arXiv:2301.03623v1 [quant-ph] 9 Jan 2023

韦尔猜想与有限系统的热辐射

M. C. Baldiotti[1], * M. A. Jaraba[1], † L. F. Santos[2], ‡ 和 C. Molina[3], §[1]隆德里纳州立大学物理系，巴西隆德里纳市 *PR* 州，邮编 *86051-990*。[2]圣保罗大学物理研究所，邮政信箱 *66318*，巴西圣保罗市 *SP* 州，邮编 *05315-970*。[3]圣保罗大学艺术、科学与人文学院，阿林多·贝蒂奥大道 *1000* 号，巴西圣保罗市 *SP* 州，邮编 *03828-000*。

本文推导了 d 维空间中韦尔定律和韦尔猜想的修正，并分析了与偏振和面积项相关的影响。所得形式体系应用于半经典处理下有限 d维盒中电磁场的准热力学。在此背景下，推导出斯特藩-玻尔兹曼定律的修正。特别关注二维情形，因为它可用于实验装置的表征。另一项应用涉及有限 d 维固体中声学扰动的准热力学推广德拜模型。本文计算了对已知结果和常用公式（如德拜频率和杜隆-珀蒂定律）的扩展与修正。

关键词： 韦尔定律、韦尔猜想、电磁场准热力学、声学扰动准热力学、广义德拜模型

I. 引言

热辐射分析广泛应用于各种有限温度系统。理论研究包括基于流体动力学和/或量子场论的处理方法。实验室和观测应用涉及对撞机中的粒子唯象学、实验室中固体的性质，以及专用天文台对宇宙微波背景特征的研究，还有许多其他应用场景。从低维情形到具有任意维度数的模型，热辐射都经常发挥重要作用。

研究热现象的一种常见方法，是在统计力学模型中定义适当的热力学极限。通常，从统计力学过渡到热力学意味着忽略边界条件。因此，所得结果与物理系统实际体积和形状的关系便不予考虑。尽管这种方法在许多方面都很有用，但严格热力学极限会忽略许多关于所关注实际系统的重要见解。缓解这一问题的一种方法，是在纯统计力学处理与严格热力学区制之间定义一个中间区制，其中系统的体积很大但有限。这就是所谓的准热力学极限 [1]。

从非常一般的层面来看，特定系统中的热辐射特性与适当波动方程特征值的渐近分布直接相关。最早探索这一联系的研究者之一是瑞利，他研究了立方房间中定常声波的问题 [2, 3]。瑞利的分析表明，一个与房间体积及模式频率的立方成正比的项（ $V \cdot \nu^3$项）十分重要。这一结果出现在以瑞利–金斯定律描述热辐射的（错误）理论中。后来，普朗克改进了这一纯经典分析，但即使在量子描述中，特征值分布也未发生变化。同样的问题，以及由此得到的相同 $V \cdot \nu^3$ 项，也出现在利用所谓德拜模型研究固体振动模态时。在这一处理方法中，德拜提出，特征值的渐近行为不依赖于固体的形状。韦尔严格证明了这一猜想，如今这一结果被称为韦尔定律。 [4, 5]中概述了这一发展历程。

严格热力学区制下，一个核心问题是：无限体积近似何时能够充分描述真实的物理系统。要处理这一问题，必须估算在热力学极限中被舍弃的各项。韦尔猜想为此提供了一个初步思路：它预言存在与物体表面积成正比的修正。该猜想已在各种区域中得到证明，证明过程中也可采用多种方法。例如，对亥姆霍兹方程的解进行渐近展开，利用布朗内尔格林函数的诺伊曼–庞加莱构造，以及通过多重反射展开分解模态密度 [6, 7]。

* baldiotti@uel.br
† jaraba.marcosrod@uel.br
‡ luisf@usp.br§
cmolina@usp.br

对于许多重要问题，例如涉及电磁场的问题，必须考虑向量解和偏振效应。为此，一种可行的方法是将矢量场分解为适当的标量波动方程的解 [6, 8–10]。按照这一思路，相关文献中的许多研究表明，面积项（即韦尔猜想中的那一项）并不参与描述热电磁辐射的行为。

先前的评论主要涉及通常的三维情景。然而，所提出处理方法的相关性也体现在具有不同维数的模型中。例如，对二维系统进行热力学和准热力学分析，在所谓的单层材料中具有实际应用 [11], ，尤其是石墨烯 [12]。作为一种更具理论性的应用，我们可以提及光子球的热力学性质 [13], 、黑洞二维玻色模式和费米模式的热辐射 [14], ，以及对 BTZ 黑洞热力学性质的描述 [15]。对于三维系统，热辐射修正对背景微波辐射的分析发挥着重要作用 [16]。这一研究也与声致发光现象的热力学描述有关（热点理论）：在该现象中，将声波注入液体或气体便会产生光脉冲 [17]。具有三个以上空间维度的系统也在研究之列。例如，在膜世界情景中，黑洞的霍金辐射会发生变化 [18–20]。膜世界模型中与引力辐射相关的热辐射现象可能在早期宇宙中具有重要意义。在涉及额外维度的模型中，人们也可以预期对撞机中以及活动天体物理天体附近会出现类似效应（例如参见 [21] 及其中的参考文献）。将反德西特几何与共形场论（AdS/CFT 对应）联系起来的方案，为 d维热力学结果提供了丰富多样的应用 [22–25]。

本文以直观的方法探讨韦尔定律及其推广。准热力学分析，以及对有限体积系统及其相关边界条件的描述，是本文的核心问题。我们将所建立的形式体系应用于腔体中的电磁场准热力学和固体中的声学扰动，并推导出适用于 d 维系统的推广结果。本文的一项贡献是利用混合边界条件，将偏振效应直接纳入模分布的渐近展开。我们强调面积项的作用，并表明在特定条件下会出现不同的准热力学行为。

除了本征值分布带来的修正之外，有限空腔中黑体辐射现象的一个预期特征是最小能量的存在。[1] 对于二维情形，这一问题已在 [26] 中进行研究。将这一研究推广至任意维度后，我们的方法能够比较与最小能量相关的效应和与谱分布修正相关的效应。

本文的结构如下。第二节建立与韦尔定律相关的形式体系。第三节运用所引入的技术，获得韦尔定律的高阶修正。第四节考虑更复杂的设置，其中处理混合边界条件和简并。第五节转向物理应用，将此前获得的结果与热力学和准热力学联系起来。第六节对有限空腔中电磁场的热力学处理展开讨论。第七节考察声学扰动的准热力学，其中分析并拓展德拜模型。第八节给出总结性评论和未来展望。附录 A 和 B 进一步讨论与坐标轴及计数函数相关的超体积计算细节。

II. 标量场与韦尔定律

空腔和固体中的电磁扰动与力学扰动是本文关注的重点。然而，正如我们稍后将看到的，这些系统的热力学可以用一种更简单的标量扰动来描述。考虑 d 维空间中的标量场 $\psi(x_1, \ldots, x_d)$，将其限制在边长为 L 的立方腔内，并满足亥姆霍兹方程，

$$\nabla_d^2 \psi\left(x_1, \ldots, x_d\right) + k^2 \psi\left(x_1, \ldots, x_d\right) = 0\,,\ x_i \in \Omega_d\,,\ k \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

在方程 (1) 中，∇_d^2 表示 d维拉普拉斯算子。区域 Ω_d 及其边界 $\partial\Omega_d$ 的超体积分别为

$$|\Omega_d| = L^d\,,\ \ |\partial\Omega_d| = 2dL^{d-1}\,. \tag{2}$$

[1] 这 与量子真空相关的系统能量下限，据 [2 所述 6].

首先将探讨方程 (1) 的两种不同边界条件，即诺伊曼条件（$\partial_n\psi = 0$ 位于$\partial\Omega_d$）和狄利克雷条件（$\psi = 0$ 位于 $\partial\Omega_d$）。

d维亥姆霍兹方程 (1) 的解可以利用方程 (1) 的一维形式构造，即

$$\phi_n^{\pm}(x) = \frac{e^{-i\pi/4} \pm e^{i\pi/4}}{\sqrt{4L}} \left(e^{ik_n x} \pm e^{-ik_n x}\right) , \; k_n = \frac{\pi}{L} n , \; n = \begin{cases} 0, 1, 2, \ldots (+) \\ 1, 2, 3, \ldots (-) \end{cases} . \tag{3}$$

标签 (+) 表示满足诺伊曼条件的解，而 (–) 表示满足狄利克雷条件的解。由一维解可以构造出 d 维推广形式：

$$\psi^{\pm}(x_1, \ldots, x_d) = \phi_{n_1}^{\pm}(x_1)\phi_{n_2}^{\pm}(x_2)\cdots\phi_{n_d}^{\pm}(x_d) , \tag{4}$$

with

$$k^2 = \frac{\pi^2}{L^2}(n_1^2 + \cdots + n_d^2) . \tag{5}$$

需要注意的是，在狄利克雷情形下，为避免出现零解，应排除满足 $n_i = 0$ 的解。

根据方程 (5)，亥姆霍兹方程 (1) 的解集可以用离散格点上的点来标记。具体而言，我们考虑 d 维笛卡尔格点 L_ϵ^d，

$$L_\epsilon^d \equiv \left\{(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_d) \in \mathbb{R}^d : \epsilon_i = \epsilon n_i , \; n_i = 0, 1, 2, \ldots\right\} , \tag{6}$$

其中，（实数且为正的）ϵ 是格点参数。我们将区域 $\tilde{\Omega}_d \subset \mathbb{R}^d$ 记为半径为 k 的 d 维球体的一个 2^d 区段，即

$$\tilde{\Omega}_d \equiv \left\{(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_d) \in \mathbb{R}^d : \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \cdots + \epsilon_d^2 < k^2 , \; \epsilon_i \geqslant 0\right\} . \tag{7}$$

本文所讨论的主要问题可以表述为计数问题。为此，我们定义计数函数 $N^{(d)}(k)$:

$$N^{(d)}(k) = \left\{ \#(n_1, \ldots, n_d) : \frac{\pi^2}{L^2}\left(n_1^2 + \cdots + n_d^2\right) < k^2 \right\} . \tag{8}$$

函数 $N^{(d)}(k)$ 可表示为

$$N^{(d)}(k) = \mathrm{card}\left(L_\epsilon^d \cap \tilde{\Omega}_d\right) , \; \epsilon = \frac{\pi}{L} , \tag{9}$$

其中，“card”表示集合 [27] 的基数。需要指出的是，$N^{(d)}(k)$ 对 k 的完全依赖由 $\tilde{\Omega}_d$ 描述，因为晶格（目前）是固定的。我们关注 $N^{(d)}(k)$ 在 $k \to \infty$ 时的渐近行为。

一种分析方法是采用晶格的“粗粒化”版本，用体积的计算取代离散点的计数。更具体地说，函数 $N^{(d)}(k)$ 可用体积 $V_d(k)$ 近似，该体积由边长为 ϵ、以属于 $L_\epsilon^d \cap \tilde{\Omega}_d(k)$ 的晶格点为中心的超立方体生成。我们将在下一节的图 1 和图 2 中展示这种粗粒化。每个超立方体的体积为 ϵ^d，因此$V_d(k) = \epsilon^d N^{(d)}(k)$。总体积 $V_d(k)$ 在 $k \to \infty$, $N^{(d)}(k) \to \infty$ 时趋于无穷大，而 ϵ 保持固定。

式（9）及其引入的粗粒化，是一种广为人知的计数过程算法，其中晶格保持固定。在本研究中，我们提出一种替代方法。我们不固定 ϵ （即晶格），而是固定体积 V_d（k）。换言之，我们建议保持区域固定并调整晶格。这可以通过对 ϵ_i 进行缩放来实现，

$$\epsilon_i \longrightarrow \epsilon_i = k^{-1}\epsilon_i = \epsilon n_i , \; \epsilon = \frac{\pi}{kL} . \tag{10}$$

经过重新缩放，计数函数 $N^{(d)}(k)$ 和体积 V_d 都仅取决于晶格，也就是说，

$$V_d(\epsilon) = \epsilon^d N^{(d)}(\epsilon) . \tag{11}$$

˜直观地说，随着晶格变得更加稠密（$\epsilon \to 0^+$），$V_d(\epsilon)$ 应趋近于体积 $|\Omega_d|$，其中

$$\left|\tilde{\Omega}_d\right| = 2^{-d}\omega_d\,,\ \omega_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}\,, \tag{12}$$

而 Γ 表示通常所说的伽马函数。对这一关系的精确推导将引出所谓的韦尔定律，本文将采用所提出的方法对其进行明确展示。

为明确符号含义，我们将诺伊曼情形的计数函数记为 $N_+^{(d)}$，相应地，将狄利克雷情形的计数函数记为 $N_{(d)-}$。我们关注诺伊曼设置与狄利克雷设置下计数问题的差异。这一差异源于计算 $N_+^{(d)}$ 时纳入属于 ϵ_i-轴的点，而计算 $N^{(d)}$ 时则将其排除。_

我们先讨论诺伊曼边界条件，因为（后续区段将会说明）$N_-^{(d)}$ 可以用 $N_{(d)+}$ 表示。计数函数 $N_+^{(d)}$ 可写为

$$N_+^{(d)}(\epsilon) = \sum_{n_1=0}^{M(\epsilon)} \cdots \sum_{n_{d-1}=0}^{M(\epsilon)} \left\lfloor \frac{\sqrt{1-\epsilon^2(n_1^2+\cdots+n_{d-1}^2)}}{\epsilon} \right\rfloor\,,\ M(\epsilon) = \left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor\,, \tag{13}$$

其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示 x [28]的取整函数（或下取整函数）。利用锯齿函数 $\eta(x)$，$\eta(x) \equiv x - \lfloor x \rfloor$，方程 (11) 可写为

$$V_d^+(\epsilon) = \epsilon^{d-1} \sum_{n_1=0}^{M(\epsilon)} \cdots \sum_{n_{d-1}=0}^{M(\epsilon)} \sqrt{1-\epsilon^2(n_1^2+\cdots+n_{d-1}^2)} - \epsilon^d \sum_{n_1=0}^{M(\epsilon)} \cdots \sum_{n_{d-1}=0}^{M(\epsilon)} \eta\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\,. \tag{14}$$

由于 $0 \le \eta < 1$，方程 (14) 的第二项满足以下性质：

$$0 \le \epsilon^d \sum_{n_1=0}^{M(\epsilon)} \cdots \sum_{n_{d-1}=0}^{M(\epsilon)} \eta < \epsilon\left[\epsilon + \epsilon M(\epsilon)\right]^{d-1}\,, \tag{15}$$

这意味着

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^d \sum_{n_1=0}^{M(\epsilon)} \cdots \sum_{n_{d-1}=0}^{M(\epsilon)} \eta\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = 0\,. \tag{16}$$

先前的结果导出了韦尔定律，正如下文将要展示的那样。考察方程 (14) 中的第一项，我们注意到

$$\epsilon = \frac{M^{-1}}{1+\eta M^{-1}} \Rightarrow \lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon = \lim_{M\to\infty} \frac{M^{-1}}{1+\eta M^{-1}} = \lim_{M\to\infty} M^{-1}\,, \tag{17}$$

并且我们可以写成

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^{d-1} \sum_{n_1=0}^{M(\epsilon)} \cdots \sum_{n_{d-1}=0}^{M(\epsilon)} \sqrt{1-\epsilon^2\left(n_1^2+\cdots+n_{d-1}^2\right)} \\ &= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M^{d-1}} \sum_{n_1=0}^{M(\epsilon)} \cdots \sum_{n_{d-1}=0}^{M(\epsilon)} \sqrt{1-\frac{n_1^2+\cdots+n_{d-1}^2}{M^2}}\,. \end{aligned} \tag{18}$$

方程 (18) 中的最后几项是 t ˜给出 Ω_d 体积的黎曼和。因此，利用方程 (16)，我们得出

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} V_d^+(\epsilon) = 2^{-d}\omega_d\,. \tag{19}$$

结果（19）是立方腔中具有 Neumann 边界条件的标量场的韦尔定律。

尽管韦尔定律是一个众所周知的结果，但此处采用的方法（即通过一种保持区域不变并改变晶格的缩放方式进行粗粒化）可用于改进结果（19）。此外，这种方法还将使我们能够考虑不同的边界条件和偏振效应。

III. 超越韦尔猜想

韦尔定律可视为计数函数的零阶修正。韦尔猜想给出了其一阶修正，后来由 Ivrii [31] 证明。用我们的记号，韦尔猜想可写为

$$\epsilon^d N_{\pm}^{(d)}(\epsilon) = 2^{-d}\omega_d \pm 2^{-d} d\omega_{d-1}\epsilon + O(\epsilon^{w_d}), \tag{20}$$

其中 $w_d = \left(d^2 - d + 1 + 1/d\right)/(d-1)$ [32]。从“大-O”的意义上说，目前尚无已知的高阶修正项[2] [31, 32]。虽然在标量情形下，上述修正项始终最为重要，但正如我们将看到的，在考虑向量问题时，这个修正项可能会抵消。因此，重要的是超越第一修正项。为此，可以考虑一种特殊类型的“平均修正项”。它通过高斯对数平均来定义，也称为布朗内尔的 O 形式体系 [32]。如果对于某个 x_0，有 $f = O(g)$，则称

$$\left| \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2 \left(\ln \frac{y}{x'}\right)^2} \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x'} dx' \right| \leq \delta_\rho g(y), \tag{21}$$

对每个 $\rho > 0$ 以及某个 $\delta_\rho < \infty$都成立。对于情形 $d = 2,3$，可得

$$\epsilon^2 N_{\pm}^{(2)}(\epsilon) = \frac{\pi}{4} \pm \epsilon + \frac{\epsilon^2}{4} + \tilde{O}(\epsilon^{\tilde{w}_2}), \tag{22}$$

$$\epsilon^3 N_{\pm}^{(3)}(\epsilon) = \frac{\pi}{6} \pm \frac{3\pi}{8}\epsilon + \frac{3}{4}\epsilon^2 \pm \frac{\epsilon^3}{8} + \tilde{O}(\epsilon^{\tilde{w}_3}), \tag{23}$$

其中 $\tilde{w}_2 > 2$ 且 $\tilde{w}_3 > 3$ [30, 32]。如下文所示，修正项 (22)-(23) 由多项式展开˜给出，其系数与 Ω_d 边界的几何“形状”有关。基于这一几何论证，我们将看到，总能把 $\epsilon^d N_{+}^{(d)}(\epsilon)$ 分解为两部分之和：一个连续分量，记作 $\mathcal{F}^{(d)}(\epsilon)$，以及另一个非连续分量。

本区段的目标是探讨 $\mathcal{F}^{(d)}(\epsilon)$ 的函数形式与根据 Brownell 形式体系推导出的修正之间的关系。我们将采用“自下而上的方法”，详细考察 d 的特定取值，然后将结果外推至一般的 d。

一维情形（$d = 1$）很简单，但对构建自下而上的方法至关重要。在这种情况下，Brownell 修正与精确修正一致。根据方程 (13)，诺伊曼边界条件下的计数函数为

$$\epsilon N_{+}^{(1)}(\epsilon) = 1 - \epsilon\eta\left(\epsilon^{-1}\right) \sim 1 \Rightarrow \mathcal{F}^{(1)}(\epsilon) = 1. \tag{24}$$

狄利克雷边界条件下的结果类似：

$$\epsilon N_{-}^{(1)}(\epsilon) = \epsilon[N_{+}^{(1)}(\epsilon) - 1] = 1 - \epsilon[1 + \eta\left(\epsilon^{-1}\right)] \sim 1. \tag{25}$$

对于二维诺伊曼情形，鉴于 ˜Ω_2 边界的形状，我们可以将 $\epsilon^2 N_{+}^{(2)}$ 分解为

$$\epsilon^2 N_{+}^{(2)}(\epsilon) = \frac{\pi}{4} + \text{axes-boundary area} + \text{area of the boundary curve}. \tag{26}$$

图 1 展示了这一结果。更确切地说，“坐标轴边界面积”是坐标轴周围局部多出的面积（这些坐标轴不包含在 Ω_2 中）。如图 1 所示，该量为

$$\text{axes-boundary area} = \epsilon + \frac{\epsilon^2}{4}. \tag{27}$$

注意，我们考虑的是区间 $[0, 1]$，内每条轴的贡献，这意味着中心正方形的贡献为 $\epsilon^2/4$。边界曲线所围面积的贡献未知。[3] 然而我们知道，它

---

[2] 若存在实数 $\delta > 0$ 和 x_0，使得对所有 $x > x_0$ 都有 $|f(x)| \leq \delta g(x)$，则记作 $f(x) = O(g(x))$。也就是说，当 $x \to \infty$ 时，f 小于 g，而 f 的渐近行为由函数 g界定。[3] 这与著名且至今悬而未决的高斯圆问题 [29]有关。

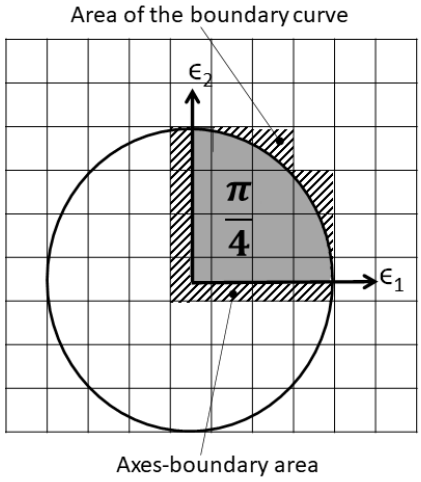

图1. 计数过程中考虑的二维粗粒化与晶格。灰色实心区域的面积为 $\pi/4$ （圆的四分之一），每条坐标轴对应的面积为 $\epsilon/2$。

由一个不连续函数描述，否则 $N_+^{(2)}(\epsilon)$ 就会是连续函数，而我们知道事实并非如此。因此可得， $\mathcal{F}^{(2)}(\epsilon)$ 在这种情况下是

$$\mathcal{F}^{(2)}(\epsilon) = \frac{\pi}{4} + \epsilon + \frac{\epsilon^2}{4}\,, \tag{28}$$

这与方程 (22) 中给出的 Neumann 情形的 Brownell 修正一致。

对于二维 Dirichlet 情形，注意我们可以将 $N_-^{(2)}$ 和 $N_+^{(2)}$ 联系起来，得到

$$N_+^{(2)}(\epsilon) = \underbrace{N_-^{(2)}(\epsilon)}_{\text{points outside the axes}} + \underbrace{2N_-^{(1)}(\epsilon)+1}_{\text{points at the axes}}\,. \tag{29}$$

分离出 $N_-^{(2)}$ 并利用结果 (24) 和 (28)，我们得到方程 (22) 中给出的 Dirichlet 情形的 Brownell 修正。

三维情形的分析可以用类似的方法进行。为说明推导过程，我们来考虑图2，即二维晶格图的推广（用三维球体的八分之一代替二维圆的四分之一）。

对于三维情形　　对于具有诺伊曼边界条件的维晶格，我们得到此情形下的 $\mathcal{F}^{(3)}(\epsilon)$　　is

$$\mathcal{F}^{(3)}(\epsilon) = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{8}\epsilon + \frac{3}{4}\epsilon^2 + \frac{\epsilon^3}{8}\,. \tag{30}$$

再次得到方程 (23) 中给出的诺伊曼情形的 Brownell 修正。

对于具有狄利克雷边界条件的三维情形，计数函数可分解为

$$N_+^{(3)}(\epsilon) = \underbrace{N_-^{(3)}(\epsilon)}_{\text{points outside the axes}} + \underbrace{3N_-^{(2)}(\epsilon)}_{\text{points at the faces}} + \underbrace{3N_-^{(1)}(\epsilon)+1}_{\text{points at the axes}}\,. \tag{31}$$

利用先前的结果，我们得到表达式 (23)。

详细研究了 $d=2$ 和 $d=3$ 的情形后，我们可以将这些结果推广到高维。首先考虑具有诺伊曼边界条件的 d 维情形。与方程 (26) 一样，计数函数 $\epsilon^d N(d)+$可以表示为三项之和：$|\tilde{\Omega}_d|$项、与坐标轴相关的超体积，以及边界超曲面的超体积。在附录A中，我们将说明与坐标轴相关的超体积为

$$\text{Hypervolume of the axes} = \sum_{n=1}^{d} \binom{d}{n} 2^{-d} \omega_{d-n} \epsilon^n\,, \tag{32}$$

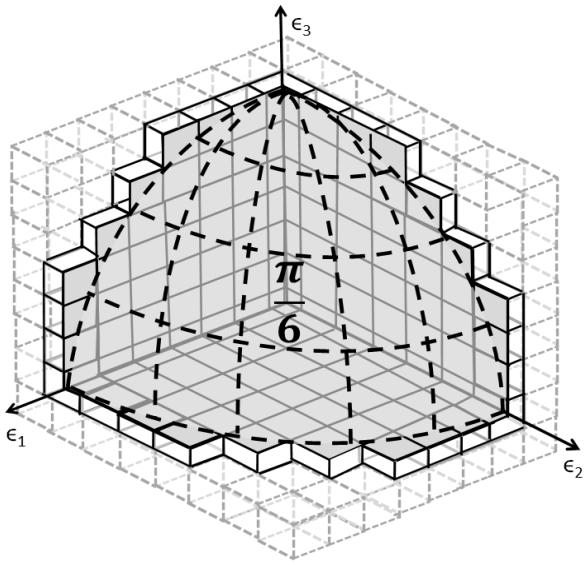

图 2. 三维粗粒化与坐标轴边界面积。深色虚线表示球体的 $1/8$，其贡献为 $\pi/6$。立方体的实体部分表示坐标轴边界面积。中心立方体的贡献为 $\epsilon^3/8$。每条坐标轴上的立方体贡献为 $\epsilon^2/4$。各个面的立方体表示圆面积的 3 倍 $1/4$，即 $3\pi/4$ 倍 ϵ。但只有这一数值的一半，即 $3\pi\epsilon/8$，会产生贡献。

其中

$$\binom{d}{n} = \frac{d!}{n!\,(d-n)!}\ . \tag{33}$$

因此，

$$\mathcal{F}^{(d)}(\epsilon) = \sum_{n=0}^{d} \binom{d}{n} 2^{-d} \omega_{d-n} \epsilon^n\ . \tag{34}$$

上述结果将修正项 (22)-(23) 推广到了任意维数。通过重复 [32] 中针对 $d=2$、3 所采用的步骤，并在此基础上应用定理 (8.17)，我们可以得到

$$\epsilon^d N_+^{(d)}(\epsilon) = \mathcal{F}^{(d)}(\epsilon) + \tilde{O}(\epsilon^{\tilde{w}_d}), \tilde{w}_d > d\,. \tag{35}$$

狄利克雷情形可通过将表达式 (29) 和 (31) 推广得到。此推广在附录 B 中构造，最终表达式可简写为

$$\epsilon^d N_\pm^{(d)}(\epsilon) = \sum_{n=0}^{d} \left[(-1)^{\frac{d-n}{2}}\right]^{1\mp 1} \binom{d}{n} 2^{-d} \omega_{d-n} \epsilon^n + \tilde{O}\left(\epsilon^{\tilde{w}_d}\right)\ . \tag{36}$$

表达式 (36) 是本区段的主要结果。注意，当我们从诺伊曼情形转到狄利克雷情形时，这个方程也保持了在 $d=2$、3 这些情形中观察到的“交替对称性”。如果系数不遵循这种二项式模式，系数符号的交替对称性就会被打破。

将表达式 (36) 改写为变量 k 的形式，我们得到 Brownell 形式体系给出的高阶结果：

$$N_\pm^{(d)}(k) = \frac{1}{2^d} \sum_{n=0}^{d} \left[(-1)^{\frac{d-n}{2}}\right]^{1\mp 1} \binom{d}{n} \frac{\pi^{(n-d)/2} L^{d-n}}{\Gamma\left(\frac{d-n}{2}+1\right)} k^{d-n} + \tilde{O}\left(k^{d-\tilde{w}_d}\right)\ , \tag{37}$$

其中 $\tilde{w}_d > d$。

IV. 混合边界条件与简并

根据前文讨论的诺伊曼和狄利克雷情形的结果，可以进一步处理更复杂的边界条件，本文将其称为“混合边界条件”。此外，本节还将探讨谱中简并的影响。这些设定描述了由亥姆霍兹方程刻画的物理系统，本文将对其进行研究。更多有趣的例子（本文不直接讨论）可见 [33, 34]。

在本研究中，混合边界条件通过在不同坐标轴上施加诺伊曼条件和狄利克雷条件构造。在这些条件下，亥姆霍兹方程 (1) 的解可写为

$$\psi_M(x_1,\ldots,x_d) = \phi^{\pm}(x_1)\cdots\phi^{\pm}(x_d)\ . \tag{38}$$

在 d 维中，混合边界条件可能出现 2^d种情形，其中包括完全采用狄利克雷条件或诺伊曼条件的情形。无论如何，计数函数（对于任意边界条件，通常记作 $N_M^{(d)}$ ）均可分解为如下形式的线性组合

$$N_M^{(d)}(\epsilon) = \sum_{n=0}^{d} A_n N_-^{(n)}(\epsilon)\ , \tag{39}$$

其中，系数 $\{A_n\}$ 与边界条件及可能出现的简并有关。例如，在不存在简并的 Neumann 情形下，取 $A_n = \binom{d}{n}$ 即可得到结果 (B1)（详情见附录 B）。通过考虑与亥姆霍兹方程相关联的矢量场，可以将表达式 (B1) 推广。为处理简并，有必要进行这一推广。在矢量场问题中，除 d 模式$\{n_1, n_2, \ldots, n_d\}$外，场还具有 d分量，$\{F^i_{n_1\cdots n_d}\,, i = 1,\ldots,d\}$。然而，与标量场不同，矢量场的内部自由度必须纳入考虑。因此，矢量场的偏振也是一个问题。

偏振可能是横向的，也可能是纵向的。事实上，矢量场可以表示为

$$F^i_{n_1\cdots n_d} = F^{0i}\prod_{k=1}^{\chi}\phi^+_{n_k}\prod_{j=\chi+1}^{d}\phi^-_{n_j}\ ,\ i = 1,\ldots,d\,, \tag{40}$$

其中常数为 $F^{0i}\in\mathbb{C}$。按照推导方程 (B1) 的过程，非平凡解可分为 $(\chi+1)$ 类：一类是只有一个 n_i 为零，另一类是有两个 n_i 为零，依此类推，直到 χ 个 n_i 都等于零的情形。我们分别将这些类称为“零类”、“一类”等。

χ 个可能的 n_k 为零（构成 χ类）的解，只有一个非零分量 $F^i_{n_1\cdots n_d}$。这些解沿该分量的方向偏振。同理，可能的 n_i 中有 $(\chi-1)$ 个为零时，解有两个非零分量，因此有两种可能的偏振。因此， n类的简并度为

$$\xi^{(d,\chi)}_{\chi-i} = i+1\,,\ \ i = 0,\ldots,\chi-1\,,\ \ \chi\le d\,. \tag{41}$$

对于零类，其中没有任何一个 n_i 为零，所有分量$F^i_{n_1\cdots n_d}$ 都可以非零，因此我们有 d 个自由度， $\xi_0^{(d,\chi)} = d$。这里对自由度的计数仅考虑了边界条件的影响。此外，还可以施加正交条件，以排除纵向模式。该条件要求振幅矢量垂直于波矢，

$$\sum_{n=1}^{d} k_n F^{0n} = 0\,, \tag{42}$$

这使零类构型的自由度减少一个。因此，我们可以写成

$$\xi_0^{(d,\chi)} = \xi_0^{(d)} = d - \tilde{\xi}\,, \tag{43}$$

~ ~其中， $\xi = 1$ 适用于只允许横向扰动的系统，而 $\xi = 0$ 适用于考虑纵向扰动的情形。

如附录 B 中所述，$(\chi+1)$ 个向量解的每一类 n 都表现为 $(d-n)$ 维空间中的狄利克雷问题。仅有一个 n_i 等于零的类（简并度等于 $\xi_1^{(d,\chi)}$ ）可以划分为

d 个子类（d 种满足 $n_j = 0$ 的情况）。如果两个解具有 $n_j = 0$ （简并度为 $\xi_2^{(d,\chi)}$ ），则该子类可进一步划分为 $\binom{d}{2}$ 组。此过程持续进行，直到无法再产生新的子类为止。根据上述计数过程，模式总数可表示为由此构造的各类及子类的组合，

$$N_\chi^{(d)} = \sum_{n=0}^{\chi} (\#n\text{-class}) \times (n\text{-degenerescence}) \times N_-^{(d-n)} , \tag{44}$$

or

$$N_\chi^{(d)}(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\chi} \binom{d}{n} \xi_n^{(d,\chi)} N_-^{(d-n)}(\epsilon) , \tag{45}$$

其中 $N_-^{(m)}$ 由方程 (37) 给出， $\xi_m^{(d,\chi)}$见方程 (41) 中的 $m > 0$ ，而 $\xi_0^{(d,\chi)}$ 见方程 (43)。我们强调，表达式 (45) 是本文的主要结果之一。对于 $\chi = d$ 且无偏振（$\xi_i^{(d)} = 1$、 $\forall i = 0$、.....、 d）的情况，可恢复附录 B 中的方程 (B1)。

在接下来的各区段中，我们将把所建立的形式体系应用于具体情形。具体而言，我们将讨论超立方腔中电磁场的热力学，以及广义德拜模型中的声学扰动。

V. 热力学与准热力学极限

从韦尔定律及其扩展出发，我们转而讨论物理应用。本区段的目标是将所推导的计数函数展开式与热力学分析联系起来。在此背景下，韦尔定律的修正将对应于从严格热力学极限向准热力学方法的过渡。

我们采用半经典处理，将所关注的物理系统描述为亥姆霍兹方程 (1) 的解。在此处理中，我们考虑一个边长为 L 、维数为 d 的立方盒，其中充满了热气体。该气体由具有确定能量并遵循玻色-爱因斯坦统计的有效无质量粒子组成（实际上是与电磁或声学扰动相关的模式）。假设系统处于温度恒定为 T 的热平衡状态。模式数不守恒，因此化学势 μ 为零。由于温度和化学势固定，故采用巨正则系综。

若能达到热力学极限，便可建立宏观处理。由于我们采用巨正则系综，严格热力学极限定义为 [35]

$$|\Omega_d| \to \infty \text{ with } T \text{ fixed and } \mu = 0 , \tag{46}$$

其中 $|\Omega_d|$ 是区域 Ω_d 的超体积。从方程 (2) 可见，该条件意味着 th at

$$LT \to \infty \text{ with } T \neq 0 \text{ fixed and } \mu = 0 . \tag{47}$$

除了热力学极限之外，考虑如何趋近这一极限也很重要。因此，我们将准热力学极限 [1] 定义为

$$|\Omega_d| \text{ large but finite, with } T \text{ fixed and } \mu = 0 . \tag{48}$$

准热力学极限 在本研究中尤为相关，因为这里考虑的是有限空腔或固体 .

鉴于所研究的系统符合热力学极限和准热力学极限，相关的配分函数可写为

$$\ln Z = -\int_0^\infty D(\omega) \ln\left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)\right] \mathrm{d}\omega , \tag{49}$$

其中 $D(\omega)$ 是谱密度函数。表达式（49）可视为精确巨正则配分函数的托马斯-费米近似。根据 Z，可以轻松计算所有相关的热力学量和准热力学量。例如，内能为

$$U = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} (\ln Z) . \tag{50}$$

在实际应用准热力学极限时，结合系统温度固定这一假设，盒子的长度 L 应足够大，使得 [24]

$$\frac{k_B}{\hbar c}\,LT \gg 1\,,\ \text{with } LT \text{ kept finite.} \tag{51}$$

作为参考， $k_B/(\hbar c) \approx 436.7\,\mathrm{K}^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$，单位采用国际单位制。配分函数（49）中的谱密度 D 与前几节研究的计数函数（统称为 $N^{(d)}$）之间的关系为

$$D(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}N^{(d)}(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\,\mathrm{d}\omega\,. \tag{52}$$

由此可知，在计数函数的渐近展开中只考虑 LT 的最高次幂项时，韦尔定律（19）与严格热力学极限（47）相关。若要建立韦尔定律扩展形式与准热力学极限（51）之间的联系，则还需在该展开中考虑关于 LT 幂次的次主导修正。应当注意，尽管计数函数的结果（45）对 L的任意取值均成立，但只有满足条件（51）时，才能采用配分函数的积分形式（49）。

VI. 电磁场的准热力学

所建立形式体系的一个初步应用，是研究（超）立方腔体中电磁场的准热力学。考虑一个边长为 L、维度为 d 的立方腔。假设其各个面均为理想导体，包围着一个真空区域。腔内的电场满足波动方程，其特征速度为 c。此外，壁面的电导率确保电场在壁面处的切向分量为零。

腔内电场的各个分量为 [36]

$$E^{i}_{n_1\cdots n_d}(x_1,\ldots,x_d) = E^{0i}\times\phi^{-}_{n_1}(x_1)\cdots\phi^{+}_{n_i}(x_i)\cdots\phi^{-}_{n_d}(x_d)\,, \tag{53}$$

其中，每个分量都满足混合边界条件 (40)，其中 $\chi = 1$。此外，由于仅存在横向模˜，方程 (43) 中有 $\xi = 1$ 。因此，利用结果 (45)，我们得到独立模式$N^{(d)}_{\mathrm{em}} = N^{(d)\,1}$的数量为

$$N^{(d)}_{\mathrm{em}}(\omega) = \frac{1}{2^d}\left[\frac{(d-1)}{c^d\pi^{d/2}}\frac{(\omega L)^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} + \frac{d\,(3-d)}{c^{d-1}\pi^{(d-1)/2}}\frac{(\omega L)^{d-1}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}+1\right)}\right]. \tag{54}$$

方程 (54) 中假设电磁场满足真空色散关系 $k = \omega/c$.

对于三维情形，我们在 ω [9, 10] 中得到众所周知的二次项抵消。在这种情形下，我们考虑方程 (45) 中的下一修正项，得到

$$N^{(3)}_{\mathrm{em}} = \frac{L^3}{3\pi^2c^3}\omega^3 - \frac{3L}{2\pi c}\omega\,. \tag{55}$$

结果 (55) 与 [9, 10, 30, 37] 一致。不过，方程 (54) 表明，电磁场的这种“面积”项抵消仅出现在三维情形。这意味着，与其他维数相比， $d = 3$ 情形会有显著差异。

谱密度 $D^{(d)}_{\mathrm{em}}$ 可通过对表达式 (54) 关于 ω 求导来计算 ,

$$D^{(d)}_{\mathrm{em}} = \frac{\mathrm{d}N^{(d)}_{\mathrm{em}}}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{2^d}\left[\frac{d\,(d-1)\,L^d\omega^{d-1}}{\pi^{d/2}\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)c^d} + \frac{d\,(d-1)\,(3-d)\,L^{d-1}\omega^{d-2}}{\pi^{(d-1)/2}\Gamma\left(\frac{d-1}{2}+1\right)c^{d-1}}\right]. \tag{56}$$

因此，系统的内能可写为

$$U^{(d)} = \int_0^\infty D^{(d)}_{\mathrm{em}}(\omega)\,\frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1}\,\mathrm{d}\omega = k_B\left[(d-1)\,\theta_dL^dT^{d+1} + (3-d)\,\frac{d}{2}\theta_{d-1}L^{d-1}T^d\right], \tag{57}$$

其中 θ_m 定义为

$$\theta_m \equiv \frac{\zeta\,(m+1)\,\Gamma\,(m+1)\,m}{2^m\pi^{m/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}\frac{k_B^m}{\hbar^mc^m}\,. \tag{58}$$

方程 (58) 中的项 $\zeta(z)$ 表示黎曼ζ函数。表达式 (57) 可视为在准热力学处理中，超立方腔内电磁场的斯特藩-玻尔兹曼定律的改进形式。

在严格热力学极限下，也就是说，不考虑修正时，我们可以在 d 维中得到斯特藩-玻尔兹曼定律。在严格热力学区制下，可以将（改进后的）结果（57）与 [38, 39]进行比较。然而，在那些参考文献中，作者规定 $\xi_{\mathrm{em}}^{(d)}=\xi_{0}^{(d)}=2$，以描述 d维电场的偏振（如三维情形中所做的那样）。 $\xi_{\mathrm{em}}^{(d)}=d-1$ 才是正确因子这一点是在[40]中指出的。

需要强调的是，虽然对任意维度都施加 $\xi_{\mathrm{em}}^{(d)}=2$ 这一条件，对若干热力学量的主项而言只对应一个简单因子，但这一选择对准热力学分析中的修正项影响极大。例如，在考虑准热力学时，普遍施加 $\xi_{\mathrm{em}}^{(d)}=2$ 会导致任意 d 值下的第一项修正都被抵消（这并不恰当），而不是像我们所得结果那样，仅在 $d=3$时抵消。

准热力学斯特藩-玻尔兹曼定律（57）也可以改写为

$$\frac{U^{(d)}}{L^{d}}=\int_{0}^{\infty}B^{(d)}\left(\omega,T,L\right)\,\mathrm{d}\omega\,, \tag{59}$$

这意味着

$$B^{(d)}\left(\omega,T,L\right)=\left[\frac{\omega}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}-\frac{c\left(d-3\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}+1\right)}\frac{1}{L}\right]\frac{d\left(d-1\right)\hbar\omega^{d-1}}{2^{d}\pi^{d/2}c^{d}\left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_{B}T}\right)-1\right]}\,. \tag{60}$$

表达式（60）是普朗克公式的准热力学版本。该结果描述了腔体的有界性对电磁场谱密度的影响。

对于二维情形，有必要进行更详细的讨论。我们关于 $d=2$ 的结果可以与 [26]中给出的分析进行比较。 [26] 中提出了一个有趣的观点：尺寸效应会阻止系统中出现任意低的频率。基于这一观察（此处将其具体应用于面积为 L^{2} 的正方形系统），作者提出内能 U 具有如下形式

$$U=2\int_{\omega_{\min}}^{\infty}D\left(\omega\right)\frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_{B}T}\right)-1}\,\mathrm{d}\omega\,,\;D\left(\omega\right)=\frac{L^{2}\omega}{2\pi c^{2}}\,,\;\omega_{\min}=\frac{\sqrt{2}\pi c}{L}\,. \tag{61}$$

方程（61）中的积分可通过作变量代换 $x=t+x_{\min}$来求解，其中

$$x\equiv\frac{\hbar\omega}{k_{B}T}\,,\;x_{\min}\equiv\frac{\hbar\omega_{\min}}{k_{B}T}=\frac{\sqrt{2}\pi\hbar c}{k_{B}TL}\,. \tag{62}$$

可得

$$U(x_{\min})\;=\frac{k_{B}^{3}}{\pi\hbar^{2}c^{2}}\,L^{2}T^{3}S\left(x_{\min}\right), \tag{63}$$

$$S\left(x_{\min}\right)=2\mathrm{Li}_{3}\left(e^{-x_{\min}}\right)+2x_{\min}\mathrm{Li}_{2}\left(e^{-x_{\min}}\right)+x_{\min}^{2}\mathrm{Li}_{1}\left(e^{-x_{\min}}\right)\,, \tag{64}$$

其中，多对数函数 $\mathrm{Li}_{s}(z)$ 定义为

$$\mathrm{Li}_{s+1}\left(z\right)=\frac{1}{\Gamma\left(s+1\right)}\int_{0}^{\infty}\frac{t^{s}}{\exp\left(t\right)/z-1}\,\mathrm{d}t\,. \tag{65}$$

根据 [26], 中的推导，项 $S(x_{\min})$ 在 $x_{\min}=0$附近展开，

$$S(x_{\min})=2\zeta(3)-\frac{x_{\min}^{2}}{2}+\frac{x_{\min}^{3}}{6}-\frac{x_{\min}^{4}}{48}-\frac{x_{\min}^{6}}{4320}+O\left(x_{\min}^{7}\right)\,. \tag{66}$$

注意到，根据公式（62）中 $x_{\min}$ 的定义可以看出，在 $x_{\min}=0$ 附近展开等价于考虑 $[k_{B}/(\hbar c)]\;LT\gg1$。最后，利用展开式（66），并仅保留一阶项 $x_{\min}^{2}$，从 [26] 出发的方法得到[4]

$$U=\frac{2\zeta\left(3\right)}{\pi}\frac{k_{B}^{3}}{\hbar^{2}c^{2}}L^{2}T^{3}-\pi k_{B}T\,. \tag{67}$$

[4] 应当指出，公式（67）实际上并未在 [26]中推导出来。

我们注意到，公式（67）中的第一项与本文给出的结果（57）相差一个因子 2。这一差异只是因为 [26] 中的作者采用了 [38] 的推导方法；正如前文所述，该方法假设对于任意 d，都有 $\xi_{\mathrm{em}}^{(d)}=2$。不过，更重要的一点是，从公式（61）可以看出，在考虑最小频率的尺寸效应时，并未将这些效应对模态密度 $D(\omega)$ 的影响考虑在内。换言之，公式（61）中 U 的被积函数仅在热力学极限下才是正确的。

我们通过同时考虑最小频率和模态密度的尺寸效应，改进了 [26] 中的结果。按照推导公式（64）的步骤，但在内能 U 的表达式（61）的被积函数中，使用公式（56）的 $D_{\mathrm{em}}^{(2)}$，而非 $D(\omega)$，可得

$$U_{\mathrm{em}}^{(2)}=\pi k_BT\left[x_{\mathrm{min}}^{-2}S\left(x_{\mathrm{min}}\right)+\frac{\sqrt{2}}{\pi}x_{\mathrm{min}}^{-1}\tilde{S}\left(x_{\mathrm{min}}\right)\right], \tag{68}$$

其中 $S(x_{\mathrm{min}})$ 见公式（64），并且

$$\tilde{S}\left(x_{\mathrm{min}}\right)=\mathrm{Li}_2\left(e^{-x_{\mathrm{min}}}\right)+x_{\mathrm{min}}\mathrm{Li}_1\left(e^{-x_{\mathrm{min}}}\right). \tag{69}$$

˜将 $S(x_{\mathrm{min}})$ 在 $x_{\mathrm{min}}=0$ 附近展开，得到

$$\tilde{S}\left(x_{\mathrm{min}}\right)=\frac{\pi^2}{6}-x_{\mathrm{min}}+\frac{x_{\mathrm{min}}^2}{4}-\frac{x_{\mathrm{min}}^3}{36}+\frac{x_{\mathrm{min}}^5}{3600}+O\left(x_{\mathrm{min}}^6\right). \tag{70}$$

将结果 （66）和（70）代入方程（68），并只保留最高至 x_{min}^2 阶的项，可得

$$U_{\mathrm{em}}^{(2)}=\frac{\zeta(3)}{\pi}\frac{k_B^3}{\hbar^2c^2}L^2T^3+\frac{\pi k_B^2}{6\hbar c}LT^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)\pi k_BT. \tag{71}$$

除了前面提到的因子 2，以及方程（67）最后一项中的 $\sqrt{2}/\pi$ 修正外，我们还强调了一个与 T^2 成正比的“面积”项。这个新项是准热力学极限下的主导修正。

需要注意的是，方程（71）中的第二项，也就是主导修正项，恰好是方程（57）中针对 $d=2$ 给出的最后一项。这是因为方程（66）中的 S 不含线性项（即与 x_{min} 成正比的项）。若存在这样的线性项，方程（57）中的第二项就会发生变化。

上述针对二维情形的步骤可以推广到任意维度。在这种情况下，考虑最小能量意味着

$$U_{\mathrm{em}}^{(d)}=d\left(d-1\right)k_BT\left[\left(x_{\mathrm{min}}^{(d)}\right)^{-d}C_dS_d\left(x_{\mathrm{min}}^{(d)}\right)+\left(x_{\mathrm{min}}^{(d)}\right)^{-1}\tilde{C}_d\tilde{S}\left(x_{\mathrm{min}}^{(d)}\right)\right], \tag{72}$$

其中

$$\begin{aligned}
&x_{\mathrm{min}}^{(d)}=\frac{\hbar c\pi}{k_BLT}\sqrt{\frac{3d}{2}-1},\ C_d=\left(\frac{\pi}{8}\right)^{\frac{d}{2}}\frac{(3d-2)^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)},\ \tilde{C}_d=\frac{(-1)^d}{2^{d-1}\pi}C_1,\\
&S_d\left(x_{\mathrm{min}}^{(d)}\right)=\sum_{k=0}^{d}\left(\begin{array}{c}d\\k\end{array}\right)\Gamma\left(k+1\right)\left(x_{\mathrm{min}}^{(d)}\right)^{d-k}\mathrm{Li}_{k+1}\left(e^{-x_{\mathrm{min}}^{(d)}}\right),
\end{aligned} \tag{73}$$

˜和 S 由方程（69）给出，适用于 d 的任意取值。与二维情形类似，不难看出，S_d 在 $x^{(d)}{}_{\text{最小}}=0$ 附近的极限不含线性项。

应当注意，方程 (72) 括号中第二项里 $x^{(d)}{}_{\mathrm{min}}$ 的幂与维数无关，且等于 -1。因此，这一项的高阶贡献正比于 LT^2，与$d=2$中的情况相同。所以，方程 (72) 中 $U_{\mathrm{em}}^{(d)}$ 的主导项恰好就是表达式 (57) 中给出的那些项。我们得出结论：对于 $d\neq3$，最小频率的存在不会影响准热力学行为，这与热力学极限下的情况完全相同；即使考虑最小频率，表达式 (57) 仍然成立。[5]

[5] 对于三维情形，不存在面积项可能意味着存在高阶修正。在这种情况下，最小频率会影响第一修正项，该项与 LT^2 成正比。

VII. 声学扰动的准热力学

A. 一般考虑

下面我们讨论声学扰动的准热力学，重点研究德拜模型的 d 维版本。考虑一个谐性固体，也就是一个各向同性、弹性且连续的物体。假设该固体是一个维数为 d 、边长为 L 的超立方体。在这个超立方体中，有 χ 对相对的面是自由的，因此这些方向上的振动满足诺伊曼条件。其余 $d-\chi$ 对相对的面是固定的，满足狄利克雷条件。固体中的振动传播与声波有关。

在这一设定中，构成固体的粒子（原子、离子、分子等）的位移场分量 $u^i(x)$ 将是亥姆霍兹方程的解，其形式如方程 (40) 所示。具体而言， $u^i(x)$ 为

$$u^i_{n_1\cdots n_d}(x_1,\ldots,x_d) = u^{0i}\times \underbrace{\phi^+_{n_1}(x_1)\cdots\phi^+_{n_\chi}(x_\chi)}_{\text{free faces}}\underbrace{\phi^-_{n_{\chi+1}}(x_{\chi+1})\cdots\phi^-_{n_d}(x_d)}_{\text{fixed faces}}. \tag{74}$$

与腔体中电磁场的描述不同，声学扰动可以沿纵向自由振荡。因此，与电磁扰动的热力学行为相比，在当前设定中应预期会出现一种不同的准热力学行为。尤其是对于 $d=3$，我们应预期面积项（准热力学校正的第一项）将发挥重要作用。[6]

我们将把本文推导的结果应用于推广通常三维德拜模型中的著名表达式，并研究准热力学区间。由方程 (45)，结合 (43) 中的 $\xi=0$ ，可得

$$N^{(d)}_s(\omega) = \frac{d}{\pi^{d/2}2^d}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}\left(\frac{\omega L}{c^{(d)}_{s0}}\right)^d + \frac{(2\chi-d)\,\pi^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}+1\right)}\left(\frac{\omega L}{c^{(d)}_{s\chi}}\right)^{d-1}\right]. \tag{75}$$

量 $c^{(d)}_{s0}$ 和 $c^{(d)}_{s\chi}$ 表示有效体声速，将在下一节讨论。

表达式 (75) 可解释为频率低于 ω 的声波所对应的模式数。与电磁情形不同，在德拜模型的处理中，面积项仅在 d 为偶数且诺伊曼边界条件与狄利克雷边界条件精确平衡时才会消失：固体的一半表面是自由的，另一半是固定的。特别是在三维情形中，面积项的影响始终存在。

B. 面积项的影响

我们来考察面积项的影响，并考虑两种极端情形：所有壁面均为自由边界（$\chi=d$），或所有壁面均为固定边界（$\chi=0$）。在这些情况下，

$$N^{(d)}_{s\pm}(\omega) = \frac{1}{\pi^{d/2}}\frac{d}{2^d}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}\left(\frac{\omega L}{c^{(d)}_{s0}}\right)^d \pm \frac{d\pi^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}+1\right)}\left(\frac{\omega L}{c^{(d)}_{s\pm}}\right)^{d-1}\right]. \tag{76}$$

在方程 (76) 中，正号和负号分别对应“全部自由”和“全部固定”两种固体类型。此外， $c^{(d)}_{s0}$ 可解释为一种有效速度，它由纵向模速度 c_l 与 $(d-1)$ 个横向模速度 c_t线性叠加而成，

$$\left(c^{(d)}_{s0}\right)^d = dc_t^d\left(d-1+\frac{c_t^d}{c_l^d}\right)^{-1}. \tag{77}$$

需要注意的是，这种线性叠加只能应用于主项 [30]。实际上，固体壁面上的模式反射会使模式发生混合。因此，纯横向（或纵向）扰动反射后，可能成为横波和纵波的叠加。这一现象会产生一个有效速度 $c^{(d)}_{s\pm}$ ，它不同于 $c^{(d)}_{s0}$ 。

[6] 与 在低温三维设置中与面积项相关的效应将在 [41, 42 中进行探讨].

对于三维情形，研究特定壁面上的波反射的一种方法是用薄板代替立方体，从而忽略该壁面的边界效应。 [41], 采用的正是这种方法：在与薄板平面平行的表面（反射平面）上施加适当的边界条件（诺伊曼或狄利克雷）。然而，在其他表面（即薄板厚度方向）上则施加周期性边界条件，这种方法能够捕捉边界效应。请注意，施加周期性边界条件的表面数量等于入射平面的维数（三维情形下为二维）。如果边界距离感兴趣区域足够远，那么在边界处施加周期性条件就是合理的。在这一简化模型中， [41] 确定了

$$\left(c_{s+}^{(3)}\right)^2 = 3\left[\frac{2\left(c_t^2\right)^2 - 3c_t^2c_l^2 + 3\left(c_l^2\right)^2}{c_t^2c_l^2\left(c_l^2 - c_t^2\right)}\right]^{-1}, \tag{78}$$

$$\left(c_{s-}^{(3)}\right)^2 = 3\left[\frac{2}{c_t^2} + \frac{1}{c_l^2} + \frac{\left(c_l^2 - c_t^2\right)^2}{c_l^2c_t^2\left(c_l^2 + c_t^2\right)}\right]^{-1}. \tag{79}$$

根据 [41], 中给出的推导可以看出，$c_{l,t}$ 中出现二次幂，是所考虑的周期性边界条件数量所致。而这又是因为板具有两个维度。

在 d 维空间中，我们可以考虑波在任意一个 $2d$ 面上的反射。在这种情况下，薄板被定义为 $\mathbb{R}^d$中位于两个（$d-1$）维超平面[7] 之间的所有点的集合。这样，系统便可近似为两块无限大板。在这些板上施加适当的边界条件（诺伊曼或狄利克雷），并在其他（$d-1$）个方向上施加周期性边界条件。这样，考虑到系统维度与 c_t 和 c_l上的幂级数之间的关系，式（78）—（79）中的三维结果可推广至更一般的 d维情形，得到

$$\left(c_{s\pm}^{(d)}\right)^{d-1} = dc_t^{d-1}\left[d - 1 + \frac{\left(c_l^{d-1}\right)^2 - c_l^{d-1}c_t^{d-1} + 2\left(c_t^{d-1}\right)^2}{c_l^{d-1}\left(c_l^{d-1} \mp c_t^{d-1}\right)}\right]^{-1}. \tag{80}$$

C. 德拜频率

德拜模型的一个重要参数是所谓的德拜频率。该量指的是在固体中传播的波的截止角频率，这是由于构成固体晶格的粒子之间存在最小距离而产生的。根据方程（76），通过分析系统的自由度数目，可以确定德拜频率 $\omega_{D\pm}^{(d)}$。即

$$nd + n_\partial l \approx nd = N_{s\pm}^{(d)}\left(\omega_{D\pm}^{(d)}\right), \tag{81}$$

其中， n 是腔体（体相）内部的粒子数， n_∂ 是边界（边缘）处的粒子数。考虑边缘时，粒子具有 l 个自由度。在表达式（81）中，我们假设 $n \gg n_\partial$，因为我们进行的是宏观（准热力学）处理，因此可以将 n 视为系统粒子总数的近似值。实际上，我们关注的是边界对在体相中传播的模式所产生的影响，而不考虑表面模（瑞利模）。在准热力学区间内，表面模的贡献可以忽略不计。

一个相关问题是边界对德拜频率的影响。为分析这一点，我们将表达式 (81) 改写为以下形式

$$\left(\omega_{D\pm}^{(d)}\right)^d + B_{d\pm}\left(\omega_{D\pm}^{(d)}\right)^{d-1} - \left(\omega_{D0}^{(d)}\right)^d = 0, \tag{82}$$

[7] 参见 [43]的第 3.4 区段。

with

$$B_{d\pm} \equiv \pm \frac{d\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}+1\right)} \frac{\left(c_{s0}^{(d)}\right)^{d}}{\left(c_{s\pm}^{(d)}\right)^{d-1} L}\,, \tag{83}$$

$$\omega_{D0}^{(d)} \equiv 2\pi^{1/2} c_{s0}^{(d)} \left[\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)\rho_d\right]^{\frac{1}{d}}\,. \tag{84}$$

在方程 (84) 中， ρ_d 表示立方体的（超）体积密度，其定义为

$$\rho_d \equiv \frac{n}{L^d}\,. \tag{85}$$

物理上最重要的情形是三维固体。对于 $d=3$，方程 (82) 可得到精确解:

$$\omega_{D\pm}^{(3)} = \pi c_{s0}^{(3)} \left[\sqrt[3]{f_{0\pm}} + \sqrt[3]{f_{1\pm}} \mp \frac{3\left(c_{s0}^{(3)}\right)^{2}}{4\left(c_{s\pm}^{(3)}\right)^{2}} \frac{1}{L}\right]\,, \tag{86}$$

其中

$$f_{p\pm} \equiv \frac{6\rho_3}{\pi} \mp \frac{27\left(c_{s0}^{(3)}\right)^{6}}{32\left(c_{s\pm}^{(3)}\right)^{6}} \frac{1}{L^3} + (-1)^p \left[\frac{9\rho_3^2}{\pi^2} \pm \frac{81\left(c_0^{(3)}\right)^{6}}{32\pi^2\left(c_{s\pm}^{(3)}\right)^{6}} \frac{\rho_3}{L^3}\right]^{1/2}\,. \tag{87}$$

我们来考虑最常见情形之外的其他情形。在二维情形下，同样可以得到德拜频率 $\omega_{D\pm}^{(2)}$ 的精确表达式,

$$2\omega_{D\pm}^{(2)} = \sqrt{B_{2\pm}^2 + \left(2\omega_{D0}^{(2)}\right)^2} - B_{2\pm}\,. \tag{88}$$

对于 $d>3$，我们采用近似

$$\left(\omega_{D\pm}^{(d)}\right)^{d} + B_{d\pm}\left(\omega_{D\pm}^{(d)}\right)^{d-1} = \left(\omega_{D\pm}^{(d)} + \frac{B_{d\pm}}{d}\right)^{d} + O\left(\frac{1}{L^2}\right)\,, \tag{89}$$

这之所以合理，是因为我们考虑的是该理论的准热力学区间。因此，只保留 $1/L$ 阶项并利用结果 (82)，可得

$$\omega_{D\pm}^{(d)} = \omega_{D0}^{(d)} \mp \frac{\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}+1\right)} \frac{\left(c_{s0}^{(d)}\right)^{d}}{\left(c_{s\pm}^{(d)}\right)^{d-1}} \frac{1}{L}\,. \tag{90}$$

应当指出，对于二维和三维情形，已有精确表达式 (88) 和 (86)。利用这些结果，与方程 (90)] 相比， $1/L$ 中的高阶贡献被视为 [。

在严格热力学极限（46）下，我们观察到 $B_{d\pm}\to 0$，并且

$$\omega_{D\pm}^{(d)}\left(L\to\infty\right) = \omega_{D0}^{(d)}\,. \tag{91}$$

取 $d=3$ 后，表达式（91）化为众所周知的德拜频率。总之，我们在方程中得到了一个修正项，它适用于具有 d 个维度、边界为 (90)
自由（+）或固定（–）的谐性固体的德拜频率。

值得注意的是，结果（90）或许能为本文提出的研究提供一种实验检验。事实上，由方程（90）可知

$$\omega_{D+}^{(d)} \le \omega_{D0}^{(d)} \le \omega_{D-}^{(d)}\,. \tag{92}$$

也就是说，与严格热力学区制下的标准结果相比，自由边界固体的德拜频率应当更低。类似地，固定边界固体的德拜频率则会更高。原则上，这些差异可以测量。鉴于导电材料的热容主要来自未与晶格牢固结合的电子，我们预计，效应 (92) 在电绝缘体（非金属晶体）中会更加显著。

D. 热容

现在我们来考察准热力学区间内固体的热容。为了计算定容热容 $C_{\pm}^{(d)}$，我们来研究在所考察的两种边界条件下系统的内能 $U_{\pm}^{(d)}$。利用方程 (76)，可得模态密度为

$$D_{s\pm}^{(d)} = \frac{dN_{s\pm}^{(d)}}{d\omega} = \kappa_0^{(d)}\omega^{d-1} + \kappa_{\pm}^{(d)}\omega^{d-2}\,, \tag{93}$$

其中定义了以下量:

$$\kappa_0^{(d)} \equiv \frac{d^2}{2^d\pi^{d/2}} \frac{L^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)\left(c_{s0}^{(d)}\right)^d}\,, \tag{94}$$

$$\kappa_{\pm}^{(d)} \equiv \pm\frac{d^2\,(d-1)}{2^d\pi^{\frac{d-1}{2}}} \frac{L^{d-1}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}+1\right)} \left(c_{s\pm}^{(d)}\right)^{1-d}\,. \tag{95}$$

因此，内能可写为

$$U_{\pm}^{(d)} = \frac{k_B^2T^2}{\hbar}\int_0^{\theta_{\pm}^{(d)}/T} D_{s\pm}^{(d)}\left(\frac{k_BT}{\hbar}x\right)\frac{x\,\mathrm{d}x}{e^x-1}\,, \tag{96}$$

with

$$\theta_{\pm}^{(d)} \equiv \frac{\hbar}{k_B}\omega_{D\pm}^{(d)} \tag{97}$$

将 d 维度下的德拜温度记为.....。一般而言，方程（96）中的积分没有解析解。我们来考察低温（$T \ll \theta_{\pm}^{(d)}$）和高温（$T \gg \theta_{\pm}^{(d)}$）区域。

相关文献中更常讨论低温极限。在三维中，这一温度区域由德拜定律描述：固体在定容条件下的比热随绝对温度的三次方变化 T。我们旨在针对具有有限尺寸的固体改进 d 维中的德拜定律，因此采用准热力学描述。

需要指出的是，准热力学极限（51）意味着 $[k_B/(\hbar c)]\,LT \gg 1$。因此，温度 T 较低时，应以 L相应较大的取值作为补偿。温度足够低时，系统的内能可写为

$$U_{\pm}^{(d)}\left(T \ll \theta_{\pm}^{(d)}\right) = \frac{d!\kappa_0^{(d)}}{\hbar^d}\zeta\left(d+1\right)k_B^{d+1}T^{d+1} + \frac{(d-1)!\kappa_{\pm}^{(d)}}{\hbar^{d-1}}\zeta\left(d\right)k_B^dT^d\,. \tag{98}$$

根据 $U_{\pm}^{(d)}$ 的表达式 (98)，可以得到德拜定律的修正:

$$C_{\pm}^{(d)}\left(T \ll \theta_{\pm}^{(d)}\right) = \frac{d!\,(d+1)\,\kappa_0^{(d)}}{\hbar^d}\zeta\left(d+1\right)k_B^{d+1}T^{d} + \frac{d\,(d-1)!\kappa_{\pm}^{(d)}}{\hbar^{d-1}}\zeta\left(d\right)k_B^dT^{d-1}\,. \tag{99}$$

在严格热力学极限 (46) 下，我们恢复了 d 维度中的德拜定律 [44]。对于三维情形，表达式 (99) 化简为此前在 [41] 中讨论过的结果。

对高温区间的研究较少，我们将在本文中探讨这一情形。事实上，这种情形更适合采用准热力学处理，因为当 T 较高时，可以更准确地分析尺寸较小的固体 L。在三维情形下，假设处于热力学极限，该区间内系统的行为可由杜隆-珀蒂定律描述：温度足够高时，含有一摩尔粒子的固体的热容近似为常数。本文将推导考虑有限尺寸固体时 d 维度下杜隆-珀蒂定律的修正。

在高温区间 $\theta_{\pm}^{(d)}/T \to 0$，可以在方程 (96) 中采用近似 $e^x - 1 \approx x$。通过这种方法，可以明确写出内能 $U_{\pm}^{(d)}$ ($T \gg \theta_{\pm}^{(d)}$)，并确定热容 $C_{\pm}^{(d)}$:

$$C_{\pm}^{(d)}\left(T \gg \theta_{\pm}^{(d)}\right) = \left(\frac{k_B}{\hbar}\right)^d\left[\frac{\kappa_0^{(d)}}{d}\left(\theta_{\pm}^{(d)}\right)^d + \frac{\hbar\kappa_{\pm}^{(d)}}{k_B\,(d-1)}\left(\theta_{\pm}^{(d)}\right)^{d-1}\right]k_B\,. \tag{100}$$

在严格热力学极限 (46) 下，我们观察到 $\omega_{D\pm} \to \omega_{D0}^{(d)}$，因此

$$C_{\pm}^{(d)} \left(T \gg \theta_{\pm}^{(d)},\ L \to \infty \right) = \frac{\kappa_0^{(d)} \omega_0^{(d)}}{d} k_B \,. \tag{101}$$

对于三维情形，结果（101）化为通常的杜隆-珀蒂定律。对于 d 的一般取值，方程（100）给出了杜隆-珀蒂定律针对任意维数有限固体的修正。

VIII. 最后评论

在本研究中，我们基于点计数与球面截面体积之间的联系，运用直观的形式体系探讨了韦尔定律及其拓展。在若干已发表的研究中，计数函数强烈依赖于相关区域，而相应的晶格保持不变。我们的方法则固定区域并对晶格进行缩放。我们重新推导了已知结果，展现了该方法的稳健性。此外，我们还获得了新的结果，包括对 d 维韦尔猜想的修正、偏振的影响，以及对面积项在三维情形中作用的探讨。我们还研究了此前结果的应用，并对有限空腔中的电磁场以及有限固体中的声学扰动进行了准热力学分析。

在半经典处理下，将该形式体系应用于有限盒中电磁扰动的热力学和准热力学，得出了 d 维斯特藩-玻尔兹曼定律的修正，并讨论了偏振和边界效应。特别是，我们证明，众所周知的面积项抵消现象只发生在三维中。这一效应使 $d \neq 3$ 的系统热力学呈现出不同的特征。文中还讨论了系统最小能量带来的修正。在三维情形以外的所有情况下，准热力学校正都会抑制最小能量可能产生的影响。

关于电磁场准热力学的二维结果可与实验装置联系起来。事实上，对 $d = 2$ 中热辐射的分析可用于描述单层材料（也称为“二维材料”），其中包括石墨烯、各种二硫属化物的单层以及复合氧化物[11]。 [26], 中关于二维热辐射的结果经本研究改进后，已被用于 [12] 研究石墨烯晶体管的发射光谱。

关于三维腔体中的电磁场，文献中有一些讨论涉及面积项的抵消。我们认为，这一争议源于对偏振如何影响展开式（34）中各项的处理不当。例如，在 [1] 中，假设偏振对展开式（34）的所有项产生相同影响，因此面积项并未抵消。我们在方程（45）中的结果表明，这种处理方式并不恰当。从实验角度看，三维设置中的面积项抵消意味着修正量 [9]非常小。因此，其他效应（如散射和衍射）可能会掩盖这一修正。事实上，虽然 [45] 中的结果与方程（55）所示的负修正值相符，但其他实验则表明修正项为正值 [46]。

此外，我们认为，三维系统并非最适合用于观测与电磁辐射的韦尔猜想相关效应的设置。我们的结果表明，实现这一目标的更好方法是采用二维有效系统。这类系统可以通过使用单层或纳米结构石墨烯器件来构建，以模拟二维黑体 [12, 47]。

所建立形式体系的另一项主要应用涉及声学扰动热力学。本文研究了有限固体德拜模型的改进版本。我们在低温极限下重现了三维情形的已知结果，并将这些结果推广至任意维度。我们探讨了高温情形的新进展以及面积项的影响，并拓展了关于德拜温度和杜隆-珀蒂定律的已知公式。

本文提出的理论发展捕捉到了与内部自由度（例如自旋）相关的一些效应。事实上，与自旋相关的宏观效应体现在场的偏振上。考虑电磁扰动时，这一点会更加直观。在这种情况下，光子自旋的两个取值（或者更准确地说，光子螺旋度的两个取值）可以与经典场的两种偏振对应起来。对于声学扰动，问题则更为微妙 [48]。在理想的各向同性介质中，考虑长波长模式时，可以将纵向偏振模式与自旋为零的声子对应起来，并将横向偏振模式与自旋为一的声子对应起来。一般而言，只要新的内部自由度不改变特征值问题 [, 即亥姆霍兹方程 (1)], 就可以将其纳入本文提出的方法中。具体做法是增加第 IV 节中对模式所进行的重数计数。

关于韦尔定律推广中任意边界条件的分析，涉及 d 维拉普拉斯算子的所有自伴扩张，目前仍在进行中。事实上，据我们所知，对于如此一般的情形，尚无韦尔猜想。我们认为，本文提出的基于对晶格进行重标度的计数函数方法，可能是解决这一问题的重要一步。本文工作的进一步发展可包括将所提出的形式体系应用于引力系统。此外，还可以考察面积项对卡西米尔效应的影响，并考虑具有有限温度的三维系统。预计后续研究将发表沿这些方向展开的分析。

附录A：与坐标轴相关的超体积

本文将介绍 d 维情形下与坐标轴相关的超体积计算。在正式计算之前，我们先明确推导过程中所用的符号和定义。

我们将 $\tilde{\Omega}_d$ 记为 d 维单位球的 2^d 个划分之一，即

$$\tilde{\Omega}_d \equiv \left\{(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_d) \in \mathbb{R}^d : 0 \leqslant \epsilon_i \leqslant 1 \text{ and } \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \cdots + \epsilon_d^2 \leqslant 1\right\} . \tag{A1}$$

此外，超平面 $\mathcal{H}_i$ 定义为

$$\mathcal{H}_i \equiv \left\{(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_d) \in \mathbb{R}^d : \epsilon_i = 0\right\} , \ i = 1, 2, \ldots, d . \tag{A2}$$

给定子集 $S \subset \mathbb{R}^d$ 的体积记为 $|S|$。例如，

$$\left|\tilde{\Omega}_d\right| = 2^{-d}\omega_d . \tag{A3}$$

利用集合 $\tilde{\Omega}_d$ 以及在方程 (A1) 和 (A2) 中定义的 $\mathcal{H}_i$，构造 Ω_d 的子集 $\{\Pi_{i_1,\ldots,i_n}\}$：

$$\Pi_{i_1,\ldots,i_n} = \tilde{\Omega}_d \cap \mathcal{H}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{H}_{i_n} , \ 1 \leqslant i_n \leqslant d , \ 1 \leqslant n \leqslant d . \tag{A4}$$

子集 $\{\Pi_{i_1,\ldots,i_n}\}$ 的数量为 n^d。然而，其中一些子集相等，因为：(1) $\Pi_{i_1,\ldots,i_n}$ 在交换指标时具有对称性；(2) 对于 $i = j$，还满足幂等性质 $\mathcal{H}_j \cap \mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i$。因此，不同集合的数量为

$$\#\Pi_{i_1,\ldots,i_n} = \binom{d}{n} = \frac{d!}{n!\,(d-n)!} . \tag{A5}$$

每个由 n 个指标标记的子集 $\{\Pi_{i_1,\ldots,i_n}\}$，都可以解释为由不同坐标轴在 $\mathbb{R}^{d-n}$ 中生成的球面的截面。例如，若 $d = 3$,

$$(n=1)\begin{cases}\Pi_1 = \Omega_2 \text{ generated by } \epsilon_2 \text{ and } \epsilon_3\\ \Pi_2 = \Omega_2 \text{ generated by } \epsilon_1 \text{ and } \epsilon_3\\ \Pi_3 = \Omega_2 \text{ generated by } \epsilon_1 \text{ and } \epsilon_2\end{cases}, (n=2)\begin{cases}\Pi_{12} = \Omega_1 \text{ generated by } \epsilon_3\\ \Pi_{13} = \Omega_1 \text{ generated by } \epsilon_2\\ \Pi_{23} = \Omega_1 \text{ generated by } \epsilon_1\end{cases}, (n=3)\,\{\Pi_{123} = (0,0,0) . \tag{A6}$$

采用符号 $\Pi_{i_1,\ldots,i_n}$，n 表示未包含在子集构造中的坐标轴数量。

给定一个区段 $\Pi_{i_1,\ldots,i_n}$，可以定义一个柱体 $\mathcal{C}^I$：对每个未包含的坐标轴，在 $\Pi_{i_1,\ldots,i_n}$ 上添加一个形如 $I = [a, b]$ 的区间，

$$\mathcal{C}^I_{i_1,\ldots,i_n} = \Pi_{i_1,\ldots,i_n} \times \underbrace{I \times I \times \cdots \times I}_{n} . \tag{A7}$$

应当注意，对于 n 的每个取值，都有 $\binom{d}{n}$ 个体积相同的不同柱体 V_d^n，其中

$$V_d^n \equiv \left|\mathcal{C}^I_{i_1,\ldots,i_n}\right| = |I|^n \left|\Pi_{i_1,\ldots,i_n}\right| = |I|^n 2^{n-d}\omega_{d-n} . \tag{A8}$$

利用前面的结果，可以确定坐标轴对总体积的贡献。考虑用区间 $I = \left[-\frac{\epsilon}{2}, 0\right]$ 构造的柱体 $\mathcal{C}^I$ 的体积，我们得到

$$\text{Hypervolume of the axes} = \sum_{n=1}^{d}\binom{d}{n}V_d^n = \sum_{n=1}^{d}\binom{d}{n}\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^n 2^{n-d}\omega_{d-n} = \sum_{n=1}^{d}\binom{d}{n}2^{-d}\omega_{d-n}\epsilon^n . \tag{A9}$$

附录 B：计数函数

下面来看如何由狄利克雷情形的计数函数构造诺伊曼计数函数，反之亦然。我们先将诺伊曼模态排列成 $d+1$ 类，分别标记为 $j=0$、1、.....、d。第一类由所有 n_i 均非零的模态组成。第二类由仅有一个 n_i 为零的模态组成。第三类中有两个 n_i 为零。按照这种方式继续，直到 $d+1$ 组。

根据对诺伊曼模态提出的划分，我们注意到，所有 n_i 均不为零的那一类，是 d 维狄利克雷问题的解，其中必须排除所有满足 $n_i=0$ 的模式。只有一个 n_i 为零的那一类，还可以进一步划分为 d 个子类，其中 $n_1=0$，或 $n_2=0$，等等。因此，在这些子类中的每一个子类里，忽略为零的 n_i，我们得到由 $d-1$ 维狄利克雷解组成的子类。两个 n_i 为零的那一类，可以划分为 $\binom{d}{2}$ 个子类，这些子类由满足 $d-2$ 维狄利克雷边界条件的模式组成。继续这一过程，诺伊曼问题的解可以写成所构造子类中各元素的组合：

$$N_+^{(d)}(\epsilon)=\sum_{j=0}^{d}\binom{d}{j}N_-^{(d-j)}(\epsilon)\ . \tag{B1}$$

另一方面，我们知道，狄利克雷问题的解与诺伊曼问题的解不同，它们不包含模式 $n_i=0$，因此两者解的数量之差为

$$N_+^{(d)}-N_-^{(d)}=\sum_{n}(\#\text{ Dirichlet solutions formed by }n\text{ different axes})\,. \tag{B2}$$

由于有 d 个坐标轴，每组 n 个坐标轴在狄利克雷解中都有$\binom{d}{n}$ 的简并度，因此

$$N_+^{(d)}-N_-^{(d)}=\sum_{n=0}^{d-1}\binom{d}{n}N_-^{(n)}\,. \tag{B3}$$

将 $N_-^{(d)}$ 代入求和式 (B3)，得到关系式 (B1)。

将方程 (B1) 写成如下形式，即可得到其逆关系

$$N_+^{(i)}=\sum_{j=0}^{d}P_j^iN_-^{(j)}\ ,\ P_j^i=\begin{cases}\binom{i}{j}, & j\le i\\ 0 & j>i\end{cases}\ ,\ i,j=0,1,2,...,d\ . \tag{B4}$$

三角矩阵 P 为　　称为帕斯卡矩阵。它是可逆的，因为 $\det P=1$，其逆矩阵为　　y

$$\left(P^{-1}\right)_j^i=\begin{cases}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}, & j\le i\\ 0, & j>i\end{cases}\ . \tag{B5}$$

因此，我们可以由方程 (B4) 求出 $N_-^{(d)}$，得到

$$N_-^{(d)}=\sum_{n=0}^{d}(-1)^{d-n}\binom{d}{n}N_+^{(n)}. \tag{B6}$$

致谢

L. F. S. 感谢高等教育人员提升协调局（CAPES）——巴西及财务代码001的支持；并感谢巴拉那州基金会（巴西巴拉那州科学与技术发展支持基金会）。M. A. J. 感谢高等教育人员提升协调局（CAPES）——巴西提供财务支持，财务代码为001。本文是提交给《物理学杂志A》的稿件版本，尚未经同行评审或编辑。IOP Publishing Ltd 对此版本的稿件或由其衍生的任何版本中的错误或遗漏概不负责。正式出版版本可在线查阅：https://doi.org/10.1088/1751-8121/acb09b。

[1]V. Maslov，斯特藩-玻尔兹曼定律的准热力学校正，《理论与数学物理》154，175（2008）。arXiv:0801.0037
[2] 2011 1 10 1017 9781139058087 J. W. Strutt，《声音理论》（剑桥大学出
[3] 2011 2 10 1017
版社，），第 卷。DOI：。/CBO J. W. Strutt，《声音理论》（剑桥大学出版社，），第 卷。DOI：。/CBO 9781139058094
[4] W. Arendt、R. Nittka、W. Peter 和 F.
Steiner，韦尔定律：数学与物理学中拉普拉斯算子的谱性质，载于《演化、信息与复杂性的数学分析》（Wiley-VCH；第1版，Wheinheim，2009），第1-71页。
DOI: 10 1002 9783527628025 1 。/。ch V. Ivrii，韦尔定律的 年，《数学科学通报》
[5] 100
6, 379 2016 1608 03963 （）。arXiv:。R. Balian 和 B. Duplantier，理想导体附近的电磁波。I. 多
[6]
重散射展开。模态分布。《物理年鉴》 **104**, 300 1977 10 1016 0003 4916 77 90334 7 （）。DOI：。/-（）- R. Balian 和 C.
[7]
Bloch，有限区域中波动方程本征频率的分布。I. 具有光滑边界曲面的三维问题，《物理年鉴》
60, 401 1970 10 1016 0003 4916 70 90497 5 （）。DOI：。/-（）- R. Balian 和 C. Bloch，有限
[8]
区域中波动方程本征频率的分布。II. 电磁场。黎曼空间，《物理年鉴》
64, 271 1971 10 1016 0003 4916 71 90286 7 （）。DOI：。/-（）- H. P. Baltes 和 H. Baltes，《有限空腔中的
[9] 1972
热辐射》（苏黎世联邦理工学院，苏黎世，）。DOI:
10 3929 000086038 。/ethz-a- B. H. Liu、D. C. Chang、
[10]
M. T. Ma，《混响室的本征模与复合品质因数》（美国国家标准局，华盛顿， 1983 10 6028 1066 ）。
DOI：。/NBS.TN。K. S. Novoselov、D. Jiang、F. Schedin 和 A. K. Geim.，[11]二维原子晶体，美国国家科学院院刊
102, 10451 2005 10 1073 0502848102 （）。DOI：。/pnas。M. Engel、M. Steiner、A. Lombardo、A. C. Ferrari、H. V. Löhneysen、P.
[12]
Avouris 和 R. Krupke，微腔控制石墨烯晶体管中的光-物质相互作用，《自然·通讯》
3, 906 2012 10 1038 1911 （）。DOI：。/ncomms。M. C. Baldiotti、W.
[13]
S. Elias、C. Molina 和 T. S. Pereira，量子光子球的热力学，《物理评论D》 **90**, 104025 2014 1410 1894 （）。arXiv:。G. Penington，纠缠楔重建
[14]
与信息悖论，《高能物理学杂志》2020，2（2020）。arXiv:1905.08255[15] S. Ali、M. A. Kamran 和 M. U. Khan，霍金辐射作用下旋转BTZ黑洞的熵变。《物理学纪事》 **97**, 045005 2022 2012 08136 （）。arXiv:。A. M. García-García，黑体辐射定律的有限尺寸修正，《物理评论A》78，023806（2008）。
[16]
arXiv:0709.1287[17] 2004 0849324394 Y. R. Young，声致发光（CRC出版社，）。ISBN：V. Cardoso、
[18]
M. Cavaglià 和 L. Gualtieri，高维非旋转黑洞的引力子霍金辐射，《高能物理学杂志》 **2006**, 02 2006 0512116 （）。
arXiv:hep-th/ E. Abdalla、B. Cuadros-Melgar、A. B. Pavan 和 C. Molina，[19]膜黑洞的稳定性与热力学，《核物理B》
752, 40 2006 0604033 （）。arXiv:gr-qc/ R. Jorge、E. S. Oliveira 和 J. V. Rocha，高维旋转黑洞的灰体因子，《经典与量子引力》
[20]
32, 065008 2015 1410 4590 （）。arXiv:。R. Maartens 和 K. Koyama，膜世界引力，《相对论活评论》
[21]
13, 5 2010 1004 3962 （）。arXiv:。M. C. Baldiotti、R. Fresneda 和
[22]
C. Molina，热力学的哈密顿方法，《物理年鉴》373，245（2016）。arXiv:1604.03117[23] M. C. Baldiotti、R. Fresneda 和 C. Molina，反德西特黑洞热力学的哈密顿方法，《物理年鉴》 **382**, 22 2017 1701 01119 （）。arXiv:。W. S. Elias、C. Molina 和 M. C. Baldiotti，反德西特时空中玻色系统的热
[24]
力学，《物理评论D》 **99**, 084028 2019 1803 05921 （）。arXiv:。W. B. Fontana、M. C. Baldiotti、R. Fresneda 和 C. Molina，施瓦西-反德西
[25]
特黑洞的扩展准局域热力学，《物理年鉴》 **411**, 167954 2019 1806 05699 （）。arXiv:。H. Kim、S. C. Lim 和
Y. H. Lee，二维热辐射的尺寸效应，《物理快报A》375，2661（2011）。DOI: 10 1016 2011 05 051 。/j.physleta.。。P. Suppes，《公理集
[26] [27]
合论》（多佛出版社，纽约， 1972 0486616304 ）。ISBN：R. L. Graham、D. E.
[28]
Knuth 和 O. Patashnik，《具体数学：计算机科学基础》（Addison-Wesley， 1994 0201558025 ）。ISBN：E. Grosswald，《整数表示为平
[29]
方和》（施普林格出版社，纽约，1985）。DOI:10.1007/978-1-4613-8566-0
[30] 1976 3411014911 H. P. Baltes 和 E. R. Hilf，《有限系统
[31]
的谱》（曼海姆：BI科学出版社，）。ISBN：V. Ivrii，带边界流形上拉普拉斯-贝尔特拉米算子的谱渐近展开第二项，《泛函分析及其应用》
14, 98 1980 10 1007 01086550 （）。DOI：。/BF F. H. Brownell，
[32]
n **6**, 维空间中有界区域的扩展渐近本征值
119, 1957 24900616
分布，《应用数学与力学杂志》（）。https://www.jstor.org/stable/[33] S. Hacyan、R. Jáuregui 和 C.
Villarreal，矩形腔体中量子电磁涨落的谱，《物理评论A》 **47**, 4204 1993 10 1103 47 4204 （）。DOI：。/PhysRevA.。A. A.
[34]
Actor，受限量子气体，《物理评论D》 **50**, 6560 1994 10 1103 50 6560 （）。DOI：。/
28, 1430004 2014
[35]
PhysRevD.。A. L. Kuzemsky，统计物理学中的热力学极限。《国际现代物理学杂志B》，（）。arXiv:1402.7172

[36]D. A. Hill，《腔体中的电磁场：确定性与统计理论》（John Wiley & Sons，2009）。ISBN:0470465905[37] H. Baltes、F. Kneubühl，黑体辐射理论中依赖表面积的修正，《Opt. Commun.》**4**，9（ 1971 10 1016 0030 4018 71 90116 7 ）。DOI: 。 / - ( ) - P. Landsberg 和 A. De Vos， n 维空间中的斯特藩–玻尔兹曼常数。《J. Phys. A Math. Gen.》**22**，1073（ 1989 10 1088 0305 4470 22 8 021 ）。DOI: 。 / - / / / H. Alnes、F. Ravndal 和 I. Wehus，额外维度下的黑体辐射，《J. Phys. A: Math. Theor.》**40**，14309（ 2007 0506131 ）。arXiv:quant-ph/ V. Menon 和 D. Agrawal，关于《n维空间中的斯特藩–玻尔兹曼常数》的评论，《J. Phys. A Math.》**31**，1109 1998 10 1088 0305 4470 31 3 ( )。DOI: 。 / - / / /[41] M. Dupuis、R. Mazo 和 L. Onsager，低温下各向同性固体的表面比热，《J. Chem. Phys.》 **33**, 1452 1960 10 1063 1 1731426 ( )。DOI: 。 / . E. W. Montroll，低温热容中的尺寸效应，《J. Chem. Phys.》 **18**, 183 1950 10 1063 1 1747584 ( )。DOI: 。 / . P. Brass、W. Moser 和 J. Pach，《离散几何研究问题》（Springer Science & Business Media，）。ISBN:978-0-387-23815-9 [44] n **43**, 308 1975 10 1119 1 9859 A. A. Valladares，维度中的德拜模型。《Am. J. Phys.》（）。DOI: 。 / . T. J. Quinn 和 J. E. Martin，辐射测定斯特藩–玻尔兹曼常数及 -40° $+100^\circ$ **316**, 85 1985 10 1098 1985 0058 C 至 C 之间的热力学温度。《Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A》（）。DOI: 。 /rsta. 。 R. U. Datla、M. C. Croarkin 和 A. C. Parr，在美国国家标准与技术研究院低背景红外校准设施进行的低温黑体校准。《J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.》**99**，77（1994）。DOI: 10 6028 099 008 . /jres. 。 T. Matsumoto、T. Koizumi、Y. Kawakami、K. Okamoto 和 M. Tomita，石墨烯纳米结构产生的完美黑体辐射及其在高温光谱发射率测量中的应用，《Opt. Express》**21**，30964（2013）。DOI: 10 1364 21 030964 . /OE. 。A. T. Levine，关于声子自旋的一则说明，《Il Nuovo Cimento》**26**，190（1962）。DOI:10.1007/BF02754355