体动力学方法则更稳定。不过，与 Hopkins (2015年) 更传统的光滑粒子流体动力学结果相比，我们发现团块衰减得更明显，因为采用随时间变化的人工黏性和热传导率的现代SPH能够更好地演化不稳定性，从而促进更多混合。

4.4 激波捕捉测试

4.4.1 Sod 激波管

该代码的另一项重要能力是捕捉马赫数任意大的强激波。我们首先使用基于 Sod（1978）设置的简单 Sod 激波管测试这一能力。该测试在尺寸为 L_x=140,$L_y = L_z = 1$ 的三维周期性盒子中进行，其中包含两种密度和压力不同的流体（$\rho_1 = 1, P_1 = 1$； $\rho_2 = 1/8, P_2 = 0.1$，适用于 $\gamma = 1.4$），它们以类玻璃构型初始化，总计包含 216090 个粒子。当两个相开始相互作用时，一道激波开始向右移动。图 11 展示了 MFM 计算在 $t = 2.5$ 时、不同马赫数下得到的结构，并将其与解析解进行比较。对于本研究采用的所有马赫数，模拟结果都与预期剖面高度吻合，范围从马赫数 M = 1.5 的极低马赫数激波到马赫数 M = 100 的强激波。这种能力与黎曼求解器的精度直接相关。马赫数较高时，由于采用了非 TVD 斜率限制方法，激波前沿会出现更高的速度和熵峰值；Hopkins（2015）也报告了这一现象。需要指出的是，如果不使用限制器，这些峰值及其附近的振荡会更大；而使用 TVD 限制器则能进一步避免这一问题，不过在其他情况下它也有更多缺点。

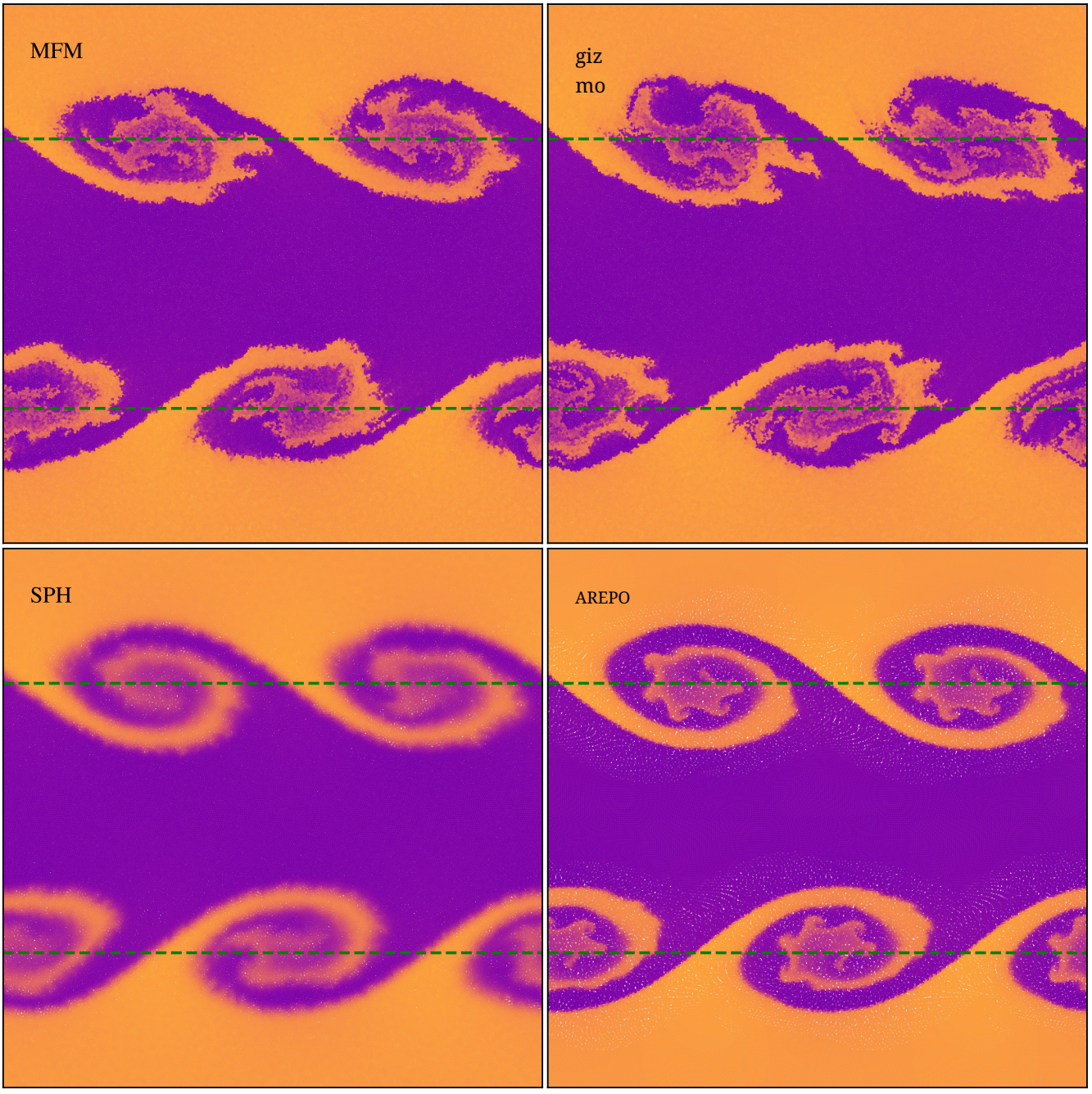

图 6. 二维 Kelvin-Helmholtz 不稳定性在 $t = 2.5$ 处的形成过程，不同方法的比较。水平虚线标示初始位置，即 phase 边界。所有方法都产生了涡卷，但其内部结构存在差异。

对于马赫数不断增大的情况，足够小的时间步变得更加重要。随着时间步减小，高马赫数 $\mathrm{M} = 100$ 激波中的速度散布，以及激波前沿位置的微小偏移，都会逐渐消失。

所有马赫数下密度的散布都是由初始条件的选取造成的。这些初始条件采用类玻璃构型，并针对较高的邻居数进行了设计。对于 MFM 所采用的较低邻居数，该散布无法收敛。压力分布在稀疏波扇处出现典型的凸起，同时也出现了压力波动接触间断处，如图 12 中间 $\mathcal{M} = 10$ 激波中更详细所示。这表明斜率限制器引入了类表面张力误差项。正如第 4.3.3 节以静水平衡方块为例所讨论的，这些项存在于光滑粒子流体动力学和两种 MFM实现中，但在 Arepo中不存在；这也体现为不同方法中压力突起的有无。MFM 和光滑粒子流体动力学对激波前沿的捕捉效果同样出色，不过由于邻居数较少，MFM 的平滑程度较低。 Arepo 对激波前沿处行为的捕捉效果较差。尤其是，它在该区域的网格重构方面存在困难

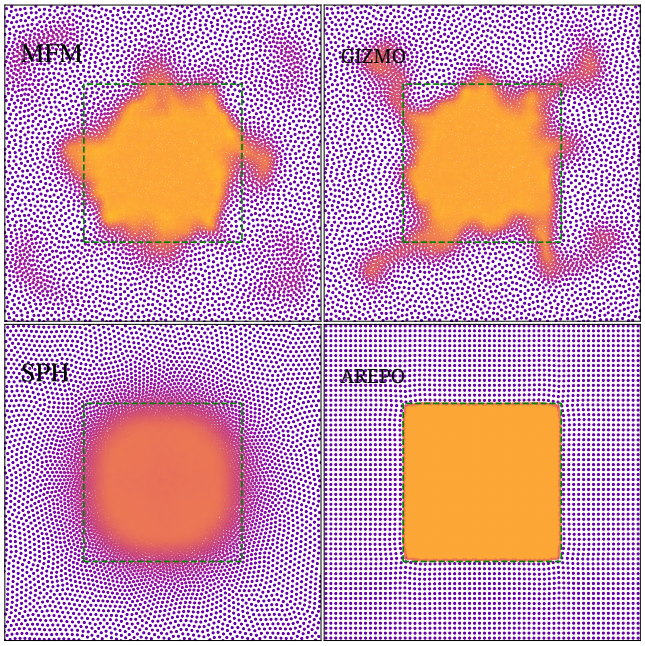

图 7. 采用不同方法演化至 $t = 10$ 时静水平衡方块的密度。图中以等高线标出了高密度“方块”区域的初始位置。只有 Arepo 能够保持方块的初始形状，而其他方法都会导致方块变形。

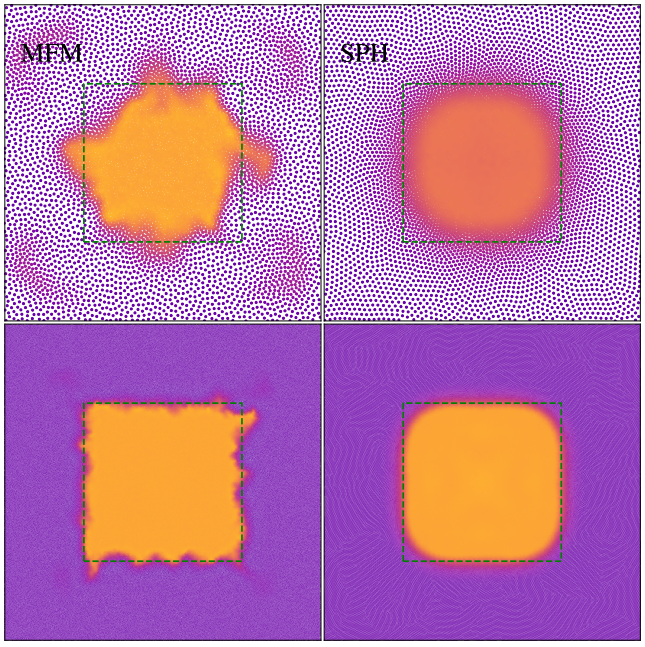

图 8. $t = 10$时的静水平衡方块。比较 MFM 和光滑粒子流体动力学在两种不同分辨率下的结果。上：7168 个粒子；下：114688 个粒子（分辨率提高了 4 倍）。MFM 和光滑粒子流体动力学都显示出方块形状的收敛性。

强各向异性区域，这导致激波前沿的位置发生偏移，并使受激波区域出现振荡行为。不过，可以通过使用静态网格来改善这一问题，但这会失去该方法的其他优势。

4.4.2 塞多夫-泰勒爆炸波

这种极强的径向对称激波最早由Sedov (1946，1959年)提出。除了能够处理跃变之外，Saitoh &Makino (2009年)还阐述了如何利用它分析时间步长限制器，并指出限制必须是非局部的，唤醒方案正是通过这种方式实现的。近年来，这项测试已成为超新星爆炸波演化的一项常用基准测试（例如，Kim & Ostriker 2015年；Steinwandel 等 2020年）。

作为初始条件，我们设置一个由64_3 个粒子组成的规则网格，密度为$\rho = 1$。几乎所有粒子的压力 P_a =10^{-6}都为零，而 $U = 10$ 的能量则平均分配给中心的八个粒子。由此产生一个极高的激波，$\mathcal{M}_i \gtrsim 2 \cdot 10_4$ 并迅速向外传播。径向密度分布如图13所示。

所有方法都能捕捉到激波，但都会对其进行轻微平滑，从而低估密度峰的高度。光滑粒子流体动力学的平滑效应最明显，其次是两种 MFM 实现。Arepo 对峰值高度的再现最为准确。

所有方法预测的峰值位置都相近，仅有细微差异。Arepo 和 gizmo 的 MFM实现能够正确预测峰值位置，而 OpenGadget3 中的 MFM 和光滑粒子流体动力学略有滞后，因此对激波低密度一侧的位置预测得更准确。该位置高度依赖于精确的时间步设置，这表明各代码的时间步进存在差异。

4.5 纳入自引力

在宇宙学背景下，流体动力学力和引力加速度都至关重要。由于引力具有长程作用的特性，它主导着大尺度上的演化。引力可以导致云团坍缩，例如星际介质中的云团坍缩会引发恒星形成；也可以平衡热压，使系统达到流体静力平衡，例如星系或星系团的整体结构。因此，接下来我们将分析流体动力学力与引力之间的相互作用。

4.5.1 引力自由落体

作为纳入自引力的第一个测试，我们模拟一个坍缩球体。初始条件设定在一个规则网格上，网格包含 20_3 个粒子，并截取一个半径为 1 的球体，其总质量为 $M_{球体} = 1$ ，压力可忽略不计，为 $P = 10^{-6}$。对于 Arepo 模拟，我们在球体未占据的区域填充低质量、低能量的粒子，分辨率仅为每单位长度 8 个粒子，并将其排列在规则网格上，以改善边界处的网格重构。我们追踪半质量半径的演化，以避免像完整半径那样受到边界效应的影响，如图 14 所示。并将结果与纯引力自由落体的解析解进行比较

$$t(r) = \arccos\left(\sqrt{\frac{r}{r_0}} + \sqrt{\frac{r}{r_0}}\sqrt{1 - \frac{r}{r_0}}\right) \cdot \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{3\pi}{32\rho_0}}, \tag{52}$$

在早期，所有方法都达成一致。到了后期，压力增大，因此流体力学格式的影响变得更加重要，并且可以观察到偏差。对于所有方法而言，额外的压力贡献都会导致

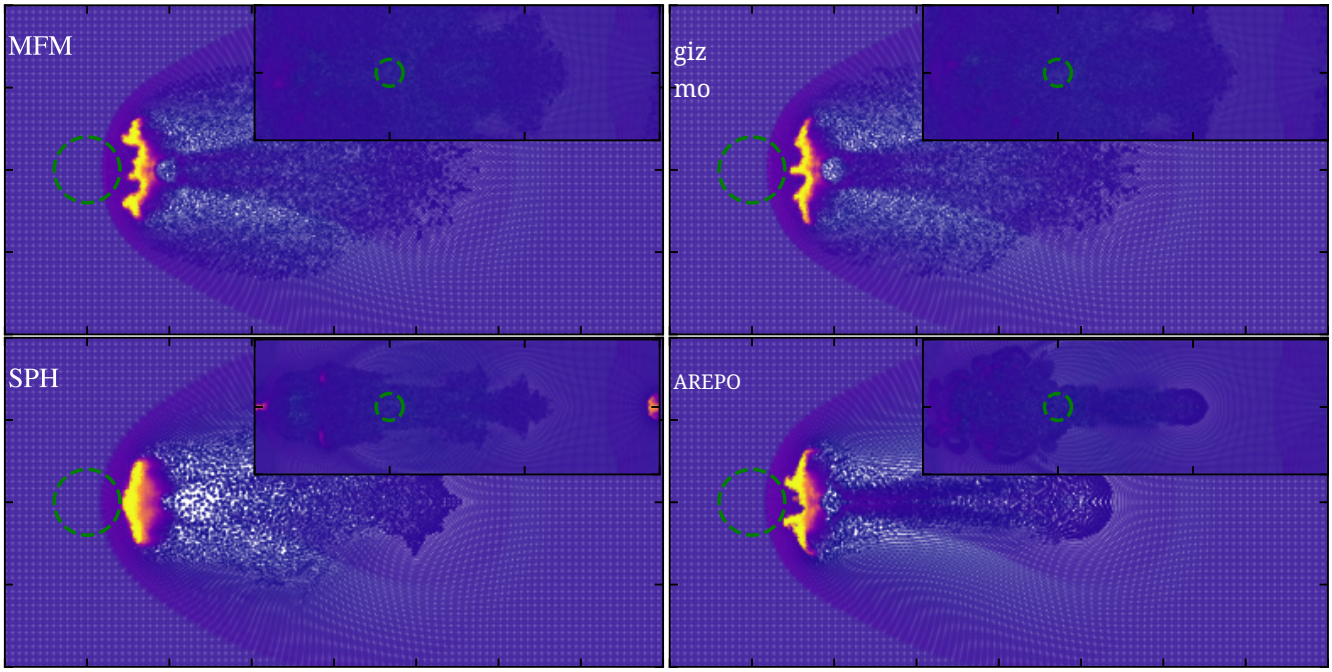

图9. 在 $t = \tau_{\rm KH}$ 和 $t = 4\tau_{\rm KH}$ 时刻的云团，作为小插图用于比较不同的流体力学方法。在较早时刻，由于累积的不稳定性较少，光滑粒子流体动力学导致的形变小得多；而两种实现中的 MFM 与 Arepo 在定性上均一致。到了较晚时刻，MFM 和 Arepo 已完全混合，而光滑粒子流体动力学仍保留一些结构。

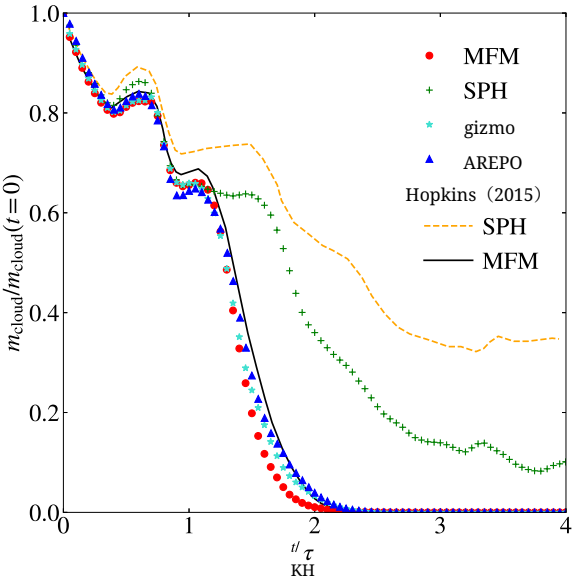

图10. 不同方法下存留云团的比例衰减情况。背景中展示了 Hopkins (2015年) 对 MFM（黑色实线）和（传统）光滑粒子流体动力学（橙色虚线）的结果对比线。MFM 与 Arepo 吻合得非常好，而光滑粒子流体动力学表现出的混合较少。

半径增大，这正如预期的那样。由于初始压力很小，因此预期偏差也很小。MFM最接近理想解，两种实现都难以区分，能。移动网格代码 Arepo 在早期就高估了半径，这可以用其对非周期性边界条件处理不佳来解释。虽然引力是以非周期方式计算的，但流体力学计算所需的网格构造必须将盒子视为周期性的，而其他所有方法并非如此。在边界处纳入低质量单元后，误差已减少一半；扩大盒子还能进一步降低误差。除极晚时刻外，光滑粒子流体动力学的结果介于其他方法之间；在极晚时刻，由于过度平滑，偏差大幅增加。

4.5.2 流体静力平衡球体

在宇宙学背景下，例如对于星系团内介质而言，代码抵抗引力并维持流体静力平衡的能力至关重要。为对此进行测试，我们将流体静力平衡球体作为第二项测试，其中纳入了自引力。这也是首项纳入暗物质作为第二种仅受引力作用的粒子类型的测试。初始条件是按照Viola 等人 (2008年)的方法创建的。我们设置了 88088 个遵循 NFW 密度剖面（Navarro 等人 1997年）的暗物质粒子，并以处于流体静力平衡状态的 95156 个气体粒子填充其中。图15显示了不同时刻对应的密度和内能剖面。经过一个短暂的弛豫阶段（其时间尺度约为动力学时间 t自由落体 ≈ 1 于 $r = 10^2$）后，我们预期气体能够维持流体静力平衡。光滑粒子流体动力学和我们的 MFM实现所表现出的密度形变最小。gizmo 中的 MFM以及 Arepo 则显示出稍强的密度增大，尤其是在中心区域。密度只是（数值）扩散性的间接示踪量，而内能剖面受其影响更直接。因此，内能剖面能够更深入地揭示随时间变化的收敛性。

对于光滑粒子流体动力学，我们观察到系统在一个

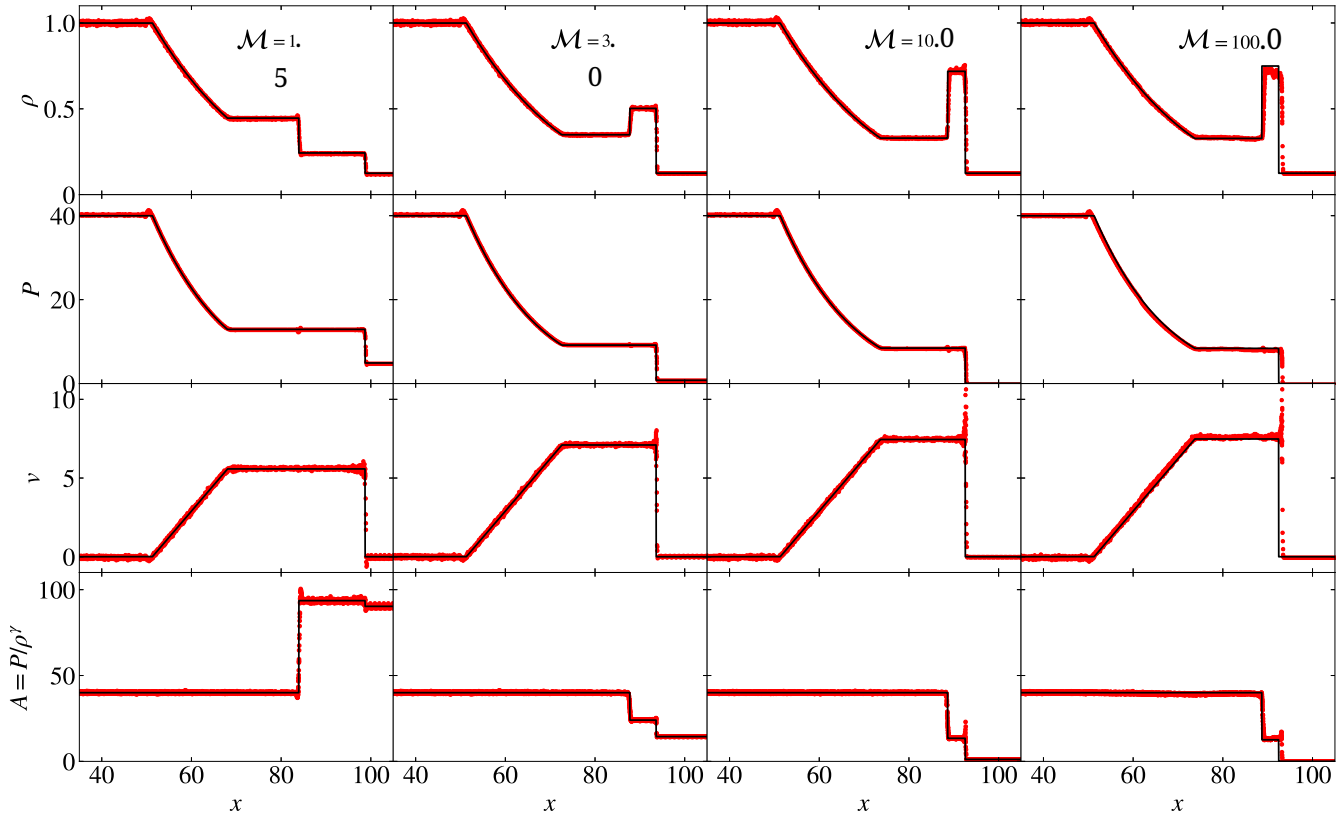

图11. 使用我们的 MFM实现计算的 $t = 2.5$ 激波管的密度、压力、速度和熵剖面，以及不同马赫数之间的比较。MFM 能够再现激波的整体结构。在较高马赫数下，可以看到斜率限制器引入的表面张力伪影。散布是由初始条件的选择造成的。

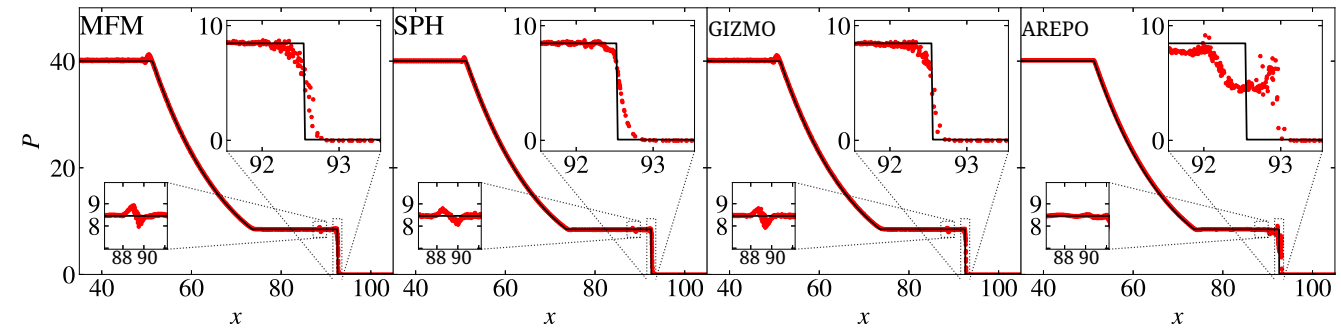

图12. M = 10 激波管在 $t = 2.5$ 时的压力分布，不同流体力学方法之间的比较。不同代码呈现出不同程度的表面张力；由于时间步进不同，激波前沿的位置也略有差异

自由落体时间内达到稳定状态，且初始剖面仅发生了细微变化。OpenGadget3 中的 MFM 也是如此，其内能变化仅略大于光滑粒子流体动力学。对于 Arepo，与初始剖面相比，其变化与 MFM 的结果相似，因为初始条件是基于光滑粒子流体动力学设计的。经过相近的弛豫时间后，这种方法也达到了稳定状态。相比之下，gizmo 中的 MFM 则受到数值扩散的影响。由此产生的中心区域混合导致内能降低，进而造成观察到的中心密度升高。MFM实现之间的差异源于所采用的黎曼求解器不同，并与精细实现上的差异。在我们此前的实现中，也观察到了与 gizmo 类似的变化。在非常长的时间尺度下，对于 MFM，球体会趋于等温。尽管有这些发现，在所考察的时间尺度内，所有方法对密度剖面的影响都非常小。

4.5.3 泽尔多维奇薄饼

泽尔多维奇薄饼是用于测试我们共动积分实现的第一个问题。此外，它也很适合展示极高 M流、激波、高度各向异性的粒子排列——

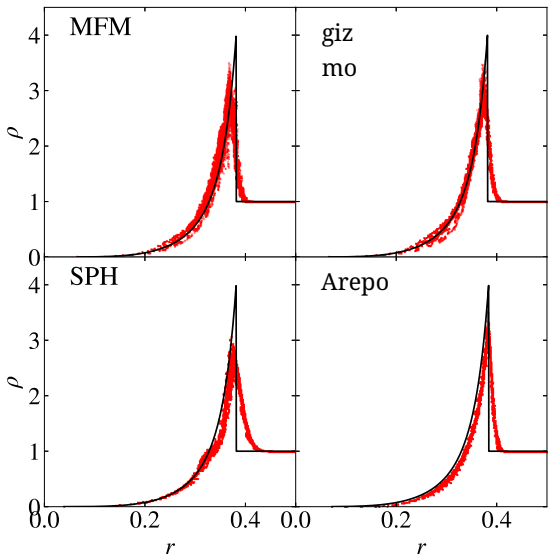

图1Sedov 爆炸，参数为 $t = 0。02$。不同方法之间的比较。解析解（Sedov 1946；Taylor 1950；von Neumann 1961）作为参考。主要区别在于峰值高度；由于跃变被平滑，峰值有所降低。

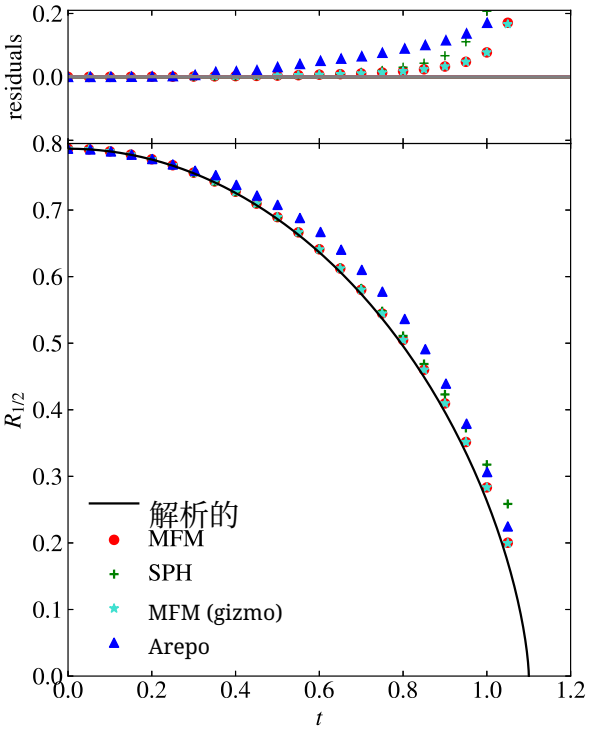

图14。 引力自由落体测试中半质量半径的演化。所有方法在早期均一致，但在后期，随着流体动力学贡献变得更加重要，结果开始偏离预期解。

方式，以及极低的内能。该问题由 Zel'dovich (1970) 提出。我们从 $z_i = 100$ 开始计算，设置单一傅里叶模态密度扰动。在密度线性增长至 $z_c = 1$ 焦散形成期间，其演化可由以下方式描述：

$$x = x_i - \frac{1+z_c}{1+z}\frac{\sin(kx_i)}{k} \tag{53}$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \frac{1+z_c}{1+z}\cos(kx_i)} \tag{54}$$

$$\boldsymbol{v}_{\rm pec} = -H_0\frac{1+z_c}{\sqrt{1+z}\frac{\sin(kx_i)}{k}}\hat{x} \tag{55}$$

$$T = T_i\left(\frac{1+z_c}{1+z}\right)^2\left(\frac{\rho(x,z)}{\rho_0}\right)^{2/3} \tag{56}$$

从未扰动位置 x_i开始。 ρ_c 是临界密度，$H_0 = \mathrm{h0} \cdot 100$ km s $^{-1}$ Mpc^{-1} 是哈勃参数（当前值），其中 $\mathrm{h}_0 = 1$，而 $T_i = 100$ K 是初始温度，因此压力作用力可以忽略。波数 $k = 2\pi/(64$ h^{-1}Mpc) 对应一阶声波。我们采用 Hopkins（2015）提供的初始条件，分辨率为 323 个粒子。线性增长之后，吸积激波在中心附近形成。随着尺度因子增大，背景密度大幅降低，背景温度则随绝热膨胀而降低。这导致受激波区域与背景之间的温度对比相差 ≈ 10 个数量级。由于物理单位下的内能远低于其他能量分量 $U \lesssim 10^{-3}E$kin 和$U \lesssim 10^{-2}E$pot，演化可能会受到数值误差的严重影响。因此，第 3.3 节所述的能量—熵切换机制的实现十分重要。切换机制应当启用时所采用的具体阈值，取决于数值精度以及实现细节，例如精度

黎曼求解器。所选阈值对 Zeldovich 薄饼演化的影响将在第 4.8.2 节中进一步说明。

形成的结构见 $z = 0$ 图 16。再次比较不同流体力学方法的表现。如果 $U < 0$，$01E_{\rm pot}$则 OpenGadget3 中的 MFM实现会启用能量-熵切换；这也对应于 gizmo中实现的取值。对于 Arepo，我们不得不使用额外的网格正则化，以避免高度各向异性压缩的激波区域中出现过于不规则的单元形状，并使代码能够运行至结束。所有方法得到的本动速度分布都相符，仅有细微差异。与 Hopkins (2015年) 的结果相比，我们发现所有方法的黏度似乎都过低；由于部分粒子穿透了高 $\mathcal{M}$ 激波，粒子相对于预测的速度剖面出现过冲或欠冲。方法之间的一个差异是密度峰值的高度。该值在 光滑粒子流体动力学中最低，这可以用 SPH 的核函数较大、相较于 MFM 会产生更强的平滑来解释。因此，OpenGadget3 中的 MFM能够更好地分辨中心区域，峰值也略高。 Arepo 的模拟则显示出更高的峰值，这与 Hopkins (2015年) 的发现相反。与预期的剖面相比，这些方法都过度平滑了中心区域。 gizmo代码对密度剖面的捕捉效果最好，达到最高的中心峰值。对所有方法而言，最难捕捉的是具有极强对比度的温度结构。两种 MFM实现的效果都很好，因为能量-熵切换抑制了低能背景中的数值噪声，并呈现出清晰的跃变

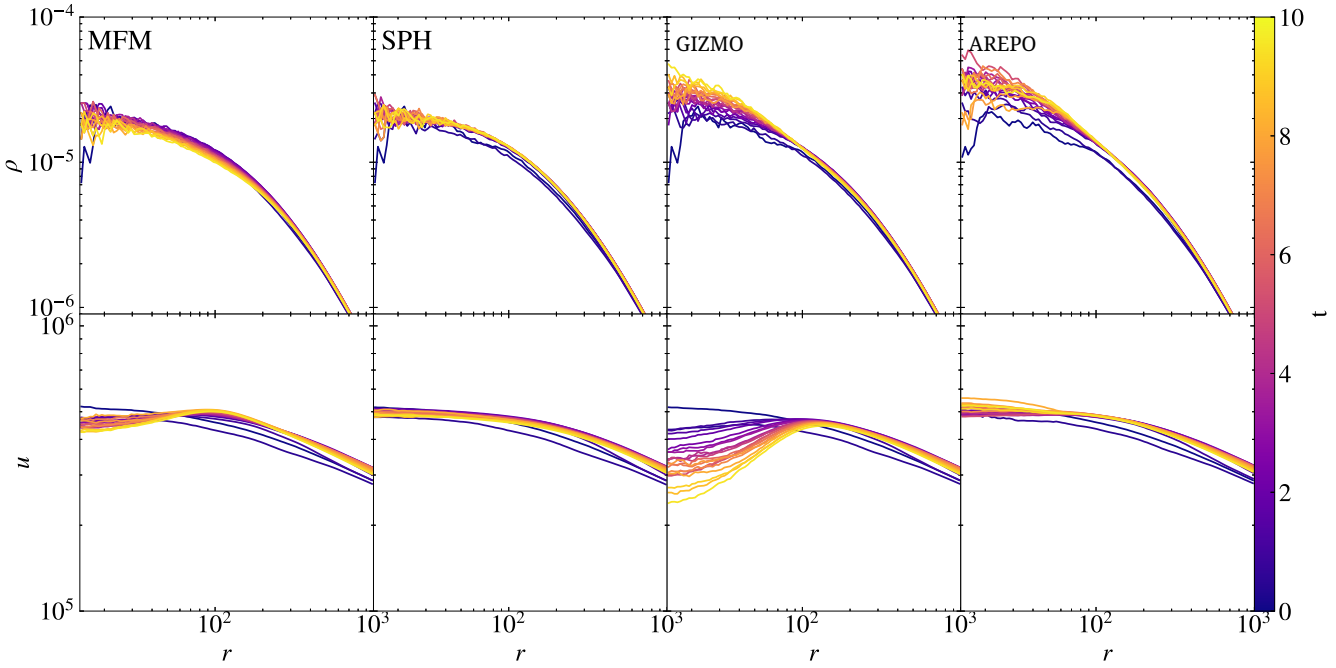

图15. 流体静力平衡球体的气体密度（上）和内能径向剖面（下）在约 10 个动力学时间内的演化，直至$t = 10$，颜色表示时间。使用不同的流体力学方法进行计算。MFM 的数值扩散略大，但总体上仍能保持密度剖面。

，区分受激波区域与未受激波区域。 OpenGadget3与 gizmo在能量-熵切换实现上的细微差异，以及整体而言中心区域温度较低，导致 gizmo中有更多中心粒子受到切换机制处理，从而产生更多冷粒子。这一差异也可以解释密度峰值高度的不同。正如我们将在第 4.8.2 节所示，切换机制不那么激进时，密度峰值会更高。由于该测试不存在解析解，目前尚不清楚这种表现是否符合预期。与其他方法相比，SPH 的跃变受到更强的平滑。此外，放大的初始（数值）噪声导致极冷背景中的散布跨越多个数量级。对于 Arepo，我们发现这一现象严重得多，背景完全被数值噪声主导。要准确分辨这一现象，Arepo中也需要采用某种能量-熵切换机制，但公开版本似乎并未实现该机制。

4.5.4 Nifty 集群

最后，我们将新实现的方法应用于更复杂的宇宙学情形。作为示例，我们重新模拟了 MUSIC-2 样本（Prada 等，2012年；Sembolini 等，2013, 2014年；Biffi 等，2014）中的一个星系团。一个在 nifty 研讨会期间组建的合作团队使用不同代码对该星系团进行了详细分析（Sembolini 等，2016），因此下文称其为 nifty 集群。该星系团的质量为 $M_{200c} = 10^{15}\,M_\odot$，暗物质的分辨率为 $m_{DM} = 9.01 \cdot 10^{8} h^{-1}\,M_\odot$，气体粒子的分辨率为 $m_{gas} = 1.9 \cdot 10^{8} h^{-1} M_\odot$。背景宇宙学参数为 $\Omega = 0.27$ $\Omega = 0.0469$ $\Omega_\Lambda = 0.73$ $\sigma_8 = 0.82$ $n = 0.95$, $= 0.7$ 2011 M . , b . , . , . , . h . (Komatsu 等，)。$z = 0$ 处的投影面密度如图 17 所示，其中星系团中心和维里半径由 Subfind 确定（Springel 等，2001年；Dolag 等，2009年）。

我们将 MFM 与具有不同人工导热强度的光滑粒子流体动力学进行比较，强度范围从通常采用的 $\alpha_{最大值} = 0.25$，$\alpha_{最小值} = 0$（记号沿用 Price 2008）到采用斯皮策值的 1/20 倍物理热传导率的模拟（Dolag 等，2004），这实际上相当于中等强度；此外，还与不采用人工导热的传统光滑粒子流体动力学进行比较。选择通常采用的强度，旨在模拟 Godunov 方法（如 MFM）的行为；这类方法由于黎曼求解器而具有内在的数值扩散，因此能够实现更多混合。采用标准设置时，MFM 与光滑粒子流体动力学呈现的结构非常相似。不过，改变人工导热的取值会导致差异。降低人工导热时，结构会略微不那么“模糊”，而整体结构则保持不变。

通过分析图 18所示的气体径向密度、温度和熵剖面，可以进行更定量的分析。作为对比，我们给出了 Nifty 论文中的曲线，这些曲线使用 Arepo 和Gadget3-MUSIC 这一更传统的 SPH 代码得到，标示了所得解的范围。SPH 可以涵盖 Sembolini等人 (2016年) 给出的所有可能解。按照构造，不含人工导热的传统光滑粒子流体动力学不会发生混合，因此会形成低熵核心。MFM 和 Arepo 中的黎曼求解器导致亚网格混合进入核心，使熵相较于传统光滑粒子流体动力学有所增加。因此，中心密度会降低。在 SPH 中加入人工导热后，可以达到与 MFM 相同的剖面；通过采用物理热传导，也能得到介于两者之间、对应中间值的剖面。

4.6 衰减亚音速湍流

在许多天体物理系统中，从大气和星际介质到星系团，湍流都发挥着至关重要的作用。在星系团内介质中，我们预计会出现亚声速湍流，其湍动能分数

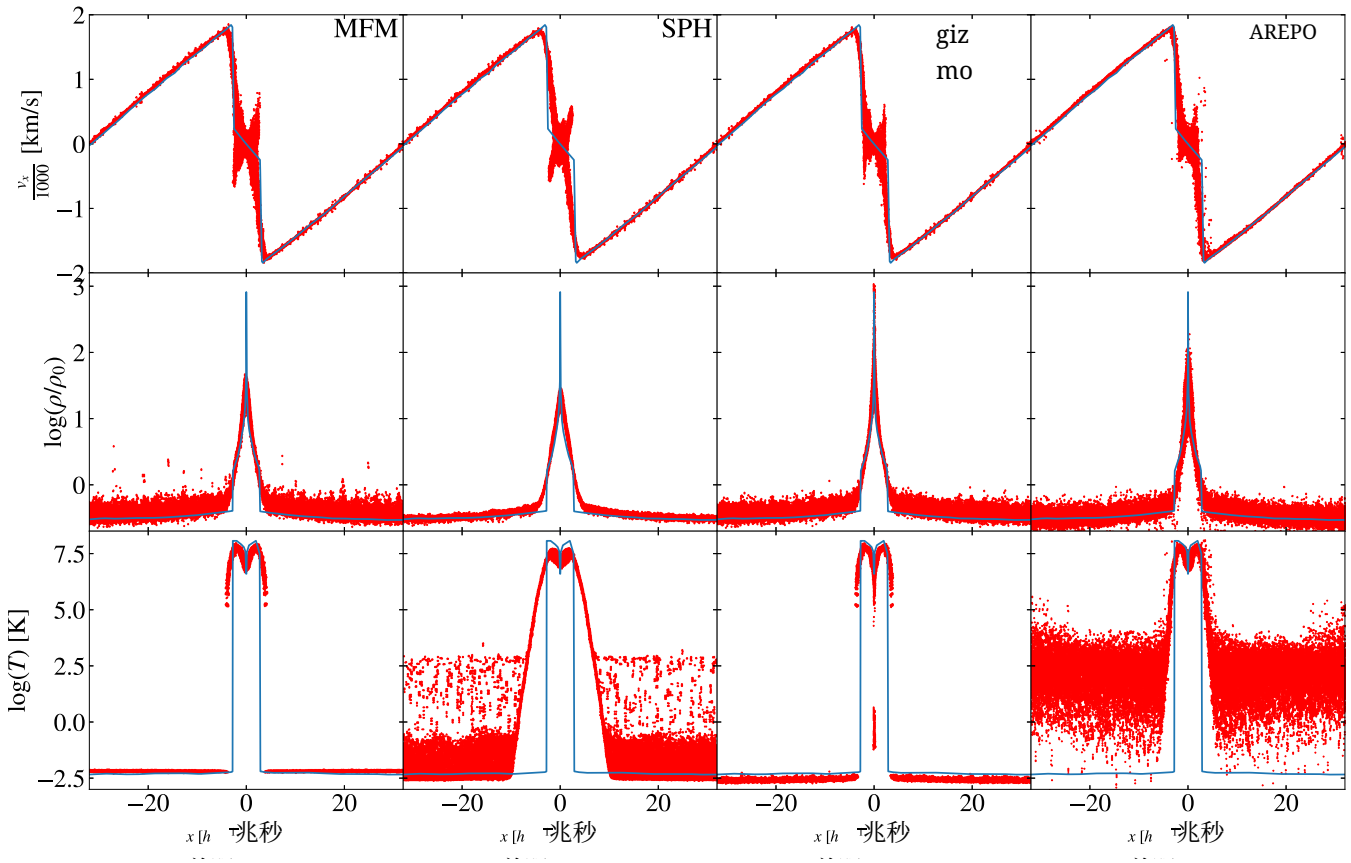

图16。 在 $z = 0$ 下，不同流体力学方法的泽尔多维奇薄饼。作为对比，图中还展示了 Hopkins (2015年) 的高分辨率一维模拟结果。各方法的速度和密度剖面相符，但温度剖面存在明显偏差。由于采用了能量-熵切换，MFM 的表现最佳。

为 $X \approx 0$。1 例如，并合后可能会激发这种湍流（参见，例如 Schuecker 等，2004 年； Subramanian 等，2006 年）。不同的流体力学格式难以捕捉湍流的完整行为。研究表明，传统光滑粒子流体动力学不适合计算亚声速湍流（Bauer & Springel，2012年），但采用更理想的人工扩散项设置，可以改进现代SPH（Price，2012年）。虽然基于网格的方法能产生更好的结果，但在模拟星系团内湍流的演化方面仍存在困难。

为了测试并比较我们 MFM 实现的性能，我们设置了一个盒子尺寸为 300 千秒差距的立方体盒子，其中粒子数量各不相同，并对最大的 ≈ 70 个模式进行初始化，类似于 Bauer & Springel（2012年）。由于初始密度较低，为 $\rho \approx 1.5 \cdot 10^{-6}$，可以忽略引力加速度。初始湍动能占比分别设为 $X_i = E_{\mathrm{turb},i}/E_{\mathrm{therm},i} = 0.3$ 和 $X_i = 0.00001$，分别对应马赫数 $\mathrm{M}_i \approx 0.7$ 和 $\mathrm{M}_i \approx 0.004$。此外，分辨率也有所变化，粒子数量从 64^3 到 256^3 不等。我们将湍流演化 1.5 个声穿越时间。湍动能级联至更小尺度，形成湍流功率谱。为了分析速度功率谱，我们使用 Sph2Grid[5] 代码将数据分箱到网格上，并据此计算功率谱。我们采用 D20采样，以

[5] 由 J. Donnert 开发，可在此获取：
https://github.com/jdonnert/Sph2Grid

守恒能量（Cui 等（2008））。理论上，预期会得到柯尔莫哥洛夫斜率 $E(k) \sim k^{-5/3}$（柯尔莫哥洛夫（1941））。在图 19 中，我们比较了不同方法得到的功率谱，并按预期斜率进行了归一化。波数 $k$box 对应的波长为盒子尺寸。能量在 kSEED,max 与 kSEED,min 之间进行初始化。分辨率极限的估计值由 k^{128}SML 给出：在包含 SPH 模拟的图中，它对应于分辨率为 128^3 时 Wendland C6 核的平均平滑长度；否则对应于分辨率为 128^3时三次样条核的平均平滑长度。k^{128}Nyquist 表示初始网格间距对应的波数，也就是可能被分辨的最小长度尺度。

与许多先前的研究结果相反（例如，参见 Padoan 等 2007; Bauer & Springel 2012； Hopkins 2015），对于这种温和的亚声速湍流，所有方法都能很好地再现预期的柯尔莫哥洛夫斜率。光滑粒子流体动力学的偏差最大，且在中等尺度上就已出现；而 MFM 的两种实现以及 Arepo 采用移动网格和静止网格时，差异仅在非常小的尺度上出现，并逐渐接近分辨率极限。

此外，MFM 结果随分辨率提高而迅速收敛，如图所示。20。随着凹陷移向更小尺度，整体谱在更宽的尺度范围内进一步接近柯尔莫哥洛夫谱。在所考察的最高分辨率下，它在近一个数量级的尺度范围内几乎完美地呈现出预期的柯尔莫哥洛夫斜率。

对于更低的初始湍动能占比，对应于

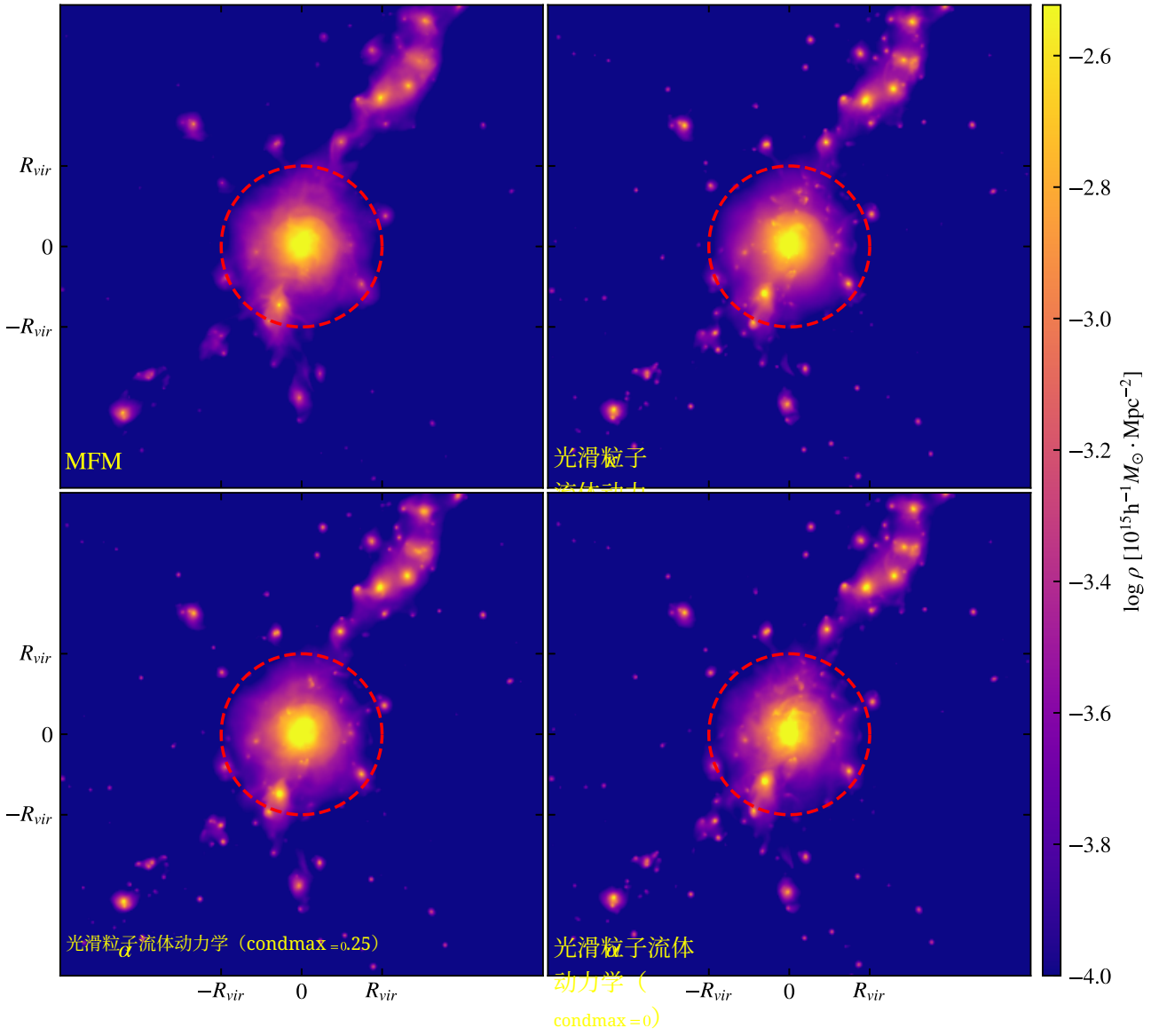

图17。 $z = 0$ 时 nifty 集群的投影表面密度，对比 MFM 与采用常规量（$\alpha_{\max}^{\mathrm{cond}} = 0。25$）、物理量（$\kappa_{\mathrm{phys}}$，对应中等量）以及未使用人工导热（$\alpha_{\max}^{\mathrm{cond}} = 0$）的光滑粒子流体动力学。整体结构非常相似。不过，对于 MFM，小型子结构显得不那么紧凑。

更低的马赫数，不同方法之间的差异会更加明显。在图 21中，我们展示了初始湍动能占比为 0.01时得到的谱，对应于 $\mathcal{M}$ 0 1 $_i \approx$ 。虽然所有方法在能量注入的大尺度上结果一致，但在中小尺度上却存在巨大差异。Arepo 在最小尺度上与其他方法相比出现偏差，低估了接近分辨率极限的尺度上所含的能量。光滑粒子流体动力学在稍大的尺度上开始出现偏差，功率谱的凹陷也较浅。对于 MFM，功率谱其能量在与移动网格代码 Arepo 相似的尺度上出现下降，但下降幅度远小于所有其他情况，因此更接近期望的斜率。两种 MFM 实现之间的差异可归因于所用黎曼求解器不同。总体而言，对于这种极亚声速湍流，MFM 的优势显而易见。

随着功率谱逐渐形成，能量不仅被输运到更小的尺度，也有一部分转化为内能。我们绘制了动能和湍流能量的衰减，这里用 E 标记，见

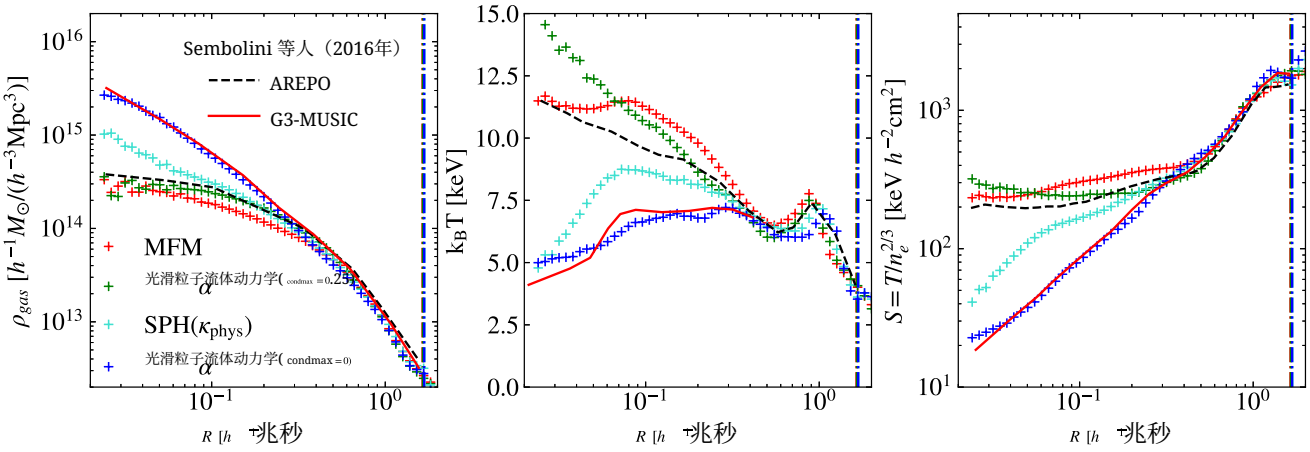

图18. 在 $z = 0$ 时，Nifty 星系团的气体密度（左）、温度（中）和熵（右）的径向剖面；对比不同的流体力学方法，包括我们的 MFM 实现（红色加号）、OpenGadget 中分别采用常规热传导率（绿色）、物理热传导率、对应中间值的热传导率（青绿色）以及不采用人工导热（蓝色）的 SPH。作为对比，还展示了来自 Arepo（黑色虚线）和 G3-MUSIC（传统）SPH 曲线（红色实线），引自 Sembolini 等人（2016年）。竖线标记 R_{200c}。我们的现代 SPH 模拟采用了足够高的人工导热率；此外，Arepo 和 MFM 也产生了熵更高、密度更低且峰值不那么突出的熵核，而采用较低人工导热率的 SPH，其中心熵则低得多。

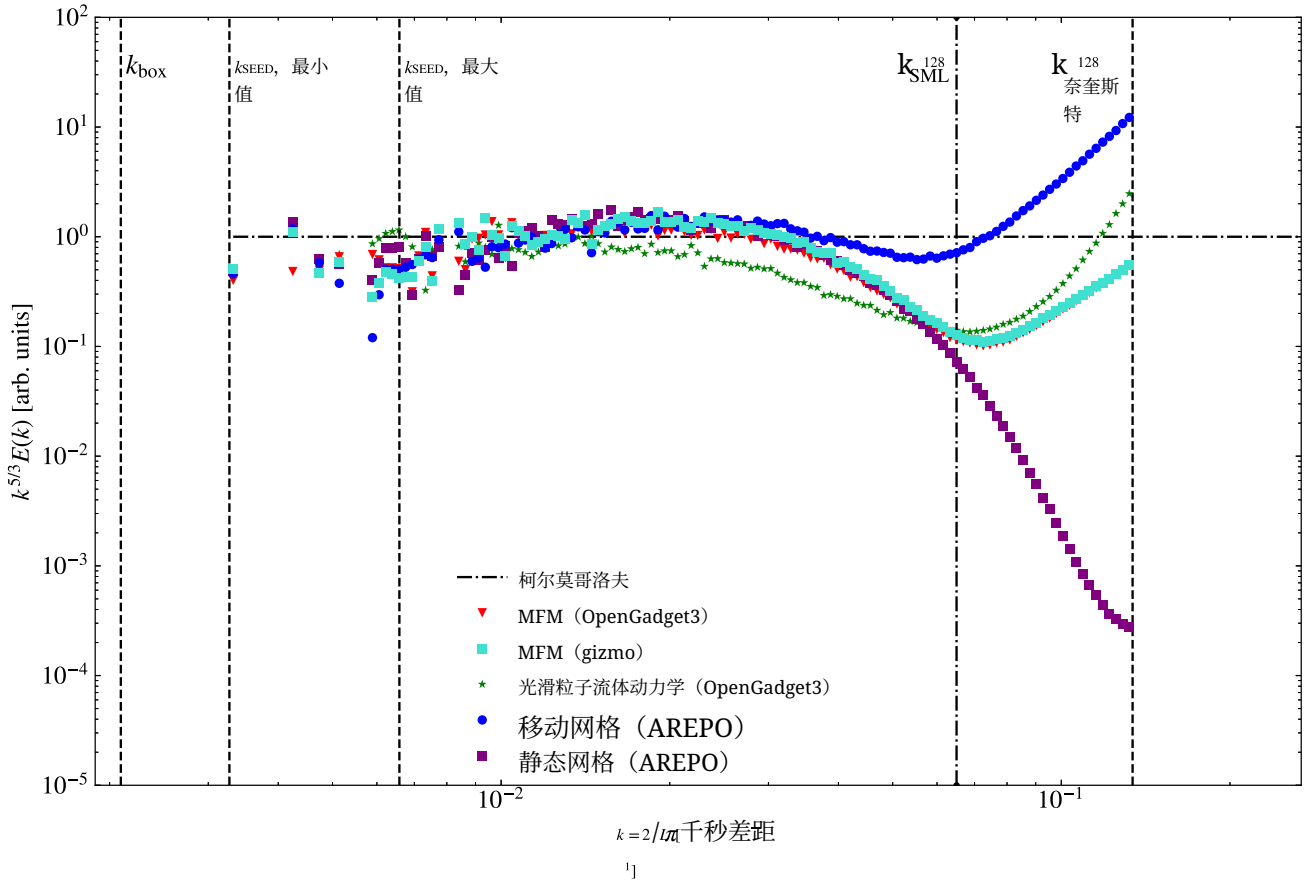

图19. 在 $X_i = 0.3$ 时，不同方法的归一化湍流速度功率谱，分辨率为 128^3。所有方法在大尺度上都一致，但与预期的柯尔莫哥洛夫斜率 $P \sim k^{-5/3}$ 相比，在中小尺度上均表现出能量不足。总体而言，所有方法的表现都很好

重现预期谱。

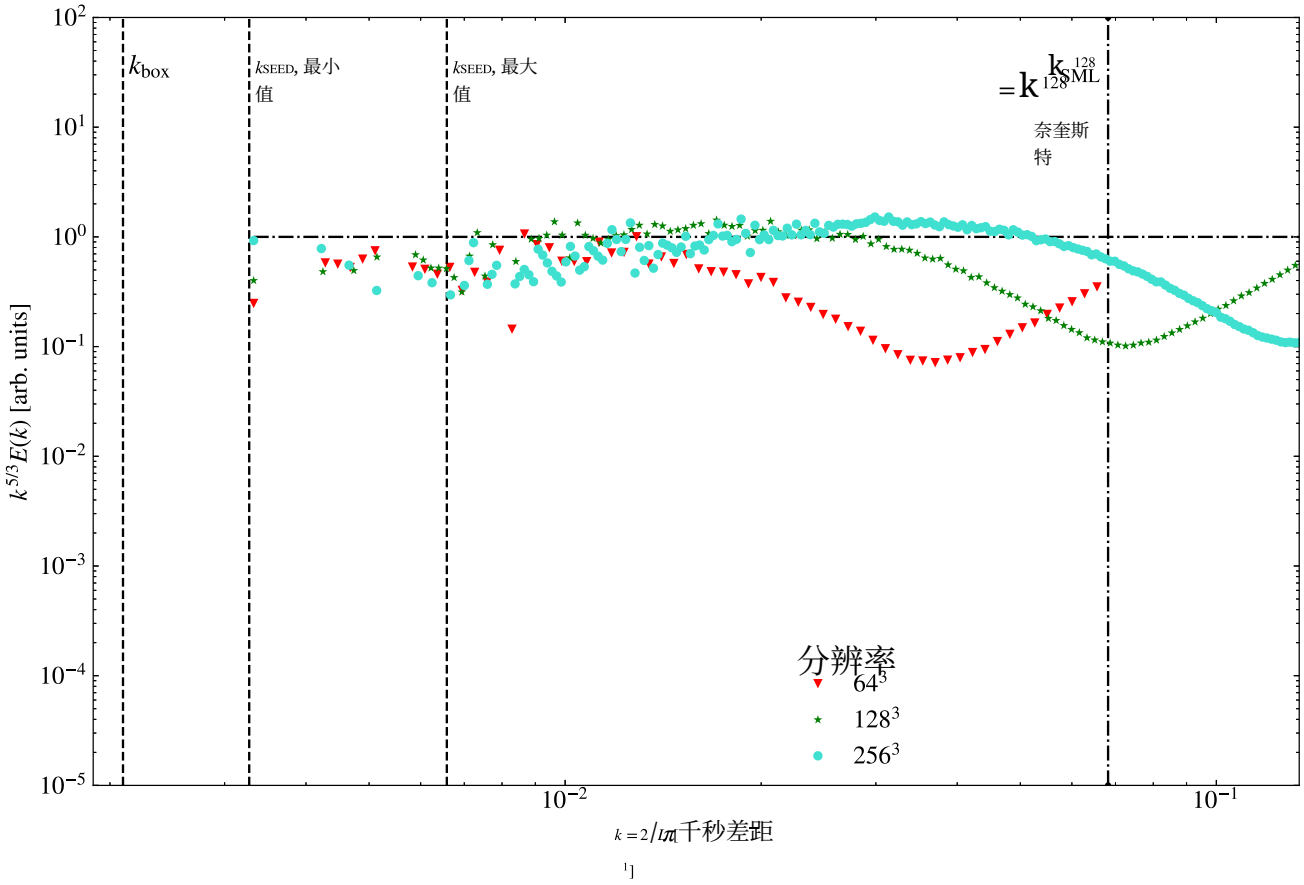

图 20. 在 $X_i = 0.3$ 下，不同分辨率的 MFM 归一化湍流速度功率谱。随着分辨率提高，MFM 快速收敛至预期的柯尔莫哥洛夫斜率 $P \sim k^{-5/3}$。

图 22 对比了不同的流体动力学方法。为了更好地比较斜率，不受初始湍动能占比影响，我们对每次运行拟合指数衰减，并用 $E_{\rm fit} = E_{\rm fit}(t = 0)$ 进行归一化。物理情况下，衰减会取决于气体微观物理（例如黏度）；而在这里，我们可以借此了解代码的行为。衰减主要由数值耗散决定。在所有情况下，能量都呈现周期性变化，这是由最初注入的模态“振铃”造成的。光滑粒子流体动力学的衰减在一定程度上取决于人工黏性，这在未启用人工黏性的运行中尤为明显。相比之下，功率谱受人工黏性大小的影响较小。在实际应用中，人工黏性会被调节至 $\alpha_{\rm visc,max} = 3$，从而使衰减率与其他方法相近。指数衰减时间 $t_{\rm dec}$ 大致对应于声穿越时间 $t_{\rm sc} = L_{\rm box}/c_{s,0}$。

图 23 展示了 MFM 和光滑粒子流体动力学中不同初始湍动能占比（对应于马赫数变化）下的衰减情况。初始湍动能占比从 0.3 降至 0.00001，对应的马赫数范围是从 0.7 降至低于 0.004。对于光滑粒子流体动力学，随着初始湍动能占比降低，衰减程度也随之减小，直至 $X_i = 0.01$ ($\mathcal{M} \approx 0.1$)；此后衰减不再受马赫数影响，正如预期，这一情况也出现在 Arepo中。MFM 也呈现出相同的初始趋势。然而，当初始湍动能占比极低时 $X_i < 0.0001$ ($\mathcal{M} \lesssim 0.01$)，却出现了非物理性的增长湍流能量。与此同时，密度概率密度函数偏离了高斯形状，速度功率谱也变得显著偏离柯尔莫哥洛夫谱，这表明在如此低的马赫数下，演化过程受数值伪影主导。具体而言，尽管我们发现该测试中的总能量守恒，但内能仅占很小一部分，因此，即使演化内能而非总能量，也会受数值误差主导。原则上，采用能量熵切换或可缓解这一问题。另一方面，这样做是否会削弱 MFM 在该测试问题中的其他优势，尚不明确。

4.7 运行时间分析

MFM 与光滑粒子流体动力学的墙钟运行时间差异取决于所考虑的问题，因为其中可能包含不同的附加物理过程，也可能触发不同的时间步限制器。因此，我们在表 1 中概述了所有已运行测试的运行时间，包括消息传递接口和 OpenMP 配置。总体而言，运行 MFM 的计算成本与光滑粒子流体动力学相当。对于纯流体动力学问题，所需时间步数会随有效空间分辨率提高而增加，增幅为 $\lesssim 2$。由于空间分辨率越高，时间步限制越严格，强激波情况下增幅甚至可能更大。两种方法每个时间步所需的 CPU 时间非常相似。虽然黎曼求解器的计算成本高于光滑粒子流体动力学中

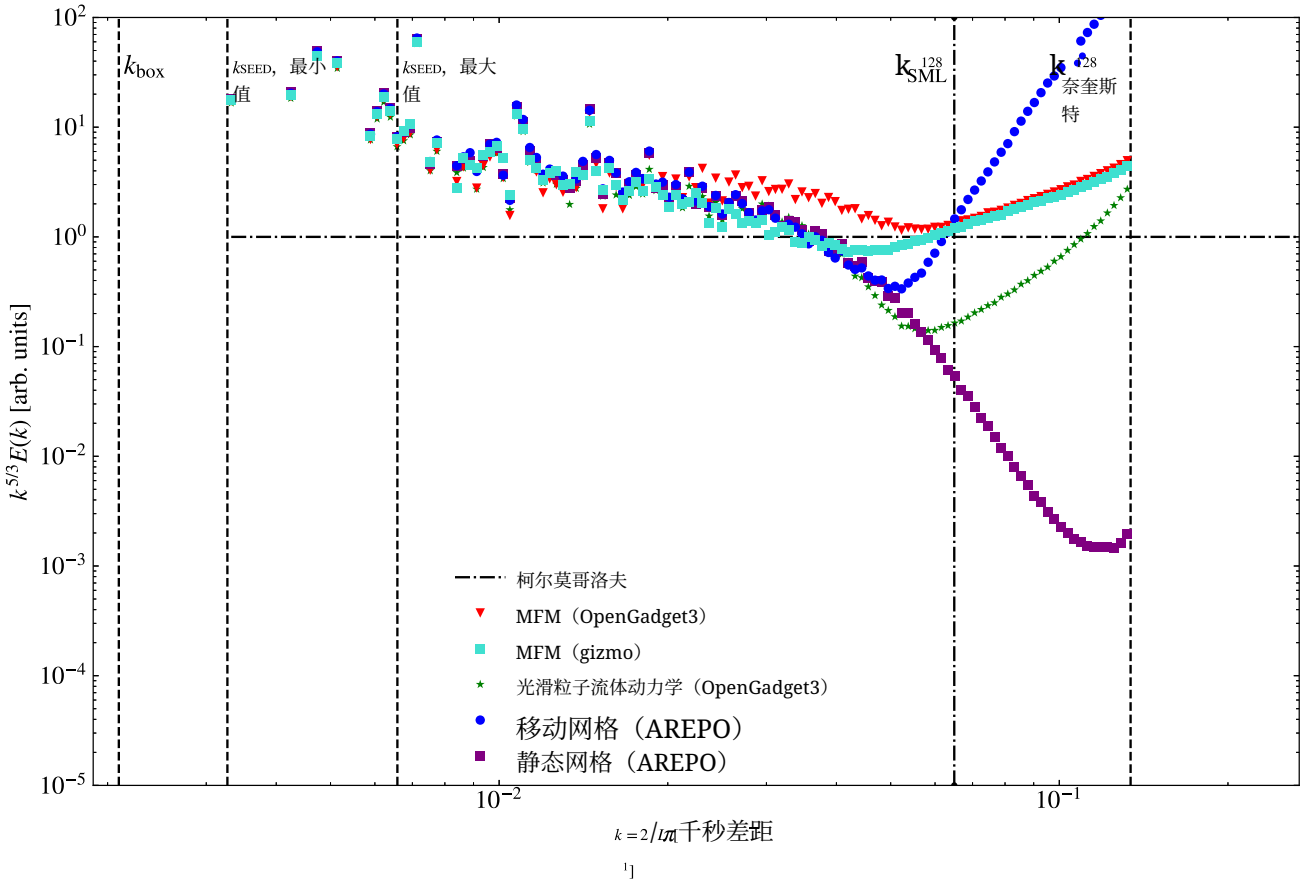

图 21. $X_i = 0.01$ 时不同方法的归一化湍流速度功率谱，分辨率为 128^3。在如此低的初始湍动能占比下，各方法之间的差异更加明显，其中 MFM 在整体上表现最佳，最能复现预期谱。

test	MPI	OpenMP	运行时间 [秒]		每时间步耗时 [秒]		#步数	
			MFM	SPH	MFM	SPH	MFM	SPH
声波（分辨率 128）	4	14	$4.3 \cdot 10^4$	$3.2 \cdot 10^4$	$5.3 \cdot 10^0$	$7.9 \cdot 10^0$	$8.1 \cdot 10^3$	$4.1 \cdot 10^3$
开普勒盘	4	14	$4.1 \cdot 10^5$	$5.4 \cdot 10^5$	$8.1 \cdot 10^0$	$8.0 \cdot 10^0$	$5.1 \cdot 10^4$	$6.8 \cdot 10^4$
瑞利-泰勒不稳定性	4	14	$8.4 \cdot 10^3$	$3.4 \cdot 10^3$	$2.6 \cdot 10^{-1}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$	$3.2 \cdot 10^4$	$3.0 \cdot 10^4$
开尔文-亥姆霍兹不稳定性	8	12	$6.7 \cdot 10^5$	$2.9 \cdot 10^5$	$1.0 \cdot 10^1$	$8.8 \cdot 10^0$	$6.5 \cdot 10^4$	$3.2 \cdot 10^4$
静水平衡方块	4	14	$1.9 \cdot 10^2$	$7.1 \cdot 10^1$	$2.3 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$8.2 \cdot 10^3$	$4.2 \cdot 10^3$
团块测试	8	12	$2.5 \cdot 10^6$	$1.5 \cdot 10^6$	$1.3 \cdot 10^2$	$1.4 \cdot 10^2$	$1.9 \cdot 10^4$	$1.1 \cdot 10^4$
激波管（M = 10）	4	14	$8.9 \cdot 10^3$	$1.7 \cdot 10^3$	$1.1 \cdot 10^0$	$7.7 \cdot 10^{-1}$	$8.2 \cdot 10^3$	$2.1 \cdot 10^3$
Sedov 爆炸	4	14	$1.1 \cdot 10^2$	$1.9 \cdot 10^2$	$2.1 \cdot 10^{-1}$	$2.5 \cdot 10^{-1}$	$5.3 \cdot 10^2$	$7.8 \cdot 10^2$
引力自由落体	4	14	$1.3 \cdot 10^1$	$1.7 \cdot 10^1$	$5.1 \cdot 10^{-2}$	$6.6 \cdot 10^{-2}$	$2.6 \cdot 10^2$	$2.7 \cdot 10^2$
流体静力平衡球体	4	14	$1.3 \cdot 10^4$	$1.9 \cdot 10^4$	$8.2 \cdot 10^{-1}$	$1.2 \cdot 10^0$	$1.6 \cdot 10^4$	$1.6 \cdot 10^4$
泽尔多维奇薄饼	4	14	$1.6 \cdot 10^3$	$2.5 \cdot 10^3$	$1.1 \cdot 10^0$	$1.6 \cdot 10^0$	$1.5 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^3$
Nifty 集群	16	28	$2.6 \cdot 10^4$	$2.3 \cdot 10^4$	$1.7 \cdot 10^0$	$1.4 \cdot 10^0$	$1.5 \cdot 10^4$	$1.6 \cdot 10^4$
湍流（分辨率 128）	8	12	$1.2 \cdot 10^5$	$4.9 \cdot 10^4$	$2.4 \cdot 10^1$	$1.6 \cdot 10^1$	$5.1 \cdot 10^3$	$3.1 \cdot 10^3$

表 1. OpenGadget3 中 MFM 与光滑粒子流体动力学的运行时间对比。不同测试采用不同的 MPI 和 OpenMPI 配置，并在不同的机器上运行。总体而言，我们观察到 MFM 与光滑粒子流体动力学之间运行时间有所增加：纯流体力学测试中增幅在 ≈ 2 倍之间，而在 Nifty 集群上仅为 1.1 倍。

流体动力学加速度的计算，而且 MFM 还需要额外的邻居循环，但较低的邻居数会降低计算成本。视具体问题而定，每个时间步所需的时间可能短于或长于光滑粒子流体动力学对比运行所需的时间。综合来看，这些因素平均使 MFM 的总运行时间略长，增幅为 ≈ 2。

如果计入引力，在许多情况下，模拟时间步主要受引力相互作用支配，因此无论采用哪种流体动力学方法，所需的时间步数都大致相同。此外，每个时间步所花费的时间也会变得更加接近，因为 MFM 和光滑粒子流体动力学采用相同方式计算的引力相互作用也会增加计算负担。

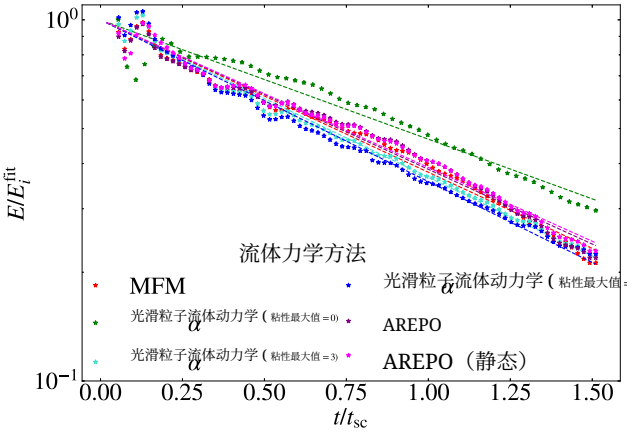

图 22. 在 $X_i = 0.3$. 不同方法下湍流能量的衰减时间。对于光滑粒子流体动力学，黏度在 $\alpha_{\rm max}^{\rm visc} = 10$ 和 $\alpha_{\rm max}^{\rm visc} = 0$之间变化，其中 $\alpha_{\rm max}^{\rm visc} = 3$ 是通常使用的值（符号沿用 Beck 等（2016a））。Arepo 的衰减时间最长，对应数值耗散最低；在典型黏度值下，MFM 和光滑粒子流体动力学的衰减时间相近，均为数个动力学时间尺度。

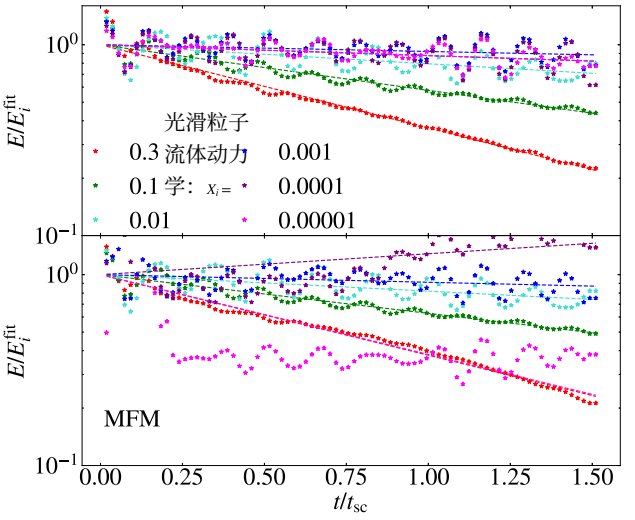

图 23. 与图 22相同，但初始湍动能占比 X_i有所不同，对应于湍流马赫数的变化。对于 SPH，所有 X_i 下的衰减趋势一致；对于 MFM，这种一致性一直保持到 $X_i = 0.003$，此时数值伪影会导致能量出现不符合物理规律的增加。

如果启用更多模块，例如 Subfind（Nifty 集群的模拟中便启用了该模块），运行时间主要取决于精确演化过程。对于 Nifty 集群，我们发现 MFM 的运行时间略有增加，但对其他模拟对象而言，情况可能有所不同。如果启用更多物理过程，我们预计两者之间的差异会进一步缩小。

内存需求主要取决于粒子结构的大小。由于 MFM 在气体粒子结构中保存了更多变量，因此其大小是光滑粒子流体动力学的 ≈ 2 倍。通过更高效地利用现有的 SPH 数据并避免重复存储（目前仍存在这种情况），可以进一步改进。因此，对于纯流体力学问题，总内存需求是原来的 $\approx 1.3-2$ 倍

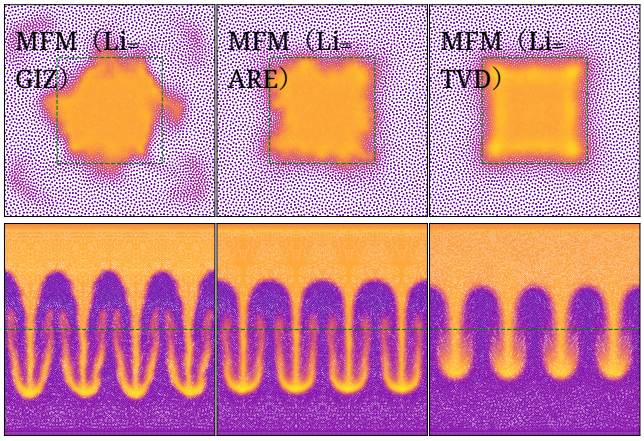

图 24. 采用不同斜率限制器模拟的静水平衡方块（上）和瑞利-泰勒不稳定性（下）：左图为通常使用的 GIZMO 限制器，中图为使用 Arepo 限制器演化的相同测试，右图为使用 TVD 限制器演化的测试。根据测试不同，可能更适合采用不同的斜率限制器。

，对于 Nifty 集群则是 ≈ 1.5 倍。加入更多物理过程后，差异将变得微不足道。

4.8 数值参数的影响

数值方法的性能在很大程度上取决于所用参数的具体取值。多位作者已经详细分析了邻居数和核函数的影响（例如，参见 Dehnen 和 Aly 2012；Tricco & Price 2013；Hu 等人 2014），研究对象为 SPH。为此，我们将重点考察另外两个对 MFM 起重要作用的参数，即斜率限制格式和能量-熵切换开关。

4.8.1 斜率限制器

我们代码中实现的不同斜率限制程序，不仅在限制斜率的力度上有所不同，引入的数值扩散量也各不相同。一般而言，研究表明，不同的限制器在特定测试案例中会产生不同结果（例如，比较 Barth & Jespersen，1989；Balsara 2004年；May & Berger 2013；Hubber 等（2018）；Alonso Asensio 等（2023））。

下文中，我们比较三种限制器：通常使用的 GIZMO 限制器（如公式（A6）所述，并与其成对限制器（公式（A10/A11））结合使用）、Arepo 限制器（公式（A5）），以及 TVD 限制器（公式（A3））。GIZMO 和 TVD 限制器分别是所实现限制器中数值扩散最低和最高的两个极端情况。Arepo 限制器则介于两者之间。我们分析它们对静水平衡方块（另请参见第 4.3.3节）和瑞利-泰勒不稳定性（第 4.3.1节）的影响。结果见图 24。

对于瑞利-泰勒不稳定性，数值扩散小得多的 GIZMO 限制器表现最佳，演化出精细得多的结构，但这也导致静水平衡方块变形最严重。Arepo 限制器的数值扩散略强，因此瑞利-泰勒不稳定性中的次级不稳定性较弱，方块的变形也略小，尤其是在边缘处。TVD 限制器的数值扩散更强，因此会显著平滑瑞利-泰勒不稳定性，不仅阻止次级不稳定性的形成，还明显降低了不稳定性的整体增长

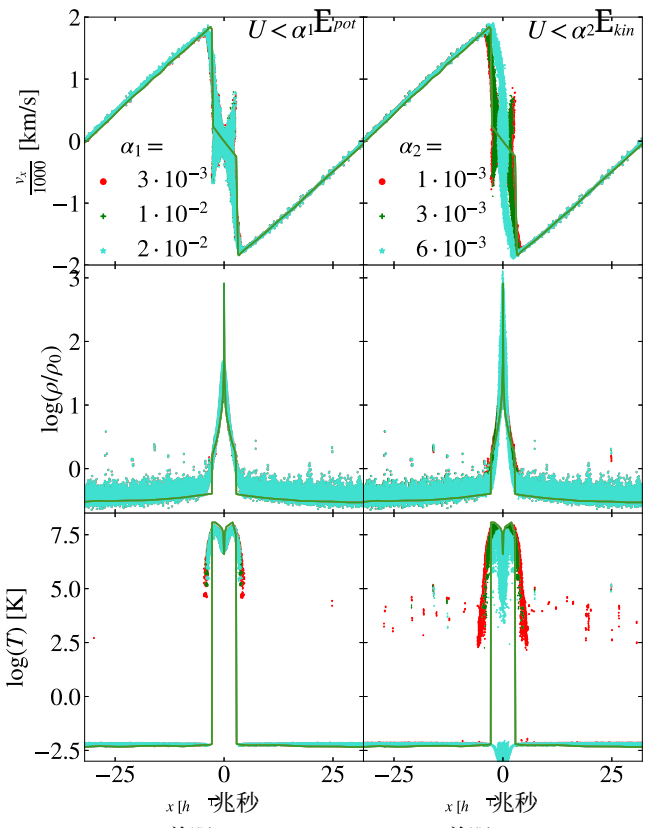

图 25. 能量-熵切换的选择对泽尔多维奇薄饼的影响。比较了基于动能和势能的切换方式，每种方式均采用三种不同的 α 值。基于势能的切换方式稳定得多。

幅度。然而，静水平衡方块在此限制器下保持得最好，这是因为类表面张力误差较小；这类误差也会表现为激波中压力凸起的有无。

综合这些结果，我们发现，很难明确判断哪种斜率限制方法总体上更优。由于在大多数情况下，gizmo 限制器表现最佳，因此我们选择它作为参考方法。

4.8.2 能量—熵切换

为避免数值误差主导内能的演化，对于泽尔多维奇薄饼等特定问题，必须使用第 3.3 节所述的能量-熵切换。尤其应抑制极冷的非受激波区域中的数值噪声，同时完全不影响激波。

在 $z = 0$时得到的结构如图 46式（25）所示；图中比较了基于势能和动能估计的不同切换方案（另见式（$\alpha_1 = 10^{-2}$ 表示势能， $\alpha_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ 表示动能）。我们将调节后的数值乘以 2 ，并将其除以 ≈ 3。

更严格的开关（更大的 α）会使采用绝热近似处理的粒子减少。对于动能开关而言，这一差异会导致温度分布出现显著变化。而对于 $\alpha_2 = 1 \cdot 10^{-3}$，会形成更延伸的翼部，并且峰值附近的低温背景中会出现一些散布；增大的 $6 \cdot 10^{-3}$ 甚至会将峰值区域内部的粒子也视为采用绝热近似处理，从而导致温度过低。必须对 α_2 进行非常精细的调节，才能准确捕捉所有粒子，包括受激波影响的粒子和低温粒子。

相比之下， α_1 在基于势能的开关中进行变化，对温度剖面的影响较小。因此，这似乎稳定得多，应当是首选方案。因此，我们在第 $\alpha_1 = 10^{-2}$ 和 $\alpha_2 = 0$ 节的计算中采用了 4.5.3。

5 讨论与结论

我们在 OpenGadget3 中实现了一种新的 MFM，作为当前所用现代SPH的替代流体求解器。我们通过理想化测试案例和更复杂的宇宙学测试案例，验证了它的能力。测试涵盖了从平滑、简单的情形，到混合不稳定性、激波、包含自引力的测试，再到作为宇宙学示例的 Nifty 星系团，以及衰减的亚声速湍流。我们对 OpenGadget3 中的 MFM 与 SPH、gizmo 中的 MFM实现以及移动网格代码 Arepo 进行了比较。此外，还对两个参数进行了更详细的分析。

总体而言，我们发现 OpenGadget3 中的 MFM 实现与 gizmo 中的实现非常吻合。两者在具体表现上存在细微差异，但在大多数测试案例中，全局性质无法区分。即使未经进一步调优，MFM 在所有考察的测试案例中都能复现预期行为。由于存在解析解，声波测试非常适合进行收敛性分析。对于色散误差，MFM 的收敛行为介于一阶和二阶之间，表现非常出色。扩散误差和散布均呈二阶收敛。尽管其收敛性优于光滑粒子流体动力学和移动网格方法，但在低分辨率下，这些方法的误差较低，尤其是色散误差。

MFM 相较于光滑粒子流体动力学的一项重要优势是，能够准确演化混合不稳定性，而无需像光滑粒子流体动力学那样额外引入人工黏性或热传导率。此外，MFM 所需的邻居数也少于光滑粒子流体动力学。MFM 和移动网格方法都能展现次级不稳定性的产生。结合了混合与激波的团块测试凸显了 MFM 促进更多混合的能力。云团的衰减率与移动网格模拟相近，且高于光滑粒子流体动力学。与 Hopkins (2015年展示的较传统的光滑粒子流体动力学实现相比，现代光滑粒子流体动力学实现 OpenGadget3 允许更多混合，并使云团衰减得更快。由于该测试旨在模拟冲压剥离，我们预计，与光滑粒子流体动力学相比，使用 MFM 能更准确地模拟这一效应。这也应使星系团环境中的星系演化整体上更加准确。要充分理解并追踪此类气体团块在宇宙学背景下的演化，还需要纳入冷却等更多物理过程，并视具体情况考虑恒星形成。 Gronke 与 Oh(2018、2020年、2022年) 已结合这些额外物理过程对该测试进行了详细分析，并发现冷却极为重要。

此外，MFM 能够模拟涵盖广泛马赫数范围的激波。在激波管测试中，MFM 在较低马赫数下的表现尤为出色；而在较高马赫数下，斜率限制器的选择所导致的表面张力效应则较为明显。尽管如此，它仍能捕捉激波的主要特征，包括激波前沿的位置、接触间断和稀疏波扇。不同方法会导致激波前沿的平滑程度有所不同。与光滑粒子流体动力学相比，MFM 较低的邻居数使有效空间分辨率提高了 ≈ 2 倍。对于 Arepo，在这种高度各向异性区域中，网格重构的困难使激波前沿主要受到数值

伪影的影响。

Sedov 爆炸对所有方法都表现良好，验证了唤醒方案作为非局部时间步长判据的能力。主要差异在于平滑程度，以及由此导致的密度峰值振幅较低；这表明移动网格的平滑程度甚至低于MFM。更窄的激波前沿有助于在宇宙学模拟中进行激波检测（例如，参见 Pfrom- mer 等人 2006年； Beck 等，2016b）。

总体而言，MFM 能够准确地保持流体静力平衡，也能维持稳定轨道。与光滑粒子流体动力学相比，开普勒盘具有更好的稳定性，这将改善例如孤立星系模拟的结果。对于这种情况，移动网格能带来更好的结果，但需要额外的边界粒子。

流体静力平衡球体测试表明，我们与引力耦合的 MFM实现能够实现稳定的流体动力学平衡，与光滑粒子流体动力学和移动网格的情况相同。然而，数值扩散可能会因具体实现细节而产生。因此，可以预期孤立星系，甚至星系团的核心会变得更加致密，且中心温度更低。不过，这些变化发生所需的时间尺度非常长。

此外，对于 Nifty 星系团，我们也发现 MFM、Arepo 和现代SPH在整体结构上没有差异。黎曼求解器引入的数值扩散使熵得以混合进入核心，从而使中心密度低于不发生任何混合的传统光滑粒子流体动力学。现代SPH通过施加人工导热来模拟相同的效果，而人工导热量的细微变化则可能导致结构发生显著变化。观测到的星系团呈现出范围很广的中心熵剖面（Cavagnolo 等，2009），因此这两种结果都与观测一致。特别是，我们预期冷却以及恒星和 AGN 反馈会产生更复杂的相互作用，并影响核心的熵演化（例如，参见Pearce 等，2000；Borgani 等，2005；Rasia 等，2015）。这些效应会产生各种可能的中心剖面，其影响超过流体求解器的影响。因此，有必要开展纳入这些过程的进一步研究。

在星系团内介质中，我们预计低马赫数湍流会在大尺度上由并合等过程触发。随后，湍流将逐渐衰减并形成湍流功率谱。对于许多流体动力学方法而言，这种衰减的亚声速湍流是一个极具挑战性的问题。与光滑粒子流体动力学以及动网格和静止网格方法相比，MFM 对湍流功率谱的还原效果最佳，在初始湍动能占比极低时尤为明显。仅在接近分辨率极限的中小尺度上，能量略有不足；这一现象与 Arepo 中出现的情况类似。随着分辨率提高，这种能量“凹陷”会移向更小尺度，总体上使结果快速收敛至预期的柯尔莫哥洛夫谱。

数值耗散导致的湍流能量衰减率与现代SPH处于同一量级，并且随分辨率提高而降低。即使初始湍动能占比低至 $X_i = 0.0001$，结果仍保持一致；这对应于较小的马赫数 $M = 0.01$。对于更小的 $X_i < 0.0001$，数值效应占据主导，并导致湍流能量出现非物理性增加。总体而言，这些结果为准确模拟星系团内湍流的演化展现出良好前景。

能量-熵切换对于准确演化泽尔多维奇薄饼的温度剖面至关重要。加入该切换后，MFM 的结果最佳，温度呈现清晰的跃变。比较这种切换的不同可能取值后，我们发现需要仔细调参。总体而言，基于势能的切换能产生更稳定的结果。

Arepo 的公开版本缺少这种切换的实现，因此低温区域完全受数值噪声支配。光滑粒子流体动力学在低温区域也会出现噪声，这是初始条件中已有噪声被放大的结果；此外，峰值周围的翼部也宽得多。所有方法的温度剖面都显示出一定程度的穿透现象，表明黏度过低。

除了比较不同的方法外，我们还进行了两项测试，以分析斜率限制器的影响。针对不同问题，适用的斜率限制器也可能不同。在大多数测试案例中，gizmo 限制器表现最佳，数值扩散显著更低；但对于静水平衡方块以及强激波等特定情况，使用扩散性更强的 TVD限制器效果更好。Arepo 限制器的扩散性居中，表现介于另外两者之间。

总体而言，我们实现的 MFM 在所考察的案例中均能产生准确结果。它避免了光滑粒子流体动力学的一些缺点，同时每个时间步的计算成本与之相近。由于平滑长度更短、空间分辨率实际上更高，时间步总数随之增加，因此总运行时间也会增加。在某些情况下，更快的近似黎曼求解器还能进一步降低计算成本，但其缺点是会引入更多数值扩散，详见附录 B。与 MFM 相比，移动网格需要进行计算成本极高的剖分，因此许多测试所需的计算成本会大幅增加。

总体而言，MFM 是宇宙学模拟的一种很有前景的替代方法。

5.1 展望——未来可能的扩展

为了充分发挥 OpenGadget3 的优势，将 MFM 与引力耦合，并纳入冷却、恒星形成与恒星反馈、活动星系核反馈、物理热传导和黏度等更多物理过程，将会很有益处。对于这些过程，我们可以利用 OpenGadget3 中已有的实现。

最后，MFM 可以扩展为包含磁场的磁流体力学方法。这也将使我们能够纳入现有的宇宙射线实现。

对于其中许多扩展，可以采用与光滑粒子流体动力学类似的方式进行耦合；而磁场等其他扩展则需要进行更重大修改，包括采用另一个黎曼求解器。

原则上，也可以进行广义相对论扩展；这一扩展已分别应用于光滑粒子流体动力学（Liptai & Price2019；Rosswog & Diener 2021）和移动网格（Chang & Eti- enne 2020；Lioutas et al. 2022），也已在 gizmo 代码中实现（Lupi2022）。由于广义相对论主要在黑洞周围的吸积盘等极端情形下才至关重要，这也将发挥我们 MFM实现原本基于 GANDALF这一特点；GANDALF 本身就是为处理恒星与行星形成而设计的，因此我们也预期，我们的实现非常适用于盘的计算。

致谢

我们感谢匿名审稿人提出详尽且富有建设性的意见，这些意见有助于提升本文的质量。FG 和 KD 感谢欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟“地平线2020”研究与创新计划资助协议 ERC-2019-AdG 882679，为 COMPLEX项目 提供支持。UPS 获得了 Flatiron研究奖学金

（CCA）计算天体物理中心的 Flatiron研究所。Flatiron研究所由 Simons 基金会提供支持。FG、MV 和 KD 感谢德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）通过德国卓越战略项目 EXC-2094（编号 390783311）提供支持。MV 获得了亚历山大·冯·洪堡基金会和卡尔·弗里德里希·冯·西门子基金会的支持。我们特别感谢 M. Petkova 通过粒子与天体物理计算中心（C2PAP）的 pn68va 项目提供支持。流体动力学模拟的部分计算在莱布尼茨超级计算中心（LRZ）通过 pr86re（SuperCast）项目完成。我们感谢 C. Alig 提供湍流 Arepo设置，并感谢 L. Böss 提供激波管的初始条件。分析主要使用 Julia 完成（Bezanson 等，2014年），其中包括由 Böss 和 Valenzuela （2022年）开发的 Gad-getIO 软件包。Nifty 集群的面密度使用 Smac 计算（Dolag 等，2005年）。我们感谢 gizmo 和 Arepo 的开发者公开发布这些代码。我们感谢 R. Pakmor 帮助分析并改进了使用 Arepo 对声波的收敛性。

数据可用性

不同测试的设置可公开获取，网址为 https://github.com/fgroth/hydro_tests。其中包括所用不同代码的参数文件和配置文件，以及我们的分析例程。如适用，还包括用于生成初始条件的例程。其他数据可向通讯作者提出合理请求后获取。 OpenGadget3 是 Gadget-2的非公开开发者版本。如有合理请求，可向 K. Dolag 获取。

参考文献

Agertz O. 等，2007，皇家天文学会月刊，380，963；Alonso Asensio I., Dalla Vecchia C., Potter D., Stadel J., 2023，皇家天文学会月刊，519，300；Appel A. W.，1985，SIAM科学与统计计算杂志，6，85；Arth A.，Dolag K.，Beck A. M.，Petkova M.，Lesch H.，2014，Gadget中星系团的磁流体力学各向异性热传导；Balsara D. S.，1998，《天体物理学杂志增刊》，116，133；Balsara D. S.，2004，《天体物理学杂志增刊》，151，149；Barnes J.，Hut P.，1986，《自然》，324，446；Barth T.，Jespersen D.，1989，发表于第27届航空航天科学会议。美国航空航天学会，doi:10.2514/6.1989-366Bauer A.，Springel V.，2012，皇家天文学会月刊，423，2558；Beck A. M. 等，2016a，皇家天文学会月刊，455，2110；Beck A. M.，Dolag K.，Donnert J. M. F.，2016b，皇家天文学会月刊，458，2080；Berlok T.，2022，皇家天文学会月刊，515，3492；Bezanson J.，Edelman A.，Karpinski S.，Shah V. B.，2014，Julia：数值计算的新方法；Biffi V.，Sembolini F.，De Petris M.，Valdarnini R.，Yepes G.，Gottlöber S.，2014，皇家天文学会月刊，439，588；Bode P.，Ostriker J. P.，Xu G.，2000，《天体物理学杂志增刊》，128，561；Borgani S.，Finoguenov A.，Kay S. T.，Ponman T. J.，Springel V.，Tozzi P.，Voit G. M.，2005，皇家天文学会月刊，361，233

Böss L. M., Valenzuela L. M., 2022年, LudwigBoess/GadgetIO.Jl: V0.6.2, Zenodo, doi:10.5281/zenodo.7055005 Böss L. M., Steinwandel U. P., Dolag K., Lesch H., 2023,《皇家天文学会月刊》, 519, 548 Bryan G. L., Norman M. L., Stone J. M., Cen R., Ostriker J. P., 1995年,《计算物理通讯》, 89, 149 Bryan G. L., et al., 2014年,《天体物理学杂志增刊》, 211, 19 Cavagnolo K. W., Donahue M., Voit G. M., Sun M., 2009年,《天体物理学杂志增刊》, 182, 12 Cha S. H., Whitworth A. P., 2003年,《皇家天文学会月刊》, 340, 73 Chang P., Etienne Z. B., 2020年,《皇家天文学会月刊》, 496, 206 Cui W., Liu L., Yang X., Wang Y., Feng L., Springel V., 2008年,《天体物理学杂志》, 687, 738 Dehnen W., Aly H., 2012年,《皇家天文学会月刊》, 425, 1068 Dolag K., 2015年, 收录于国际天文学联合会大会。第2250156页 Dolag K., Stasyszyn F., 2009年,《皇家天文学会月刊》, 398, 1678 Dolag K., Jubelgas M., Springel V., Borgani S., Rasia E., 2004年,《天体物理学杂志》, 606, L97 Dolag K., Hansen F. K., Roncarelli M., Moscardini L., 2005年,《皇家天文学会月刊》, 363, 29 Dolag K., Vazza F., Brunetti G., Tormen G., 2005年,《皇家天文学会月刊》, 364, 753 Dolag K., Borgani S., Murante G., Springel V., 2009年,《皇家天文学会月刊》, 399, 497 Duffell P. C., MacFadyen A. I., 2011年,《天体物理学杂志增刊》, 197, 15 Eastwood J. W., Hockney R. W., 1974年,《计算物理学杂志》, 16, 342 Federrath C., Klessen R. S., Schmidt W., 2008年,《天体物理学杂志》, 688, L79 Federrath C., Klessen R. S., Schmidt W., 2009年,《天体物理学杂志》, 692, 364 Federrath C., Roman-Duval J., Klessen R. S., Schmidt W., Mac Low M.-M., 2010年,《天文学与天体物理学》,第512卷，编号A81，$<$NUMPAGES$>$28$<$/NUMPAGES$>$页，512, A81 Federrath C., Klessen R. S., Iapichino L., Beattie J. R., 2021年,《自然·天文学》, 5, 365 Fischer M. S., Brüggen M., Schmidt-Hoberg K., Dolag K., Kahlhoefer F., Ra- gagnin A., Robertson A., 2022年, 天体物理学预印本：2205.02243 [天体物理学，物理学：高能物理]Frigo M., Johnson S. G., 2005年, IEEE会议录, 93, 216 Fryxell B., et al., 2000年,《天体物理学杂志增刊》, 131, 273 Gaburov E., Nitadori K., 2011年,《皇家天文学会月刊》, 414, 129 Godunov S., 1959年,《数学文集·新系列》, 47(89), 271 Gronke M., Oh S. P., 2018,《皇家天文学会月刊》, 480, L111 Gronke M., Oh S. P., 2020年,《皇家天文学会月刊》, 494, L27 Gronke M., Oh S. P., 2022年, 冷却驱动的凝聚 Hernquist L., Katz N., 1989,《天体物理学杂志增刊》, 70, 419 Hess S., Springel V., 2010年,《皇家天文学会月刊》, 406, 2289 Hirschmann M., Dolag K., Saro A., Bachmann L., Borgani S., Burkert A., 2014年,《皇家天文学会月刊》, 442, 2304 Hopkins P. F., 2013,《皇家天文学会月刊》, 428, 2840 Hopkins P. F., 2015 年 ,《皇家天文学会月刊》 , 450, 53 Hu C.-Y., Naab T., Walch S., Moster B. P., Oser L., 2014年,《皇家天文学会月刊》, 443, 1173

Hubber D. A., Rosotti G. P., Booth R. A., 2018, 《皇家天文学会月刊》, 473, 1603 Iapichino L., Niemeyer J. C., 2008 年 , 《皇家天文学会月刊》, 388, 1089 Iapichino L., Federrath C., Klessen R. S., 2017, 《皇家天文学会月刊》, 469, 3641 Idelsohn S. R., Oñate E., Calvo N., Del Pin F., 2003年, 《国际工程数值方法》, 58, 893 Inutsuka S.-I., 2002年, 《计算物理学杂志》, 179, 238 Junk V., Walch S., Heitsch F., Burkert A., Wetzstein M., Schartmann M., Price D., 2010年, 《皇家天文学会月刊》, 407, 1933 Kim C.-G., Ostriker E. C., 2015年, 《天体物理学杂志》, 802, 99 Kitsionas S., et al., 2009, 1, 2009, 508, 541 560, 508, 541《天文学与天体物理学》, 第卷期, 页码 - 柯尔莫哥洛夫 A. N., 1941, 苏联科学院通报, 32, 16 Komatsu E., et al., 2011年, 《天体物理学杂志增刊》, 192, 18 Kritsuk A. G., Yee H. C., Sjögreen B., Kotov D., 2020年, 《物理学杂志：会议系列》, 1623, 012010 Lanson N., Vila J.-P., 2008a, 《工业与应用数学学会数值分析杂志》, 46, 1912 Lanson N., Vila J.-P., 2008b, 《工业与应用数学学会数值分析杂志》, 46, 1935 Lioutas G., Bauswein A., Soultanis T., Pakmor R., Springel V., Röpke F. K., 2022年, 使用AREPO进行的广义相对论移动网格流体动力学模拟及其在中子星并合中的应用（ arXiv:2208.04267）, doi:10.48550/arXiv.2208.04267 Liptai D., Price D. J., 2019, 《皇家天文学会月刊》, 485, 819 Lodato G., Price D. J., 2010年, 《皇家天文学会月刊》, 405, 1212 Lupi A., 2022年, 《皇家天文学会月刊》, 519, 1115 Maier A., Iapichino L., Schmidt W., Niemeyer J. C., 2009年, 《天体物理学杂志》, 707, 40 Marin-Gilabert T., Valentini M., Steinwandel U. P., Dolag K., 2022年, 物理黏度和数值黏度在流体动力学不稳定性中的作用 Martel H., Shapiro P. R., 1998, 《皇家天文学会月刊》, 297, 467 May S., Berger M., 2013, 《工业与应用数学学会科学计算杂志》, 35, A2163 McNally C. P., Lyra W., Passy J.-C., 2012年, 《天体物理学杂志增刊》, 201, 18 Miniati F., 2014 年 , 《天体物理学杂志》 , 782, 21 Miniati F., 2015年, 《天体物理学杂志》, 800, 60 Mohapatra R., Federrath C., Sharma P., 2021年, 《皇家天文学会月刊》, 500, 5072 Mohapatra R., Jetti M., Sharma P., Federrath C., 2022年, 《皇家天文学会月刊》, 510, 2327 Monaghan J. J., Lattanzio J. C., 1985年, 《天文学与天体物理学》, 149, 135 Morris J. P., 1996年, 《澳大利亚天文学会刊物》, 13, 97 Murante G., Monaco P., Giovalli M., Borgani S., Diaferio A., 2010年, 《皇家天文学会月刊》, 405, 1491 Murante G., Monaco P., Borgani S., Tornatore L., Dolag K., Goz D., 2015年, 《皇家天文学会月刊》, 447, 178 Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M., 1997, 《天体物理学杂志》, 490, 493 Padoan P., Nordlund Å., Kritsuk A. G., Norman M. L., Li P. S., 2007, 《天体物理学杂志》, 661, 972 Pakmor R. M., 2010年, 博士论文, 慕尼黑工业大学 Pakmor R., Edelmann P., Röpke F.K., HillebrandtW., 2012,《皇家天文学会月刊》, 424, 2222 Pearce F. R., Thomas P. A., Couchman H. M. P., Edge A. C., 2000年, 《皇家天文学会月刊》, 317, 1029 Pfrommer C., Springel V., Enßlin T. A., Jubelgas M., 2006年, 《皇家天文学会月刊》, 367, 113 Prada F., Klypin A. A., Cuesta A. J., Betancort-Rijo J. E., Primack J., 2012年, 《皇家天文学会月刊》, 423, 3018 Price D. J., 2008年, 《计算物理学杂志》, 227, 10040 Price D. J., 2012年, 皇家天文学会月刊, 420, L33 Price D. J., Federrath C., 2010年, 皇家天文学会月刊, 406, 1659 Price D. J., et al., 2018, 澳大利亚天文学会刊物, 35, e031 Ragagnin A., Dolag K., Wagner M., Gheller C., Roffler C., Goz D., Hubber D., Arth A., 2020年, 使用 OpenACC 在图形处理器上运行 Gadget3 Rasia E., et al., 2015年, 天体物理学杂志, 813, L17 Roe P. L., 1981, 计算物理学杂志, 43, 357 Roettiger K., Burns J. O., 1999, 载于美国天文学会会议摘要。第 13.04 页。Rosswog S., 2020年, 皇家天文学会月刊, 498, 4230 Rosswog S., Diener P., 2021年, 经典与量子引力, 38, 115002 Ryu D., Ostriker J. P., Kang H., Cen R., 1993, 天体物理学杂志, 414, 1 Ryu D., Miniati F., Jones T. W., Frank A., 1998, 天体物理学杂志, 509, 244 Saitoh T. R., Makino J., 2009, 天体物理学杂志, 697, L99 Sayers J., Sereno M., Ettori S., Rasia E., Cui W., Golwala S., Umetsu K., Yepes G., 2021年, 皇家天文学会月刊, 505, 4338 Schekochihin A., Cowley S., Maron J., Malyshkin L., 2001年, 物理评论E, 65, 016305 Schekochihin A. A., Cowley S. C., Taylor S. F., Maron J. L., McWilliams J. C., 2004年, 天体物理学杂志, 612, 276 Schuecker P., Finoguenov A., Miniati F., Böhringer H., Briel U. G., 2004年, 天文学与天体物理学, 第426卷, 第387–397页（2004）, 426, 387 Sedov L. I., 1946年, 应用数学与力学杂志, 10, 241 Sedov L. I., 1959年, 力学中的相似与量纲方法。纽约：学术出版社 Sembolini F., Yepes G., De Petris M., Gottlöber S., Lamagna L., Comis B., 2013, 皇家天文学会月刊, 429, 323 Sembolini F., De Petris M., Yepes G., Foschi E., Lamagna L., Gottlöber S., 2014年, 皇家天文学会月刊, 440, 3520 Sembolini F., etal., 2016年, 皇家天文学会月刊, 457, 4063 Sod G. A., 1978年, 计算物理学杂志, 27, 1 Springel V., 2005年, 皇家天文学会月刊, 364, 1105 Springel V., 2010年, 皇家天文学会月刊, 401, 791 Springel V., Hernquist L., 2002年, 皇家天文学会月刊, 333, 649 Springel V., Hernquist L., 2003年, 皇家天文学会月刊, 339, 289 Springel V., Yoshida N., White S. D. M., 2001年, 新天文学, 6, 79 Springel V., Pakmor R., Zier O., Reinecke M., 2021年, 皇家天文学会月刊, 506, 2871 Stasyszyn F. A., Dolag K., Beck A. M., 2013, 皇家天文学会月刊, 428, 13 Steinborn L. K., Dolag K., Hirschmann M., Prieto M. A., Remus R.-S., 2015年, 皇家天文学会月刊, 448, 1504 Steinwandel U. P., Moster B. P., Naab T., Hu C.-Y., Walch S., 2020年, 皇家天文学会月刊, 495, 1035 Steinwandel U. P., Boess L. M., Dolag K., Lesch H., 2021, 2108 07822 [ ] arXiv: . 天体物理学 Stone J. M., Norman M. L., 1992, 天体物理学杂志增刊, 80, 753 Stone J. M., Gardiner T. A., Teuben P., Hawley J. F., Simon J. B., 2008年, 天体物理学杂志增刊, 178, 137 Stone J. M., Tomida K., White C. J., Felker K. G., 2020年, 天体物理学杂志增刊, 249, 4 Subramanian K., Shukurov A., Haugen N. E. L., 2006年, 皇家天文学会月刊, 366, 1437 Taylor G., 1950, 伦敦皇家学会会刊A辑, 201, 159

Teyssier R., 2002年,天文学与天体物理学,385,337 Tornatore L., Borgani S., Springel V., Matteucci F., Menci N., Murante G.,2003, 皇家天文学会月刊, 342, 1025 Tornatore L., Borgani S., Matteucci F., Recchi S., Tozzi P., 2004年, 皇家天文学会月刊, 349, L19 Tornatore L., Borgani S., Dolag K., Matteucci F., 2007, 皇家天文学会月刊, 382, 1050 Toro E. F., 2009, 流体动力学的黎曼求解器与数值方法：实用入门，第3版。施普林格，多德雷赫特；纽约 Tricco T., Price D., 2013, 一种用于人工电阻率及其他耗散项的开关 Valentini M., Murante G., Borgani S., Monaco P., Bressan A., Beck A. M., 2017, 皇家天文学会月刊, 470, 3167 Valentini M., et al., 2020年, 皇家天文学会月刊, 491, 2779 Vandenbroucke B., De Rijcke S., 2016年,天文学与计算, 16, 109 Vazza F., Brunetti G., Kritsuk A., Wagner R., Gheller C., Norman M., 2009年,天文学与天体物理学,504,33 Vazza F., Angelinelli M., Jones T. W., Eckert D., Brüggen M., Brunetti G.,Gheller C., 2018, 皇家天文学会月刊,481, L120VerletL.,1967,物理评论,159,98 Vila J. P., 1999, 应用科学中的数学模型与方法 - M3AS, 09, 161 Viola M., Monaco P., Borgani S., Murante G., Tornatore L., 2008年, 皇家天文学会月刊 , 383, 777 Wadsley J. W., Stadel J., Quinn T., 2004年, 新天文学, 9, 137 Wadsley J. W., Keller B.W.,QuinnT.R.,2017,皇家天文学会月刊, 471, 2357 Weinberger R., Springel V., Pakmor R., 2020年, 天体物理学杂志增刊, 248, 32 Wendland H., 1995年, 计算数学进展, 4, 389 Xu G., 1995年, 天体物理学杂志增刊, 98, 355 Zel'dovich Y. B., 1970, 天文学与天体物理学, 5, 84 von Neumann J., 1961, 文集

附录 A：OpenGadget3 中的斜率限制器

我们在 OpenGadget3 中实现了七种不同的斜率限制器，以及各自特定参数的多种变体。其主要概念见第 4.8.1 节。一般而言，在进行面插值时，我们将每个粒子 i 和分量 k对应的 $\nabla W_{i,k} \rightarrow \alpha_{i,k}\nabla W_{i,k}$替换为 $\alpha_{i,k} \in [0,1]$。下面简要介绍所实现的限制器。

最简单的做法是采用零阶插值设置

$$\alpha_{i,k}^{\text{ZERO SLOPES}} = 0 \tag{A1}$$

或者不使用斜率限制器

$$\alpha_{i,k}^{\text{NULL}} = 1. \tag{A2}$$

另外，我们还实现了几种更复杂的限制器。常用的一种是 TVD 标量限制器（Duffell 与 MacFadyen（2011））， 其设计尤其适用于处理强激波，能够产生良好的结果。与实现的其他限制器相比，它的数值扩散最大。它的设置为

$$\alpha_{i,k}^{\text{TVD SCALAR}} = \min_{j\in\text{Ngb}} \max \begin{cases} 0 \\ \min \begin{cases} 1 \\ \Delta W_{ij,k}/\mathrm{d}W_{ij,k} \end{cases} \end{cases} \tag{A3}$$

其中 $\Delta \boldsymbol{W}_{ij} = \boldsymbol{W}_j - \boldsymbol{W}_i$，$\mathrm{d}\boldsymbol{W}_{ij} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{ij} \cdot \nabla \otimes \boldsymbol{W}$。

另一种选择是标量限制器，它是对 Balsara (2004年) 限制器的改进版本；Gaburov & Nitadori (2011年) 提出了这种约束较宽松的限制器，具体见 GANDALF 代码（Hubber 等人 2018）。它不再具有 TVD 特性，但数值扩散更小。分子中仅使用邻居粒子中的极值，分母中则使用重构可能达到的最大值，从而避免额外的邻居循环，最终得到该限制器

$$\alpha_{i,k}^{\text{SCALAR}} = \max \begin{cases} 0 \\ \min \begin{cases} 1 \\ \min \begin{cases} \dfrac{\Delta W_{i\,\max,k}}{|\mathrm{d}r|_{\max}|\nabla W_k|} \\ \dfrac{\Delta W_{i\,\min,k}}{|\mathrm{d}r|_{\max}|\nabla W_k|} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \tag{A4}$$

其中 ΔW_i最小值/最大值，$_k = |W_i,\ _k -$最小值/最大值 $_{j\in}$邻居粒子 $W_j,\ _k|$，以及 $|\mathrm{d}r$最大值 $=$最大值 $\left(\text{最大值}\ _{j\in}\text{邻居粒子}\ |r_{ij}|,\ \mathrm{h}_i\right)$。与 TVD 限制器不同，这里只考虑全局邻居分布。因此，对于 TVD 限制器，需要分别根据所有邻居计算的值，在这里以近似方式计算。最后，我们实现了 Arepo 和 gizmo 代码中使用的限制器。在 Arepo 代码（Springel 2010 年）中，使用 Barth 与 Jespersen（1989）限制器对斜率进行限制

$$\alpha_{i,k}^{\text{AREPO}} = \min_{j\in\text{Ngb}} \begin{cases} \Delta W_{i\,\max,k}/\mathrm{d}W_{ij,k} & \text{if } \mathrm{d}W_{ij,k} > 0 \\ \Delta W_{i\,\min,k}/\mathrm{d}W_{ij,k} & \text{if } \mathrm{d}W_{ij,k} < 0 \\ 1 & \text{if } \mathrm{d}W_{ij,k} = 0. \end{cases} \tag{A5}$$

它介于 TVD 限制器和标量限制器之间，因为只有被除数根据全局邻居分布进行近似，而除数仍然针对所有邻居分别计算。

在 GIZMO（Hopkins 2015）中引入了一种通用限制器，其定义如下

$$\alpha_{i,k}^{\text{GIZMO}} = \min \begin{cases} 1 \\ \beta_i \min \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}W_{i\,\max,k}}{0.5h_i|\nabla W_k|} \\ \dfrac{\mathrm{d}W_{i\,\min,k}}{0.5h_i|\nabla W_k|}. \end{cases} \end{cases} \tag{A6}$$

此外，该限制器的优点是无需额外遍历邻居粒子。参数 β 必须为 $\beta_i > 0$。5，以确保二阶稳定性。数值越大，限制器越激进、数值扩散越小，但稳定性也越差。我们采用Hopkins （2015年）建议的值 $\beta = 2$，这是在降低数值扩散的同时，仍能适用于相互作用极强的激波的一种折中方案。尽管他们根据条件数建议仅在粒子分布具有足够各向同性时使用该值，但我们始终采用此值，因为我们发现几乎没有差异。对于 $\beta = 2$，该限制器也类似于标量限制器，不同之处在于，邻居粒子之间理论上可能的距离仅由平滑长度决定。此外，Hopkins （2015年）还提出了一种成对限制器，它仅作用于特定的一次相互作用，而非所有邻居粒子。为此，它使用已经限制过的斜率进行插值。Hopkins （2015年）所述的成对限制器会限制已经插值的面值。其目的是直接计算新的面值 $W_{ij,\ k}$，从外推值 $W_{ij,\ k}$出发，并按照方程（39）进行计算；此时也可以使用已经限制过的梯度。如果 $W_{i,\ k} = W_{j,\ k}$，则面值直接取为与粒子值相同的 $W_{ij,\ k} = W_{i,\ k}$。否则，这些值

$$\delta_1 = \psi_1 \left|W_{i,k} - W_{j,k}\right| \tag{A7}$$

$$\delta_2 = \psi_2 \left|W_{i,k} - W_{j,k}\right| \tag{A8}$$

计算得出。自由参数 $\psi_{1/2}$ 经过调节后为 $\psi_1 = 0.5$，$\psi_2 = 0\ 25$ 。之后会用到的一个简单中间值定义如下：

$$\bar{W}_{ij,k} = W_{i,k} + \frac{\mathrm{d}r_{ij}}{\mathrm{d}r_i^{\text{frame}}}(W_{j,k} - W_{i,k}). \tag{A9}$$

最大值/最小值为 $W_{\min/\max,k} = \min/\max(W_{i,k}, W_{j,k})$。根据两个面值的比较结果，计算新的面值：如果 $W_{i,k} < W_{j,k}$，那么

$$W_{ij,k}^{\rm new} = \max \begin{cases} \begin{cases} W_{\min,k} - \delta_1 & \text{if SIGN}(W_{\min,k} - \delta_1) = \text{SIGN}(W_{\min,k}) \\ \dfrac{W_{\min,k}}{1 + \frac{\delta_1}{|W_{\min,k}|}} & \text{else} \end{cases} \\ \min \begin{cases} W_{ij,k}^{\rm frame} \\ \bar{W}_{ij,k} + \delta_2 . \end{cases} \end{cases} \tag{A10}$$

如果 $W_{i,k} \geq W_{j,k}$，那么

$$W_{\text{新建}ij,k} = \min \begin{cases} \begin{cases} W_{\max,k} + \delta_1 & \text{若 SIGN}(W_{\text{最大值},k} + \delta_1) = \text{SIGN}(W_{\text{最大值},k}) \\ \dfrac{W_{\max,k}}{1 + \frac{\delta_1}{|W_{\max,k}|}} & \text{else} \end{cases} \\ \text{最大} \begin{cases} W_{\text{参考系}ij,k} - \delta_2 . \\ \bar{W}_{ij} \end{cases} \end{cases} \tag{A11}$$

对粒子 j应用相同的限制器。最后，gizmo 代码采用了略有不同的成对限制器。根据作为运行输入参数的容差t （典型值为 1），参数

$$\psi_1 = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ 0.5 & t = 1 \\ 0.75 & t = 2 \end{cases} \tag{A12}$$

$$\psi_2 = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ 0.4 & t = 1 \\ 0.375 & t = 2 \end{cases} \tag{A13}$$

由此定义。为了计算 $\bar{W}_{ij,k}$，因子 $\mathrm{d}r_{ij}/\mathrm{d}r$参考系$_i$近似为一阶值 0。5。除这些差异外，该限制器与前文所述的限制器相同。在我们的实现中，我们在界面的参考系中应用限制器，因此速度是相对速度。这使限制器具有拉格朗日特性，并增强了泽尔多维奇薄饼等对称流中不同方向之间的对称性。

附录 B：黎曼求解器的影响

在 OpenGadget3 中，我们默认使用精确的迭代黎曼求解器（Toro 2009年）。然而，这种方法计算开销很大，因为最多需要进行八次迭代才能接近精确解。另一种选择是使用近似黎曼求解器，我们实现了 Roe 求解器（Roe 1981）、HLL 求解器（Toro 2009年）以及 HLLC（Toro 2009年）求解器。

对于强激波，运行时间受到的影响最为显著，总体加速最高可达 20%。对于较平滑的问题，由于所需的精确求解器迭代次数较少，通量计算本身可加速 20%；但对于这类以流体动力学计算为主的问题，整体加速最高仅为 9%。在宇宙学应用中，加入引力以及可能的更多扩展后，这一影响会变得不那么重要。即使是流体静力平衡球体，运行时间也没有显著差异，甚至略有增加。

由于黎曼求解器会引入数值扩散，演化过程将有所不同。这一点可以从各种测试问题中看出，例如图中所示的瑞利-泰勒不稳定性。B1。尽管使用精确黎曼求解器演化的不稳定性呈现出最显著的次级不稳定性，Roe 求解器和 HLLC 求解器紧随其后，而 HLL 黎曼求解器则会抑制不稳定性最终形态中的任何不对称性。这是黎曼求解器引入额外数值扩散所导致的结果，详见第4.5.2节。

虽然对于特定问题，这些替代求解器可能会带来更快的计算速度，但总体而言，我们使用精度最高的精确黎曼求解器。运行时间的增加可由精度的提升所补偿。

附录 C：AREPO 中声波的收敛性

如第 4.2.1 节所述，我们原本预期 Arepo 会表现出比观测结果更好的收敛性。首先，这是由于网格正则化。如果触发正则化，单元的位置会发生偏移，从而引入少量数值噪声。此外，对总界面的贡献不足 10^{-5} 的小界面会被忽略。虽然这使代码在极端环境下更加稳定，但也会引入小误差（R. Pakmor，2023，私人通信），而这些误差对于本文分析的极小偏差而言不容忽视。

关闭网格正则化，并仅跳过贡献小于 10^{-8} 的界面，Arepo 表现出好得多的收敛行为，接近 Weinberger 等人（2020年）的分析所预期的结果，如图 C1所示。尤其是，散布误差大幅降低，也使其他误差分量的确定更加可靠。

尽管这些改动可以带来更好的收敛行为，但也会在宇宙学模拟中引发其他问题，因此在实际应用中反而可能观察到未优化的行为。

本文由作者准备的 TEX/LATEX 文件排版。

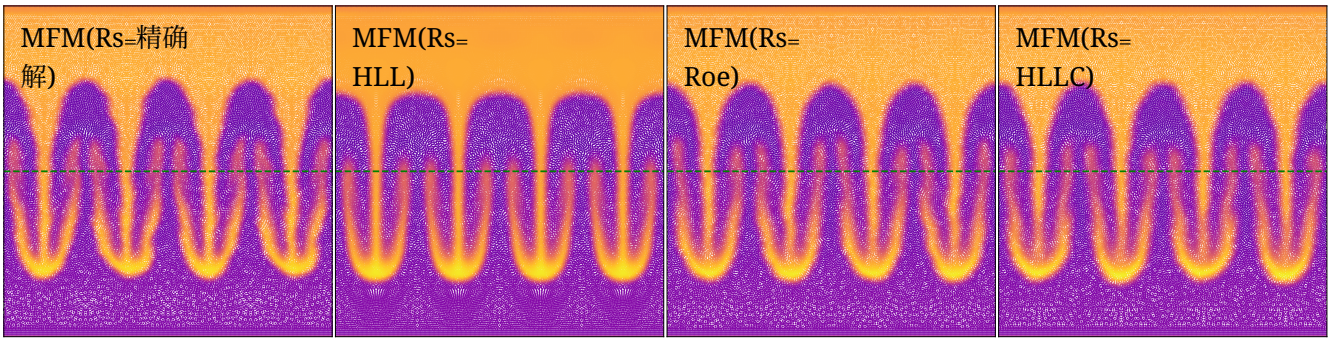

图 B1. 使用不同黎曼求解器演化至时间 $t = 3.6$ 时的瑞利-泰勒不稳定性。次级不稳定性的显著程度因所用求解器而异。

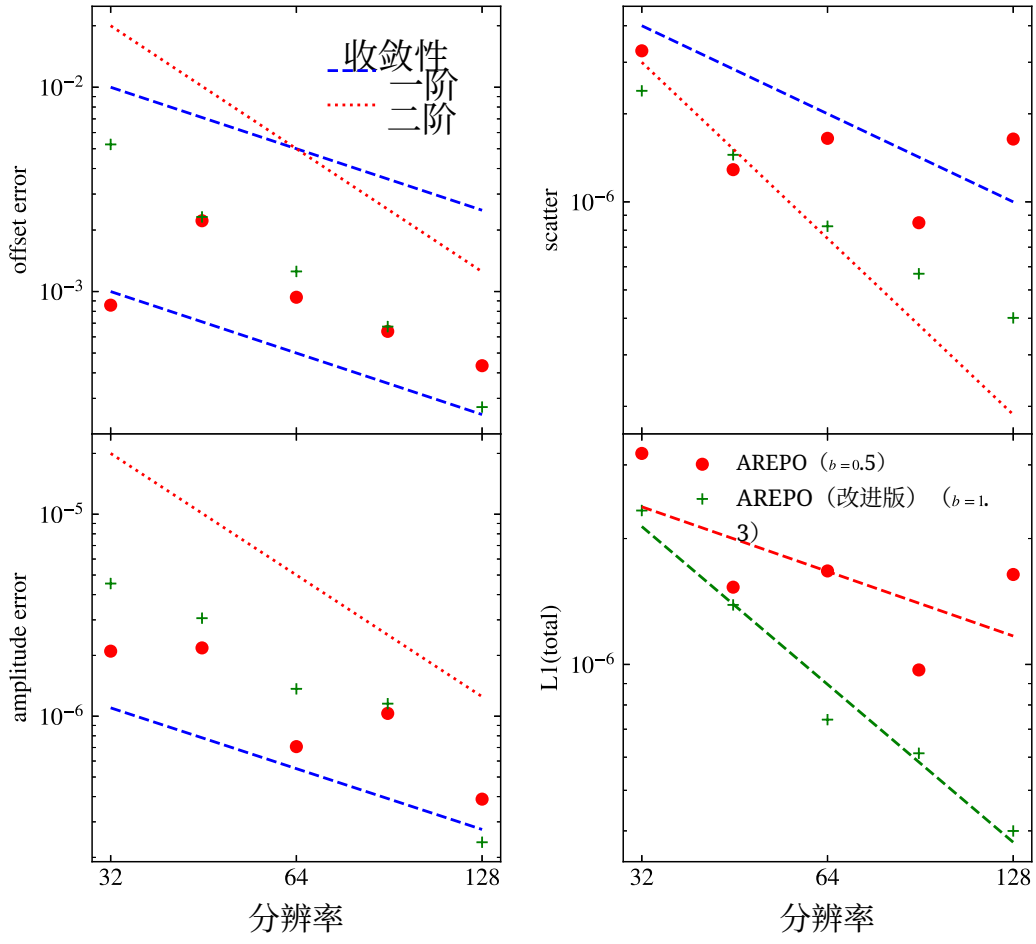

图 C1. 在 $t = \frac{2}{c_s}$ 时，声波密度的偏移、振幅、散布及总 L1误差。应用文中所述的改动可尤其降低散射误差，从而提高收敛阶，并使其他分量的测定也更加可靠。因此，总体收敛阶也有所提高。