arXiv:2301.03633v2 [math.AP] 1 Jan 2025

玻色子玻尔兹曼–诺德海姆方程中三波碰撞算子线性化的平滑性质

Jogia Bandyopadhyay*, Jani Lukkarinen[a]

[a]赫尔辛基大学数学与统计学系 *ics*

摘要

我们研究包含正常流体和凝聚体的非平衡态中，弱相互作用玻色子三维流体的动理学理论。更具体地说，我们考察此前针对这类系统提出的非线性玻尔兹曼–诺德海姆方程，该系统处于空间均匀且动量分布各向同性的状态；我们围绕含有凝聚体的平衡态对方程进行线性化。针对超临界初始数据，我们研究线性化算子中源自三波碰撞算子的最奇异部分。该算子具有两类奇异性，其中一类类似于由符号 $\ln(1+p^2)$ 定义的边际平滑算子。在此背景下，我们的主要结果是：对于满足 H¨older 型条件、属于某个巴拿赫函数空间的初始数据，至少在有限时间内，由线性化算子决定的演化能够提升 H¨older 正则性。这个问题的主要难点在于，线性算子中同时存在点奇异性和线奇异性；为了完成分析，我们必须使用经过精细设计的函数空间。

关键词:
含凝聚体的玻色流体、Boltzmann–Nordheim 动力学方程、三波碰撞算子、柯西问题、解的平滑性、H¨older 正则性、 L^2 中的压缩半群

1. 引言

冷量子流体中一个在实验上已被观察到、同时也得到广泛理论研究的现象是玻色凝聚：大量流体粒子形成凝聚体，其力学性质与同一流体在较高温度下的性质截然不同。例如，凝聚体的阻力可能消失。关于这一主题已有许多著作，例如，Griffin、Nikuni 和 Zaremba 对包括部分凝聚物理学在内的研究成果进行了最新综述 [10]。

从数学上看，研究玻色凝聚颇具挑战；即使是理想玻色气体相应平衡态的定义，也需要付出一定努力（参见例如 [1] 第 5.2.5 节）。对于相互作用的玻色气体，关于凝聚的严格结果直到最近才开始出现。这些结果主要涉及完全凝聚或零温情形，此时所有可用粒子都处于凝聚体中 [12, 13]。在平均场极限下，该系统可以由一个因子化态（即粒子之间不存在关联）很好地描述，该态由单个波函数决定，其动力学遵循 Gross-Pitaevskii 方程 [6]。

据我们所知，除带有完全凝聚的平均场极限外，目前尚无关于非平衡态动力学的严格结果。在凝聚态物理中，研究玻色量子流体时间演化时常用的一种工具是玻色 Boltzmann-Nordheim 方程（也称 Uehling-Uhlenbeck 方程）。该方程描述粒子的“相空间”密度 $f(r,\ v,\ t) \geq 0$ 的演化，其中 $r \in \mathbb{R}^3$ 表示位置， $v \in \mathbb{R}^3$ 表示速度， $t \geq 0$ 表示时间，使得

$$\partial_t f(r,v,t) + v \cdot \nabla_r f(r,v,t) = C_4[f(r,\cdot,t)](v)\,. \tag{1.1}$$

*通讯作者电子邮箱： jogiab@gmail.com (Jogia Bandyopadhyay)、 jani.lukkarinen@helsinki.fi (Jani Lukkarinen)

碰撞算子定义为

$$C_4[h](v_0) = 4\pi \int_{(\mathbb{R}^3)^3} \mathrm{d}v_1 \mathrm{d}v_2 \mathrm{d}v_3 \, \delta(v_0 + v_1 - v_2 - v_3)\delta(\omega_0 + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \left[\tilde{h}_0 \tilde{h}_1 h_2 h_3 - h_0 h_1 \tilde{h}_2 \tilde{h}_3\right], \tag{1.2}$$

其中 $\delta(\cdot)$ 表示狄拉克 δ-分布：第一个只是卷积积分的简写记号，第二个则确保“碰撞”中动能守恒；我们还使用了以下简写记号

$$h_j = h(v_j), \quad \tilde{h}_j = 1 + h_j, \quad \omega_j = E_j^{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} v_j^2 . \tag{1.3}$$

正如我们在第1.1节和附录 A 中所讨论的，含有凝聚态密度 $\bar{n} > 0$ 的平衡解的适当缩放扰动 ψ_t 的演化，主要由某个三波碰撞算子的线性化所决定。由此得到演化方程

$$\frac{d}{dt}\psi_t = -\bar{n} L_3 \psi_t, \tag{1.4}$$

其中，算子 L_3 对于具有足够正则性且当自变量接近原点或趋于无穷时表现不过于异常的函数 ψ，定义如下：

$$L_3\psi(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}y \, K_3(x,y)(\psi(x) - \psi(y)), \tag{1.5}$$

$$K_3(x,y) = 4\bar{h}(x)^2 xy \mathrm{e}^{-\min(x,y)} f_{\mathrm{BE}}(|x-y|) \tilde{f}_{\mathrm{BE}}(\max(x,y)) \, \tilde{f}_{\mathrm{BE}}(x+y) \left(1 + \mathrm{e}^{-\max(x,y)}\right), \tag{1.6}$$

$$\bar{h}(x) = \left(x^{5/2} f_{\mathrm{BE}}(x) \tilde{f}_{\mathrm{BE}}(x)\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad f_{\mathrm{BE}}(x) := \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}. \tag{1.7}$$

积分核 K_3 有两类奇异性：当 $x \to 0$ 时，边界处存在“点奇异性”；当 $x \to y$ 时，则存在 $1/|x-y|$ 型“线奇异性”。对于在 $x \to 0$ 和 $x \to \infty$ 处衰减足够快的 $C^{(1)}$-函数，定义积分绝对收敛，但尚不清楚解是否能保持这些性质。

本文澄清了关于演化方程 (1.4) 的两个问题。首先，对于满足 H¨older 连续性的函数 ψ，我们通过积分 (1.5) 定义算子 L_3 的作用，并引入一种权函数以确保积分绝对收敛。随后，我们证明该算子在某个加权 L^2-空间中是非负的，并证明它在此空间上有唯一的 Friedrichs 扩张，使之成为自伴非负算子。该算子的核是一维的，并且我们证明它具有谱隙。因此，自伴算子生成的半群在零子空间的正交补中是压缩的。

随后，我们研究杜哈梅尔积分演化方程的逐点解；如果差函数$\Delta_t(x, \ y) := \psi_t(x) \ - \psi_t(y)$ 具有足够的正则性，它们就应满足该方程。对于初始数据，只要从满足 H¨older 型条件的函数所构成的某个加权巴拿赫空间中选取，便可保证其具有足够的正则性。对于这些初始数据，我们在该巴拿赫空间中得到差方程的唯一解。然而，为了证明平滑性，我们还必须证明由此得到的解实际上是形如 $\psi_t(x) \ - \psi_t(y)$ 的差函数。困难在于核中存在线奇异性，因此除非对差函数有某种控制，否则无法直接求解方程 (1.4)。为解决这一问题，对于类似的 H¨older 初始数据，我们研究了一个关于差函数的演化方程版本，其中线奇异性经过了正则化。我们得到了杜哈梅尔积分正则化方程的唯一解，这些解同时也是差函数；接着取极限以去除正则化，并证明在该极限下，差函数与先前得到的 Δ_t 解完全相同。最后，我们证明，对于我们这类 H¨older 初始数据，原问题正则化版本的逐点解与由 L^2-半群给出的演化方程 (1.4) 的解一致。我们针对 Δ_t 解证明的结果进而表明，在有限时间内，时间演化几乎处处改善 H¨older 正则性。这也表明，至少对于足够正则的初始数据，该半群具有平滑性。

研究上述线性化算子时，主要的技术难点在于，演化方程存在两个相互竞争的奇异性，其中与平滑相关的奇异性处于临界状态。因此，我们必须

格外谨慎地定义函数空间，使其在至少一段有限时间内保持演化不变。

为说明这一点，我们先考虑由 $-L_0$ 生成的半群，其中 L_0 表示 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上与傅里叶空间中乘以 $\ln(1+p^2)$ 相对应的正算子。显式计算表明，该算子作用于施瓦茨函数时为 $\int \mathrm{d}y\, K(x,\ y)(\psi(x)\ -\psi(y))$，其中积分核 K 具有与 L_3 相同的线奇异性 $1/|x-y|$。于是，当 $t \geq 0$ 时，半群算子 e^{-tL_0} 在傅里叶空间中对应于乘以 $(1+p^2)^{-t}$，因此该半群只能缓慢地平滑解：它将索博列夫空间 H^s 映射到 H^{s+2t}，对任意 s 均成立。这种行为不同于拉普拉斯算子半群的标准情形；后者的符号为 e^{-tp^2}，因而能立即产生光滑函数。事实上，后文将会说明，在变量替换使线性化算子作用于带权 $L^2(\mathbb{R})$ 空间之后，本例中的线性化算子与 V_0L_0 十分相似，其中 V_0 表示乘以 $\mathrm{e}^{-u/2}$ 的算子，$u \in \mathbb{R}$。然而，这个空间过大，无法直接用于研究完整的非线性问题。例如，它包含无限质量的非物理解；要使非线性碰撞积分有意义，还需要一定的正则性。

我们最初研究这个问题的动机，是完成一项非线性扰动论证；当时显然需要线性化半群具备某种平滑性质，以控制演化。事实上，Escobedo 等人已在一系列论文和预印本中开展了这一研究计划 [2, 7, 8]。[7] 考察了一个可显式处理的线性化算子的渐近版本，其中的解通过格林函数方法生成，从而得到一个积分公式，其中可控的核作用于足够正则的初始数据。对核的控制导出了相应的估计，与我们在此证明的平滑性质相符。

最近，预印本 [8] 研究了完整的线性化算子，其中演化方程 (1.4) 的解通过对 [7] 中导出的核函数进行扰动论证而生成。文中没有讨论唯一性及可能的半群性质。因此，本研究至少在 L^2 空间的意义下给出了部分答案。由于线性化算子的显式形式与 (1.5) 中的形式略有不同，我们在附录 A 中说明了如何通过变量替换将二者联系起来。

现在简要介绍本文其余部分的组织结构。如前所述，我们在加权 L^2 空间以及某个巴拿赫空间中研究线性化问题。因此，同时考虑到巴拿赫空间中的分析更为复杂，且结构在某种程度上相对独立，将我们的分析分别放在两个章节中进行似乎是很自然的。于是，第 2 节专门讨论加权 L^2 空间中的问题。我们首先定义算子 L_3 的 Friedrichs 扩张，以及一列记为 L_3^{ε}的正则化近似算子。接着，我们证明这些弗里德里希斯扩张算子生成压缩半群，并证明相应半群解的一些性质。最后，我们证明本节最重要的结果，即定理 2.5；该定理表明，与逼近算子相对应的半群解收敛于原算子的 L^2 解。第 2.1 小节给出 Friedrichs 扩张的定义，并证明相应半群的存在性。第 2.2 小节则专门讨论上述收敛结果及其前置引理。第 2.2 小节中引理的证明依赖于在巴拿赫空间中得到的一些结果。这不会导致论证循环，因为我们的巴拿赫空间结果独立于本小节中得到的结果。为强调这一点，每当我们需要在第 2 节中使用任何巴拿赫空间结果时，都会明确指出。

第 3 节包含了所有关于巴拿赫空间的结果。定理 3.3 在某个二元函数巴拿赫空间中给出了一个存在唯一性结果，从而得到 H¨older 正则性。随后我们证明，至少在某个有限时间内，这些函数可以与第 2 节中得到的 L^2 解的差相对应。为此，我们首先必须针对正则化近似算子证明定理 3.4 和命题 3.5 等结果。主要平滑性结果定理 3.2 是我们关于巴拿赫空间的结果和定理 2.5 的直接推论。

本节余下部分将讨论线性化三波碰撞算子的物理联系及其推导。该推导所需的计算细节见附录 A。

1.1. 非线性问题的物理动机与所提出的线性化

玻尔兹曼–诺德海姆方程(1.1)–(1.2)尚未从玻色量子系统的演化中得到严格推导，但以下猜想可以从 [16]中的讨论推广而来。考虑玻色福克空间上的一个平移不变准自由初态，该初态由二点相关函数 $g_0(r_1-r_2)$确定

其中 g_0 是一个快速衰减函数。假设 N粒子动力学由具有弱两体相互作用的哈密顿量给出， $H_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} p_i^2 + \lambda \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(r_i - r_j)$， $0 < \lambda \ll 1$。如果 V局域性良好，且$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}r\, V(r) = 1$，那么在时间 $O(\lambda^{-2})$以内，除小修正外，该态应保持平移不变且准自由，并且时间演化后二点函数的傅里叶变换的以下极限应存在：$\hat{g}_t(v)|_{t=\lambda^{-2}\tilde{t}} \to W(v, \tilde{t})$，当 $\lambda \to 0^+$时，对任意不过大的 $\tilde{t} \geq 0$均成立。此外，该极限应能由方程$\partial_t W(v, t) = C_4[W(\cdot, t)](v)$的解良好近似，其初始数据为 $W(v, 0) = \hat{g}_0(v)$。（在 [16], 中，出于技术原因，仅考虑该问题的离散化版本。上述猜想是其中玻色情形“$\theta = 1$”下猜想5.1的推广。）

尽管目前这一猜想尚未得到证明，但它基于一种微扰展开，而这种展开已成功应用于一个相关问题：离散非线性薛定谔方程的平衡态时间关联¨（该文第 2.3 节概述了它与上述猜想之间的联系），最近也应用于其连续版本 [3]。 [17] 中的证明在很大程度上依赖于一种类似于 $\sup_v |\hat{g}_0(v)| < \infty$ 的性质；在上述设定中，这一性质将是相关性在空间间隔较大时足够快衰减这一假设的推论。对于处于平衡态的临界理想玻色流体， $W(v)$等于临界玻色–爱因斯坦分布，并在 $v = 0$附近如 $|v|^{-2}$般发散。因此，这一条件在临界系统中不成立，人们有理由质疑微扰推导对于任何具有临界和超临界密度的系统是否有效。

如果 W是均匀且各向同性的，它仅依赖于 $x = \omega(v) = \frac{1}{2} v^2$，而 $f(x,t) := W(\sqrt{2x}\hat{e}_1, t)$ 的演化方程可改写为：对于 $x, t \geq 0$， $\partial_t f(x,t) = C_4[f(\cdot, t)](x)$，其中我们定义了（略微滥用记号，并忽略一个整体数值常数）：

$$C_4[f](x_0) := \frac{1}{\sqrt{x_0}} \int_{\mathbb{R}_+^2} \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3\, \mathbb{I}(x_1 \geq 0) \min_{j=0,1,2,3} \sqrt{x_j} \left[\tilde{f}_0 \tilde{f}_1 f_2 f_3 - f_0 f_1 \tilde{f}_2 \tilde{f}_3 \right], \tag{1.8}$$

其中 $x_1 = x_2 + x_3 - x_0$，且 $f_i = f(x_i)$。（为说明这种联系并非完全直接，针对施瓦茨函数情形的相关证明见 [20] 的附录 A。） Semikoz 和 Tkachev 在 [20], 中研究了该方程的数值解，并发现对于光滑但超临界的初始数据，解在 $x = 0$ 处发生有限时爆破。鉴于对奇异情形下微扰推导的疑虑，目前尚不清楚在奇异性形成后应如何延拓解。

一种可能是，微扰动力学论证变得不再适用，因此必须回到福克空间中的原始时间演化来解决这一问题。另一种可能是，并没有发生什么特别的事情，方程仍以其原始的（逐点）意义成立，只是将范围限制在 $x > 0$ 上。方程$\partial_t f = C_4[f], x > 0$，其中 $f(x, 0) \sim x^{-7/6}$，由 Escobedo、Mischler 和 Vel´azquez 在 [9] 中进行了研究。（数值 7 6 与波湍流的 Kolmogorov 理论有关 [4]。）他们证明了解在局部时间内存在，并保持了 $x^{-7/6}$ 奇异性。然而，这些解并不守恒粒子总质量（而微观动力学显然会守恒粒子总质量）。如果认为多出的质量是与凝聚体交换的，那么这种“扩展”解的方式就相当于将凝聚体质量作为额外自由度加入，而不对正常流体产生反作用。

Lu 在 [14, 15] 中研究了另一种推广。他考虑弱解，即正测度 $\mu_t(\mathrm{d}x)$，使得 $t \mapsto \mu_t$ 弱连续可微，且 $\partial_t \mu_t = C_4[\mu_t]$ 在分布意义下成立。 [14] 证明了此类解的存在性，并在第 1611 页定义了这些测度作为解的确切含义。在 [15] 中，他还证明可以选取这些解，使其同时守恒质量和能量，并在 $t \to \infty$ 时趋于物理上预期的平衡分布。即使在超临界情形下也会出现这种情况；研究还表明，此时部分总质量会凝聚到 $x = 0$（至少渐近地，在 $t \to \infty$ 时如此）。所有这些结果都是从正则化问题的近似解子序列中推导出来的，因此这些结果并未解决此类解的唯一性问题，也不适用于数值处理。

在 [20], Semikoz 和 Tkachev 提出了一种不同的方法，用于在凝聚体形成后继续求解。基于物理依据，他们假设解是如下形式的正测度： $f_{\mathrm{tot}}(x,t)\, \sqrt{x}\mathrm{d}x = f_{\mathrm{reg}}(x,t)\, \sqrt{x}\mathrm{d}x + n(t)\delta(x)\mathrm{d}x$，这相当于在原点 $v = 0 \in \mathbb{R}^3$ 处向 δ-分布中加入质量 $n(t) \geq 0$，并假定 $|v| > 0$只有正则分布。（平方根的由来可由恒等式 $v^2 \mathrm{d}|v| = \sqrt{2x}\mathrm{d}x$解释。）采用这一拟设，他们得到了如下形式的耦合方程

$$\partial_t f_{\mathrm{reg}}(t) = C_4[f_{\mathrm{reg}}(t)] + n(t) C_3[f_{\mathrm{reg}}(t)], \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} n(t) = -n(t) \rho[C_3[f_{\mathrm{reg}}(t)]], \tag{1.9}$$

其中 C_3 是一个新的碰撞算子，$\rho[f]$ 表示质量泛函。由于这些方程涉及 $n(t)$，其解与 [9]中研究的奇异解并不相同。研究者再次通过数值方法求解这些方程，并在 [20]中发现解趋向于预期的平衡态。然而，即使这组方程从物理角度来看也存在一些问题：它没有解释凝聚体如何形成（如果 $n(0) = 0$，那么它在所有时刻都保持为零）；对于正则函数 f，可以证明 $\rho[C_3[f]] \geq 0$，因此似乎 $n(t)$ 只能减小。Spohn 在 [21], 中对该拟设进行了更详细的分析；他还证明，若 $f_{\mathrm{reg}}(x,t) \simeq a(t)x^{-1}$，如临界平衡分布的情形，那么第二个方程等于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}n(t) = -n(t)(2\rho[\sqrt{x}f_{\mathrm{reg}}(x,t)] - c_0 a(t)^2)\,, \quad \text{with } c_0 = \frac{1}{3}\pi^2\,. \tag{1.10}$$

因此，临界的 f_{reg} 是稳态解，并且正则流体与凝聚体之间可以发生任意方向的质量交换。此计算以及 [9] 中的计算清楚地表明，对于奇异数据，必须谨慎明确玻尔兹曼方程的含义。

本文研究上述演化方程的一种微小修改；原则上，在该修改下，凝聚体可以自由地产生和消失。对于正则部分，我们仍采用之前相同的方程，但不尝试为 $n(t)$ 建立微分方程。相反，受 Lu 的结果启发，我们要求质量在所有时刻严格守恒，并以此定义 $n(t)$。我们的目标是研究稳态解附近三波碰撞算子 C_3 的线性化。为此，我们考虑存在凝聚体时玻色流体在时刻 t的完整分布函数，它由测度 $\mu_t^{\mathrm{tot}}(\mathrm{d}x) = f_{\mathrm{reg}}(x,\ t)\,\sqrt{x}\mathrm{d}x + n(t)\,\delta_0(\mathrm{d}x)$ 在 $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ 上给出。这里，δ_0 表示集中在 $x = 0$处的单位测度，而 f_{reg} 表示定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的函数，具有有限质量和能量，分别由以下泛函定义

$$\rho[f] := \int_0^\infty \mathrm{d}x\,\sqrt{x}f(x), \quad e[f] := \int_0^\infty \mathrm{d}x\,\sqrt{x}xf(x)\,.$$

将凝聚体的贡献计入后，总质量和能量定义如下

$$M(t) = \rho[f_{\mathrm{reg}}(t)] + n(t)\,, \quad E(t) = e[f_{\mathrm{reg}}(t)]\,.$$

总结一下目前所采用的约定：为了得到原三维 Boltzmann-Nordheim 方程中的“密度”，我们使用“ $f(r,v,t)\,\mathrm{d}v$” = $\sqrt{2}\mu_t^{\mathrm{tot}}(\mathrm{d}(v^2/2))\mathrm{d}\Omega$，其中 $\mathrm{d}\Omega$ 表示对 v角变量的标准积分。这里缩放因子 $\sqrt{2}$的存在保证了“ $\tilde{f}(r,v,t)\,\mathrm{d}v$” = $\sqrt{2}\tilde{\mu}^{\mathrm{tot}}(\mathrm{d}(v^2/2))\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{with}\tilde{\mu}^{\mathrm{tot}}(\mathrm{d}x) := (1 + f_{\mathrm{reg}}(x,t))\ \sqrt{x}\mathrm{d}x + n(t)\delta_0(\mathrm{d}x)$.

假设 初始数据由 $n(0) = n_0 \geq 0$ 和 $f_{\mathrm{reg}}(x,0) = f_0(x)$确定，其中 $f_0 \geq 0$ 适当地正则。在特 别地，我们假设

$$e_0 := e[f_0], \quad \rho_0 := \rho[f_0]$$

是有限的。若 $e_0 = 0$，则 $f_0 = 0$ 几乎处处成立；定义 $f_{\mathrm{reg}}(x,\ t) = 0$、 $n(t) = n_0$，便可得到一个解，对应于完全凝聚。这里不关注这种情形，只需指出，这与先前关于完全凝聚的结果一致：Gross-Pitaevskii 方程的均匀解是模长为常数的波函数，因此其粒子密度不会随时间变化。

因此，我们假设 $e_0 > 0$ 且同时满足 $\rho_0 > 0$。对于这类初始数据，在弱相互作用下，人们从物理上预期系统会弛豫至一个非常接近自由粒子平衡分布的平衡分布。正如引言中所述，人们认为玻尔兹曼–诺德海姆方程产生于相互作用强度趋于零的标度极限，因此其稳态解应由理想气体平衡分布给出。对于亚临界初始数据，这些分布取决于两个参数：逆温度 $\beta > 0$ 和化学势$\mu \leq 0$。一个特例是 $\mu = 0$，此时相应的分布称为临界玻色–爱因斯坦分布，

$$f_{\beta,0}(x) = f_{\mathrm{BE}}(\beta x)\,, \quad \text{where } f_{\mathrm{BE}}(x) := \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\,, \tag{1.11}$$

而亚临界分布由 $f_{\beta,\mu}(x) := f_{\mathrm{BE}}(\beta(x-\mu))$，$\mu < 0$ 给出。由于 $e_0 > 0$，显然存在唯一的 $\beta > 0$ 使得 $e_0 = e[f_{\beta,0}]$，且它由下式确定

$$\beta := \left(\frac{e[f_{\mathrm{BE}}]}{e_0}\right)^{\frac{2}{5}} . \tag{1.12}$$

现在我们假设初态是超临界的，$M(0) > \rho[f_{\beta,0}]$，即

$$\frac{n_0+\rho_0}{e_0^{3/5}} > \frac{\rho[f_{\mathrm{BE}}]}{e[f_{\mathrm{BE}}]^{\frac{3}{5}}} .$$

如果这一点成立，就不存在具有恰当能量和粒子密度的玻色–爱因斯坦分布。许多参考文献中都能找到这些结果，例如，参见 [21] 中的第 2 节和 [14]中的第6节。

从物理依据出发，我们预期正常流体会弛豫至相应的临界分布，而多余的粒子则会形成凝聚体：由于凝聚体中的粒子不贡献能量密度，这使得初态与平衡态具有相同的质量和能量。受这一物理讨论的启发，我们将平衡凝聚体密度定义为

$$\bar{n} := M(0) - \rho[f_{\beta,0}] = n_0 + \rho_0 - \rho[f_{\beta,0}] . \tag{1.13}$$

根据这些定义，假设初态是超临界的，等价于假设 $\bar{n} > 0$。

我们假设系统的时间演化守恒总质量，即

$$n(t) = M(0) - \rho[f_{\mathrm{reg}}(t)] = \bar{n} - \rho[f_{\mathrm{reg}}(t) - f_{\beta,0}] . \tag{1.14}$$

因此，演化方程为

$$\frac{d}{dt} f_{\mathrm{reg}}(x,t) = C_4[f_{\mathrm{reg}}(\cdot,t)](x) + n(t) C_3[f_{\mathrm{reg}}(\cdot,t)](x), \tag{1.15}$$

在将质量守恒定律代入 (1.14) 后，它就成为关于 f_{reg} 的封闭方程。这里，第一个碰撞算子为

$$C_4[f](x_0) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \int_{\mathbb{R}_+^2} \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \, \mathbb{I}(x_1 \geq 0) I(x) \left[\tilde{f}_0 \tilde{f}_1 f_2 f_3 - f_0 f_1 \tilde{f}_2 \tilde{f}_3\right]_{x_1 = x_2 + x_3 - x_0} \tag{1.16}$$

其中 $f_i := f(x_i)$，$\tilde{f}_i = 1 + f_i$，并且

$$I(x) := \min_{j=0,1,2,3} \sqrt{x_j} .$$

我们还忽略了一个整体的显式常数，该常数可通过重新缩放时间恢复。由此形式出发，对拟设进行形式上的代换，可得与凝聚体相互作用的项

$$\begin{aligned} C_3[f](x) = {} & \frac{2}{\sqrt{x}} \int_0^x \mathrm{d}y \, \left[\tilde{f}(x) f(x-y) f(y) - f(x) \tilde{f}(x-y) \tilde{f}(y)\right] \\ & - \frac{4}{\sqrt{x}} \int_x^\infty \mathrm{d}y \, \left[\tilde{f}(y) f(y-x) f(x) - f(y) \tilde{f}(y-x) \tilde{f}(x)\right] . \end{aligned} \tag{1.17}$$

如 [21],所示，当 $f_0 = f_{\beta,\,0}$ 时，有 $\mathsf{C}_4[f_0] = 0 = \mathsf{C}_3[f_0]$。因此，$f(x,\ t) = f_{\beta,\,0}(x)$ 给出了该方程的一个稳态解。（注意，根据定义，此时 $n(t) = \bar{n} = n_0$ 也为常数。）在这里，我们考察对此类状态施加“小”扰动后，是否会得到趋向于同类型状态的解（新状态的参数不必与原状态的参数相同）。一种方便的扰动定义方式是考虑

$$\psi_t(x) := \frac{f(x,t) - f_{\beta,0}(x)}{R_\beta(x)}, \qquad \text{where } R_\beta(x) = \beta x f_{\beta,0}(x)(1 + f_{\beta,0}(x)) = R_1(\beta x) .$$

因为这里 $R_1 \simeq x^{-1}$，对于 Spohn 所考虑类型的解，$f(x,\ t) \simeq a(t)x^{-1}$，应有 $a(t) = (\psi_t(0) + 1)/\beta$。因此，如果具有此类渐近行为的连续解存在，那么 ψ_t 在 0 处也连续。

现在，我们可以通过对 $x' = \beta^{-1}x$ 进行缩放来求出对 β 的依赖关系。于是，C_4 会获得一个 β^2 的因子，而 C_3 会获得一个 $\beta^{1/2}$ 的因子。因此，如果我们有 $\beta = 1$ 的一个解 $f_1(x,\ t;\ \bar{n})$，那么一般情形的解为 $f(x,\ t;\ \bar{n},\ \beta) := f_1(\beta x,\ \beta^{-2}t;\ \beta^{-3/2}\bar{n})$。因此，只需考虑 $\beta = 1$ 的情形，此时 $f_{\beta,\ 0} = f_{\mathrm{BE}}$，并且

$$\psi_t(x) = \frac{f(x,t) - f_{\mathrm{BE}}(x)}{R(x)}, \quad \text{where } R(x) = R_1(x) = x f_{\mathrm{BE}}(x)\tilde{f}_{\mathrm{BE}}(x). \tag{1.18}$$

这里及下文中，我们采用简写记号 $\tilde{f}_{\mathrm{BE}} := 1 + f_{\mathrm{BE}}$。因此，$\psi_t(x)$ 的时间演化由下式决定

$$\frac{d}{dt}\psi_t(x) = \frac{1}{R(x)}\Big(C_4[f_{\mathrm{BE}} + R\psi_t](x) + (\bar{n} - \rho[R\psi_t])\, C_3[f_{\mathrm{BE}} + R\psi_t](x)\Big),$$

现在令 $\overline{\mathsf{L}}_i$ 表示 C_i 在 f_{BE} 附近的线性化，并令 Q_i 表示相应的余项：$\mathsf{Q}_i[h] := \mathsf{C}_i[f_{\mathrm{BE}} + h] + \mathsf{L}_i h$。由于 $\mathsf{C}_i[f_{\mathrm{BE}}] = 0$，$\mathsf{Q}_i[h]$ 关于 h 是二次的。因此，ψ_t 的演化方程可以写成如下形式

$$\frac{d}{dt}\psi_t = -L\psi_t + Q[\psi_t], \text{ where}$$

$$L = L_4 + \bar{n}L_3, \qquad L_i = R^{-1}\overline{\mathcal{L}}_i R,$$
$$Q[\psi] = Q_4[\psi] + \bar{n}Q_3[\psi] - \rho[R\psi]Q_3[\psi] + \rho[R\psi]L_3\psi, \qquad Q_i[\psi] := R^{-1}Q_i[R\psi].$$

事实证明，线性化三波碰撞算子最为奇异，因此可以将其视为主导项。按照附录 A 中给出的计算，我们得到演化方程 (1.4)，其中算子 L_3 具有形式 (1.5)。尽管本文未展示这一点，但我们的主要结果可以毫不费力地扩展到次要算子 L_4，从而得到完整线性化算子的平滑性结果。

2. 加权 L^2 空间中的解

本节将在某个加权 L^2 函数空间中，考察演化方程 (1.4) 中出现的线性算子，以及一列相关的线性算子。首先进行变量代换：$x \to u = \ln(\mathrm{e}^x - 1)$，$x$ 为能量变量。因此，旧变量 x 取值于 $\mathbb{R}_+$，而新变量 u 取值于$\mathbb{R}$，我们将在 $\mathbb{R}$ 上的加权 L^2 函数空间中研究方程 (1.4)。此外，从现在起，我们将在 L_3 的定义中包含前置因子 $\bar{n}$（但仍沿用该算子的同一符号），这样 (1.4) 的右端现在写作 $(-L_3\psi_t)$。

如附录 A 中更详细的讨论所述，由此得到的算子自然作用于加权 L^2 空间。权函数 ν 为

$$\nu(\mathrm{d}w) = \nu(w)\mathrm{d}w = \mathrm{e}^{-w}\,(\ln(1 + \mathrm{e}^w))^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}w.$$

在该空间中，线性化算子对其定义域 $D(L_3)$ 中任意适当正则的函数 ψ（例如紧支撑且光滑的函数）作用如下：

$$(L_3\psi)(u) = \int_{\mathbb{R}} \nu(\mathrm{d}v)\overline{K}_3(u,v)\big(\psi(u) - \psi(v)\big), \tag{2.1}$$
$$\overline{K}_3(u,v) = 4\bar{n}\,[(\ln(1+\mathrm{e}^u))(\ln(1+\mathrm{e}^v))]^{-\frac{3}{2}}\,\frac{\mathrm{e}^{-|u-v|}}{1 + \mathrm{e}^{-\min(u,v)} + \mathrm{e}^{-\max(u,v)}}\,\frac{2 + \mathrm{e}^{\max(u,v)}}{1 - \mathrm{e}^{-|u-v|}}.$$

相应的半双线性型为

$$\tilde{Q}(\phi,\psi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (\nu\times\nu)(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\overline{K}_3(u,v)\big(\phi(u) - \phi(v)\big)^*\big(\psi(u) - \psi(v)\big).$$

$\tilde{Q}$显然是对称且非负的。现在，我们将型定义域 $D(\tilde{Q})$ 扩展到包含所有满足以下条件的 ψ： $\tilde{Q}(\psi,\psi) < \infty$ 在上述积分收敛的意义下成立（注意，此时被积函数为实数且非负）。柯西–施瓦茨不等式

$\tilde{}$ $\tilde{}$ 因而表明，对于所有 $\phi,\psi \in D(Q)$， $Q(\phi,\psi)$ 都定义为绝对收敛积分。

我们还将考察一列正则化线性算子 L_3^ε，它们对所有 $\varepsilon_0 > 0$ 均按如下方式定义：

$$(L_3^\varepsilon\psi)(u) = \int_{\mathbb{R}} \nu(\mathrm{d}v)\overline{K}_3^\varepsilon(u,v)\big(\psi(u)-\psi(v)\big),\ \forall\psi \in D(L_3^\varepsilon),\ \text{where,}$$

$$\overline{K}_3^\varepsilon(u,v) = \overline{K}_3(u,v)\frac{1-\mathrm{e}^{-\min(\varepsilon(u,v),|u-v|)}}{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon(u,v)}},\ \varepsilon(u,v) = \varepsilon(\max(u,v)) = \varepsilon_0\exp\left(-\frac{\mu'}{\gamma_0}\max(a_1,\max(u,v))\right). \quad (2.2)$$

这里， μ'、 γ_0 和 a_1 都是取正值的参数。对于仅涉及 L^2-解的结果，这些参数在 $\mathbb{R}_+$ 中的取值并不重要。然而，对于我们在某个巴拿赫空间中证明的主要结果，这些参数~必须限制在 $\mathbb{R}_+$ 中的某些区间内，具体如 (2.5) 和第 3.2 小节所述。与正则化线性算子对应的半双线性型 Q_ε仍然是非负且对称的。

在本节余下部分，我们将构造算子 L_3 和 L_3^ε 在 $L^2(\nu)$ 中的 Friedrichs扩张，证明它们在 $L^2(\nu)$ 中生成压缩半群，最后证明，与 L_3^ε 的 Friedrichs扩张相关联的半群解会在 $\varepsilon_0 \to 0.$ 时逼近 L_3 的扩张所对应的半群解

2.1. Friedrichs扩张及其性质

我们将详细说明如何为 L_3 构造 Friedrichs扩张。 L_3^ε、 $\forall\varepsilon > 0$ 的扩张也可以用类似的方法构造。

~从半双线性型 Q出发，我们首先定义如下内积

$$Q(\phi,\psi) = \tilde{Q}(\phi,\psi) + (\phi,\psi)\,,$$

在先前定义的定义域上

$$D(Q) = D(\tilde{Q}) = \{\psi \in L^2(\nu) : Q(\psi,\psi) < \infty\}.$$

事实上，该定义域已经是完备的，也就是说，它适用于 Friedrichs扩张，下一条结果将说明这一点。

引理 2.1. $D(Q)$ 在内积 Q 下是完备的。

证明。为了证明 $D(Q)$ 的完备性，考虑任意序列 $\psi_n \in D(Q)$，使得 ψ_n 在 Q 下为柯西序列，即 $Q(\psi_n-\psi_m, \psi_n-\psi_m) \to 0$，当 $m,\ n \to \infty$ 时。由于这些假设意味着 (ψ_n) 在 $L^2(\nu)$ 中也为柯西序列，因此存在 $\psi \in L^2(\nu)$ 使得 $\psi_n \to \psi$。因此，我们只需证明 i) $\psi \in D(Q)$，以及 ii) $Q(\psi_n-\psi,\ \psi_n-\psi) \to 0$，当 $n \to \infty$ 时。

首先注意，对于任意 $r > 0$，我们可以定义有界核 $K_r(u,\ v) \overset{=}{} \mathbb{I}(K_3(u,\ v) < 1/r)\overline{K_3}(u,\ v)$，从而，$\overline{\ } K_r \le K_3$ 且 K_r逐点收敛到 K_3，当 $r \to 0^+$时。于是，$\overline{\ }$相应的半双线性型满足

$$\lim_{r\to 0^+} Q_r(\phi,\psi) = Q(\phi,\psi),\ \forall\phi,\psi \in D(Q),\ \text{by dominated convergence.}$$

此外，对于任意 $r > 0$，都存在正数常数 $C,\ C_1 < \infty$，使得

$$|Q_r(\phi,\psi)| \le |(\phi,\psi)| + \int_{\mathbb{R}^2}(\nu\times\nu)(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)K_r(u,v)\big|\big(\phi(u)-\phi(v)\big)\big|\big|\big(\psi(u)-\psi(v)\big)\big| \le \big(1+\frac{C}{r}\big)\|\psi\|_{L^2}\|\phi\|_{L^2},$$

$$\text{and, } \|\psi\|_{L^2}^2 \le Q_r(\psi,\psi) \le \big(1+\frac{C_1}{r}\big)\|\psi\|_{L^2}^2.$$

上述不等式表明 $D(Q_r) = L^2(\nu)$，并且由 Q_r定义的范数与 L^2-范数等价。这意味着 $\psi_n \to \psi \in D(Q_r)$，且 $Q_r(\psi_n,\ \psi_n) \to Q_r(\psi,\ \psi)$，当 $n \to \infty$。

由于 $\psi_n \in D(Q)$ 是 Q–柯西列，因此它是 Q–有界的。因此，存在某个正常数 $C' < \infty$，使得 $Q_r(\psi_n,\psi_n) \le Q(\psi_n,\psi_n) \le C'$ 对所有 n 以及所有 $r > 0$。这意味着，对所有 $r > 0$， $Q_r(\psi,\psi) \le C'$；并且根据单调收敛定理，$Q_r(\psi,\psi) \uparrow Q(\psi,\psi) \le C'$。因此 $\psi \in D(Q),$，条件 i) 得以满足。

现在我们可以证明 ii)。由于 $\psi_n \xrightarrow{L^2} \psi \in D(Q)$，数列 $\phi_n = \psi_n - \psi$ 满足：对所有n， $\phi_n \in D(Q)$，且 $\phi_n \to 0 \in L^2(\nu)$。取 $\overline{\varepsilon} > 0$。于是，由于数列 ϕ_n 在 $D(Q)$ 中是柯西列，存在 n_0，使得对所有 $m, n > n_0$，$Q(\phi_n - \phi_m, \phi_n - \phi_m) < \overline{\varepsilon}^2$。现在 $Q_r(\phi_n, \phi_n) \uparrow Q(\phi_n, \phi_n)$，因此，对 $\overline{\varepsilon} > 0$ 和 $n > n_0$，存在 $r = r(n, \varepsilon)$，使得 $0 \le Q(\phi_n, \phi_n) - Q_r(\phi_n, \phi_n) < \overline{\varepsilon}$。于是，对所有 $m, n > n_0$，有如下结论：

$$\begin{aligned} Q_r(\phi_n, \phi_n) &= Q_r(\phi_n - \phi_m, \phi_n) - Q_r(\phi_m, \phi_m - \phi_n) + Q_r(\phi_m, \phi_m) \\ &\le |Q_r(\phi_n - \phi_m, \phi_n)| + |Q_r(\phi_m, \phi_m - \phi_n)| + Q_r(\phi_m, \phi_m) \\ &\le 4\sqrt{C'}\Big(Q(\phi_n - \phi_m, \phi_n - \phi_m)\Big)^{1/2} + Q_r(\phi_m, \phi_m) \\ &\le 4\sqrt{C'}\overline{\varepsilon} + Q_r(\phi_m, \phi_m). \end{aligned}$$

现在我们可以令 $m \to \infty$，使得 $Q_r(\phi_m, \phi_m) \to 0$。因此

$$Q(\phi_n, \phi_n) < Q_r(\phi_n, \phi_n) + \overline{\varepsilon} \le (4\sqrt{C'} + 2)\overline{\varepsilon},$$

这意味着 $Q(\phi_n, \phi_n) \to 0$ 当 $n \to \infty$，从而证明了 ii)。 □

为了构造 Friedrichs扩张，我们从算子 L_3的一个较简单版本入手，该算子定义在空间 $C^{0,\alpha}_c$上，其中包含紧支撑的 α-H¨older 连续函数，定义在 $\mathbb{R}$上。显然，这是 $D(Q)$ 的一个子空间，并且在 $L^2(\nu)$ 中稠密。于是，对 $\psi \in C^{0,\alpha}_c(\mathbb{R})$，我们定义

$$(L_3^R\psi)(u) = \int_{\mathbb{R}} \nu(\mathrm{d}v)\overline{K}_3(u, v)\big(\psi(u) - \psi(v)\big),$$

其中，对所有 u，该积分都绝对收敛，并且它给出一个属于 $L^2(\nu)$ 的函数。利用富比尼定理可得，对所有 $\psi \in C^{0,\alpha}_c(\mathbb{R})$ 和 $\phi \in D(Q)$

$$(\phi, L_3^R\psi) = Q(\phi, \psi) - (\phi, \psi),$$

因此， L_3^R的型定义域包含于 $D(Q)$。由此可知， L_3^R的 Friedrichs扩张 L_3 由下式给出

$$\begin{aligned} &(\phi, \overline{L}_3\psi) = Q(\phi, \psi) - (\phi, \psi),\ \forall \psi \in D(\overline{L}_3),\ \phi \in D(Q), \\ &D(\overline{L}_3) = \{\psi \in D(Q) \mid \exists C < \infty \text{ such that } |Q(\phi, \psi)| \le C\|\phi\|_{L^2}, \forall \phi \in D(Q)\}. \end{aligned}$$

更多细节请参见第八章，第 329-334, [18] 页，以及第六章，第 322-326, [11] 页。

我们的主要结果是在巴拿赫空间 X 中证明的，其中的连续函数在 R 上满足 H¨older 型条件（见 (2.4)）。根据刻画 X 的权函数 Γ_0 的定义 (2.5)，显然有

$$\forall \psi \in \overline{X},\ Q(\psi, \psi) < \infty, \text{since } \overline{K}_3(u, v)\big(\Gamma_0(u, v)\big)^2 \text{is absolutely integrable under } \nu \times \nu.$$

因此，对所有 $\phi \in D(Q)$，以及所有 $\psi \in X$，定义 $Q(\phi, \psi)$ 的积分都是绝对收敛的。容易验证

$$G \in L^2(\nu), \text{ where } G(u) = \int_{\mathbb{R}} \nu(\mathrm{d}v)\overline{K}_3(u, v)|\psi(u) - \psi(v)|.$$

因此，我们可以找到一个常数 $C > 0$，使得

$$|Q(\phi, \psi)| \le C\|\phi\|_{L^2}\|G\|_{L^2}, \text{ so } \psi \in D(\overline{L}_3).$$

因此 $\overline{X} \subset D(\overline{L}_3)$。

在陈述主要结果的第 3 节中，我们省略上横线，直接用 L_3表示扩张算子。需要指出的是，采用与上文类似的论证，若 ψ 有界、可测，且满足 $\sup_u \int_{\mathbb{R}} \nu(\mathrm{d}v)K_3(u, v)|\psi(u) - \psi(v)| < \infty$，则 $\psi \in D(L_3)$，并且 $L_3\psi$ 由绝对收敛积分给出。

算子 L_3^ε的 Friedrichs扩张 $\overline{L}_3^\varepsilon$ 以与上述完全相同的方式构造，并且很容易看出 $X_\varepsilon \subseteq D(\overline{L}_3^\varepsilon)$，其中 X_ε是相应的巴拿赫空间。

现在我们证明关于这些扩展的以下结果。

定理 2.2。线性算子 L_3 和 $\overline{L}_3^{\varepsilon}$ 均为非负算子，其零子空间由常值函数张成。此外，所有这些算子在 $L^2(\nu)$ 中都有谱隙，因此由这些线性算子生成的半群在零子空间的正交补上是严格压缩的。

证明。我们首先证明 L_3。对于 $\overline{L}_3^{\varepsilon}$，证明类似。

若 $\psi \in D(\overline{L}_3)$，则相应二次型具有如下下界

$$(\psi, \overline{L}_3\psi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (\nu\times\nu)(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\overline{K}_3(u,v)|\psi(u)-\psi(v)|^2 \geq (\psi, L'\psi),$$

其中

$$(L'\psi)(u) = V'(u)\psi(u) - \int_{\mathbb{R}} \nu(\mathrm{d}v)K'(u,v)\psi(v),\ V'(u) = \int_{\mathbb{R}} \nu(\mathrm{d}v)K'(u,v),$$

$$\text{and, } K'(u,v) = 2K_0'(u,v) + K_1'(u,v)\Big[\mathbb{I}(v > u/2) + \mathbb{I}(v < 2u)\Big] + K_2'(u,v)\Big[\mathbb{I}(v > 3u/2) + \mathbb{I}(v < 2u/3)\Big].$$

$$\text{Here } K_0'(u,v) = \bar{n}\,\mathbb{I}(-\ln 2 \leq u \leq \ln 2)\,\mathbb{I}(-\ln 2 \leq v \leq \ln 2)\Big(\ln(1+\mathrm{e}^u)\ln(1+\mathrm{e}^v)\Big)^{-3/2},$$

$$K_1'(u,v) = \bar{n}\,\mathbb{I}(u < -\ln 2)\,\mathbb{I}(v < -\ln 2)\Big(\ln(1+\mathrm{e}^u)\ln(1+\mathrm{e}^v)\Big)^{-3/2}\mathrm{e}^{\min(u,v)}\mathrm{e}^{-|u-v|},$$

$$\text{and, } K_2'(u,v) = \bar{n}\,\mathbb{I}(u > \ln 2)\,\mathbb{I}(v > \ln 2)\Big(\ln(1+\mathrm{e}^u)\ln(1+\mathrm{e}^v)\Big)^{-3/2}\mathrm{e}^{\max(u,v)}\mathrm{e}^{-|u-v|}.$$

于是很容易看出，存在 $C' > 0$，使得势 $V'(u)$具有如下下界：

$$V'(u) \geq C'\bar{n}\Big[\big(1-2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}u}\big)\mathbb{I}(u < -\ln 4) + \mathrm{e}^{\frac{3}{2}u}\mathbb{I}(u < -\ln 2) + \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}u}\mathbb{I}(-\ln 2 \leq u \leq \ln 2)$$
$$+ u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u}\mathbb{I}(u > \ln 2) + u^{-\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{2}{3}u\right)^2 - (\ln 2)^2\right)\mathbb{I}(u > \frac{3}{2}\ln 2)\Big].$$

因此，$V'(u)$严格为正，并且存在 $a_* > 0$，使得 $\sigma(V) \subset (a_*, \infty)$。还可以容易地验证，与核 K' 相关的积分算子在 $L^2(\nu)$上是希尔伯特–施密特算子。这首先意味着 L' 是自伴的（见第 IV 章定理 4。3，[11]），其次意味着 L' 与 V' 具有相同的本质谱（见第 IV 章定理 5。35，[11]）。第一条推论表明 $\sigma(L') \subset [0,\infty)$（相应的二次型非负），第二条推论意味着 $\sigma(L') \cup [0, a_*)$仅包含离散的半单特征值，因此 a_* 是谱唯一可能的聚点。

显然，L' 因而 L_3 在 $L^2(\nu)$中都有谱隙，并生成压缩半群（参见第 II 章命题 3。28，[5]）。若 ψ 是常值函数，则它属于 L_3 的定义域，且 $L_3\psi$ 由收敛积分给出，其值为零。另一方面，若 $\psi \in D(L_3)$几乎处处不是常值函数，则$(\psi, L_3\psi) > 0$，因此 $L_3\psi \neq 0$也成立。因此，L_3 的零子空间由常值函数构成。

根据核函数 $\overline{K}_3^{\varepsilon}$的定义（2.2）显然可知，对于所有 $\psi \in D(\overline{L}_3^{\varepsilon})$，我们仍有如下下界：

$$(\psi, \overline{L}_3^{\varepsilon}\psi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (\nu\times\nu)(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\overline{K}_3^{\varepsilon}(u,v)|\psi(u)-\psi(v)|^2 \geq (\psi, L'\psi).$$

那么，沿用之前完全相同的论证可得出结论：$\overline{L}_3^{\varepsilon}$在 $L^2(\nu)$中有谱隙，其零子空间由常值函数构成，并且它生成一个压缩半群。□

L_3和 $\overline{L}_3^{\varepsilon}$在 $L^2(\nu)$ 中生成强连续半群。因此，给定 $D(L_3)$ 或 $D(\overline{L}_3^{\varepsilon})$ 中的初始数据，我们可以保证方程 (1.4) 存在唯一的经典解（属于 $L^2(\nu)$），其中右端的算子分别由 L_3或 $\overline{L}_3^{\varepsilon}$替代。我们用符号 S_0和 S_ε分别表示由 L_3 和 $\overline{L}_3^{\varepsilon}$ 生成的半群。于是可以写出：

$$\forall \psi_0 \in D(\overline{L}_3),\ \ \frac{d}{dt}\psi_t = -\bar{n}\overline{L}_3\psi_t,\ \text{where } \psi_t = S_0(t)\psi_0 = \mathrm{e}^{-t\overline{L}_3}\psi_0,\ t \geq 0,$$
$$\forall \phi_0 \in D(\overline{L}_3^{\varepsilon}),\ \ \frac{d}{dt}\phi_t = -\bar{n}\overline{L}_3^{\varepsilon}\phi_t,\ \text{where } \phi_t = S_\varepsilon(t)\phi_0 = \mathrm{e}^{-t\overline{L}_3^{\varepsilon}}\phi_0,\ t \geq 0. \tag{2.3}$$

当然，这些经典的 L^2-解不一定在每一点都满足 (2.3) 中的演化方程。还要注意，由于半群 S_0 和 S_ε 不仅强连续，而且还是压缩的，给定初始数据$\phi_0 \in L^2(\nu)$， $S_0(t)\phi_0$和 $S_\varepsilon(t)\phi_0$对所有 $t > 0$均满足 (2.3) 中相应的演化方程（见第 IX 章备注 1。22 和例 1。25， [11]）。

定理 2.2 显然独立于我们的巴拿赫空间结果。然而，该定理保证了与 $\overline{L}_3^{\varepsilon}$ 相关的演化方程存在半群解，而这一结论将在后文对巴拿赫空间的分析中用于证明引理 3.10 和定理 3.12。事实上，定理 2.2 是我们在 $L^2(\nu)$ 中的分析所得的唯一一个用于第 3 节巴拿赫空间分析的结果。

2.2. 用 L_3 逼近在 $L^2(\nu)$ 中生成的半群解

在本小节所述的 $L^2(\nu)$ 分析的其余部分中，我们只考虑来自某些具有加权 H¨older 正则性的函数巴拿赫空间的初始数据；这里给出的结果使我们能够将定理 2.2 给出的半群解与第 3 节中得到的巴拿赫空间解联系起来。因此，本小节自然需要用到下一节中证明的一些引理和定理，这些结果表明，与 L_3 和 $\overline{L}_3^{\varepsilon}$ 相关的杜哈梅尔积分演化方程在这些巴拿赫空间中存在唯一解。因此，最好先明确给出我们在第 3 节的分析中所用相关加权空间的定义，并简要介绍相关结果。

我们先写出用于分析原始未正则化算子 L_3 的巴拿赫空间的定义。我们考虑初始数据 $\psi_0 \in X$，其中 X 是由定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 ψ 构成的巴拿赫空间，满足

$$\|\psi\|_{\overline{X}} = \sup_{v\in\mathbb{R}} \frac{|\psi(v)|}{\tilde{\Gamma}(v)} + \sup_{(v,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \frac{|\psi(v)-\psi(v-r)|}{\Gamma_0(v,r)} < \infty, \tag{2.4}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Gamma}(v) = f(v)\exp[\mu\max(a, c_0 v)], \text{ where } f(v) = \max\left((\ln(1+\mathrm{e}^v))^{-\alpha}, (\ln 2)^{-\alpha}\right) \text{ and,}\\
&\Gamma_0(v,r) = (f(v)+f(v-r))\exp[\mu\max(a, c_0 v, v-r)]g_0(v,r), \text{ with } g_0(v,r) = (1-\mathrm{e}^{-\kappa r})^{\gamma_0},\\
&\text{where } 0<\alpha<1/6,\ \mu < \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\alpha,\ \mu c_0 \in (\alpha, 1/4),\ a \geq 9,\ \gamma_0 \in (0, 1/8],\ \text{and } \kappa \geq 7.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

上文出现的参数 α、 μ 等对本小节的结果影响不大。不过，为了得到我们关于第 3 节中巴拿赫空间的结果，选取正确的可容许取值至关重要。这些参数所受限的区间很大程度上是由定理 3.3 证明中的计算便利性决定的。本文的计算中，我们取 1/9 < α < 1/6。5、 $\mu \in [1/3,\ 7/16]$ 和 $c_0 = 0。52$。这些选择显然满足 (2.5) 最后一行中的条件。附录 B 中，我们将较为详细地说明权函数 Γ_0 以及上述参数的取值是如何确定的。这里还要提到，(2.2) 中出现的参数 μ' 满足 $\mu' > \mu$，而 $a_1 = a/c_0$。

一个相关的巴拿赫空间是 $\overline{Y}$，即定义在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 上、相对于权函数 Γ_0 有界的连续函数 Δ 所构成的巴拿赫空间，因此：

$$\|\Delta\|_{\overline{Y}} = \sup_{(v,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \frac{|\Delta(v,r)|}{\Gamma_0(v,r)} < \infty, \tag{2.6}$$

其中 $\Gamma_0(v,\ r)$ 已在上文定义。这是我们考虑差函数演化方程的巴拿赫空间。下一节证明的定理 3.3 保证，在这个空间中，差分的杜哈梅积分演化方程至少在某个短时间 $T^* > 0$ 内存在且唯一有解。

注意，

$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \psi \in L^2(\nu),\ |\psi(u)-\psi(v)| = |\psi(\max(u,v)) - \psi(\max(u,v)-r)|,\ \text{where } r = |u-v|.$$

为简化记号，在方便时我们将使用权函数 Γ_0 的以下等价定义，而不更改其符号（对随后定义的权函数 Γ_ε 也遵循类似约定）：

$$\Gamma_0(u,v) = (f(u)+f(v))\exp[\mu\max(a, c_0\max(u,v), \min(u,v))]g_0(u,v),$$
$$\text{with } g_0(u,v) = \left(1-\mathrm{e}^{-\kappa|u-v|}\right)^{\gamma_0},\ \forall (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

请回想，由于原线性算子的核具有线奇异性，解 Δ_t 必须通过正则化逼近算子 $\overline{L}_3^{\varepsilon}$ 与和 $S_0(t)\psi_0$ 相关联的差函数联系起来。下一节将研究 (1.4) 的正则化版本，研究空间为 X，它是定义在 $\mathbb{R}$ 上、关于 (2.5) 中定义的权函数 $\tilde{\Gamma}$ 有界的连续函数所构成的巴拿赫空间。显然， $X \subset X \subset D(\overline{L}_3^{\varepsilon})$。根据定理 3.12，Duhamel 积分形式的正则化演化方程在 X 中存在唯一解。

现在，显然 X 同时包含于 $D(L_3)$ 和 $\overline{D}(\overline{L}_3^{\varepsilon})$，因此对于初始数据 $\psi_0 \in X$，定理 2.2 保证了分别对应于 L_3 和 $\overline{L}_3^{\varepsilon}$ 的柯西问题存在半群解 $S_0(t)\psi_0$ 和 $S_\varepsilon(t)\psi_0$，且它们在 $L^2(\nu)$ 中唯一。本小节将证明，当 $\varepsilon_0 \to 0$ 且时间满足 $t \in [0, T^*]$。时， $S_0(t)\psi_0$ 实际上是 $S_\varepsilon(t)\psi_0$ 收敛到的极限函数。时间 $T^* > 0$ 来自定理 3.3 和命题 3.5，且与 ε_0。无关

给定上述初始数据 ψ_0，对于任意 $\varepsilon_0 > 0$, $\varphi_t = S_\varepsilon(t)\psi_0$，定义如下。于是，根据命题 3.5，存在 $T^* > 0$，使得 $|D\varphi_t| \le A_1\overline{\Gamma}_\varepsilon$, ν-几乎处处, 对所有 $t \in [0, T^*]$ 以及某个常数 $A_1 < \infty$，均有 $D\underline{\varphi_t}(v,r) = \varphi_t(v) - \varphi_t(v-r)$, 对所有 $(v,r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, 其中 A_1 和 T^* 均与 ε_0 无关. . 权函数 Γ_ε 定义为:

$$\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r) = (f(v)+f(v-r))\exp[\mu\max(a, c_0 v, v-r)]\overline{g}(v,r),\ \overline{g}(v,r) = \left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r+\varepsilon(v))}\right)^{\overline{\gamma}_0},\ \overline{\gamma}_0 = \gamma_0/2. \tag{2.7}$$

现在考虑正则化参数的一列 ε_n，使得 $\varepsilon_n \to 0$。对于任意取代式 (2.2) 中 ε_0 的 $\varepsilon_n > 0$，为简便起见，稍微滥用一下记号，写作:

$$\overline{K}_3^{\varepsilon_n}(u,v) = \overline{K}_3(u,v)\frac{1-\mathrm{e}^{-\min(\varepsilon_n(u,v),|u-v|)}}{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon_n(u,v)}},\ \varepsilon_n(u,v) = \varepsilon_n\exp\left(-\frac{\mu'}{\gamma_0}\max(a_1, \max(u,v))\right).$$

我们还记

$$\overline{\Gamma}_{\varepsilon_n}(v,r) = (f(v)+f(v-r))\exp[\mu\max(a, c_0 v, v-r)]\overline{g}_n(v,r),\ \overline{g}_n(v,r) = \left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r+\varepsilon_n(v))}\right)^{\overline{\gamma}_0},$$

并使用巴拿赫空间 X_{ε_n}, 它定义为由 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 ψ 构成的巴拿赫空间，使得 t

$$\|\psi\|_{\overline{X}_{\varepsilon_n}} = \sup_{v\in\mathbb{R}}\frac{|\psi(v)|}{\tilde{\Gamma}(v)} + \sup_{(v,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}\frac{|\psi(v)-\psi(v-r)|}{\overline{\Gamma}_{\varepsilon_n}(v,r)} < \infty. \tag{2.8}$$

相应的 L^2-解为 $S_{\varepsilon_n}(t)\psi_0$，我们记为 $\varphi_t^n = S_{\varepsilon_n}(t)\psi_0$. 那么，在下一节证明的定理 3.12 和定理 3.4 表明，对所有 $\psi_0 \in X$，相关的杜哈梅积分形式柯西问题在巴拿赫空间 X_{ε_n} 中存在唯一解 $\bar{\varphi}_t^n$，使得

$$\|\bar{\varphi}_t^n\|_{\overline{X}_{\varepsilon_n}} < \infty,\ \forall \varepsilon_n > 0, \text{ and } \bar{\varphi}_t^n = \varphi_t^n,\ \nu\text{-almost everywhere.}$$

我们用 Y_{ε_n} 表示 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 上关于权函数 Γ_{ε_n} 有界的连续函数所构成的巴拿赫空间. 正则化情形下，差分演化方程就在这个空间中考察。注意，对所有 $\varepsilon_n > 0$., 都有 $X \subset X_{\varepsilon_n} \subset D(\overline{L}_3^{\varepsilon_n})$,

本节余下部分将用到一些结果，其中有几个前面已经提及，且所有结果都可通过简短直接的计算轻易得到。由于这些结果对于本节的主定理至关重要，我们将它们汇总在以下引理中，以便查阅。

引理 2.3。给定初始数据 $\bar{\varphi}_0 \in X$ 和 $\overline{\varepsilon}_n > 0$，以下结论成立：i) 存在 $A_1 < \infty$， $T^* > 0$，二者均与 ε_n 无关，使得 $|D\bar{\varphi}_t^n| \le A_1 \mathbb{k} D\bar{\varphi}_0 \mathbb{k}_{\overline{Y}} \Gamma_{\varepsilon_n}$，对所有 $t \in [0, T^*]$ 均成立。ii) 对所有 $t \in \mathbb{R}_+$， $\overline{L}_3^{\varepsilon_n} \bar{\varphi}_t^n \in L^2(\nu)$ 均成立。

iii) 存在一个定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的正常可测函数 $\mathfrak{b}\Gamma$，使得

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nu \times \nu)(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v) \overline{K}_3(u,v) (\widehat{\Gamma}(u,v))^2 < \infty.$$

iv) 存在一个正常数 $C < \infty$，使得

$$\overline{K}_3^{\varepsilon_n}(u,v) \big(\overline{\Gamma}^{\varepsilon_n}(u,v)\big)^2 \le C \overline{K}_3(u,v) \big(\widehat{\Gamma}(u,v)\big)^2, \ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

证明。i) 该估计由定理 3.3 给出的 $|\Delta_t|$ 的上界以及命题 3.5 中得到的以下上界推出：

$$|D\bar{\varphi}_t^n - \Delta_t| \le Q_0 \big(M\varepsilon_n\big)^p \ln\big(\min(M, \varepsilon_n^{-1})\big) \|\Delta\|_Y, \ \forall t \in [0, T^*],$$

其中常数 Q_0 和 $p > 0$ 与 ε_n 无关，且 $\Delta_0 = D\bar{\varphi}_0$。

ii) 由定理 3.4，我们知道

$$\bar{\varphi}^n \in \overline{X}_{\varepsilon_n}, \forall \varepsilon_n > 0, \ \forall t > 0, \ \text{i.e.,} \quad \sup_{\substack{t>0 \\ (v,r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+}} \frac{|D\bar{\varphi}_t^n(v,r)|}{\overline{\Gamma}_{\varepsilon_n}(v,r)} < \infty.$$

直接验证可得 $G \in L^2(\nu)$，其中

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}} \nu(\mathrm{d}v) \overline{K}_3^{\varepsilon_n}(u,v) \overline{\Gamma}_{\varepsilon_n}(u,v).$$

由此自然可得 $\overline{L}_3^{\varepsilon_n} \bar{\varphi}_t^n \in L^2(\nu)$。

iii) 定义

$$\widehat{\Gamma}(u,v) = (f(u) + f(v)) \exp[\mu \max(a, c_0 \max(u,v), \min(u,v))] \bar{g}_0(u,v), \ \text{with } \bar{g}_0(u,v) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa|u-v|}\right)^{\overline{\gamma}_0}.$$

然后很容易验证，

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nu \times \nu)(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v) \overline{K}_3(u,v) \big(\widehat{\Gamma}(u,v)\big)^2 < \infty.$$

iv) 对于所有的 $\varepsilon_n > 0$、以及 $r > 0$，，存在依赖于 κ 的 $C_1 > 0$、 $C_2 > 0$，使得以下结论成立 e:

$$\frac{\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa(r+\varepsilon_n)}\right)^{2\overline{\gamma}_0}}{1 - \mathrm{e}^{-\max(r, \varepsilon_n)}} \le C_1 \left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa(r+\varepsilon_n)}\right)^{2\overline{\gamma}_0 - 1} \le C_1 \left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa r}\right)^{2\overline{\gamma}_0 - 1} \le C_2 \frac{\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa r}\right)^{2\overline{\gamma}_0}}{1 - \mathrm{e}^{-r}}.$$

根据核函数和权函数的定义可直接得出

$$\overline{K}_3^{\varepsilon_n}(u,v) \big(\overline{\Gamma}^{\varepsilon_n}(u,v)\big)^2 \le C \overline{K}_3(u,v) \big(\widehat{\Gamma}(u,v)\big)^2, \ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \ \text{for some constant } C > 0.$$

□

给定初始数据 $\psi_0 \in \overline{X}$，我们再次考虑正则化参数序列 ε_n，其中 $\varepsilon_n \to 0$。回想一下，对于每个 ε_n，根据定理 3.12，正则化演化方程（见 3.2.1）在所有时刻都有解 $\bar{\varphi}_n \in X_{\varepsilon_n}$。于是我们可以证明以下引理。

引理 2.4。设 $\{\varepsilon_n\}$ 是正则化参数序列，使得 $\varepsilon_n \to 0$，且 $\psi_0 \in X$ 为初始数据。那么相应的序列 $\{\bar{\varphi}_n\}$ 在 $C\big([0,T^*],\ L^2(\nu)\big)$ 中是柯西序列。

证明。考虑 $m,\ n \in \mathbb{N}$。为简便起见，设 $\min(\varepsilon_m,\ \varepsilon_n) = \varepsilon_m$。那么我们知道 $\bar{\varphi}_m \in X_{\varepsilon_m}$ 和 $\bar{\varphi}_n \in X_{\varepsilon_n}$，根据 Γ_{ε_m} 和 Γ_{ε_n} 的定义，显然有 $X_{\varepsilon_m} \subset X_{\varepsilon_n}$。

令 $\bar{\varphi}^{n,\,m}_t = \bar{\varphi}^n_t - \bar{\varphi}^m_t$，则 $\bar{\varphi}^{n,\,m}_t \in \overline{X}_{\varepsilon_n}$。函数 $\bar{\varphi}^{n,\,m}_t$ 满足

$$\begin{aligned}\partial_t \bar{\varphi}^{n,m}_t &= -\overline{L}_3^{\varepsilon_n}\big(\bar{\varphi}^n_t - \bar{\varphi}^m_t + \bar{\varphi}^m_t\big) + \overline{L}_3^{\varepsilon_m}\bar{\varphi}^m_t \\ &= -\overline{L}_3^{\varepsilon_n}\bar{\varphi}^{n,m}_t + g^{n,m}_t, \end{aligned} \tag{2.9}$$

where $g^{n,m}_t(u) = \overline{L}_3^{\varepsilon_m}\bar{\varphi}^m_t(u) - \overline{L}_3^{\varepsilon_n}\bar{\varphi}^m_t(u)$

$$\begin{aligned}&= \int_{\mathbb{R}} \nu(\mathrm{d}v)\Big(\overline{K}_3^{\varepsilon_m}(u,v) - \overline{K}_3^{\varepsilon_n}(u,v)\Big)\Big(\bar{\varphi}^m_t(u) - \bar{\varphi}^m_t(v)\Big) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \nu(\mathrm{d}v)\overline{S}^{\varepsilon_m,\varepsilon_n}(u,v)\Big(\bar{\varphi}^m_t(u) - \bar{\varphi}^m_t(v)\Big), \text{ with } \overline{S}^{\varepsilon_m,\varepsilon_n}(u,v) = \overline{K}_3^{\varepsilon_m}(u,v) - \overline{K}_3^{\varepsilon_n}(u,v).\end{aligned}$$

现在，根据引理 2.3 的第 i 部分，我们可以使用：

$$\big|\bar{\varphi}^m_t(u) - \bar{\varphi}^m_t(v)\big| \le A_1\|D\bar{\varphi}_0\|_{\overline{Y}}\overline{\Gamma}_{\varepsilon_m} \le A_1\|\psi_0\|_{\overline{X}}\overline{\Gamma}_{\varepsilon_m},$$

从而得到以下估计：

$$|g^{n,m}_t(u)| = \Big|\int_{\mathbb{R}} \nu(\mathrm{d}v)\overline{S}^{\varepsilon_m,\varepsilon_n}(u,v)\Big(\bar{\varphi}^m_t(u) - \bar{\varphi}^m_t(v)\Big)\Big| \le F_{n,m}(u),$$

$$\text{where } F_{n,m}(u) = C_0\|\psi_0\|_{\overline{X}}\big(\varepsilon_n - \varepsilon_m\big)^{\overline{\gamma}_0}\mathrm{e}^{\mu\max(a,u)}f(u)\big(\ln(1+\mathrm{e}^u)\big)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\mu'}{\gamma_0}\overline{\gamma}_0\max(a_1,u)},$$

C_0 是一个与 ε_m 和 ε_n 无关的正常数。因此显然，$\mathrm{k}F_{n,\,m}\mathrm{k}_{L^2} \to 0$，当 $m,\ n \to \infty$。回顾式 (2.9)，现在对于所有 $t \in [0,T^*]$，我们可以写出：

$$\begin{aligned}\partial_t\|\bar{\varphi}^{n,m}_t\|^2_{L^2} &= 2\,\mathrm{Re}\,\big(\bar{\varphi}^{n,m}_t, \partial_t\bar{\varphi}^{n,m}_t\big) \\ &= 2\,\mathrm{Re}\,\big(\bar{\varphi}^{n,m}_t, g^{n,m}_t\big) - 2\,\mathrm{Re}\,\big(\bar{\varphi}^{n,m}_t, \overline{L}_3^{\varepsilon_n}\bar{\varphi}^{n,m}_t\big) \\ &< 2\,\mathrm{Re}\,\big(\bar{\varphi}^{n,m}_t, g^{n,m}_t\big) \qquad \text{by the positivity of } \overline{L}_3^{\varepsilon_n} \\ &\le 2\|\bar{\varphi}^{n,m}_t\|_{L^2}\|g^{n,m}_t\|_{L^2} \\ &\le 4\|\psi_0\|_{L^2}\|F_{n,m}\|_{L^2},\end{aligned}$$

其中在最后一行，我们用到了这样一个事实：$S_{\varepsilon_n}(t)\psi_0$ 是 $\bar{\varphi}^n_t$ 的 L^2-代表元（见引理 3.10）。这意味着

$$\sup_{t\in[0,T^*]}\|\bar{\varphi}^{n,m}_t\|_{L^2} \le \sqrt{4T^*\|\psi_0\|_{L^2}\|F_{n,m}\|_{L^2}}.$$

由于上述方程右端在 $m,\ n \to \infty,$ 时趋于零，我们得出序列 $\{\bar{\varphi}^n\}$ 在 $C\big([0,T^*],\ L^2(\nu)\big)$ 中是柯西序列。□

由于 $\{\bar{\varphi}^n\}$ 是柯西序列，存在一个 $C\big([0,T^*],\ L^2(\nu)\big)$ 中的极限函数，该序列收敛于此。我们将其记为 $\tilde{\psi}$。接下来，我们证明这个极限函数与上述序列 (ε_n) 的选取无关，并且确实有 $\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_t \mathrm{k}\,\bar{\varphi}^\varepsilon_t - \tilde{\psi}_t\mathrm{k} = 0$。为方便记号，我们从一开始就将 $\bar{\varphi}^\varepsilon \to \tilde{\psi}$ 记为 $\varepsilon \to 0$，尽管严格来说，这些首先指的是在某个固定序列 $\varepsilon_n \to 0$ 选取下的 $\bar{\varphi}^n \to \tilde{\psi}$。我们用 ε 对正则化线性算子进行参数化，$\bar{\varphi}^\varepsilon$ 表示与算子 $\overline{L}_3^\varepsilon$ 对应的巴拿赫空间解，相应的巴拿赫空间记为 X_ε，我们关注极限 $\varepsilon \to 0$。

现在我们可以证明本小节的主要结果了。该结果指出，这个极限函数 $\tilde{\psi}_t$ 实际上是与原始线性化算子 L_3 相关的 L^2-解。

定理 2.5. 给定初始数据 $\psi_0 \in X$，设 $\overline{\psi}_t = \lim_{\varepsilon\to 0} \bar{\varphi}_t^\varepsilon$ 属于 $L^2(\nu)$，其中 $t \in [0, T^*]$。那么 $\tilde{\psi}_t = S_0(t)\psi_0$ ν-几乎处处。

证明。我们先固定 $t \in [0, T^*]$，并证明 $\tilde{\psi}_t \in D(L_3)$。首先来证明 $\tilde{\psi}_t \in D(Q)$。

现在，取定序列 (ε_n)，由于对所有 (u,v) 使得沿该子序列 $\lim_{\varepsilon\to 0} \overline{K}_3^\varepsilon(u,v) = K_3(u,v)$，因此（沿该子序列）

$$\overline{K}_3^\varepsilon(u,v)\left|\bar{\varphi}_t^\varepsilon(u) - \bar{\varphi}_t^\varepsilon(v)\right|^2 \longrightarrow \overline{K}_3(u,v)\left|\tilde{\psi}_t(u) - \tilde{\psi}_t(v)\right|^2 \text{ as } \varepsilon \to 0,$$

除去关于 $\nu\times\nu$ 的一个零测集。于是，由引理 2.3 的第 i) 和第 iv) 部分，存在常数 A 和 $C < \infty$，使得

$$\overline{K}_3^\varepsilon(u,v)\left|\bar{\varphi}_t^\varepsilon(u) - \bar{\varphi}_t^\varepsilon(v)\right|^2 \le A(\|\bar{\varphi}_0\|_{\overline{X}})^2\overline{K}_3^\varepsilon(u,v)\left(\overline{\Gamma}_\varepsilon(u,v)\right)^2 \le C\overline{K}_3(u,v)\left(\widehat{\Gamma}(u,v)\right)^2,$$

由此，根据引理 2.3 的第 iii) 部分以及控制收敛定理，可得：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^2}(\nu\times\nu)(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\overline{K}_3^\varepsilon(u,v)\left|\bar{\varphi}_t^\varepsilon(u) - \bar{\varphi}_t^\varepsilon(v)\right|^2 = \int_{\mathbb{R}^2}(\nu\times\nu)(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\overline{K}_3(u,v)\left|\tilde{\psi}_t(u) - \tilde{\psi}_t(v)\right|^2 < \infty.$$

因此，$\tilde{\psi}_t \in D(Q)$。

接下来我们回到原序列 (ε_n)。现在考虑来自空间 $C_c^{0,\alpha_0}(\mathbb{R})$ 的测试函数 ϕ，它们是在 $\mathbb{R}$ 上紧支撑的 α_0-Hölder 连续函数。该空间是 $L^2(\nu)$ 的一个稠密子空间，对所有 $\varepsilon > 0$，也是 $D(\overline{L}_3^\varepsilon)$ 的子空间，同时还是 $D(\underline{L}_3)$ 的子空间。于是，由于对所有 (u,v)，$\overline{K}_3^\varepsilon(u,v) \le K_3(u,v)$，且 $\in \mathbb{R}^2$ and $\int_{\mathbb{R}}\nu(\mathrm{d}v)K_3(u,v)\left|\phi(u) - \phi(v)\right|$ 可积，由控制收敛定理可得，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\overline{L}_3^\varepsilon\phi\right)(u) = \left(\overline{L}_3\phi\right)(u), \text{ pointwise as well as in } L^2(\nu).$$

此外，根据引理 2.3 的第 i 部分，对所有 $t \in [0, T^*]$，有如下结论：

$$\left|\left(\overline{L}_3^\varepsilon\bar{\varphi}_t^\varepsilon\right)(u)\right| \le C_1\int_{\mathbb{R}}\nu(\mathrm{d}v)\overline{K}_3^\varepsilon(u,v)\overline{\Gamma}^\varepsilon(u,v) \le C_1H(u), \tag{2.10}$$

其中常数 C_1 与 ε 无关，

$$H(u) = \sup_{\varepsilon>0}\int_{\mathbb{R}}\nu(\mathrm{d}v)\overline{K}_3^\varepsilon(u,v)\overline{\Gamma}^\varepsilon(u,v), \text{ and } H \in L^2(\nu).$$

于是有如下极限：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\phi, \overline{L}_3^\varepsilon\bar{\varphi}_t^\varepsilon\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\overline{L}_3^\varepsilon\phi, \bar{\varphi}_t^\varepsilon\right) = \left(\overline{L}_3\phi, \tilde{\psi}_t\right) = \tilde{Q}(\phi, \tilde{\psi}_t),$$

这里用到了 $\overline{L}_3^\varepsilon$ 的自伴性、此前得到的极限，以及 $\tilde{\psi}_t \in D(Q)$。然而，由 (2.10) 可得：

$$\left|\left(\phi, \overline{L}_3^\varepsilon\bar{\varphi}_t^\varepsilon\right)\right| \le C_2\|\phi\|_{L^2}\|H\|_{L^2}, \text{ where } C_2 \text{ is a constant independent of } \varepsilon.$$

这意味着

$$\left|\tilde{Q}(\phi, \tilde{\psi}_t)\right| \le C_2\|\phi\|_{L^2}\|H\|_{L^2}, \ \forall\phi \in C_c^{0,\alpha_0}(\mathbb{R}).$$

因此，映射 $\phi \mapsto Q(\phi, \tilde{\psi}_t)$ 可以从包含我们的测试函数的稠密子空间唯一地有界延拓到 $L^2(\nu)$，由此得出 $\tilde{\psi}_t \in D(L_3)$。然后，由于 L_3 的自伴性，对于任意 $\phi \in D(L_3)$，有 $\tilde{Q}(\phi, \tilde{\psi}_t) = \left(\overline{L}_3\phi, \tilde{\psi}_t\right) = \left(\phi, \overline{L}_3\tilde{\psi}_t\right)$。上述界关于 ε 一致，因此我们可以得出

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\phi', \overline{L}_3^\varepsilon\bar{\varphi}_t^\varepsilon\right) = \left(\phi', \overline{L}_3\tilde{\psi}_t\right), \ \forall\phi' \in L^2(\nu), \text{ i.e., } \overline{L}_3^\varepsilon\bar{\varphi}_t^\varepsilon \longrightarrow \overline{L}_3\tilde{\psi}_t \text{ weakly in } L^2(\nu), \forall t \in [0, T^*].$$

b现在，对于任意 $\overline{\psi} \in D(L_3)$ 和 $0 \le s \le t < T^*$，，我们有如下结论：

$$\begin{aligned}\partial_s\big(S_0(t-s)\widehat{\psi}, \bar{\varphi}_s^{\varepsilon}\big) &= \big(\overline{L}_3 S_0(t-s)\widehat{\psi}, \bar{\varphi}_s^{\varepsilon}\big) - \big(S_0(t-s)\widehat{\psi}, \overline{L}_3^{\varepsilon}\bar{\varphi}_s^{\varepsilon}\big) \\ &= \big(\overline{L}_3 S_0(t-s)\widehat{\psi}, \bar{\varphi}_s^{\varepsilon} - \tilde{\psi}_s\big) + \big(S_0(t-s)\widehat{\psi}, \overline{L}_3\tilde{\psi}_s - \overline{L}_3^{\varepsilon}\bar{\varphi}_s^{\varepsilon}\big) \longrightarrow 0, \text{ as } \varepsilon \to 0.\end{aligned}$$

在 s a 中的连续性 以及右侧各项在 ε 上的一致有界性，意味着我们可以
应用控制 收敛定理，从而得到

$$\int_0^t \mathrm{d}s\, \partial_s\big(S_0(t-s)\widehat{\psi}, \bar{\varphi}_s^{\varepsilon}\big) = \big(\widehat{\psi}, \bar{\varphi}_t^{\varepsilon}\big) - \big(S_0(t)\widehat{\psi}, \psi_0\big) \longrightarrow 0 \text{ as } \varepsilon \to 0.$$

由于我们知道 $(\mathrm{b}\psi, \bar{\varphi}_t^{\varepsilon}) \longrightarrow (\mathrm{b}\psi, \tilde{\psi}_t)$ 当 $\varepsilon \to 0$, 这意味着 $(\mathrm{b}\psi, \tilde{\psi}_t) = (\mathrm{b}\psi, S_0(t)\psi_0)$ 对任意 $\mathrm{b}\,\psi \in \mathcal{D}(L_3)$ 均成立。因此，$\tilde{\psi}_t = S_0(t)\psi_0$ 几乎处处成立。

□

3. 加权巴拿赫空间中 H¨older 连续函数解的平滑性

本节研究（2.1）中描述的线性化三波碰撞算子在某个巴拿赫空间中的性质，并证明相应的时间演化在该空间中具有平滑性质。该平滑性定理的证明依赖于其他一些结果，这些结果是在略有不同但相关的巴拿赫空间中证明的。

本节安排如下：首先陈述并简要解释主要平滑性结果以及导出该结果的定理；随后用两个小节详细证明这些定理。第一小节证明一个初值问题的解的存在性与唯一性。该初值问题由原始演化方程导出，定义在一个加权巴拿赫空间中，其特征是满足依赖于时间的 H¨older 型条件。第二小节考虑一个正则化演化方程，由此可证明该解实际上与在函数差空间中、具有相同初值所得到的解相同。因此，第一小节证明的结果蕴含原始演化方程的解具有平滑性。

我们首先考察原始演化方程：

$$\partial_t\psi_t(v) = -(L_3\psi_t)(v) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}w\, K_3(v,w)\big(\psi_t(v) - \psi_t(w)\big),$$

此处算子 L_3 现已改写为平直空间中不含权函数 ν 的核函数形式。请注意， L_3 是此前构造的 Friedrichs 扩张算子；我们现在将在上一节引入的巴拿赫空间中对其进行分析。于是，差函数 $\psi_t(v) - \psi_t(v-r)$ 随时间的演化满足

$$\begin{aligned}&\partial_t\left[\psi_t(v) - \psi_t(v-r)\right] \\ &= -\left[(L_3\psi_t)(v) - (L_3\psi_t)(v-r)\right] \\ &= -\left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w\, K_3(v,w)\left(\psi_t(v) - \psi_t(w)\right) - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w\, K_3(v-r,w)\left(\psi_t(v-r) - \psi_t(w)\right)\right].\end{aligned} \tag{3.1}$$

现在我们明确写出定义 K_3 的公式。

$$\begin{aligned}i)\ \text{When } v > w,\ \ K_3(v,w) &= 4\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{3}{2}}\ln(1+\mathrm{e}^{w})\frac{\mathrm{e}^{w} + 2\mathrm{e}^{-(v-w)}}{1+\mathrm{e}^{w}+\mathrm{e}^{-(v-w)}}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-(v-w)}}, \\ \text{and, } ii)\ \text{when } w > v,\ \ K_3(v,w) &= 4\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{3}{2}}\ln(1+\mathrm{e}^{w})\frac{\mathrm{e}^{v} + 2\mathrm{e}^{-(w-v)}}{1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-(w-v)}}\frac{\mathrm{e}^{-(w-v)}}{1-\mathrm{e}^{-(w-v)}}.\end{aligned}$$

为便于后续计算，我们将按下文所述拆分核函数 K_3。这样拆分是为了分离出一些不含线奇异性的项，因此这些项具有不同的渐近

行为。

When $v > w$, $K_3(v,w) = K_3^1(v,w) + K_3^2(v,w)$, where

$$K_3^1(v,w) = 4\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{3}{2}}\ln(1+\mathrm{e}^{w})\frac{\mathrm{e}^{w}+2\mathrm{e}^{-(v-w)}}{1+\mathrm{e}^{w}+\mathrm{e}^{-(v-w)}}\frac{\mathrm{e}^{-(v-w)}}{1-\mathrm{e}^{-(v-w)}},\ \text{and}$$

$$K_3^2(v,w) = 4\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{3}{2}}\ln(1+\mathrm{e}^{w})\frac{\mathrm{e}^{w}+2\mathrm{e}^{-(v-w)}}{1+\mathrm{e}^{w}+\mathrm{e}^{-(v-w)}}.$$

对于区域 $w > v$，在部分计算中我们将采用以下对 $K_3(v,\ w)$ 的拆分：

$$K_3(v,w) = \overline{K_3}^1(v,w) + \overline{K_3}^2(v,w),$$

where $\overline{K_3}^2(v,w) = K_3(v,w)e^{-\frac{1}{2}(w-v)}$, and $\overline{K_3}^1(v,w) = K_3(v,w)\left(1-e^{-\frac{1}{2}(w-v)}\right)$.

注意，部分 K_3^2 不包含任何线奇异性。此外，对变量 w 积分后，$K_3^2(v,\ w)$ 在 v 取较大的正值时呈现类似平方根函数的增长，而 $K_3^1(v,\ w)$ 则由于其中额外的指数衰减而不表现出这种行为。还需指出，在不存在点奇异性的情况下（即 v 不取任意大的负值时），$\overline{K_3}^1(v,\ w)$ 将导出有界积分。我们将对 $w > v$ 的核函数进行这种拆分，以便稍后剔除某些有界部分。上面出现的因子 1/2 是任意选取的，但一旦确定，它便决定了权函数 $\Gamma(v,\ r)$ 在 v 取较大的正值时的行为。现在我们以引理的形式写出核函数的一个至关重要但易于推导的性质。

引理 3.1. 核函数满足以下不等式：

$$\textit{when } v-r > w,\ K_3^1(v-r,w) \geq K_3^1(v,w) \textit{ and } K_3^2(v-r,w) \geq K_3^2(v,w) \quad \forall r \geq 0,$$

$$\textit{and when } w > v,\ K_3(v,w) \geq K_3(v-r,w),\ \textit{as well as, } \overline{K_3}^2(v,w) \geq \overline{K_3}^2(v-r,w)\ \ \forall r \geq 0.$$

证明。当 $v-r > w$ 时，第一行中的不等式显然可由核函数 K_3^1 和 K_3^2. 的公式得到。

当 $w > v$ 时，我们可以写出如下形式：

$$\frac{\partial}{\partial v}K_3(v,w) = K_3(v,w)b(v,w),$$

$$\text{where } b(v,w) = -\frac{3}{2}\frac{\mathrm{e}^{v}}{(1+\mathrm{e}^{v})\ln(1+\mathrm{e}^{v})} + 1 + \frac{1}{\mathrm{e}^{w-v}-1} + \frac{\mathrm{e}^{w-v}}{1+\mathrm{e}^{w}+\mathrm{e}^{w-v}} \geq 0.$$

Therefore $K_3(v,w) \geq K_3(v-r,w),\ \ \forall r \geq 0.$

类似地，$\overline{K_3}^2(v,w)\ \geq \overline{K_3}^2(v-r,w),\quad \forall r \geq 0$。 □

引理 3.1 使我们能够将方程 (3.1) 右端的一部分写成一个乘法

算子与一个保持正性的算子的组合，我们很快就会看到这一点。现在，我们先写出如下形式：

$$
\begin{aligned}
&[(L_3\psi_t)(v)-(L_3\psi_t)(v-r)]\\
&=\Bigg[\int_{-\infty}^{v-r}\mathrm{d}w\,K_3^1(v,w)\,(\psi_t(v)-\psi_t(w))+\int_{v-r}^{v}\mathrm{d}w\,K_3^1(v,w)\,(\psi_t(v)-\psi_t(w))\\
&\quad-\int_{v}^{\infty}\mathrm{d}w\,K_3(v,w)\,(\psi_t(w)-\psi_t(v))-\int_{-\infty}^{v-r}\mathrm{d}w\,K_3^1(v-r,w)\,(\psi_t(v-r)-\psi_t(w))\\
&\quad+\int_{v-r}^{v}\mathrm{d}w\,K_3(v-r,w)\,(\psi_t(w)-\psi_t(v-r))+\int_{v}^{\infty}\mathrm{d}w\,K_3(v-r,w)\,(\psi_t(w)-\psi_t(v-r))\Bigg]\\
&\quad+\Bigg[\int_{-\infty}^{v-r}\mathrm{d}w\,K_3^2(v,w)\,(\psi_t(v)-\psi_t(w))+\int_{v-r}^{v}\mathrm{d}w\,K_3^2(v,w)\,(\psi_t(v)-\psi_t(w))\\
&\quad-\int_{-\infty}^{v-r}\mathrm{d}w\,K_3^2(v-r,w)\,(\psi_t(v-r)-\psi_t(w))\Bigg],
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

其中最后两行不包含任何线奇异性。

为了证明本文的主要结果，我们需要分析上述算子。在开始分析之前，先定义时变权函数 $\Gamma_t(v,r)$，主定理将用它来表述：

$$
\Gamma_t(v,r)=\Big[\big(f(v-r)+f(v)\big)\exp\big(\mu\max\left(a,c_0v,v-r\right)\big)\Big]g_t(v,r),
\tag{3.3}
$$

其具有如下霍尔德型时变部分 g_t：

$$
\begin{aligned}
&g_t(v,r)=(1-\mathrm{e}^{-\kappa r})^{\gamma_t(v-r)},\ \gamma_t(v,r)=\gamma_0+\overline{a}(t)\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\beta(v-r)}},\\
&\overline{a}(t)=\frac{1}{8}\min(1,\bar{n})\frac{t}{1+t},\qquad \kappa\geq 7,\ 0<\gamma_0\leq 1/8,\ 1\leq\beta\leq\kappa/4.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

与时变霍尔德型条件相关的参数 β, κ 和 γ_0 的取值在附录 C 中说明。注意，在 $t=0$ 处，这恰好就是权函数 Γ_0，它刻画了分别在 (2.6) 和 (2.4) 中定义的巴拿赫空间Y 和 X，其指数为 γ_0。因此，本文的主要结果如下定理所示：

定理 3.2. 给定初始数据 $\psi_0\in X$，定义 $\overline{\Delta_0}(v,r)=\psi_0(v)-\psi_0(v-r)$，对所有 $(v,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$均成立，并且$\psi_t=S_0(t)\psi_0$。那么存在 $T^*>0$，使得对所有 $t\in[0,T^*]$，以下界成立：

$$
\left|\psi_t(v)-\psi_t(v-r)\right|\leq C\Gamma_t(v,r)\|\Delta_0\|_{\overline{Y}}\ \ \nu\text{-almost everywhere on }\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,
\tag{3.5}
$$

其中，C 是一个取决于权函数 Γ_t的参数的常数。

上述定理很容易转化为关于原始能量变量 x、y 在 $\mathbb{R}_+$中的表述，只需进行如下变量替换：$u=\ln(\mathrm{e}^x-1)$，$v=\ln(\mathrm{e}^y-1)$。所得表达式有些复杂，但通过考察差函数在某些感兴趣区域内的行为，我们可以理解该定理的含义。稍微滥用一下符号，我们仍用相同的符号 ψ、Γ_t 等表示变量替换后的相关量。那么，显然我们的初始数据必须来自一个函数巴拿赫空间，其中差函数 $\Delta_0(x,y)=\psi_0(x)-\psi_0(y)$由以下权函数控制：

$$
\max((\min(x,y))^{-\alpha},(\ln 2)^{-\alpha})\exp\left(\mu\max[a,c_0\max(x,y),\min(x,y)]\right)\left(1-\left(\frac{\mathrm{e}^{\min(x,y)}-1}{\mathrm{e}^{\max(x,y)}-1}\right)^{\kappa}\right)^{\gamma_0}.
$$

特别是，这意味着在原点附近，Δ_0 可由.....控制

$$
\max((\min(x,y))^{-\alpha},(\ln 2)^{-\alpha})\left(1-\left(\frac{\min(x,y)}{\max(x,y)}\right)^{\kappa}\right)^{\gamma_0},
$$

而在两个变量都远离原点的区域， Δ_0 相对于权函数.....有界

$$\exp\left(\mu \max[a, c_0 \max(x,y), \min(x,y)]\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa|x-y|}\right)^{\gamma_0}.$$

对于这类初始数据，上述定理指出，半群 S_0 经过时间 t 对初始数据的演化，会将“H¨older”指数 γ_0 提升至 γ_t，其中

$$\gamma_t(x,y) = \gamma_0 + \frac{\overline{a}(t)}{1 + \left(\mathrm{e}^{\min(x,y)} - 1\right)^{\beta}}.$$

因此，“H¨older”指数在原点处的提升最大，而当 $\min(x,y)$ 趋于无穷大时，提升则趋于零。

定理 3.2 是定理 2.5 与下文陈述的另外三个结果的直接推论。在列出这三个定理的陈述之前，我们先简要介绍其中所考虑的演化方程，以及得到这些结果所用的函数空间。这里我们只概述证明思路，构造的细节留待后文说明。

第一个定理研究的是由方程 (3.1) 推导出的演化方程。其主要思路是引入适当的截断函数 $\delta_1(v,r)$ 和 $\delta_2(v,r)$，以及截断参数 m_0 和 b_0；然后将线性算子分解为无界部分 L_u、有界部分 L_b 和扰动 L_δ，其中无界部分是一个势函数与一个保持正性的算子之和（见第 3.1 小节）。对于 $t \geq 0$ 和 $(v,r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$，我们定义变量

$$\Delta_t(v,r) = \psi_t(v) - \psi_t(v-r).$$

于是，方程（3.1）可改写为关于 Δ 变量的如下演化方程:

$$\begin{aligned}\partial_t \Delta_t = -\mathcal{L}\Delta_t &= -\mathcal{L}_u\Delta_t - \mathcal{L}_b\Delta_t - \mathcal{L}_\delta\Delta_t \\ &= -\mathcal{V}_u\Delta_t + \mathcal{K}_u\Delta_t - \mathcal{L}_b\Delta_t - \mathcal{L}_\delta\Delta_t,\end{aligned} \tag{3.6}$$

wh其中 $(\mathrm{L}_u\Delta_t)(v,r) = \mathrm{V}_u(v,r)\Delta_t(v,r) - (\mathrm{K}_u\Delta_t)(v,r)$，乘法算子 V_u 定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_u(v,r) = &\int_{-\infty}^{v-r-\delta_1} \mathrm{d}w\, K_3^1(v-r,w) + \int_{v+\delta_2}^{\infty} \mathrm{d}w\, K_3(v,w) + \int_{v-r+\delta_1}^{v} \mathrm{d}w\, K_3(v-r,w) \\ &+ \int_{v-r}^{v-\delta_2} \mathrm{d}w\, K_3^1(v,w) + \int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^2(v,w) + \int_{-\infty}^{v-r} \mathrm{d}w\, K_3^2(v-r,w).\end{aligned} \tag{3.7}$$

我们考虑（3.6）的如下杜哈梅尔积分形式:

$$\Delta_t = \mathrm{e}^{-t\mathcal{V}_u}\Delta_0 + \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u}\mathcal{K}_u[\Delta_s] - \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u}\mathcal{L}_b[\Delta_s] - \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u}\mathcal{L}_\delta[\Delta_s], \tag{3.8}$$

在巴拿赫空间 Y 中，函数属于 $C([0,T]\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+))$，其中某个 $T>0$ 满足有界性，并且关于 Γ_t 满足如下界:

$$\|\Delta\|_Y := \sup_{t\in[0,T]} \sup_{(v,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \frac{|\Delta_t(v,r)|}{\Gamma_t(v,r)} < \infty.$$

接下来，我们证明方程（3.8）的解存在唯一性结果。

定理 3.3. 存在 $T^* > 0$，其取值取决于方程（3.6）中使用的截断参数以及权函数 Γ_t 中出现的参数α, μ 和 c_0，使得以下结论成立:
给定初值 $\Delta_0 \in Y$，方程 (3.8) 存在一个解 Δ，对所有 $t \in [0,T^*]$ 均成立，使得

$$\|\Delta\|_Y = \sup_{t\in[0,T^*]} \sup_{(v,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \frac{|\Delta_t(v,r)|}{\Gamma_t(v,r)} < \infty.$$

该解在 Y 中唯一，且由下式给出

$$\Delta_t = (1-F)^{-1}\,\mathrm{e}^{-t\mathcal{V}_u}\Delta_0,$$

其中 F 是定义如下的线性算子

$$F[\Delta_t] = \int_0^t \mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u}\mathcal{K}_u[\Delta_s] - \int_0^t \mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u}\mathcal{L}_b[\Delta_s] - \int_0^t \mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u}\mathcal{L}_\delta[\Delta_s]. \tag{3.9}$$

在上述定理中，选取时间 T^*，使得 $\left|\int_0^t \mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u}\mathrm{L}_b[\Delta_s]\right|$ 足够小，从而保证算子 $(1-F)$ 在 Y. 中的可逆性。注意，$\psi_0 \in X$（如定理 3.2）意味着 $\Delta_0 \in \overline{Y}$，其中 $\Delta_0(v,\ r) = \psi_0(v) - \psi_0(v-r)$，$Y$是由 $C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$ 中关于式 (2.5) 定义的权函数 Γ_0 有界的函数构成的巴拿赫空间。然而，上述定理并不能保证：对于 Y 中的初始数据$\Delta_0(v,\ r) = \psi_0(v) - \psi_0(v-r)$，通过定理 3.3 得到的方程 (3.8) 的唯一解 Δ_t 仍然是ψ变量之差。定理 3.4 和命题 3.5 证明了这一点确实成立。

在陈述这些定理之前，我们先简要介绍其中所考虑的演化方程及其解。我们从与 (2.2) 中算子相关的正则化演化方程出发，

$$\partial_t\psi_t^\varepsilon(u) = -(L_3^\varepsilon\psi)(u) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}v\,K_3^\varepsilon(u,v)\big(\psi_t^\varepsilon(u) - \psi_t^\varepsilon(v)\big), \tag{3.10}$$

其中，L_3^ε现在用平直空间中的核函数 K_3^ε表示，不含权函数 ν。我们用 ε 标记该方程的解，以免稍后比较与不同算子（如 L_3和 L_3^ε）相关的解时产生混淆。对于初始数据 $\psi_0^\varepsilon \in X$，我们考虑 (3.10)，其中

$$X = \big\{h \in C(\mathbb{R}) : \|h\|_X < \infty\big\},\ \|h\|_X = \sup_{v\in R}\frac{|h(v)|}{\tilde{\Gamma}(v)}, \tag{3.11}$$

其中 Γ 在 (2.5) 中定义。

于是，定理 3.12 保证，对于所有 $t \geq 0$，以下列 (3.10) 的杜哈梅尔积分形式表示的唯一解 $\psi_t^\varepsilon \in X$存在：

$$\psi_t^\varepsilon = \mathrm{e}^{-tV^\varepsilon}\psi_0^\varepsilon + \int_0^t \mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{-(t-s)V^\varepsilon}K_u^\varepsilon[\psi_s^\varepsilon] + \int_0^t \mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{-(t-s)V^\varepsilon}K_b^\varepsilon[\psi_s^\varepsilon],$$

其中 V^ε 是一个 乘法算子，K_b^ε 是 $L^2(\nu)$ 上的有界算子，并且通过类似于 (3.6) 的拆分，可以将算子 L_3^ε 在 t 中以下形式：

$$L_3^\varepsilon\psi_t^\varepsilon = V^\varepsilon\psi_t^\varepsilon - K_u^\varepsilon\psi_t^\varepsilon - K_b^\varepsilon\psi_t^\varepsilon.$$

此类解的存在性 ψ_t^ε意味着差变量解的存在性 $D\psi_t^\varepsilon$，其中 $D\psi_t^\varepsilon(v,\ r) = \psi_t^\varepsilon(v) - \psi_t^\varepsilon(v-r)$，满足由 (3.10) 推导出的以下差分演化方程：

$$\partial_t D\psi_t^\varepsilon(v,r) = -(\tilde{\mathcal{L}}^\varepsilon D\psi_t^\varepsilon)(v,r) = -(\tilde{\mathcal{L}}_u^\varepsilon D\psi_t^\varepsilon)(v,r) - (\tilde{\mathcal{L}}_s^\varepsilon D\psi_t^\varepsilon)(v,r) - \mathcal{K}_b^\varepsilon[\psi_t^\varepsilon](v,r), \tag{3.12}$$

其中，线性算子 L^ε 再次被分解，按照 (3.6)，分为无界部分 L_u^ε、扰动 L_s^ε，以及部分 K_b^ε，该部分可用 $L^2(\nu)$-范数和 X-范数的 ψ_t^ε来界定。与之前一样，无界部分L_u^ε可以写成乘法算子 V^ε 与保持正性的积分算子 K_u^ε，之和 $\mathrm{L}_u^\varepsilon = \mathrm{V}^\varepsilon - \mathrm{K}_u^\varepsilon$，从而得到 (3.12) 的以下杜哈梅尔积分形式：

$$D\psi_t^\varepsilon = \mathrm{e}^{-t\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon}D\psi_0^\varepsilon + \int_0^t \mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{-(t-s)\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon}\tilde{\mathcal{K}}_u^\varepsilon D\psi_s^\varepsilon - \int_0^t \mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{-(t-s)\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon}\tilde{\mathcal{L}}_s^\varepsilon D\psi_s^\varepsilon - \int_0^t \mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{-(t-s)\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon}\tilde{\mathcal{K}}_b^\varepsilon[\psi_s^\varepsilon]. \tag{3.13}$$

接下来的定理将证明方程 (3.13) 的解的存在性与唯一性。

定理 3.4. 给定 $\varepsilon > 0$，考虑满足以下条件的初始数据 $\psi_0^\varepsilon \in X$

$$\|D\psi_0^\varepsilon\|_{\overline{Y}_\varepsilon} = \sup_{(v,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \frac{|\psi_0^\varepsilon(v) - \psi_0^\varepsilon(v-r)|}{\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)} < \infty,$$

$\overline{\Gamma}_\varepsilon$ 为式 (2.7) 中定义的权函数。则对所有 $t > 0$，方程 (3.13) 存在唯一解 $D\psi_t^\varepsilon$，其初值为 ψ_0^ε，且 $\mathrm{k}D\psi_t^\varepsilon\mathrm{k}_{\overline{Y}_\varepsilon} < \infty$。

下一个定理将解 $D\psi_t^\varepsilon$与定理 3.3 中针对 $t \in [0,T^*]$获得的解 Δ_t联系起来。在陈述该定理之前，我们先定义本结果所讨论的时间演化变量。该变量就是以下差函数，对所有 $t \in [0,T^*]$定义为

$$D_t^\varepsilon = D\psi_t^\varepsilon - \Delta_t. \tag{3.14}$$

由式 (3.6) 和式 (3.12) 可知（详情见第 3.2 小节），对于 $t \in [0,T^*]$，D_t 的时间演化由方程控制

$$\partial_t D_t^\varepsilon = -\tilde{\mathcal{L}}^\varepsilon D_t^\varepsilon - \tilde{\mathcal{L}}_0^\varepsilon[\Delta_t], \tag{3.15}$$

其中，算子 L^ε的定义与 L 完全相同，但以核函数 K_3^ε替代原核函数 K_3；算子 L_0^ε也具有与 L 相同的结构，但以 $K_3 - K_3^\varepsilon$替代 K_3。这些算子的显式表达式见第 3.2 小节。于是，下一个结果为

命题 3.5。设初始数据为 $\psi_0 \in X$。这意味着 $D\psi_0 = \Delta_0 \in \overline{Y}$和 $D_0 = 0$。那么，存在 $T^* > 0$以及方程（3.15）的唯一杜哈梅尔积分解 D_t^ε，使得对所有 $t \in [0,T^*]$，都有 $D_t^\varepsilon \in Y_\varepsilon$。此外，存在一个正常数 $Q < \infty$，它依赖于参数 α，κ和 γ_0，使得 $|D_t|$有如下上界：

$$|D_t^\varepsilon| \le Q\,(M\varepsilon_0)^p \ln\left(\min(M,\varepsilon_0^{-1})\right)\|\Delta\|_Y\overline{\Gamma}_\varepsilon,$$

其中 $p = p(\gamma_0) > 0$，正常数 $M < \infty$ 作为演化方程（3.6）中的截断参数，用于 Δ_t。

平滑　　定理 3.2 的结果现在可以非常直接地得到，如下所示。

定理 3.2 的证明。给定初始数据 $\psi_0 \in X$，由命题 3.5 和定理 2.5 可得以下 $\forall t \in [0,T^*]$:

$$\begin{aligned}\left|\left(\mathrm{e}^{-t\overline{L}_3}\psi_0\right)(v) - \left(\mathrm{e}^{-t\overline{L}_3}\right)\psi_0(v-r)\right| &= \lim_{\varepsilon_0\to 0}|D\psi_t^\varepsilon(v,r)| \qquad \nu\text{-almost everywhere}\\ &\le |\Delta_t(v,r)|\\ &\le C\|\Delta_0\|_{\overline{Y}}\Gamma_t(v,r),\end{aligned}$$

其中最后一行用到了定理 3.3，$C = \mathrm{k}(1-F)^{-1}\mathrm{k}_Y < \infty$并且很容易看出，$\mathrm{k}\mathrm{e}^{-t\mathcal{V}^\mu}\Delta_0\mathrm{k}_Y \le \mathrm{k}\Delta_0\mathrm{k}_{\overline{Y}}$。□

这里我们要对定理 3.2 中提到的时间 T^* 作一个重要说明。这个上界源自定理 3.3，其中使用条件 $t \le T^*$，使 $\left|\int_0^t \mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}^\mu}\mathrm{L}_b[\Delta_s]\right| < A(b_0,m_0,\mu,c_0)T^*\mathrm{k}\Delta\mathrm{k}_Y$足够小，从而保证 $(1-F)$ 可逆（见 3.1.1 中定理 3.3 的证明）。现在可以按如下方式将这一结果延拓到更长时间：我们先证明定理在 $t \in [0,T^*]$时成立，然后选取一个初始时刻$0 < t_0 < T^*$，并证明相应杜哈梅尔积分方程在$t \in [t_0, t_0+T^*]$上存在唯一解。每次这样的时间延拓，都会在定理 3.3 中得到的 Δ_t 公式里多出一个形如 $(1-F_1)^{-1}$ 的因子（这里 F_1 表示新杜哈梅尔方程中与 F 对应的算子）；只要乘积的范数有限，这一过程就可以继续。这也意味着，命题 3.5、定理 2.5，以及最终的主要平滑性结果定理 3.2，虽然都继承了定理 3.3 对 T^* 的依赖，也都可以延拓到更长时间。

接下来的各小节将推导 Δ_t、ψ_t^ε 和 D_t^ε 的演化方程，并证明定理 3.3、3.4 和命题 3.5。其中，定理 3.3 的证明最为精细，其他证明则依赖于与该证明中所用估计类似的估计。因此，我们先在下一小节详细说明如何得到 (3.6)，然后证明定理 3.3。

3.1. 具有时间依赖型 H¨older 条件的巴拿赫空间中的解的存在性与唯一性

3.1.1. 方程(3.6)的推导

如前所述，通过在差值的原始演化方程 (3.1) 中引入适当的截断函数 $\delta_1(v,\ r)$ 和 $\delta_2(v,\ r)$，即可得到 (3.6)。在定义这些截断函数之前，我们先说明重写 (3.1) 的思路。回想一下，我们最终希望求解演化方程的杜哈梅尔积分形式，其中利用势函数控制其余各项（参见 (3.8) 中的乘法算子 V_u ）。当我们将线性算子拆分为势 V_u、保持正性的部分 K_u、扰动 L_δ 和有界部分 L_b 时，我们希望使 V_u 尽可能大。我们从描述差值演化的原始方程 (3.1) 出发。于是，将右端（不带负号）重写为

$$
\begin{aligned}
&(L_3\psi_t)(v) - (L_3\psi_t)(v-r)\\
&= \int_{-\infty}^{v-r-\delta_1} \mathrm{d}w\ K_3^1(v-r,w)\,(\psi_t(v)-\psi_t(v-r)) - \int_{-\infty}^{v-r-\delta_1} \mathrm{d}w\ \left(K_3^1(v-r,w)-K_3^1(v,w)\right)(\psi_t(v)-\psi_t(w))\\
&\quad + \int_{v+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}w\ K_3(v,w)\,(\psi_t(v)-\psi_t(v-r)) - \int_{v+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}w\ \left(K_3(v,w)-K_3(v-r,w)\right)(\psi_t(w)-\psi_t(v-r))\\
&\quad + \int_{v+\delta_2}^{v+\delta_1} \mathrm{d}w\ K_3(v,w)\,(\psi_t(v)-\psi_t(v-r)) - \int_{v+\delta_2}^{v+\delta_1} \mathrm{d}w\ K_3(v,w)\,(\psi_t(w)-\psi_t(v-r))\\
&\quad + \int_{v-\delta_1}^{v-\delta_2} \mathrm{d}w\ K_3^1(v,w)\,(\psi_t(v)-\psi_t(v-r)) - \int_{v-\delta_1}^{v-\delta_2} \mathrm{d}w\ K_3^1(v,w)\,(\psi_t(w)-\psi_t(v-r))\\
&\quad + \int_{v-r}^{v-\delta_1} \mathrm{d}w\ K_3^1(v,w)\,(\psi_t(v)-\psi_t(v-r)) - \int_{v-r}^{v-\delta_1} \mathrm{d}w\ K_3^1(v,w)\,(\psi_t(w)-\psi_t(v-r))\\
&\quad + \int_{v-r+\delta_1}^{v} \mathrm{d}w\ K_3(v-r,w)\,(\psi_t(v)-\psi_t(v-r)) - \int_{v-r+\delta_1}^{v} \mathrm{d}w\ K_3(v-r,w)\,(\psi_t(v)-\psi_t(w))\\
&\quad + \Bigg\{ \int_{-\infty}^{v-r} \mathrm{d}w\ K_3^2(v-r,w)\,(\psi_t(v)-\psi_t(v-r)) - \int_{-\infty}^{v-r} \mathrm{d}w\ \left(K_3^2(v-r,w)-K_3^2(v,w)\right)(\psi_t(v)-\psi_t(w))\\
&\quad + \int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w\ K_3^2(v,w)\,(\psi_t(v)-\psi_t(v-r)) - \int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w\ K_3^2(v,w)\,(\psi_t(w)-\psi_t(v-r)) \Bigg\}\\
&\quad + \Bigg[\int_{v-r-\delta_1}^{v-r} \mathrm{d}w\ K_3^1(v,w)\,(\psi_t(v)-\psi_t(w)) - \int_{v-r-\delta_1}^{v-r} \mathrm{d}w\ K_3^1(v-r,w)\,(\psi_t(v-r)-\psi_t(w))\\
&\quad + \int_{v}^{v+\delta_1} \mathrm{d}w\ K_3(v-r,w)\,(\psi_t(w)-\psi_t(v-r)) - \int_{v}^{v+\delta_2} \mathrm{d}w\ K_3(v,w)\,(\psi_t(w)-\psi_t(v))\\
&\quad + \int_{v-\delta_2}^{v} \mathrm{d}w\ K_3^1(v,w)\,(\psi_t(v)-\psi_t(w)) + \int_{v-r}^{v-r+\delta_1} \mathrm{d}w\ K_3(v-r,w)\,(\psi_t(w)-\psi_t(v-r)) \Bigg].
\end{aligned}
$$

方括号内的最后三行构成了 L_δ 部分；只有将这些带有线奇异性的项分离出来后，算子的其余部分才能写成 $(V-K)$ 形式，其中 K 保持正性。现在我们转到 Δ 变量，对于所有 $(v,\ r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$，有 $\Delta_t(v,\ r)=\psi_t(v)-\psi_t(v-r)$，并将上述方程改写为关于 Δ_t 的形式：

$$
\partial_t\Delta_t = -\mathcal{L}\Delta_t,\quad \mathcal{L}\Delta_t = \mathcal{L}_{pp}\Delta_t + \mathcal{L}_\delta\Delta_t,\ \text{where}
$$

$$\mathcal{L}_\delta \Delta_t(v,r) = \int_{v-r-\delta_1}^{v-r} \mathrm{d}w\, K_3^1(v,w)\Delta_t(v,v-w) + \int_v^{v+\delta_1} \mathrm{d}w\, K_3(v-r,w)\Delta_t(w,w-v+r)$$
$$+ \int_{v-r}^{v-r+\delta_1} \mathrm{d}w\, K_3(v-r,w)\Delta_t(w,w-v+r) - \int_{v-r-\delta_1}^{v-r} \mathrm{d}w\, K_3^1(v-r,w)\Delta_t(v-r,v-r-w)$$
$$+ \int_{v-\delta_2}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^1(v,w)\Delta_t(v,v-w) - \int_v^{v+\delta_2} dw\, K_3(v,w)\Delta_t(w,w-v), \tag{3.16}$$

$$\text{and } \mathcal{L}_{pp}\Delta_t(v,r) = \mathcal{V}_u(v,r)\Delta_t(v,r) - \int_{-\infty}^{v-r-\delta_1} \mathrm{d}w\, \left(K_3^1(v-r,w) - K_3^1(v,w)\right)\Delta_t(v,v-w)$$
$$- \int_{v+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}w\, \left(K_3(v,w) - K_3(v-r,w)\right)\Delta_t(w,w-v+r)$$
$$- \int_{-\infty}^{v-r} \mathrm{d}w\, \left(K_3^2(v-r,w) - K_3^2(v,w)\right)\Delta_t(v,v-w) - \int_{v-r}^{v-\delta_1} \mathrm{d}w\, K_3^1(v,w)\Delta_t(w,w-v+r)$$
$$- \int_{v-r+\delta_1}^{v} \mathrm{d}w\, K_3(v-r,w)\Delta_t(v,v-w) - \int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^2(v,w)\Delta_t(w,w-v+r)$$
$$- \int_{v+\delta_2}^{v+\delta_1} \mathrm{d}w\, K_3(v,w)\Delta_t(w,w-v+r) - \int_{v-\delta_1}^{v-\delta_2} \mathrm{d}w\, K_3^1(v,w)\Delta_t(w,w-v+r). \tag{3.17}$$

势 V_u 已在 (3.7) 中定义。接下来要从 L_{pp} 中提取一个有界部分 L_b，如下所示：

$$\mathcal{L}_{pp}\Delta_t(v,r) = \mathcal{V}_u(v,r)\Delta_t(v,r) - \mathcal{K}_u\Delta_t(v,r) - \mathcal{L}_b\Delta_t(v,r),$$

其中，

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_b[\Delta_t](v,r)\\
=&-\mathbb{I}(v<-b_0)\int_{a_1}^{\infty}\mathrm{d}w\ \left(\overline{K_3}^{1}(v,w)-\overline{K_3}^{1}(v-r,w)\right)\Delta_t(w,w-v+r)\\
&-\mathbb{I}(v\geq b_0)\int_{v+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}w\ \left(\overline{K_3}^{1}(v,w)-\overline{K_3}^{1}(v-r,w)\right)\Delta_t(w,w-v+r)\\
&-\mathbb{I}(v-r<-b_0)\mathbb{I}(v>0)\int_{0}^{v}\mathrm{d}w\ K_3(v-r,w)\Delta_t(v,v-w)\\
&-\mathbb{I}(v-r\geq -b_0)\int_{v-r+\delta_1}^{v}\mathrm{d}w\ \overline{K_3}^{1}(v-r,w)\Delta_t(v,v-w)\\
&-\mathbb{I}(v<-m_0)\int_{v-r}^{v-\min(r,-v-b_0)}\mathrm{d}w\ K_3^1(v,w)\Delta_t(w,w-v+r)\\
&-\mathbb{I}(-m_0<v<m_0)\int_{v-r}^{v}\mathrm{d}w\ K_3^2(v,w)\Delta_t(w,w-v+r)\\
&-\mathbb{I}(v-r\leq -m_0)\int_{-\infty}^{v-r-\tilde{r}}\mathrm{d}w\ \left(K_3^2(v-r,w)-K_3^2(v,w)\right)\Delta_t(v,v-w)\\
&-\mathbb{I}(-m_0<v-r<m_0)\int_{-\infty}^{v-r}\mathrm{d}w\ \left(K_3^2(v-r,w)-K_3^2(v,w)\right)\Delta_t(v,v-w)\\
&-\mathbb{I}(v-r\geq m_0)\Bigg[\mathbb{I}(v\leq 3r)\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}w\ \left(K_3^2(v-r,w)-K_3^2(v,w)\right)\Delta_t(v,v-w)\\
&+\mathbb{I}(v>3r)\int_{c_0v}^{v-r}\mathrm{d}w\ \left(K_3^2(v-r,w)-K_3^2(v,w)\right)\Delta_t(v,v-w)\Bigg]\\
&-\mathbb{I}(v\leq -m_0)\mathbb{I}(v+r>-b_0)\int_{v-r}^{2v+b_0}\mathrm{d}w\ K_3^2(v,w)\Delta_t(w,w-v+r)\\
&-\mathbb{I}(v\geq m_0)\Bigg[\mathbb{I}(v\leq r)\int_{v-r}^{v}\mathrm{d}w\ K_3^2(v,w)\Delta_t(w,w-v+r)\\
&+\mathbb{I}(0<v-r<c_0v)\int_{c_0^{-1}(v-r)}^{v}\mathrm{d}w\ K_3^2(v,w)\Delta_t(w,w-v+r)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

其中 $a_1=a/c_0$，以及公式中 L_b 的表达式第 7 行出现的 $\tilde{r}$，定义如下：

$$
\begin{aligned}
\tilde{r}&=\max(-v-b_0,r), &&\forall v<-b_0,\\
&=\max(-b_0-v+r,0), &&\forall v\geq -b_0.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

在后续计算中，我们取 $b_0\geq 10$ 和 $m_0\geq \max(2a_1,\ b_0+2)$。注意，每当 $v\geq -b_0,\ \tilde{r}=r-b_0-v,$ 时，由于仅在 $v-r\leq -m_0$ 时才使用此截断。我们还注意到，引理 3.1 保证 K_u 和 L_b 都保持正性。

上述公式对所有正函数 δ_1 和 δ_2均成立。随后，根据要求选择这些函数，使得 $|\mathrm{L}_\delta\Delta_s|$相对于 $\mathrm{k}\Delta\mathrm{k}_Y\mathrm{V}_u\Gamma_s$足够“小”（参见引理 3.7 中的估计）。下面写出这些函数的显式形式。

$$
\begin{aligned}
\delta_1(v,r)&=\frac{(1-\mathrm{e}^{-\alpha r})^{\frac{4}{\gamma_0}}}{M\exp(\frac{\mu'}{\gamma_0}\max(a_1,(v-r)))}\\
\delta_2(v,r)&=\frac{(1-\mathrm{e}^{-\alpha r})^{\frac{4}{\gamma_0}}}{M\exp(\frac{\mu'}{\gamma_0}\max(a_1,v))},
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

其中，$\mu' > \mu$ 和 M 用作某种“调节参数”，以使这些截断函数足够“小”。这种“小量性”会传递到 $\mathrm{L}_\delta[\Delta_t](v, r)$，后者由在长度为 δ_1 和 δ_2 的区间上的奇异积分构成。我们并不太在意常数 M 的具体取值。它相当大，而只要能够作出这样的选择 $0 < M < \infty$ 就足够了。

在结束关于方程（3.6）推导的这一部分之前，有必要谈谈为何需要使用两个不同的截断函数。暂且用 δ 代替截断函数 δ_1 和 δ_2。来看 L_δ 中的项 $\int_v^{v+\delta} \mathrm{d}w\, K_3(v,w)\Delta_t(w, w-v)$。注意，当变量 v 取较大的正值时，表达式

$$\int_v^{v+\delta} \mathrm{d}w\, K_3(v,w)\Gamma_t(w,w-v) = \int_0^{\delta} \mathrm{d}r'\, K_3(v, v+r')\,(f(v)+f(v+r'))\,\mathrm{e}^{\mu \max(a, v, c_0(v+r'))} g_t(v+r', r'),$$

相较于 $(\mathrm{V}_u\Gamma_t)(v,r)$ 多出一个因子 $\mathrm{e}^{\mu(1-c_0)v}$。因此，要使这一项受 $\mathrm{V}_u\Gamma_t$ 控制，唯一的办法是在此处所用截断函数 δ 的定义中加入一个与 v 有关的反向依赖。这解释了 (3.20) 中 δ_2 定义里的 v 依赖。注意，按照这种方式定义截断函数后，多出的因子 $\mathrm{e}^{\mu(1-c_0)v}$ 会被抵消。

现在注意，式 (3.7) 中定义的势 $\mathrm{V}_u(v,\ r)$ 的表现为

$$\mathcal{V}_u(v,r) \simeq \bar{n}\Big((\ln(1+\mathrm{e}^{v-r}))^{-1/2} \ln \delta_1^{-1} + (\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{-1/2} \ln \delta_2^{-1} + \sqrt{\max(1,v)}\Big)$$

当 v 取较大的正值时，$\ln\ \delta_2^{-1}$ 有一部分的表现类似于 $\ln v$。为了使证明定理 3.3 时所用的主要估计（见引理 3.6）成立，$\mathrm{L}_u[\Gamma_t](v,\ r) = \mathrm{V}_u(v,\ r)\Gamma_t(v,\ r) - \mathrm{K}_u[\Gamma_t](v,\ r)$ 必须与 $\mathrm{V}_u(v,\ r)\Gamma_t(v,\ r)$ 具有相同的渐近行为。从引理 3.6 的证明可以清楚地看出，点奇异性中出现的自变量必须与乘在它前面的 $\ln \delta^{-1}$ 中的自变量相同，否则就会得到形如 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(v-r)}\ \ln\ v$ 的项，从而导致我们的估计在区域 $v \gg 0, v-r \ll 0$ 内失效。因此，δ_1 和 δ_2 必须是两个不同的函数，如式 (3.20) 所定义。

3.1.2. 方程 (3.6) 的解：定理 3.3 的证明

第 3.1 小节的这一部分安排如下：我们首先陈述定理 3.3 的证明所依据的三个引理；然后给出该定理的证明；最后证明上述引理。这三个引理涉及对 (3.6) 中出现的三个算子 K_u、L_δ 和 L_b 的控制。下面直接陈述这些引理。

引理 3.6。 存在一个 $q_0 > 0$，其取决于参数 $\alpha, c_0, \mu', \gamma_0$，使得以下界成立：

$$\mathcal{L}_u\Gamma_s + \dot{\Gamma}_s = \mathcal{V}_u\Gamma_s - \mathcal{K}_u\Gamma_s + \dot{\Gamma}_s \geq \frac{q_0}{\ln M}\mathcal{V}_u\Gamma_s.$$

引理 3.7。存在一个 $q_1 > 0$，其取决于参数 γ_0 和 κ，使得以下界成立：

$$|\mathcal{L}_\delta\Delta_s| \leq \frac{q_1(\kappa,\gamma_0)}{M^{\gamma_0}\ln M}\|\Delta\|_Y\left(\mathcal{V}_u\Gamma_s + \dot{\Gamma}_s\right).$$

引理 3.8。有界线性算子 L_b 满足

$$|\mathcal{L}_b\Delta_s| \leq A(b_0, m_0, \mu, c_0)\|\Delta\|_Y\Gamma_s,$$

对于某个 $A(b_0,\ m_0,\ \mu,\ c_0) > 0$。

现在，我们基于上述引理写出定理 3.3 的证明。

定理 3.3 的证明。给定初始数据 $\Delta_0 \in \overline{X}$，我们回顾 Δ_t 的演化方程的杜哈梅尔积分形式 (3.8)：

$$\begin{aligned}\Delta_t =& \mathrm{e}^{-t\mathcal{V}_u}\Delta_0 + F[\Delta_t]\\ =& \mathrm{e}^{-t\mathcal{V}_u}\Delta_0 + \int_0^t \mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u}\mathcal{K}_u[\Delta_s] - \int_0^t \mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u}\mathcal{L}_b[\Delta_s] - \int_0^t \mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u}\mathcal{L}_\delta[\Delta_s],\end{aligned}$$

我们注意到，引理 3.6 蕴含以下上界：

$$\mathcal{K}_u\Gamma_s \le \left(1-\frac{q_0}{\ln M}\right)\left(\mathcal{V}_u\Gamma_s+\dot{\Gamma}_s\right),$$

这意味着我们可以写成

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u}\mathcal{K}_u[\Delta_s]\right| &\le \|\Delta\|_Y \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u}\mathcal{K}_u\Gamma_s \\ &\le \left(1-\frac{q_0}{\ln M}\right)\|\Delta\|_Y \int_0^t \mathrm{d}s\, \partial_s\left(\mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u}\Gamma_s\right) \\ &\le \left(1-\frac{q_0}{\ln M}\right)\|\Delta\|_Y\Gamma_t, \end{aligned} \tag{3.21}$$

其中，在第一行中我们用到了 K_u 保持正性这一事实。同样地，引理 3.7 给出以下估计：

$$\left|\int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u}\mathcal{L}_\delta[\Delta_s]\right| \le \frac{q_1}{M^{\gamma_0}\ln M}\|\Delta\|_Y\Gamma_t. \tag{3.22}$$

最后我们注意到，对于所有 $s'>0$，$\mathrm{V}_u\Gamma_{s'}+¤\Gamma_{s'}>0$，这意味着

$$\int_s^t \mathrm{d}s'\partial_{s'}\left(\mathrm{e}^{-(t-s')\mathcal{V}_u}\Gamma_{s'}\right)>0,\ \forall s\in(0,t),\ \text{implying}\ \Gamma_t > \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u}\Gamma_s.$$

于是引理 3.8 蕴含

$$\left|\int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u}\mathcal{L}_b[\Delta_s]\right| \le A(b_0,m_0,\mu,c_0)T\|\Delta\|_Y, \qquad \forall t\in[0,T],\ T>0. \tag{3.23}$$

结合 (3.21)、(3.22) 和 (3.23)，不难看出

$$|F\Delta_t| \le \|\Delta\|_Y\Gamma_t\left(1-\frac{q_0}{\ln M}+AT+\frac{q_1}{M^{\gamma_0}\ln M}\right), \tag{3.24}$$

其中 q_0 和 q_1 不依赖于 M，显然可以将 $M<\infty$ 取得足够大，使得以下结论成立：

$$0<T^*<\frac{1}{A\ln M}\left(q_0-\frac{q_1}{M^{\gamma_0}}\right),\ \text{for some}\ T^*\in\mathbb{R}_+.$$

现在按上述方式选取了 M，显然，对于 $0<t\le T^*$, $|F\Delta_t|<\mathrm{k}\Delta\mathrm{k}_Y\Gamma_t$，即 $\mathrm{k}F\mathrm{k}_Y<1$。相应的纽曼级数因此收敛，从而得到杜哈梅尔积分方程的如下唯一解：

$$\Delta_t=(1-F)^{-1}\,\mathrm{e}^{-t\mathcal{V}_u}\Delta_0,\ \forall 0<t\le T^*.$$

□

注意，正如我们在第 3.1 小节开始之前已经提到的，上述估计可以延拓到更长时间。现在我们继续证明上述引理。我们先证明引理 3.7 和引理 3.8，最后再证明更为复杂的引理 3.6。

引理 3.7 的证明。 Γ_s 的时间导数为

$$\dot{\Gamma}_s(v,r)=-\frac{1}{8}\min(1,\bar{n})\frac{1}{1+e^{\beta(v-r)}}\cdot\frac{1}{(1+s)^2}\ln(1-e^{-\kappa r})^{-1}\Gamma_s(v,r), \qquad s>0. \tag{3.25}$$

由 V_u 的定义（3.7），不难看出

$$\begin{aligned}&\mathcal{V}_u(v,r) \geq 2\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-1/2}\left[\ln M+\ln(1-\mathrm{e}^{-r})^{-1}\right],\\ &\text{so that, } \mathcal{V}_u(v,r)\Gamma_s(v,r)+\dot{\Gamma}_s(v,r) > \bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-1/2}\left[\ln M+\ln(1-\mathrm{e}^{-r})^{-1}\right]\Gamma_s(v,r).\end{aligned} \tag{3.26}$$

根据定义 (3.16)，我们有：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\delta\Delta_s(v,r) = &\int_0^{\delta_1}\mathrm{d}r'\ K_3^1(v,v-r-r')\Delta_s(v,r+r') + \int_0^{\delta_1}\mathrm{d}r'\ K_3(v-r,v+r')\Delta_s(v+r',r+r')\\ &+\int_0^{\delta_1}\mathrm{d}r'\ K_3(v-r,v-r+r')\Delta_s(v-r+r',r') - \int_0^{\delta_1}\mathrm{d}r'\ K_3^1(v-r,v-r-r')\Delta_s(v-r,r')\\ &+\int_0^{\delta_2}\mathrm{d}r'\ K_3^1(v,v-r')\Delta_s(v,r') - \int_0^{\delta_2}\mathrm{d}r'\ K_3(v,v+r')\Delta_s(v+r',r').\end{aligned}$$

我们将对其中两项进行估计。其余各项可以用类似的方法进行估计。

$$\begin{aligned}i)\ \int_0^{\delta_1}\mathrm{d}r'\ |K_3^1(v,v-r-r')\Delta_s(v,r+r')| &\leq \|\Delta\|_Y\int_0^{\delta_1}\mathrm{d}r'\ K_3^1(v,v-r-r')\Gamma_s(v,r+r')\\ &\leq 4\bar{n}\|\Delta\|_Y\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r)}\left(f(v-r)+f(v)\right)\kappa\left(\ln(1+\mathrm{e}^v)\right)^{-\frac{1}{2}}\times\\ &\qquad\times\int_0^{\delta_1}\mathrm{d}r'\ \mathrm{e}^{-r-r'}\left(1-\mathrm{e}^{-r-r'}\right)^{\gamma_s(v-r)-1}\\ &\leq \frac{6\kappa\bar{n}}{\gamma_0}\|\Delta\|_Y\Gamma_s(v,r)\left(\ln(1+e^v)\right)^{-\frac{1}{2}}\delta_1^{\gamma_s(v,r)},\\ ii)\ \int_0^{\delta_2}\mathrm{d}r'\ |K_3(v,v+r')\Delta_s(v+r',r')| &\leq \|\Delta\|_Y\int_0^{\delta_2}\mathrm{d}r'\ K_3(v,v+r')\Gamma_s(v+r',r')\\ &\leq 4\bar{n}\|\Delta\|_Y\left(\ln(1+\mathrm{e}^v)\right)^{-\frac{1}{2}}\kappa\left(f(v-r)+f(v)\right)\times\\ &\qquad\times\int_0^{\delta_2}\mathrm{d}r'\ \mathrm{e}^{-r'}\left(1-\mathrm{e}^{-r'}\right)^{\gamma_s(v)-1}\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0(v+r'),v)}\\ &\leq \frac{6\kappa\bar{n}}{\gamma_0}\|\Delta\|_Y\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\left(f(v-r)+f(v)\right)\left(\ln(1+\mathrm{e}^v)\right)^{-\frac{1}{2}}\delta_2^{\gamma_0}.\end{aligned}$$

以类似的方式估计其余各项，我们可以写出如下上界：

$$|\mathcal{L}_\delta[\Delta_s](v,r)| \leq \|\Delta\|_Y\frac{p_1\kappa}{\gamma_0M^{\gamma_0}}\bar{n}\left(\ln(1+e^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-e^{-\alpha r}\right)^3\Gamma_s(v,r),$$

其中 p_1 为一个数值常数。显然，

$$|\mathcal{L}_\delta[\Delta_s](v,r)| \leq \|\Delta\|_Y\frac{q_1(\kappa,\gamma_0)}{M^{\gamma_0}\ln M}\left(\mathcal{V}_u\Gamma_s(v,r)+\dot{\Gamma}_s(v,r)\right),\quad \forall(v,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\ \text{where } q_1=\frac{2p_1\kappa}{\gamma_0}.$$

□

根据有界算子 L_b 的定义 (3.18)，引理 3.8 是显然的。

引理 3.8 的证明。由定义 (3.18) 可知，$\mathrm{L}_b\Delta_s(v,r)$ 不包含任何点奇异性或线奇异性。此外，被积函数中的指数衰减保证了积分的有限性。通过直接计算即可得到该引理中的界。□

现在我们来讨论最关键的估计，即引理 3.6 中的估计。该引理的证明在很大程度上依赖于 H¨older 型条件的某些性质，该条件用于 Γ_t 的定义 (3.3) 中。这些性质

列于附录 C（并在其中得到证明）。由于计算相当复杂，我们将在正式写出证明之前，先概述证明的大致思路。

引理 3.6 的核心思路是证明，对于所有 $(v,r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$，$(\mathrm{L}_u\Gamma_s)(v,r)$ 与 $\mathrm{V}_u(v,r)\Gamma_s(v,r)$,具有相同的渐近行为。首先注意到，势 $\mathrm{V}_u(v,r)$ 在 $(-\infty)$ 处呈指数增长，在 $r=0$ 处具有线奇异性，并在 $+\infty$ 处呈平方根函数式增长，有些类似于函数

$$V'(v,r) \simeq \bar{n}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(v-r)}\ln(2+1/r) + \sqrt{\max(1,v)}\right).$$

为了证明 $\mathrm{L}_u\Gamma_s$ 具有相同的行为，我们将先把它分解成不同的部分，然后说明这些部分如何在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 的不同区域产生正确的渐近行为。我们写作

$$\mathcal{L}_u[\Gamma_t](v,r) = I_1[\Gamma_t](v,r) + I_2[\Gamma_t](v,r) + I_3[\Gamma_t](v,r) + I_4[\Gamma_t](v,r). \tag{3.27}$$

如下所列的 I_i's $(i \in \{1,2,3,4\})$ 的显式公式表明，这些项由积分构成，并根据积分区间及其所含奇异性的类型分组。例如，I_3 中的项不含任何线奇异性，而 I_1 和 I_2 中的项则含有线奇异性。另一方面，I_4 中的积分还具有额外的“小量”，因为它们是在长度至多为 δ_1 的区间上积分的；而在 I_2 中，积分则是在长度至多为 r 的区间上进行的。很快就会清楚，三组 I_1、I_2 和 I_3 在 $\mathrm{L}_u\Gamma_t$ 中产生不同类型的渐近行为：

- I_1 产生了一个具有点奇异性的项，其表现为 $(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r}))^{-1}/2\ln(1-\mathrm{e}^{-r})^{-1}$，即在$r \ll 1$时占主导地位。
- 由 I_2 可得到一个具有点奇异性的项，该项在 $r \gg 1$时占主导地位，其表现为 $(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r}))^{-1}/2(1-\mathrm{e}^{-r})^3$。
- 最后，群 I_3 在 $v \gg 1$ 时为 $\mathrm{L}_u\Gamma_t$ 贡献了必要的 $\sqrt{v}$ 增长。

$I_i[\Gamma_t]$由以下公式给出：

$$\begin{aligned}
I_1[\Gamma_t](v,r) = {} & \int_{r+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}r' \left[K_3^1(v-r, v-r-r')\Gamma_t(v,r) + K_3^1(v, v-r')\Gamma_t(v,r') - K_3^1(v-r, v-r-r')\Gamma_t(v, r+r')\right] \\
& + \mathbb{I}(v < -b_0)\Bigg[\int_{r+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}r'\, K_3(v, v+r')\Gamma_t(v,r) - \mathbb{I}(a_1 - v \le r+\delta_1)\left\{\int_{r+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}r'\, \overline{K_3}^2(v, v+r')\Gamma_t(v+r', r+r')\right. \\
& \left. - \int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\, K_3(v-r, v-r+r')\Gamma_t(v-r+r', r') - \int_{r+a_1-v}^{\infty} \mathrm{d}r'\, \overline{K_3}^2(v-r, v-r+r')\Gamma_t(v-r+r', r')\right\} \\
& + \mathbb{I}(a_1 - v > r+\delta_1)\left\{\int_{r+\delta_1}^{a_1-v} \mathrm{d}r'\, K_3(v, v+r')\Gamma_t(v+r', r+r') + \int_{a_1-v}^{\infty} \mathrm{d}r'\, \overline{K_3}^2(v, v+r')\Gamma_t(v+r', r+r')\right. \\
& \left. - \int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\, K_3(v-r, v-r+r')\Gamma_t(v-r+r', r') - \int_{r+a-v}^{\infty} \mathrm{d}r'\, \overline{K_3}^2(v-r, v-r+r')\Gamma_t(v-r+r', r')\right\}\Bigg] \\
& + \mathbb{I}(v \ge -b_0)\Bigg[\int_{r+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}r'\, K_3(v, v+r')\Gamma_t(v,r) - \int_{r+\delta_1}^{\infty} dr'\, \overline{K_3}^2(v, v+r')\Gamma_t(v+r', r+r') \\
& + \int_{r+\delta_1}^{\infty} dr'\, \overline{K_3}^2(v-r, v-r+r')\Gamma_t(v-r+r', r')\Bigg],
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$
\begin{aligned}
I_2[\Gamma_t](v,r) &= \int_{\delta_1}^{r} \mathrm{d}r'\, K_3^1(v, v-r')\,(\Gamma_t(v,r) - \Gamma_t(v-r', r-r')) + \int_{\delta_1}^{r} \mathrm{d}r'\, K_3^1(v-r, v-r-r')\,(\Gamma_t(v,r) - \Gamma_t(v, r+r')) \\
&+ \int_{\delta_1}^{r} \mathrm{d}r'\, K_3(v-r, v-r+r')\Gamma_t(v,r) - \Bigg[\mathbb{I}(v-r < -b_0) \int_{\delta_1}^{\min(r, r-v)} \mathrm{d}r'\, K_3(v-r, v-r+r')\Gamma_t(v, r-r') \\
&\quad + \mathbb{I}(v-r \geq -b_0) \int_{\delta_1}^{r} \mathrm{d}r'\, \overline{K_3}^2(v-r, v-r+r')\Gamma_t(v, r-r') \Bigg] \\
&+ \int_{\delta_1}^{r} \mathrm{d}r'\, K_3(v, v+r')\Gamma_t(v,r) - \mathbb{I}(v < -b_0) \Bigg[\mathbb{I}(r+\delta_1 \leq a_1 - v) \int_{\delta_1}^{r} \mathrm{d}r'\, K_3(v, v+r')\Gamma_t(v+r', r+r') \\
&\quad + \mathbb{I}(a_1 - v < r + \delta_1) \Bigg\{ \int_{\delta_1}^{\min(r, a_1-v)} \mathrm{d}r'\, K_3(v, v+r')\Gamma_t(v+r', r+r') \\
&\quad + \mathbb{I}(a_1 - v < r) \int_{a_1-v}^{r} \mathrm{d}r'\, \overline{K_3}^2(v, v+r')\Gamma_t(v+r', r+r') \Bigg\} \Bigg] \\
&- \mathbb{I}(v \geq -b_0) \int_{\delta_1}^{r} \mathrm{d}r'\, \overline{K_3}^2(v, v+r')\Gamma_t(v+r', r+r'), \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3[\Gamma_t](v,r) &= \int_0^{\infty} \mathrm{d}r'\, K_3^2(v-r, v-r-r')\Gamma_t(v,r) + \int_0^{r} \mathrm{d}r'\, K_3^2(v, v-r')\Gamma_t(v,r) \\
&\quad - \mathbb{I}(v-r \leq -m_0) \int_0^{\tilde{r}} \Big(K_3^2(v-r, v-r-r') - K_3^2(v, v-r-r') \Big) \Gamma_t(v, r+r') \\
&\quad - \mathbb{I}(v-r \geq m_0) \Bigg[\mathbb{I}(v \leq 3r) \int_0^{v-r} \mathrm{d}r'\, \Big(K_3^2(v-r, v-r-r') - K_3^2(v, v-r-r') \Big) \Gamma_t(v, r+r') \\
&\qquad + \mathbb{I}(v > 3r) \int_{v-r-c_0 v}^{\infty} \mathrm{d}r'\, \{ K_3^2(v-r, v-r-r') - K_3^2(v, v-r-r') \} \Gamma_t(v, r+r') \Bigg] \\
&\quad - \mathbb{I}(v \leq -m_0) \Bigg[\mathbb{I}(v+r < -b_0) \int_0^{r} \mathrm{d}r'\, K_3^2(v, v-r') \Gamma_t(v-r', r-r') \\
&\qquad + \mathbb{I}(v+r \geq -\tilde{b}_0) \int_0^{-v-b_0} \mathrm{d}r'\, K_3^2(v, v-r') \Gamma_t(v-r', r-r') \Bigg] \\
&\quad - \mathbb{I}(v \geq m_0) \Bigg[\mathbb{I}(0 < v-r < c_0 v) \int_{v - c_0^{-1}(v-r)}^{r} \mathrm{d}r'\, K_3^2(v, v-r') \Gamma_t(v-r', r-r') \\
&\qquad + \mathbb{I}(v-r \geq c_0 v) \int_0^{r} \mathrm{d}r'\, K_3^2(v, v-r') \Gamma_t(v-r', r-r') \Bigg] \\
&= I_3^{(1)}[\Gamma_t](v,r) + I_3^{(2)}[\Gamma_t](v,r), \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

其中，I（1）3 包含被积函数中含有 $K_3^2(v-r,\ v-r-r')$ 的所有项，而 I（2）3 则包含含有 $K_3^2(v,\ v-r')$ 的项，

最后，

$$
\begin{aligned}
I_4[\Gamma_t](v,r) = &\int_r^{r+\delta_1} \mathrm{d}r'\; K_3^1(v-r, v-r-r')\left(\Gamma_t(v,r) - \Gamma_t(v,r+r')\right) + \int_r^{r+\delta_1} \mathrm{d}r'\; K_3(v, v+r')\Gamma_t(v,r) \\
&- \mathbb{I}(v < -b_0)\left[\mathbb{I}(r \le a_1 - v < r+\delta_1)\left(\int_r^{a_1-v} \mathrm{d}r'\; K_3(v, v+r')\Gamma_t(v+r', r+r')\right.\right. \\
&\left.\left. + \int_{a_1-v}^{r+\delta_1} \mathrm{d}r'\; \overline{K_3}^2(v, v+r')\Gamma_t(v+r', r+r')\right) + + \mathbb{I}(a_1 - v < r)\int_r^{r+\delta_1} \mathrm{d}r'\; \overline{K_3}^2(v, v+r')\Gamma_t(v+r', r+r') \right. \\
&\left. + \mathbb{I}(a_1 - v \ge r+\delta_1)\int_r^{r+\delta_1} \mathrm{d}r'\; K_3(v, v+r')\Gamma_t(v+r', r+r')\right] \\
&- \mathbb{I}(v \ge -b_0)\int_r^{r+\delta_1} \mathrm{d}r'\; \overline{K_3}^2(v, v+r')\Gamma_t(v+r', r+r') \\
&+ \int_{\delta_2}^{\delta_1} \mathrm{d}r'\; K_3(v, v+r')\left(\Gamma_t(v,r) - \Gamma_t(v+r', r+r')\right) + \int_{\delta_2}^{\delta_1} \mathrm{d}r'\; K_3^1(v, v-r')\left(\Gamma_t(v,r) - \Gamma_t(v,r')\right). \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

现在我们来证明引理 3.6。请注意，本证明中提到的计算细节见附录 D。

引理 3.6 的证明。该引理的证明关键在于为 $\mathrm{L}_u\Gamma_s$ 获得一个合适的下界。我们将概述得到此下界的估计的一般方案，只明确写出在不同区域中产生正确渐近行为的那些项，其余细节请参见附录 D。我们写作

$$
\begin{aligned}
\Gamma_t = \Gamma_t^1 + \Gamma_t^2, \text{where } \Gamma_t^1(v,r) &= f(v-r)\exp\left(\mu\max(a, c_0 v, v-r)\right) g_t(v,r), \\
\text{and } \Gamma_t^2(v,r) &= f(v)\exp\left(\mu\max(a, c_0 v, v-r)\right) g_t(v,r).
\end{aligned}
$$

现在我们逐一考察各个 $I_i[\Gamma_t]$。

i) $I_1[\Gamma_t](v,\ r)$：很容易得到 $I_1[\Gamma_t](v,\ r)$ 的如下下界：

$$
I_1[\Gamma_t](v,r) = I_1[\Gamma_t^1](v,r) + I_1[\Gamma_t^2](v,r) \ge \mathcal{J}_0[\Gamma_t^1 + \Gamma_t^2](v,r) + \mathcal{J}_1[\Gamma_t^1](v,r) + \mathcal{J}_2[\Gamma_t^2](v,r) + \mathcal{I}[\Gamma_t^1 + \Gamma_t^2](v,r),
$$

其中，J_0 表示对角线附近的主导项，其定义为

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J}_0[\Gamma_t^1 + \Gamma_t^2](v,r) \\
&= f(v-r)\left[\mathrm{e}^{\mu\max(a, c_0 v, v-r)}\int_{r+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}r'\; K_3^1(v-r, v-r-r')\left(g_t(v,r) + g_t(v,r') - g_t(v,r+r')\right)\right. \\
&\left. + \int_{r+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}r'\; K_3(v, v+r')\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\mathrm{e}^{\mu\max(a, c_0(v+r'), v-r)}\left(g_t(v,r) + g_t(v-r+r', r') - g_t(v+r', r+r')\right)\right] \\
&+ f(v)\mathrm{e}^{\mu\max(a, c_0 v, v-r)}\int_{r+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}r'\; K_3^1(v-r, v-r-r')\left(g_t(v,r) + g_t(v,r') - g_t(v,r+r')\right) \\
&+ \int_{r+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}r'\; K_3(v, v+r')\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'} f(v+r')\mathrm{e}^{\mu\max(a, c_0(v+r'), v-r)}\left(g_t(v,r) + g_t(v-r+r', r')\right. \\
&\qquad \left. - g_t(v+r', r+r')\right). \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

$\mathrm{J}_1, \mathrm{J}_2$ 和 I 仅包含此类积分：其被积函数中不含因子 $\left(1-\mathrm{e}^{-r'}\right)^{-1}$，因此在对角线附近相对于 J_0 是次主导的。其中一些积分为负，必须由其他部分控制。这些项的显式公式以及说明如何控制它们的计算见附录 D。接着，附录 C 中的引理 C.3 告诉我们：

$$
\int_{r+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}r'\; K_3^1(v-r, v-r-r')\left(g_t(v,r) + g_t(v,r') - g_t(v,r+r')\right) \ge 0.4 g_t(v,r)\int_{r+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}r' K_3^1(v-r, v-r-r'),
$$

这给出了一个 $(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r}))^{-1/2}\ln(1-\mathrm{e}^{-r})^{-1}$ 项，体现了 $r \ll 1$。的正确渐近行为。ii) $I_2[\Gamma_t](v,\ r)$：我们将 $I_2[\Gamma_t](v,\ r)$ 写为 $= I_2[\Gamma_t^1](v,\ r) + I_2[\Gamma_t^2](v,\ r)$。当点奇异性占主导时，$I_2[\Gamma_t^1](v,\ r)$ 的下界决定了远离对角线区域中的正确渐近行为。这个界为：

$$
\begin{aligned}
I_2[\Gamma_t^1](v,r) \geq\ & \mathbb{I}(v-r<-b_0)e^{\mu\max\{a,c_0v\}}\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ \Big[K_3(v-r,v-r+r')\left(f(v-r)-(\ln(1+e^{v-r+r'}))^{-\alpha}\right)\\
&-K_3^1(v-r,v-r-r')\left(f(v-r-r')-f(v-r)\right)\Big]g_t(v,r)\\
&+\mathbb{I}(v<-b_0)\mathbb{I}(r>a_1-v)f(v-r)\int_{a_1-v}^{r}\mathrm{d}r'\ K_3(v,v+r')\left(\mathrm{e}^{\mu a}-\mathrm{e}^{\mu c_0 v}\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}-\mu c_0)r'}\right)g_t(v,r)\\
&+\mathbb{I}(v\geq -b_0)\mathbb{I}(v-r<-b_0)\Big[f(v-r)\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ K_3(v,v+r')\left(\mathrm{e}^{\mu\max\{a,c_0v\}}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\mathrm{e}^{\mu\max\{a,c_0(v+r')\}}\right)g_t(v,r)\\
&+\int_{\min(r,r-v)}^{r}\mathrm{d}r'\ K_3(v-r,v-r+r')(\ln(1+e^{v-r+r'}))^{-\alpha}\left(2g_t(v,r)-g_t(v,r+r')\right)\Big]+I_2^-[\Gamma_t^1](v,r),
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

其中 $I_2^-[\Gamma_t^1](v,r)$ 包含来自 $I_2[\Gamma_t^1]$ 的所有负部；$I_2^-[\Gamma_t^1]$ 中的积分包含形如 $(g_t(.,\ r+r')\ -g_t(.,\ r)$ 的差，这会产生额外的指数衰减 $\mathrm{e}^{-\kappa r}$，如附录 D 中所述，因此在远离对角线的区域内是“较小的”。

$r \gg 1$ 的相关点奇异性主导行为，来自 $I_2[\Gamma_t](v,r)$ 的下界 (3.33) 的第一项。我们将此项记为 C_3。于是

$$
\begin{aligned}
&\overline{C}_3[\Gamma_t^1](v,r)\\
=&\mathbb{I}(v-r<-b_0)\mathrm{e}^{\mu\max\{a,c_0v\}}g_t(v,r)\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ \Big[K_3(v-r,v-r+r')\left(f(v-r)-(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'}))^{-\alpha}\right)\\
&\qquad\qquad -K_3^1(v-r,v-r-r')\left(f(v-r-r')-f(v-r)\right)\Big]\qquad (3.34)\\
\geq&\mathbb{I}(v-r<-b_0)4\bar{n}\Gamma_t^1(v,r)\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}}\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ \frac{\mathrm{e}^{v-r}+2\mathrm{e}^{-r'}}{1+\mathrm{e}^{v-r}+\mathrm{e}^{-r'}}\mathrm{e}^{-r'}\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{1-\alpha}\times\\
&\times\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}\right)^{1-2\alpha}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{248}{125}(1-2\alpha)r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\right)\left[1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{\alpha}\right]
\end{aligned}
$$

iii) $I_3[\Gamma_t](v,r)$：v 取较大正值时的类似平方根的增长来自 $I_3[\Gamma_t](v,r)$，如下所示：

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{I}(v-r\geq -m_0)I_3^1[\Gamma_t](v,r)+\mathbb{I}(v\geq m_0)I_3^2[\Gamma_t](v,r)\\
\geq&\mathbb{I}(v\geq m_0)\bar{n}\Gamma_t(v,r)\Bigg[\mathbb{I}(v-r\leq 0)(\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{\ln 2}{\ln(1+\mathrm{e}^{v})}\right)^2\right)\\
&+\mathbb{I}(0<v-r<c_0v)\frac{3}{2}(\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{v-r}{c_0v}\right)^2\right)\\
&+\mathbb{I}(v-r\geq m_0)\Bigg\{\mathbb{I}(v-r\leq\frac{2}{3}v)\ \frac{4}{3}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v})}\right)^2\\
&\quad+\mathbb{I}(v-r>\frac{2}{3}v)\ 2\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{c_0v})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^2\right)\Bigg\}\Bigg]\\
&+\mathbb{I}(-m_0<v-r<m_0)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r)}f(v-r)g_t(v,r)\int_0^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')
\end{aligned}
$$

附录 D 中的计算给出了 $\mathrm{L}_u\Gamma_s$ 的以下下界，其中常数的取值适当

M：

$$\mathcal{L}_u\Gamma_t(v,r) = I_1[\Gamma_t](v,r) + I_2[\Gamma_t](v,r) + I_3^{(1)}[\Gamma_t](v,r) + I_3^{(2)}[\Gamma_t](v,r) + I_4[\Gamma_t](v,r) \geq G[\Gamma_t](v,r), \text{ where}$$

$$\begin{aligned} G[\Gamma_t](v,r) = \bar{n}\Gamma_t(v,r)\Bigg[& \mathbb{I}(v-r \leq -b_0)\bar{b}_1(\alpha)\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\mathrm{e}^{-3\alpha r}\right)^3 \\ & + \frac{1}{2}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}}\ln\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{7}{2}(r+\delta_1)}\right)^{-1} + \mathbb{I}(-m_0 < v-r < m_0)\frac{1}{4}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}} \\ & + \mathbb{I}(0 < v-r < m_0)\frac{1}{8}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{\frac{1}{2}} + \mathbb{I}(0 < v < m_0)\frac{1}{2}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v})}\right)^2\right) \\ & + \mathbb{I}(v \geq m_0)b_3(c_0)\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg], \end{aligned}$$

其中 $\bar{b}_1(\alpha)$ 和 $b_3(c_0)$ 是严格大于零的有界正数。接着，对 ¤ $\Gamma_s(v,\ r)$ 使用公式（3.25），我们可以得出

$$\mathcal{L}_u\Gamma_s(v,r) + \dot{\Gamma}_s(v,r) \geq G[\Gamma_s](v,r) + \dot{\Gamma}_s(v,r) \geq \overline{G}[\Gamma_s](v,r),$$

其中

$$\begin{aligned} \overline{G}[\Gamma_s](v,r) = \bar{n}\Gamma_s(v,r)\Bigg[& \left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-1/2}\left\{\frac{3}{8}\ln\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{7}{2}(r+\delta_1)}\right)^{-1} + \mathbb{I}(-m_0 < v-r < 0)\frac{1}{4}\right. \\ & \left. + \mathbb{I}(v-r \leq -b_0)\overline{b}_1(\alpha)\left(1-\mathrm{e}^{-3\alpha r}\right)^3\right\} \\ & + \mathbb{I}(0 \leq v-r < m_0)\frac{1}{8}\left(\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-1/2} + \left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{1/2}\right) \\ & + \mathbb{I}(v > 0)\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\mathbb{I}(0 < v < m_0)\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v})}\right)^2\right) + \mathbb{I}(v \geq m_0)b_3(c_0)\right\}\Bigg]. \end{aligned}$$

由势 V_u 的定义（3.7）可知，存在正数 $C_1 = C_1(\mu',\ \gamma_0,\ a_1)$ 和 $C_1 = C_1(\mu',\ \gamma_0,\ a_1)$，使得对所有 $(v,\ r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$，以下结论成立：

$$\begin{aligned} & \bar{n}C_1\left[\left(\ln(1+e^{v})\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\ln(1+e^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}}\ln\left(2M(1-e^{-\alpha r})^{-1}\right)\right] \\ & \leq \mathcal{V}_u(v,r) \leq \bar{n}\overline{C}_1\left[\left(\ln(1+e^{v})\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\ln(1+e^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}}\ln\left(2M(1-e^{-\alpha r})^{-1}\right)\right]. \end{aligned}$$

显然，存在依赖于 $\alpha,\ c_0,\ \mu',\ \gamma_0,\ b_0$ 的 $q_0 > 0$，使得：

$$\overline{G}[\Gamma_s](v,r) \geq \frac{q_0}{\ln M}\mathcal{V}_u(v,r)\Gamma_s(v,r),\ \ \forall (v,r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,$$

这就得到了本引理所述的下界。 □

3.2. 正则化演化方程的解：

回顾正则化演化方程

$$\partial_t\psi_t(v) = -(L_3^{\varepsilon}\psi_t)(v) = -\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}w\ K_3^{\varepsilon}(v,w)\big(\psi_t(v)-\psi_t(w)\big), \text{ where}$$

$$K_3^{\varepsilon}(v,w) = K_3^{\varepsilon(\max(v,w))}(v,w) = K_3(v,w)\frac{1-\mathrm{e}^{-\min(\varepsilon(v,w),|v-w|)}}{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon(v,w)}},$$

$$\varepsilon(v,w) = \varepsilon(\max(v,w)) = \varepsilon_0\exp\left(-\frac{\mu'}{\gamma_0}\max(a_1,\max(v,w))\right).$$

回忆一下， $\mu' > \mu$ 以及参数 μ、 $a_1 = a/c_0$ 和 γ_0 的允许取值已在 (2.5) 中定义。本小节的目标是证明定理 3.4 和定理 3.5。为便于后续计算，我们可以像第 2 节开头那样对核函数进行拆分（参见引理 3.1）。

When $v > w$, $K_3^{\varepsilon}(v,w) = K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,w) + K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,w)$, where
$K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,w) = K_3^1(v,w)\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\min(\varepsilon(v),v-w)}}{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon(v)}}$, $K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,w) = K_3^2(v,w)\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\min(\varepsilon(v),v-w)}}{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon(v)}}$.
Similarly in the region $w > v$, $K_3^{\varepsilon}(v,w) = \overline{K_3}^{1,\varepsilon(w)}(v,w) + \overline{K_3}^{2,\varepsilon(w)}(v,w)$, where
$\overline{K_3}^{2,\varepsilon(w)}(v,w) = \overline{K_3}^{2}(v,w)\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\min(\varepsilon(w),w-v)}}{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon(w)}}$, and $\overline{K_3}^{1,\varepsilon(w)}(v,w) = \overline{K_3}^{1}(v,w)\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\min(\varepsilon(w),w-v)}}{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon(w)}}$.

与引理 3.1 类似，对于正则化情形，我们有如下结果：

引理 3.9. 对所有 $r > 0$，核函数满足以下不等式：

i) For all $w < v - r$, $K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) > K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,w)$, *whenever either* $v \le a_1$ *or* $v - w \ge \varepsilon(v-r)$, *and* $K_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) > K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,w)$, *whenever* $v - r - w \ge \varepsilon(v-r)$.
ii) For all $w > v$, $K_3^{\varepsilon(w)}(v,w) > K_3^{\varepsilon(w)}(v-r,w)$, $\overline{K_3}^{2,\varepsilon(w)}(v,w) > \overline{K_3}^{2,\varepsilon(w)}(v-r,w)$.

证明. i) 当 $w < v - r$ 时，我们定义 $r' = v - r - w$。于是：

$$
\begin{aligned}
&K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v-r, v-r-r') - K_3^{1,\varepsilon(v)}(v, v-r-r') \\
&\ge 4\bar{n}(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r}))^{-3/2}\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})\frac{\mathrm{e}^{v-r-r'}+2\mathrm{e}^{-r'}}{1+\mathrm{e}^{v-r-r"}+\mathrm{e}^{-r'}}\left[\frac{\mathrm{e}^{-r'}}{1-\mathrm{e}^{-\max(r',\varepsilon(v-r))}} - \frac{\mathrm{e}^{-r-r'}}{1-\mathrm{e}^{-\max(r+r',\varepsilon(v))}}\right]
\end{aligned}
$$

注意，这两个条件中的每一个， $v \le a_1$ （即 $\varepsilon(v) = \varepsilon(v-r)$）和 $r + r' \ge \varepsilon(v-r)$，都意味着 $\max(r+r', \varepsilon(v)) \ge \max(r', \varepsilon(v-r))$，因此，只要满足其中任一条件，就有 $K^{1,}{}_3{}^{\varepsilon(v-r)}(v-r, v-r-r') > K^{1,}{}_3{}^{\varepsilon(v)}(v, v-r-r')$。

只要 $v-r-w \ge \varepsilon(v-r)$，就有 $K^{2,}{}_3{}^{\varepsilon(v-r)}(v-r, w) = K_3^2(v-r, w)$，且 $K^{2,}{}_3{}^{\varepsilon(v)}(v, w) = K_3^2(v, w)$，因此相应的不等式由引理 3.1 得证。

ii) 对于 $w > v$，我们有：

$$
\begin{aligned}
&K_3^{\varepsilon(w)}(v,w) - K_3^{\varepsilon(w)}(v-r,w) \ge \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\max(\varepsilon(w),w-v)}}\left(\overline{f}(v,w) - \overline{f}(v-r,w)\right)\ln(1+\mathrm{e}^{w}), \\
&\text{where } \overline{f}(v,w) = (\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{-3/2}\frac{\mathrm{e}^{v}+2\mathrm{e}^{-(w-v)}}{1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-(w-v)}}\mathrm{e}^{-(w-v)}. \\
&\text{Then } \frac{\partial}{\partial v}\overline{f}(v,w) \ge \overline{f}(v,w)\left(-\frac{3}{2}\frac{\mathrm{e}^{v}}{(1+\mathrm{e}^{v})\ln(1+\mathrm{e}^{v})} + \frac{3+\mathrm{e}^{v}}{2+\mathrm{e}^{v}}\right) > 0.
\end{aligned}
$$

因此，最后一个不等式显然成立。 □

请记住，定理 3.4 讨论的是差变量 $D\psi$。为了证明该差变量的存在性，我们将首先证明上述 ψ 方程存在唯一解。如前所述，我们将用 ε 标记正则化方程的解。

接下来，我们首先证明，对于适当的初值 ψ_0^{ε}，方程 (3.10) 存在唯一的杜哈梅尔积分解。随后，我们将证明关于差变量的类似存在唯一性结果，即定理 3.4。本小节的最终结果是命题 3.5。本小节中的证明与上一小节中引理 3.6–3.8 和定理 3.3 的证明基本相同。

3.2.1. 正则化解 ψ_t^ε

考虑初始数据 ψ_0^ε 在巴拿赫空间 X 中依照 (3.10) 进行的时间演化，其中 X 定义于 (3.11)。注意，由于对所有 $\varepsilon > 0$，$X \subset D(\overline{L_3^\varepsilon})$，定理 2.2 保证存在唯一的（在 $L^2(\nu)$ 中）解 $\varphi_t = S_\varepsilon(t)\psi_0^\varepsilon$。演化方程首先改写如下:

$$\begin{aligned}\partial_t\psi_t^\varepsilon(v) &= -\Big[\int_0^\infty \mathrm{d}r'\, K_3^{\varepsilon(v)}(v, v-r') + \int_0^\infty \mathrm{d}r'\, K_3^{\varepsilon(v+r')}(v, v+r')\Big]\psi_t^\varepsilon(v) \\ &\quad + \int_0^\infty \mathrm{d}r'\, K_3^{\varepsilon(v)}(v, v-r')\psi_t^\varepsilon(v-r') + \int_0^\infty \mathrm{d}r'\, K_3^{\varepsilon(v+r')}(v, v+r')\psi_t^\varepsilon(v+r') \\ &= -V^\varepsilon(v)\psi_t^\varepsilon(v) + (K_u^\varepsilon\psi_t^\varepsilon)(v) + (K_b^\varepsilon\psi_t^\varepsilon)(v), \qquad (3.35)\\ \text{where } V^\varepsilon(v) &= \int_0^\infty \mathrm{d}r'\, K_3^{\varepsilon(v)}(v, v-r') + \int_0^\infty \mathrm{d}r'\, K_3^{\varepsilon(v+r')}(v, v+r'),\end{aligned}$$

K_u^ε 由以下部分组成: 核函数的无界部分，且 K_b^ε 是 L^2-有界的。它们的显式公式为
g见附　　ppend录 E。

我们将证明，对于所有$t > 0$，上述演化方程在 X中存在唯一的杜哈梅尔积分解，其形式为

$$\psi_t^\varepsilon = \mathrm{e}^{-tV^\varepsilon}\psi_0^\varepsilon + \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)V^\varepsilon}K_u^\varepsilon[\psi_s^\varepsilon] + \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)V^\varepsilon}K_b^\varepsilon[\psi_s^\varepsilon]. \qquad (3.36)$$

在证明 (3.36) 之前，我们先考虑下面这个方程。它与 (3.36) 的区别仅在于：有界部分 L^2 K_b 中的函数 ψ_s^ε 被 L^2 解 φ_s 所取代:

$$\psi_t^\varepsilon = \mathrm{e}^{-tV^\varepsilon}\psi_0^\varepsilon + \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)V^\varepsilon}K_u^\varepsilon[\psi_s^\varepsilon] + \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)V^\varepsilon}K_b^\varepsilon[S_\varepsilon(s)\psi_0^\varepsilon]. \qquad (3.37)$$

方程 (3.37) 只是演化方程的杜哈梅尔积分形式:

$$\partial_t\psi_t^\varepsilon(v) = -V^\varepsilon(v)\psi_t^\varepsilon(v) + (K_u^\varepsilon\psi_t^\varepsilon)(v) + K_b^\varepsilon[S_\varepsilon(t)\psi_0^\varepsilon](v). \qquad (3.38)$$

这里需要注意，由于本情形中的线奇异性已被正则化，(3.35) 和 (3.38) 各项中出现的积分对于 ψ_t^ε 中的 X 都是绝对收敛的，并且给出 $L^2(\nu)$ 中的函数（构成 $(K_u^\varepsilon\psi_t^\varepsilon)(v)$ 和 $(K_b^\varepsilon\psi_t^\varepsilon)(v)$ 的积分已在附录 E 中明确写出）。因此很容易验证，(3.36) 和 (3.37) 在 X 中的解（若存在）关于时间强可微，并分别满足积分微分方程 (3.35) 和 (3.38)。因此，它们也是 X 中与 (3.35) 和 (3.38) 相对应的抽象柯西问题的经典解，并且在每一点都满足这些演化方程。回忆一下，根据定理 2.2，我们也有一个 $L^2(\nu)$ 中与 (3.38) 相关的柯西问题的经典解。接下来的引理表明，给定初始数据 $\psi_0^\varepsilon \in X$，在 X 中得到的 (3.38) 的解必定几乎处处等于这个 L^2 解。

引理 3.10. 给定初值 $\psi_0^\varepsilon \in X$，假设 $\psi_t^\varepsilon \in X$ 对所有 $t > 0$ 都满足方程 (3.37)。　　n

$$\psi_t^\varepsilon = S_\varepsilon(t)\psi_0^\varepsilon \quad \nu\text{-almost evrywhere.}$$

证明。 $\psi_t^\varepsilon \in X \subset D(L_3^\varepsilon)$，对所有 $t > 0$ 均成立。这意味着，给定任意 $t > 0$，我们有，对所有 $s \in (0,\ t)$

$$\begin{aligned}\partial_s\left(S_\varepsilon(t-s)\psi_s^\varepsilon\right) &= S_\varepsilon(t-s)\left[L_3^\varepsilon\psi_s^\varepsilon + \partial_s\psi_s^\varepsilon\right] \\ &= S_\varepsilon(t-s)\left[\left(V^\varepsilon\psi_s^\varepsilon - K_u^\varepsilon\psi_s^\varepsilon - K_b^\varepsilon\psi_s^\varepsilon\right) - \left(V^\varepsilon\psi_s^\varepsilon - K_u^\varepsilon\psi_s^\varepsilon - K_b^\varepsilon\varphi_s\right)\right] \\ &= S_\varepsilon(t-s)K_b^\varepsilon[\varphi_s - \psi_s^\varepsilon],\end{aligned}$$

其中 $\varphi_s = S_\varepsilon(s)\psi_0^\varepsilon = \mathrm{e}^{-sL_3^\varepsilon}\psi_0^\varepsilon$。对上述内容积分，得

$$\psi_t^\varepsilon - \varphi_t = \int_0^t \mathrm{d}s\, S_\varepsilon(t-s) K_b^\varepsilon[\varphi_s - \psi_s^\varepsilon].$$

因此，根据闵可夫斯基积分不等式，$\|\psi_t^\varepsilon - \varphi_t\|_{L^2} \le \int_0^t \mathrm{d}s \|K_b^\varepsilon\|_{L^2} \|\psi_s^\varepsilon - \varphi_s\|_{L^2}$。

然后，根据 Gr¨onwall 不等式，$\|\psi_t^\varepsilon - \varphi_t\|_{L^2} = 0$，即对 $\psi_t^\varepsilon = \varphi_t$ ν 几乎处处有 $\forall t > 0$。 □

引理 3.11. 存在一个数 $s_0 > 0$，它取决于参数 α，μ'，γ_0，使得：

$$V^\varepsilon \tilde{\Gamma} - K_u^\varepsilon \tilde{\Gamma} \ge \frac{s_0}{\ln \varepsilon_0^{-1}} V^\varepsilon \tilde{\Gamma}.$$

证明。根据势 V^ε 的定义，不难看出，存在正数 $C_2 = C_2(\mu', \gamma_0) > 1$ 和 $C_2 = C_2(\mu', \gamma_0)$，使得以下结论成立：

$$\begin{aligned} &\bar{n}\left[\frac{1}{4}(\ln(1+e^v))^{-\frac{1}{2}} \ln \varepsilon_0^{-1} + C_2 (\ln(1+e^v))^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\le V^\varepsilon(v) \\ &\le \overline{C}_2 \bar{n}\left[(\ln(1+e^v))^{-\frac{1}{2}} \ln \varepsilon_0^{-1} + (\ln(1+e^v))^{\frac{1}{2}}\right], \quad \forall v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

由附录 E 中的 E.1，我们得到以下下界：

$$V^\varepsilon(v)\tilde{\Gamma}(v) - (K_u^\varepsilon \tilde{\Gamma})(v) \ge \tilde{\Gamma}(v)\left[\mathbb{I}(v \le 0) p_2(\alpha) (\ln(1+\mathrm{e}^v))^{-\frac{1}{2}} + \mathbb{I}(v > 0) p_3 (\ln(1+\mathrm{e}^v))^{\frac{1}{2}}\right],$$

其中 p_2 和 p_3 是有正下界的正常数。

于是显然，对于某个 $s_0 = s_0(\alpha, \mu', \gamma_0) > 0$，我们可以写成

$$V^\varepsilon(v)\tilde{\Gamma}(v) - (K_u^\varepsilon \tilde{\Gamma})(v) \ge \frac{s_0}{\ln \varepsilon_0^{-1}} V^\varepsilon(v)\tilde{\Gamma}(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}.$$

□

定理 3.12. 给定初始数据 $\psi_0^\varepsilon \in X$，对于所有 $t > 0$，都存在一个方程 (3.36) 的唯一解 ψ_t^ε，使得：

$$\|\psi^\varepsilon\|' = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|\psi_t^\varepsilon\|_X = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{v \in \mathbb{R}} \frac{|\psi_t^\varepsilon(v)|}{\tilde{\Gamma}(v)} < \infty.$$

证明. 为了证明该定理的结论，我们首先证明：给定初始数据 $\psi_0^\varepsilon \in X$，存在方程 (3.37) 的唯一解 ψ_t^ε，使得 $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|\psi_t^\varepsilon\|_X < \infty$。给定这样的一个解，根据引理 3.10 即可推出该定理的结论。

$$\text{Let } F_1[\overline{\psi}_t] = \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)V^\varepsilon} K_u^\varepsilon[\psi_s^\varepsilon], \text{ and, } B_t[\psi_0^\varepsilon] = \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)V^\varepsilon} K_b^\varepsilon[S_\varepsilon(s)\psi_0^\varepsilon].$$

于是我们可以将 (3.37) 写成

$$\psi_t^\varepsilon = \mathrm{e}^{-tV^\varepsilon}\psi_0^\varepsilon + F_1[\psi_t^\varepsilon] + B_t[\psi_0^\varepsilon].$$

由引理 3.11 以及 K_u^ε保持正性这一事实，我们有：

$$\begin{aligned} |F_1[\psi_t^\varepsilon](v)| &\le \|\psi^\varepsilon\|' \left(1 - \frac{s_0}{\ln \varepsilon_0^{-1}}\right) \int_0^t \mathrm{d}s\, \partial_s \left(\mathrm{e}^{-(t-s)V^\varepsilon}\tilde{\Gamma}\right)(v) \\ &\le \|\psi^\varepsilon\|' \left(1 - \frac{s_0}{\ln \varepsilon_0^{-1}}\right) \tilde{\Gamma}(v), \qquad \forall v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

因此 $\mathrm{k}F_1\mathrm{k}' < 1$，相应的纽曼级数收敛。

F_1 的可逆性意味着我们可以写成

$$\psi_t^\varepsilon = (1-F_1)^{-1}\left[\mathrm{e}^{-tV^\varepsilon}\psi_0^\varepsilon + B_t[\psi_0^\varepsilon]\right],$$

这显然是与初值 ψ_0^ε。对应的方程 (3.37) 的唯一解。

于是，根据引理 3.10，对所有 $t \geq 0$，$\psi_t^\varepsilon = S_\varepsilon(t)\psi_0^\varepsilon$ ν-几乎处处成立，因此我们可以在 L^2-有界积分中用 ψ_t^ε 替换 $S_\varepsilon(t)\psi_0^\varepsilon$，并写成

$$\int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)V^\varepsilon} K_b^\varepsilon[\mathrm{e}^{-sL_3^\varepsilon}\psi_0^\varepsilon] = \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)V^\varepsilon} K_b^\varepsilon[\psi_s^\varepsilon].$$

因此，ψ_t^ε是方程 (3.36) 的解。该解的唯一性显而易见，因为任何这样的解也是方程 (3.37) 的解。□

3.2.2. Re 差变量的正则化演化方程及唯一解的存在性 $D\psi_t^\varepsilon$和唯一解的存在性 n

上述结果保证了差变量 $D\psi^\varepsilon$ 的存在，其中 $D\psi_t^\varepsilon(v,\ r) = \psi_t^\varepsilon(v) - \psi_t^\varepsilon(v-r)$，它属于定义在 $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$ 上的连续函数巴拿赫空间 Z，使得

$$\|D\psi^\varepsilon\|_Z = \sup_{\substack{t>0\\(v,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}} \frac{|D\psi_t^\varepsilon(v,r)|}{\overline{\Gamma}(v,r)} < \infty,$$

其中

$$\overline{\Gamma}(v,r) = (f(v)+f(v-r))\,\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r)}.$$

给定 $\psi_0^\varepsilon \in X$，该差变量 $D\psi_t^\varepsilon$ 为我们提供了以下柯西问题的一个解（该问题由相应的 ψ_t^ε 问题导出）：

$$\begin{aligned}
\partial_t D\psi_t^\varepsilon(v,r) &= -(\tilde{\mathcal{L}}^\varepsilon D\psi_t^\varepsilon)(v,r)\\
&= -\int_{w<v} \mathrm{d}w\, K_3^\varepsilon(v,w) D\psi_t^\varepsilon(v,v-w) + \int_{w>v} \mathrm{d}w\, K_3^\varepsilon(v,w) D\psi_t^\varepsilon(w,w-v)\\
&\quad + \int_{w<v-r} \mathrm{d}w\, K_3^\varepsilon(v-r,w) D\psi_t^\varepsilon(v-r,v-r-w) - \int_{w>v-r} \mathrm{d}w\, K_3^\varepsilon(v-r,w) D\psi_t^\varepsilon(w,w-v+r).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

给定 ψ_0^ε，根据定理 3.12，ψ_t^ε 在 X 中由唯一确定，并且我们有关于 $D\psi$ 的以下平凡界 ε

$$\begin{aligned}
|D\psi_t^\varepsilon(v,r)| &= \left|(1-F_1)^{-1}\left[\mathrm{e}^{-tV^\varepsilon}\overline{\psi}_0 + B_t[\overline{\psi}_0]\right](v) - (1-F_1)^{-1}\left[\mathrm{e}^{-tV^\varepsilon}\psi_0^\varepsilon + B_t[\psi_0^\varepsilon]\right](v-r)\right|\\
&\leq A_0(\alpha,\mu',\gamma_0,b_0,m_0)\left(\ln\varepsilon_0^{-1}\right)\left(\|\psi_0^\varepsilon\|_X + \|\psi_0^\varepsilon\|_{L^2}\right)\overline{\Gamma}(v,r).
\end{aligned} \tag{3.40}$$

请注意，尽管我们在 3.2.1 中的结果保证了存在按照 (3.39) 演化的 $D\psi_t^\varepsilon$，但该解在 Z 中可能并不唯一。

现在我们将证明，方程 (3.39) 在某个子空间 Y_ε 中有唯一的杜哈梅尔积分解，该子空间包含满足以下范数有界条件的函数 h Z,

$$\|h\|_{Y_\varepsilon} = \sup_{\substack{t>0\\(v,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}} \frac{|h_t(v,r)|}{\overline{\overline{\Gamma}}_\varepsilon(v,r)} < \infty, \quad \text{where}$$

$$\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r) = (f(v)+f(v-r))\,\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r)}\overline{g}(v,r), \quad \overline{g}(v,r) = \left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r+\varepsilon(v))}\right)^{\overline{\gamma}_0}, \ \ \overline{\gamma}_0 = \gamma_0/2.$$

如果我们能证明 (3.39) 的杜哈梅尔积分形式在 Z 中有唯一解，并且在$Y_\varepsilon \subset Z$, 中也有一个解，那么我们就证明了与给定初始数据相对应的这个唯一解满足某种类似 H¨older 的条件（参见 g 的定义）。这一结果对于证明主要平滑性结果的最后一步至关重要。为了证明在 Z 和 Y_ε中的存在唯一性结果，我们的计算将采用以下通用权函数，它涵盖这两种情况：

$$\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r) = (f(v) + f(v-r))\,\mathrm{e}^{\mu \max(a, c_0 v, v-r)}\tilde{g}(v,r), \quad \tilde{g}(v,r) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa(r+\varepsilon(v))}\right)^{\tilde{\gamma}_0},$$

其中 $\tilde{\gamma}_0 \in \{0, \bar{\gamma}_0\}$。

采用此权函数的原因是，我们几乎所有的计算都同时适用于 Γ 和 Γ_ε。因此，我们的结果是针对一般的 $\overline{\Gamma}'_\varepsilon$ 证明的。若有差异，我们会在相关计算中指出。我们用 $\tilde{Y}_\varepsilon$ 表示与权函数 $\overline{\Gamma}'_\varepsilon$ 对应的巴拿赫空间，也就是说，$\tilde{Y}_\varepsilon$ 要么是 Z，要么是 Y_ε。

关于 $D\psi_t^\varepsilon$ 的演化方程的分析，与第 3.1.1 小节中 Δ_t 方程的分析遵循相同的思路。因此，这里控制时间演化的线性算子也拆分为一个势、一个保正部分、一个有界部分和一个扰动。回顾式 (3.12)，其中已经完成了这种拆分，并将方程写成了便于我们后续计算的形式：

$$\partial_t D\psi_t^\varepsilon(v,r) = -(\tilde{\mathcal{L}}^\varepsilon D\psi_t^\varepsilon)(v,r) = -(\tilde{\mathcal{L}}_u^\varepsilon D\psi_t^\varepsilon)(v,r) - (\tilde{\mathcal{L}}_s^\varepsilon D\psi_t^\varepsilon)(v,r) - \tilde{\mathcal{K}}_b^\varepsilon[\psi_t^\varepsilon](v,r).$$

Here

$$\begin{aligned}
&(\tilde{\mathcal{L}}_s^\varepsilon D\psi_t^\varepsilon)(v,r) \\
&= -\mathbb{I}(v \geq a_1)\int_{-\infty}^{v-r} \mathrm{d}w\, \left(K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) - K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,w)\right) D\psi_t^\varepsilon(v, v-w)\,\mathbb{I}(v-w \leq \varepsilon(v-r)) \\
&\quad - \int_{v-r-\varepsilon(v-r)}^{v-r} \mathrm{d}w\, \left(K_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) - K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,w)\right) D\psi_t^\varepsilon(v, v-w),
\end{aligned} \tag{3.41}$$

˜其中 $\tilde{r}$ 已在式 (3.19) 中定义。此外，与之前一样，无界算子 L_u^ε 可以写成

$$(\tilde{\mathcal{L}}_u^\varepsilon D\psi_t^\varepsilon)(v,r) = \tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon(v,r) D\psi_t^\varepsilon(v,r) - (\tilde{\mathcal{K}}_u^\varepsilon D\psi_t^\varepsilon)(v,r), \text{ with}$$

$$\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon(v,r) = \int_{-\infty}^{v-r} \mathrm{d}w\, K_3^{\varepsilon(v-r)}(v-r,w) + \int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^{\varepsilon(v)}(v,w) + \int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^{\varepsilon(w)}(v-r,w) + \int_{v}^{\infty} K_3^{\varepsilon(w)}(v,w).$$

K_b^ε-部分的一个有用界（见附录 E.2）可以通过一种简单直接的方式得到，因此在下面的引理中不予证明。

引理 3.13。给定初始数据 $\psi_0^\varepsilon \in X$，有如下界：

$$\left|\tilde{\mathcal{K}}_b^\varepsilon \psi_t^\varepsilon\right| \leq \mathcal{M}_0(\ln \varepsilon_0^{-1})\left(\|\psi_0^\varepsilon\|_X + \|\psi_0^\varepsilon\|_{L^2}\right)\overline{\Gamma}'_\varepsilon,$$

其中，M_0 取决于参数 α、μ、μ'、c_0、a_1、b_0、γ_0 和 m_0。

引理 3.14。存在 $q_2 > 0$，它取决于参数 γ_0、μ、μ' 和 κ，使得以下界成立：

$$|\tilde{\mathcal{L}}_s^\varepsilon D\psi_t^\varepsilon| \leq \frac{q_2(\kappa,\mu,\mu',\gamma_0)\varepsilon_0}{\ln \varepsilon_0^{-1}} \|D\psi^\varepsilon\|_{\tilde{Y}_\varepsilon} \tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon \overline{\Gamma}'_\varepsilon.$$

证明。有两种可能的情形：

情形 1：当我们有 $\tilde{\gamma}_0 = 0$ 和 $\overline{\Gamma}'_\varepsilon = \overline{\Gamma}$ 时，很容易看出存在 $C_3 = C_3(\mu', \gamma_0) > 0$ 和$C_4 = C_4(\mu', \gamma_0) > 0$，使得：

$$\begin{aligned}
&|\tilde{\mathcal{L}}_s^\varepsilon D\psi^\varepsilon(v,r)| \\
&\leq \|D\psi^\varepsilon\|_Z \overline{\Gamma}(v,r)\left[C_3\varepsilon(v-r)\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}} + C_4\,\mathbb{I}(v \geq a_1)\,\mathbb{I}(r \leq \varepsilon(v-r))(\varepsilon(v-r))^2\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{1}{2}}\right].
\end{aligned}$$

情形 2：当 $\tilde{Y}=\overline{Y}_\varepsilon$ 时，我们有 $\tilde{\gamma}_0=\overline{\gamma}_0$ 和 $\overline{\Gamma}'_\varepsilon=\overline{\Gamma}_\varepsilon$。很容易看出存在 $C_3=C_3(\mu',\ \kappa,\ \mu,\ \gamma_0)>0$ 和 $\overline{C}_4=\overline{C}_4(\mu',\ \kappa,\ \mu,\ \gamma_0)>0$，使得：

$$
\begin{aligned}
&|\tilde{\mathcal{L}}^\varepsilon_s D\psi^\varepsilon(v,r)|\\
&\le \|D\psi^\varepsilon\|_{Y_\varepsilon}\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)\left[C_3\varepsilon(v-r)\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}}+C_4\mathbb{I}(v\ge a_1)\mathbb{I}(r\le\varepsilon(v-r))(\varepsilon(v-r))^2\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{1}{2}}\right].
\end{aligned}
$$

~将这些结果结合起来，并利用 V^ε 的下界（见引理 3.15），即可得到所需的界。 □

引理 3.15. 存在一个数 $\sigma>0$，它取决于参数 α,c_0,μ',γ_0，使得 ：

$$
\tilde{\mathcal{L}}^\varepsilon_u\overline{\Gamma}'_\varepsilon=\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon\overline{\Gamma}'_\varepsilon-\tilde{\mathcal{K}}^\varepsilon_u\overline{\Gamma}'_\varepsilon\ge\frac{\sigma}{\ln\varepsilon_0^{-1}}\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon\overline{\Gamma}'_\varepsilon.
$$

证明. 容易看出，存在正数 $C_3=C_3(\mu',\gamma_0,a_1)>1$ 和 $\overline{C}_3=\overline{C}_3(\mu',\gamma_0,a_1)$，使得下述界成立：

$$
\begin{aligned}
&\bar{n}C_3(\mu',\gamma_0,a_1)\left[\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}}\ln\varepsilon_0^{-1}+\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&\le\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon(v,r)\\
&\le\bar{n}\overline{C}_3(\mu',\gamma_0,a_1)\left[\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}}\ln\varepsilon_0^{-1}+\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{\frac{1}{2}}\right],\qquad\forall(v,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+.
\end{aligned}
$$

根据附录 E 中概述的计算，我们有

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\mathcal{L}}^\varepsilon_u\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)\\
&\ge\bar{n}\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}}\Big[\mathbb{I}(v-r<-b_0)\bar{b}_1(\alpha)\left(1-\mathrm{e}^{-3\alpha r}\right)^2\left(1-\mathrm{e}^{-3\alpha\max(0,r-\varepsilon(v-r))}\right)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\ln\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{7}{2}\max(r,\varepsilon(v-r))}\right)^{-1}\Big]\\
&\quad+\mathbb{I}(-m_0<v-r<m_0)\bar{n}\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)\left[\frac{1}{6}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}}+\mathbb{I}(v-r>\ln 2)\frac{1}{9}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&\quad+\mathbb{I}(\ln 2<v<m_0)\frac{\bar{n}}{2}\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-\min(r,\varepsilon(v))})}\right)^2\right]\\
&\quad+\mathbb{I}(v\ge m_0)b_4(c_0)\bar{n}\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=G_0[\overline{\Gamma}'_\varepsilon](v,r).
\end{aligned}
$$

从 ~V^ε_u 的上界可明显看出，存在 $\sigma>0$，它取决于参数 α,μ',γ_0,a_1 和c_0，使得

$$
G_0[\overline{\Gamma}'_\varepsilon](v,r)\ge\frac{\sigma}{\ln\varepsilon_0^{-1}}\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon(v,r)\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r),\qquad\forall(v,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,
$$

如所述。 □

现在我们可以证明关于解 $D\psi^\varepsilon_t$ 的主要结果，即定理 3.4。

定理 3.4 的证明。首先回顾一下，对于初始数据 $\psi^\varepsilon_0\in X$，差变量 $D\psi^\varepsilon_t$ 的杜哈梅尔积分形式由方程 (3.13) 给出。我们可以写成

$$
\begin{aligned}
D\psi^\varepsilon_t&=\mathrm{e}^{-t\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon}D\psi^\varepsilon_0+\int_0^t\mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{-(t-s)\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon}\tilde{\mathcal{K}}^\varepsilon_u D\psi^\varepsilon_s-\int_0^t\mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{-(t-s)\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon}\tilde{\mathcal{L}}^\varepsilon_s D\psi^\varepsilon_s-\int_0^t\mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{-(t-s)\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon}\tilde{\mathcal{K}}^\varepsilon_b[\psi^\varepsilon_s]\\
&=\mathrm{e}^{-t\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon}D\psi^\varepsilon_0+\overline{F}[D\psi^\varepsilon_t]-\overline{B}_t[\psi^\varepsilon_0],
\end{aligned}
$$

其中

$$\overline{F}[D\psi_t^\varepsilon] = \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon}\tilde{\mathcal{K}}_u^\varepsilon D\psi_s^\varepsilon - \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon}\tilde{\mathcal{L}}_s^\varepsilon D\psi_s^\varepsilon, \text{ and, } \overline{B}_t[\psi_0^\varepsilon] = \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon}\tilde{\mathcal{K}}_b^\varepsilon[\psi_s^\varepsilon].$$

于是，由引理3.15和引理3.14可得以下估计：

$$|\overline{F}[D\psi_t^\varepsilon]| \le \|D\psi^\varepsilon\|_{\tilde{Y}_\varepsilon}\overline{\Gamma}'_\varepsilon\left(1 - \frac{\sigma}{\ln\varepsilon_0^{-1}} + \frac{q_2\varepsilon_0}{\ln\varepsilon_0^{-1}}\right).$$

由于 σ 和 q_2 均不依赖于 ε_0，我们可以将正则化参数 $\varepsilon_0 > 0$ 取得足够小，使得以下结论成立：

$$\frac{\sigma}{\ln\varepsilon_0^{-1}} - \frac{q_2\varepsilon_0}{\ln\varepsilon_0^{-1}} > 0,$$

这意味着$\mathrm{k}F\mathrm{k}_{\overline{\tilde{Y}_\varepsilon}} < 1$。相应的纽曼级数因而收敛，并且我们得到杜哈梅尔积分方程的以下唯一解：

$$D\psi_t^\varepsilon = (1-\overline{F})^{-1}\left(\mathrm{e}^{-t\tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon}D\psi_0^\varepsilon - \overline{B}_t[\psi_0^\varepsilon]\right).$$

最后，很容易看出存在 $A_1 = A_1(\mu,\ \mu',\ c_0,\ a_1,\ b_0,\ m_0) > 0$ 使得

$$|\overline{B}_t[\psi_0^\varepsilon](v,r)| \le A_1(\ln\varepsilon_0^{-1})\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)\left(\|\psi_0^\varepsilon\|_{\overline{X}_0} + \|\psi_0^\varepsilon\|_{L^2}\right), \qquad \forall (v,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,$$

这就完成了对我们断言的证明。 □

因此，给定 $\psi_0^\varepsilon \in X$，我们得到方程(3.13)的唯一解 $D\psi^\varepsilon \in Y_\varepsilon$，$\forall t > 0$，满足

$$|D\psi_t^\varepsilon(v,r)| \le C\left(f(v) + f(v-r)\right)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r)}\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r+\varepsilon(v))}\right)^{\overline{\gamma}_0},\ \forall (v,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \text{ and some } C<\infty.$$

3.2.3. 连接变量 Δ_t和 $D\psi_t^\varepsilon$：$D_t = D\psi_t^\varepsilon - \Delta_t$的演化方程

回顾 Δ_t的原始演化方程（3.6），很容易看出我们可以写成

$$\partial_t\Delta_t = -\mathcal{L}^\varepsilon\Delta_t - \mathcal{L}_0^\varepsilon\Delta_t, \tag{3.42}$$

其中，部分 L^ε包含 K^ε，而部分 L_0^ε与 L^ε的结构完全相同，只是带有 $K - K^\varepsilon$。具体表达式见附录F。现在回过头来看（3.12），很容易验证

$$\tilde{\mathcal{L}}^\varepsilon D\psi_t^\varepsilon(v,r) = \mathcal{L}^\varepsilon D\psi_t^\varepsilon(v,r), \quad \forall (v,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+.$$

对所有 $t\in[0,T^*]$，定义如下差函数：

$$D_t = D\psi_t^\varepsilon - \Delta_t.$$

给定满足 $D\psi_0^\varepsilon = \Delta_0$的 $\psi_0^\varepsilon \in X$和 $\Delta_0 \in \overline{Y}$，现在考察变量 D_t的柯西问题。根据（3.42）和（3.12），我们可以写成

$$\partial_t D_t = -\mathcal{L}^\varepsilon D_t - \mathcal{L}_0^\varepsilon[\Delta_t], \qquad D_0 = 0. \tag{3.43}$$

我们 通过以下范数定义巴拿赫空间 Y_ε^*，它类似于 Y_ε，但仅针对 $t\in[0,T^*]$ 定义 ：

$$\|h\|_{Y_\varepsilon^*} = \sup_{\substack{t\in[0,T^*]\\(v,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}}\frac{|h_t(v,r)|}{\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)} < \infty,$$

由于 $Y \subseteq Y^*_\varepsilon$，且 $D\psi^\varepsilon \in Y^*_\varepsilon$，因此 $D \in Y^*_\varepsilon$。

我们的目标是证明，通过将 ε_0 取得足够小，可以使 D_t 任意小。为此，我们将证明，方程 (3.43) 的杜哈梅尔积分形式存在唯一解，且该解可以如所述任意小。

对方程 (3.43) 的分析方式与前面讨论 Δ_t 变量和 $D\psi^\varepsilon_t$ 变量的演化方程时相同。因此，我们将算子分成三部分，即 i) L^ε_u，它可以写成 $(\mathrm{V}^\varepsilon_u - \mathrm{K}^\varepsilon_u)$ 的形式，其中 K^ε_u 保持正性；ii) $\mathrm{L}^\varepsilon_\delta$，它由势作为“扰动”加以控制；以及 iii) 有界部分 L^ε_b。这些算子以及后续出现的表达式与前面讨论过的仅有细微差别。因此，我们不再列出大多数项，只提及那些与 3.1.1 和 3.2.2 中遇到的类似表达式相比，其差异会在最终估计中显现出来的项。我们记

$$\partial_t D_t = -\mathcal{L}^\varepsilon_u D_t - \mathcal{L}^\varepsilon_\delta D_t - \mathcal{L}^\varepsilon_b D_t - \mathcal{L}^\varepsilon_0[\Delta_t] = -\mathcal{V}^\varepsilon_u D_t + \mathcal{K}^\varepsilon_u D_t - \mathcal{L}^\varepsilon_\delta D_t - \mathcal{L}^\varepsilon_b D_t - \mathcal{L}^\varepsilon_0[\Delta_t].$$

我们将要分析的杜哈梅尔积分形式为：

$$\begin{aligned} D_t = {} & \mathrm{e}^{-t\mathcal{V}^\varepsilon_u} D_0 + \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}^\varepsilon_u} \mathcal{K}^\varepsilon_u[D_s] - \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}^\varepsilon_u} \mathcal{L}^\varepsilon_b[D_s] - \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}^\varepsilon_u} \mathcal{L}^\varepsilon_\delta[D_s] \\ & - \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}^\varepsilon_u} \mathcal{L}^\varepsilon_0[\Delta_s]. \end{aligned} \tag{3.44}$$

算子 $\mathrm{L}^\varepsilon_\delta$ 与 L_δ 略有不同，因为它包含来自扰动$\tilde{\mathrm{L}}^\varepsilon_s$的额外项，因此我们在下方将其写出。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon_\delta D_t(v,r) = {} & \Bigg[\int_{v-r-\delta_1}^{v-r} \mathrm{d}w\, K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,w) D_t(v, v-w) - \int_{v-r-\delta_1}^{v-r} \mathrm{d}w\, K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v,w) D_t(v-r, v-r-w) \\ & + \int_v^{v+\delta_1} \mathrm{d}w\, K_3^{\varepsilon(w)}(v-r,w) D_t(w, w-v+r) - \int_v^{v+\delta_2} \mathrm{d}w\, K_3^{\varepsilon(w)}(v,w) D_t(w, w-v) \\ & + \int_{v-\delta_2}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,w) D_t(v, v-w) + \int_{v-r}^{v-r+\delta_1} \mathrm{d}w\, K_3^{\varepsilon(w)}(v-r,w) D_t(w, w-v+r) \Bigg] \\ & - \mathbb{I}(v \geq a_1) \int_{-\infty}^{v-r} \mathrm{d}w\, \left(K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) - K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,w) \right) D_t(v, v-w)\, \mathbb{I}(v-w \leq \varepsilon(v-r)) \\ & - \int_{v-r-\varepsilon(v-r)}^{v-r} \mathrm{d}w\, \left(K_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) - K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,w) \right) D_t(v, v-w) \end{aligned} \tag{3.45}$$

以下引理通过简单直接的计算即可得到，因此我们不加证明地陈述它们。

引理 3.16. 存在 它依赖于参数 a_1、γ_0 和 κ，使得以下界成立：

$$|\mathcal{L}^\varepsilon_\delta D_s| \leq \frac{\overline{q}_1(\kappa,\gamma_0)}{M^{\overline{\gamma}_0} \ln\left(\min\left(M, \varepsilon_0^{-1}\right)\right)} \|D\|_{Y^*_\varepsilon} \mathcal{V}^\varepsilon_u \overline{\Gamma}_\varepsilon.$$

引理 3.17. 有界线性算子 L_b 满足：

$$|\mathcal{L}^\varepsilon_b D_s| \leq A(b_0, m_0, \mu, c_0) \|D\|_{Y^*_\varepsilon} \overline{\Gamma}_\varepsilon,$$

对于某个 $A(b_0,\ m_0,\ \mu,\ c_0) > 0$。

现在我们陈述并证明以下引理，它是证明唯一解 D_t 存在性的关键：

L引理 3.18. 存在一个数 $\overline{\sigma} > 0$，它取决于参数 α，c_0，μ'，γ_0，使得：

$$\mathcal{L}^\varepsilon_u \overline{\Gamma}_\varepsilon = \mathcal{V}^\varepsilon_u \overline{\Gamma}_\varepsilon - \mathcal{K}^\varepsilon_u \overline{\Gamma}_\varepsilon \geq \frac{\overline{\sigma}}{\ln\left(\min\left(M, \varepsilon_0^{-1}\right)\right)} \mathcal{V}^\varepsilon_u \overline{\Gamma}_\varepsilon.$$

证明. 如前所述，很容易看出存在 $C_4 = C_4(\mu',\ \overline{\gamma_0},\ a_1) > 0$和 $C_4 = C_4(\mu',\ \gamma_0,\ a_1) > 0$，使得以下界成立：

$$\begin{aligned}
&\bar{n}C_4(\mu',\gamma_0,a_1)\left[(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r}))^{-\frac{1}{2}}\left\{\ln(1-\mathrm{e}^{-\alpha r})^{-\frac{4}{\gamma_0}}+\ln\min\left(M,\varepsilon_0^{-1}\right)\right\}+(\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{\frac{1}{2}}\right]\\
&\le \tilde{\mathcal{V}}_u^{\varepsilon}(v,r)\\
&\le \bar{n}\overline{C}_4(\mu',\gamma_0,a_1)\left[(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r}))^{-\frac{1}{2}}\left\{\ln(1-\mathrm{e}^{-\alpha r})^{-\frac{4}{\gamma_0}}+\ln\min\left(M,\varepsilon_0^{-1}\right)\right\}+(\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{\frac{1}{2}}\right].
\end{aligned}$$

Co我们现在已经相当熟悉的类似计算，也揭示了以下结论：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_u^{\varepsilon}\overline{\Gamma}_{\varepsilon}(v,r)\\
&\ge \bar{n}\overline{\Gamma}_{\varepsilon}(v,r)\,(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r}))^{-\frac{1}{2}}\Big[\mathbb{I}(v-r<-b_0)\overline{b}_2(\alpha)\left(1-\mathrm{e}^{-3\alpha r}\right)^2\left(1-\mathrm{e}^{-3\alpha\max(0,r-\varepsilon(v-r))}\right)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\ln\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{7}{2}\max(r+\delta_1,\varepsilon(v-r))}\right)^{-1}\Big]\\
&\quad+\mathbb{I}(-m_0<v-r<m_0)\bar{n}\overline{\Gamma}_{\varepsilon}(v,r)\left[\frac{1}{6}(\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{-\frac{1}{2}}+\mathbb{I}(v-r>\ln 2)\frac{1}{9}(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r}))^{\frac{1}{2}}\right]\\
&\quad+\mathbb{I}(\ln 2<v<m_0)\frac{\bar{n}}{2}\overline{\Gamma}_{\varepsilon}(v,r)\,(\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{\frac{1}{2}}\left[1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-\min(r,\varepsilon(v))})}\right)^2\right]\\
&\quad+\mathbb{I}(v\ge m_0)\overline{b}_4(c_0)\bar{n}\overline{\Gamma}_{\varepsilon}(v,r)\,(\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{\frac{1}{2}}\\
&=\overline{G}_0[\overline{\Gamma}_{\varepsilon}](v,r).
\end{aligned}$$

由此可知，存在某个 $\overline{\sigma}>0$，它依赖于 α,μ',c_0,γ_0，使得

$$\overline{G}_0[\overline{\Gamma}_{\varepsilon}](v,r)\ge\frac{\overline{\sigma}}{\ln\left(\min\left(M,\varepsilon_0^{-1}\right)\right)}\tilde{\mathcal{V}}_u^{\varepsilon}(v,r)\overline{\Gamma}_{\varepsilon}(v,r),\qquad\forall(v,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+.$$

□

在进行下一步之前，我们注意到，从现在起将假设 $M\varepsilon_0<1$，因为 M 将保持固定，而 ε_0 最终将趋于零。我们对 $\mathrm{L}_0^{\varepsilon}[\Delta_t]$ 注意到以下估计。

引理 3.19. 存在某个正常数 $C'<\infty$，它依赖于 κ,γ_0 和 α，并且存在 $p=p(\gamma_0)>0$，使得以下界成立：

$$\left|\mathcal{L}_0^{\varepsilon}[\Delta_t](v,r)\right|\le C'(\kappa,\gamma_0,\alpha)(M\varepsilon_0)^p\|\Delta\|_Y\overline{\Gamma}_{\varepsilon}(v,r)\mathcal{V}_u^{\varepsilon}(v,r),\qquad\forall(v,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+.$$

证明。我们注意到，在 $\mathrm{L}_0^{\varepsilon}[\Delta]$ 的许多项中，额外的“小量”来自被积函数包含类似 $\Delta(.,r')$ 的项，其中 r' 是积分变量。然而，也有一些项并非如此。下面我们将选取其中一项，并说明为何这类项仍然是“小量”（相对于势而言）。我们记住，现在可以假设 $M\varepsilon_0<1$。

考虑这一项

$$\mathbb{I}(\delta_1<\varepsilon(v-r))\int_{\delta_1}^{\varepsilon(v-r)}\mathrm{d}r'\,K_3^1(v-r,v-r-r')\frac{\mathrm{e}^{-r'}-\mathrm{e}^{-\varepsilon(v-r)}}{1-\mathrm{e}^{\varepsilon(v-r)}}\Delta_t(v,r).$$

$$\begin{aligned}
\delta_1<\varepsilon(v-r)\implies\frac{1}{M}(1-\mathrm{e}^{-\alpha r})^{4/\gamma_0}<\varepsilon_0&\implies r<\frac{1}{\alpha}\ln\left(1-(M\varepsilon_0)^{\gamma_0/4}\right)^{-1}\\
&\implies(1-\mathrm{e}^{-\kappa r})<1-\left(1-(M\varepsilon_0)^{\gamma_0/4}\right)^{\kappa/\alpha}\\
&\implies(1-\mathrm{e}^{-\kappa r})^{\gamma_0-\overline{\gamma}_0}<\left(\frac{\kappa}{\alpha}\right)^{\gamma_0-\overline{\gamma}_0}(M\varepsilon_0)^{\frac{\gamma_0}{4}(\gamma_0-\overline{\gamma}_0)}.
\end{aligned}$$

于是我们可以写出如下形式：

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbb{I}(\delta_1 < \varepsilon(v-r)) \int_{\delta_1}^{\varepsilon(v-r)} \mathrm{d}r'\ K_3^1(v-r, v-r-r') \frac{\mathrm{e}^{-r'} - \mathrm{e}^{-\varepsilon(v-r)}}{1-\mathrm{e}^{\varepsilon(v-r)}} \Delta_t(v,r)\right| \\
\leq\ & \mathbb{I}(\delta_1 < \varepsilon(v-r)) \|\Delta\|_Y \left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mu \max(a, c_0 v, v-r)} \left(f(v-r)+f(v)\right) (1-\mathrm{e}^{\kappa r})^{\gamma_0} \int_{\delta_1}^{\varepsilon(v-r)} \mathrm{d}r'\ \frac{\mathrm{e}^{-r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}} \\
\leq\ & \mathbb{I}(\delta_1 < \varepsilon(v-r)) \|\Delta\|_Y \overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r) \left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}} (1-\mathrm{e}^{\kappa r})^{\gamma_0-\overline{\gamma}_0} \ln\left(\frac{\varepsilon_0}{\frac{1}{M}(1-\mathrm{e}^{-\alpha r})^{4/\gamma_0}}\right) \\
\leq\ & \mathbb{I}(\delta_1 < \varepsilon(v-r)) \|\Delta\|_Y \overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r) \left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}} (1-\mathrm{e}^{\kappa r})^{\gamma_0-\overline{\gamma}_0} \frac{4}{\gamma_0} \ln\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha r}\right)^{-1} \\
\leq\ & \mathbb{I}(\delta_1 < \varepsilon(v-r)) \|\Delta\|_Y \overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r) \left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{4}{\gamma_0} \left(\frac{\kappa}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}\gamma_0} (M\varepsilon_0)^{\frac{1}{16}\gamma_0} \left[\ (1-\mathrm{e}^{\kappa r})^{\frac{1}{4}\gamma_0} \ln\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha r}\right)^{-1}\ \right],
\end{aligned}
$$

其中我们用到了这一事实：$\gamma_0 = \overline{\gamma}_0/2$。按照类似的计算，容易看出存在依赖于 γ_0 和 $C' = C'(\kappa,\ \gamma_0,\ \alpha)$ 的 $p > 0\ > 0$，使得

$$
\left|\mathcal{L}_0^\varepsilon[\Delta_t](v,r)\right| \leq C'(\kappa,\gamma_0,\alpha)(M\varepsilon_0)^p \|\Delta\|_Y \overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r) \mathcal{V}_u^\varepsilon(v,r), \qquad (v,r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+.
$$

□

最后，我们可以证明命题 3.5。

命题 3.5 的证明。我们首先将杜哈梅积分方程 (3.44) 写为

$$
\begin{aligned}
D_t &= \mathrm{e}^{-t\mathcal{V}_u^\varepsilon} D_0 + \tilde{F}[D_t] - \int_0^t \mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u^\varepsilon} \mathcal{L}_0^\varepsilon[\Delta_s], \quad \text{where} \\
\tilde{F}[D_t] &= \int_0^t \mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u^\varepsilon} \mathcal{K}_u^\varepsilon[D_s] - \int_0^t \mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u^\varepsilon} \mathcal{L}_b^\varepsilon[D_s] - \int_0^t \mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u^\varepsilon} \mathcal{L}_\delta^\varepsilon[D_s].
\end{aligned}
$$

那么，与前面一样，引理 3.18、3.16 和 3.17 表明，对所有 $t \leq T^*$：

$$
|\tilde{F}D_t| \leq \|D\|_{Y_\varepsilon^*} \overline{\Gamma}_\varepsilon \left(1 - \frac{\overline{\sigma}}{\ln\left(\min\left(M, \varepsilon_0^{-1}\right)\right)} + \overline{A}T^* + \frac{\overline{q}_1}{M^{\overline{\gamma}_0} \ln\left(\min\left(M, \varepsilon_0^{-1}\right)\right)}\right). \tag{3.46}
$$

显然，我们可以将 $M < \infty$ 取得足够大，并取 $\varepsilon_0^{-1} > M$，从而对某个 T^*，有

$$
0 < T^* < \frac{1}{\overline{A}\ln M}\left(\overline{\sigma} - \frac{\overline{q}_1}{M^{\overline{\gamma}_0}}\right).
$$

这保证了 使得 $\mathrm{k}\ \tilde{F}\mathrm{k}_{Y_\varepsilon^*} < 1$。因此，相关纽曼级数的收敛性便给出了以下唯一解 (3.44):

$$
D_t = -\left(1-\tilde{F}\right)^{-1} \int_0^t \mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{-(t-s)\mathcal{V}_u^\varepsilon} \mathcal{L}_0^\varepsilon[\Delta_s],\ \forall 0 < t \leq T^*,
$$

因为初始条件满足 $D_0 = 0$。

最后，由引理 3.19 可知，对于某个 $Q > 0,\ \ p > 0$，其取值取决于权函数的参数，我们有

$$
|D_t| \leq Q \ln\left(\min(M, \varepsilon_0^{-1})\right) (M\varepsilon_0)^p \|\Delta\|_Y \overline{\Gamma}_\varepsilon, \qquad \forall t \in [0, T^*].
$$

□

请注意，上述时间 T^* 可能不同于定理 3.3 中出现的时间，尽管我们使用了相同的符号。这不会造成任何问题，因为只需取这两个时间中的较小者，将其记为新的 T^*，并将这个最小值视为我们的主要结果定理 3.2 以及定理 2.5 中出现的 T^* 即可。

附录:

A. 三波碰撞算子 C_3 的线性化

下文将简要说明，如何通过对三波碰撞算子 C_3 进行线性化，得到 (2.1) 和 (3.1) 中出现的核函数表达式。首先以能量变量表示线性化算子。我们用字母 x 和 y （$x,\ y$ 属于 $\mathbb{R}_+$）表示这些变量，因此在平直度量下，核函数略微滥用记号写作 $K_3(x,\ y)$（在加权 L^2 空间中，我们使用记号 $K_3(x,\ y)$）。然后我们将变量换为 u 和 v，它们取值于 $\mathbb{R}$，由此得到函数 $K_3(u,\ v)$ 和 $K_3(u,\ v)$，分别出现在 (2.1) 和 (3.1) 中。我们还将证明，我们的线性化算子与 [7] 和 [8] 中所考虑的算子相同，至多相差一个数值因子。

如引言中所述，算子 C_3 在平衡分布 f_{BE}附近线性化，即考虑形如 $f_{per}(x,\ t) = x f_{\mathrm{BE}}(x)\ f_{\mathrm{BE}}(x)\psi_t(x)$。的扰动 f_{per}。考察 C_3 对 $f_{\mathrm{tot}} = f_{\mathrm{BE}} + f_{per}$ 的作用，并牢记 $\mathsf{C}_3[f_{\mathrm{BE}}] = 0$，即可容易地得到线性化模型中变量 ψ 满足的以下演化方程:

$$
\begin{aligned}
&\partial_t\psi_t(x) = -L_3\psi_t(x)\\
&= -\frac{2\bar{n}}{\sqrt{x}g_{\mathrm{BE}}(x)\tilde{g}_{\mathrm{BE}}(x)}\left[\int_0^x \mathrm{d}y\, x\tilde{f}_{\mathrm{BE}}(x)f_{\mathrm{BE}}(y)f_{\mathrm{BE}}(x-y)\Big(x\psi_t(x) - y\psi_t(y) - (x-y)\psi_t(x-y)\Big)\right.\\
&\quad \left. +2\int_x^\infty \mathrm{d}y\, x\tilde{f}_{\mathrm{BE}}(x)f_{\mathrm{BE}}(y)\tilde{f}_{\mathrm{BE}}(y-x)\Big(x\psi_t(x) - y\psi_t(y) + (y-x)\psi_t(y-x)\Big)\right]\\
&= -4\bar{n}(\bar{h}(x))^2\left[\int_0^\infty \mathrm{d}y\, H(\min(x,y),|x-y|)\frac{(\psi_t(x)-\psi_t(y))}{|x-y|} - \int_0^\infty \mathrm{d}y\, H(x,y)\frac{(\psi_t(x)-\psi_t(y))}{x+y}\right],
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

其中

$$
H(x,y) = x f_{\mathrm{BE}}(x) y f_{\mathrm{BE}}(y)(x+y)\tilde{f}_{\mathrm{BE}}(x+y),\ \text{and}\ \bar{h}(x) = \left(\sqrt{x}g_{\mathrm{BE}}(x)\tilde{g}_{\mathrm{BE}}(x)\right)^{-\frac{1}{2}}.
$$

也容易看出，随后可以写成

$$
L_3\psi_t(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}y\ \tilde{H}(x,y)\ (\psi_t(x) - \psi_t(y))\,, \tag{A.2}
$$

其中

$$
\tilde{H}(x,y) = 4\bar{n}\bar{h}(x)^2 xy\mathrm{e}^{-\min(x,y)} f_{\mathrm{BE}}(|x-y|)\tilde{f}_{\mathrm{BE}}\left(\max(x,y)\right)\tilde{f}_{\mathrm{BE}}(x+y)\left(1+\mathrm{e}^{-\max(x,y)}\right),
$$

并且我们用到了以下恒等式:

$$
1 - \frac{\mathrm{e}^{\min(x,y)}f_{\mathrm{BE}}(x+y)}{f_{\mathrm{BE}}(|x-y|)} = \frac{f_{\mathrm{BE}}(x+y)}{f_{\mathrm{BE}}(\min(x,y))}\left(1+\mathrm{e}^{\max(x,y)}\right).
$$

由公式 (A.2) 可知，算子 L_3 在带权 L^2空间的稠密定义域上具有非负的对称半双线性型，该空间由权函数 $\nu(\mathrm{d}x) = \bar{h}(x)^{-2}\mathrm{d}x,$ 刻画；并且 L_3 在 $L^2(\nu)$ 中方便地定义为无界算子，如下所示:

$$
L_3\psi_t(x) = \int_0^\infty \nu(\mathrm{d}y)\overline{K}_3(x,y)\ (\psi_t(x) - \psi_t(y))\,, \tag{A.3}
$$

其中 $K_3(x,\ y) = 4\bar{n}\bar{h}(x)^2\bar{h}(y)^2 xy\mathrm{e}^{-\min(x,\ y)}\ f_{\mathrm{BE}}(|x-y|)\ \tilde{f}_{\mathrm{BE}}(\max(x,\ y))\ \tilde{f}_{\mathrm{BE}}(x+y)\ \left(1+\mathrm{e}^{-\max(x,\ y)}\right)$。

由此得到 (1.5)。

现在，我们将变量从 x, y 变换为 u, v，其中 $u = \ln(\mathrm{e}^x - 1)$ 且 $v = \ln(\mathrm{e}^y - 1)$。为便于书写，我们稍微放宽记号的使用方式，仍沿用之前的符号 ν 和 ψ，分别表示 L^2-权函数和扰动密度。显然，用新变量表示时，我们的 L^2 空间中的权函数可写为 $\nu(\mathrm{d}v) = \mathrm{e}^{-v}(\ln(1+\mathrm{e}^v))^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}v$，而且 (2.1) 只是用 $\mathbb{R}$.中的新变量写出的 (A.3)。

在 [7] 和 [8] 中也研究了同一个线性化模型。请注意，在这些论文中，模型是用变量 $|p|/\sqrt{2}$来描述的，其中 p 表示动量；而这里我们使用的是能量变量。为确立二者的等价性，我们约定用带撇号的字母 x, y 表示这些新变量，因此，[8] 中的方程 (1.9) 和 (1.12) 里的 x 和 y 现在分别替换为 x' 和 y'。于是，[8] 中的方程 (1.9) 和 (1.12) 写作：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p_c(t)\int_0^\infty \mathrm{d}y'\ \left(u(t,y') - u(t,x')\right) M(x',y'),$$
$$\text{and } M(x',y') = \left(\frac{1}{\sinh|x'^2 - y'^2|} - \frac{1}{\sinh(x'^2+y'^2)}\right)\frac{y'^3\sinh x'^2}{x'^3\sinh y'^2},$$

分别如此。变量 x' 与我们的能量变量 x 通过 $x = 2x'^2$. 相关。作变量替换 $x' \to x$，并仍用同一符号表示扰动 u，得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4}p_c(t)\int_0^\infty \mathrm{d}y\ \left(u(t,y) - u(t,x)\right)\overline{M}(x,y), \text{ where } \overline{M}(x,y) = \left.\frac{M(x',y')}{y'}\right|_{x=2x'^2, y=2y'^2}.$$

利用双曲正弦 $x = \frac{1}{2}\exp_{(-x)\,f_{\mathrm{BE}}(2x)}$ 这一事实，我们很容易看出

$$\begin{aligned}\overline{M}(x,y) &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\frac{y}{x}\frac{f_{\mathrm{BE}}(y)}{f_{\mathrm{BE}}(x)}\mathrm{e}^{-\frac{x-y}{2}}\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}|x-y|}f_{\mathrm{BE}}(|x-y|) - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x+y)}f_{\mathrm{BE}}(x+y)\right]\\ &= 2\sqrt{2}\bar{h}(x)^2 xy f_{\mathrm{BE}}(x) f_{\mathrm{BE}}(y)\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{e}^{-\min(x,y)}\left(f_{\mathrm{BE}}(|x-y|) - \mathrm{e}^{\min(x,y)}f_{\mathrm{BE}}(x+y)\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\bar{n}}\tilde{H}(x,y).\end{aligned}$$

B. 巴拿赫空间权函数中出现的参数 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{c_0}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$

从定理 3.3 证明中使用的论证可以明显看出，选择权函数 Γ 是为了满足这样的要求：$\mathrm{L}_u[\Gamma_t](v,r) = \mathrm{V}_u(v,r)\Gamma_t(v,r) - \mathrm{K}_u[\Gamma_t](v,r)$ 模拟 $\mathrm{V}_u(v,r)\Gamma_t(v,r)$ 的渐近行为，从而使引理 3.6 成立。因此，我们希望尽可能剔除 L_{pp} 的有界部分（见 (??)），并努力确保 $\mathrm{K}_u\Gamma$ 相对于 $\mathrm{V}_u\Gamma$ 的渐近占优。

我们知道，势 $\mathrm{V}_u(v,\ r)$ 在 $(-\infty)$ 处呈指数增长，在 $r = 0$ 处有线奇异性，并在 $+\infty$ 处像平方根函数一样增长，有些类似于

$$V(v,r) = \bar{n}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(v-r)}\ln(2+1/r) + \sqrt{\max(1,v)}\right).$$

核函数中出现的线奇异性会在范数$\Gamma_t(v,\ r)$。中产生因子 $g_t(v,\ r) = (1-\mathrm{e}^{-\kappa r})^{\gamma_{t(v,\ r)}}$。平滑指数 γ 对 $(v-r)$ 的依赖方式，取决于 ¤ Γ_t 必须满足的行为。范数中的其他因子，则由 $\mathrm{L}_u[\Gamma_t](v,\ r)$ 在自变量 v 取渐近的大正值和大负值时“期望的”行为决定。当我们分别考察 $K_3(v,\ v-r')$ 和 $K_3(v,\ v+r')$ 在区域 $v \ll 0$ 和 $v \gg 0$ 中的行为时，这些考量便不难理解，下面将对此加以说明。

a) 当 $v \to -\infty$ 时的行为：

当 $v \ll 0$ 时，我们需要考虑点奇异性占主导的情形。为了了解它对线性化算子行为的影响（请注意，由于我们现在不考虑线奇异性，因此从 $v \ll 0$ 变量而非差值的角度来思考是合理的

），只需考虑以下玩具模型：

$$T(v, v-r') = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}v}\mathrm{e}^{-2r'}$$
$$T(v, v+r') = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}v}\mathrm{e}^{-r'}.$$

这里需要注意的重要一点是，相对于对角线右侧，左侧存在相对倾斜（额外因子 $\mathrm{e}^{-r'}$）。粗略估算一下即可得出：核函数中的相对倾斜意味着，ψ变量对应的权函数在渐近意义下应表现为 $\mathrm{e}^{-\alpha v}$，其中某个 $\alpha > 0$，这进而意味着，我们的 $\Gamma_t(v,\ r)$ 的渐近行为应类似于 $\mathrm{e}^{-\alpha(v-r)}$。能量守恒已在 BEC 问题中为 α 施加了一个宽松的上界，因此 $0 < \alpha < 1/2$。

回到差空间中的原线性算子 L_u，我们注意到，选择一个负的 α 会产生一些额外的负项，它们来自对角线左侧，因此需要加以控制。一个简单的解决办法是在 $\Gamma_t(v,\ r)$ 中加入一个次主导因子 $\mathrm{e}^{-\alpha v}$。这会产生一些额外的正项。最后，只有当我们处理参数的大负值时才需要这些奇异因子，因此我们在相关项中加入截断，例如，使用 $\max(e^{-\alpha(v-r)},\ (\ln 2)^{\alpha})$，而不使用裸的 $\mathrm{e}^{-\alpha(v-r)}$。加入这一截断后，我们对参数的大正值进行计算会更加简单。

b) 当 $v \to +\infty$时的行为：

当 $+\infty$ 时，行为主要由核函数的 K_3^2 部分决定（事实上，这正是将 $K_3(v, v-r')$ 拆分为 $K_3^1(v, v-r')$ 和 $K_3^2(v, v-r')$ 的动机）。请注意，与参数取大负值的区域不同，这种情况下不存在相对倾斜。我们已经提到，当 v 趋于无穷大时，势的增长如同 $\sqrt{v}$。实际上，这种情况下相关的行为来自定义 V_u 的方程（3.7）中出现的最后两项，即 $\int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w\ K_3^2(v,w)$ 和 $\int_{-\infty}^{v-r} \mathrm{d}w\ K_3^2(v-r,w)$ 这两项。当 $v - r \gg 0$ 时，后一项变得重要，尤其是在 v 和 $v-r$ 相当时。

那么，我们先来比较 $K_3^2(v, v-r')$ 和 $K_3^2(v-r, v-r-r')$ 对 $v - r \gg 0$ 时势项的贡献。

$$V_1(v,r) = \int_0^r dr'\ K_3^2(v, v-r') \sim 4\bar{n}\sqrt{v}\left(1 - \left(\frac{v-r}{v}\right)^2\right),$$
$$V_2(v,r) = \int_0^\infty dr'\ K_3^2(v-r, v-r-r') \sim 4\bar{n}\sqrt{v-r}.$$

现在定义 $x = \frac{v-r}{v}$，并考虑量 $V_2 - V_1$。令 $g(x) = x^2 + \sqrt{x} - 1$，使得 $V_2 - V_1 = \sqrt{v}g(x)$。注意，对于所有 $v - r > 0$，都有 $0 < x < 1$。显然，$g'(x) > 0$。因此，对于所有 $x \in (0,\ 1)$，$g(x)$ 恰有一个零点。记作 c_0。于是 $g(c_0) = 0$，且容易验证 $\overline{c}_0 \approx 0.525$。因此，$x < \overline{c}_0$ 蕴含 $V_1 > V_2$，而 $x > \overline{c}_0$ 蕴含$V_2 > V_1$。

L_u 的类似增长只能来自部分 $I_3[\Gamma_t](v,\ r)$，其定义见 (3.30)。要得到这种行为，需要确保 $\mathrm{L}_u[\Gamma_t](v,\ r)$ 尽可能多地继承势项。这促使我们寻找一种范数，使得对于 $(v-r)$ 和 v 取较大值时，下列各项在某些区域内有界：

$$\int_0^\infty dr'\ K_3^2(v-r, v-r-r')\Gamma_t(v, r+r') \qquad \text{and} \qquad \int_0^r dr'\ K_3^2(v, v-r')\Gamma_t(v-r', r-r').$$

注意，

$$\forall\ v-r-r' \gg 0,\ K_3^2(v-r, v-r-r') \sim 4\bar{n}(v-r)^{-\frac{3}{2}}(v-r-r'),$$
$$\text{and}, \forall\ v-r' \gg 0,\ K_3^2(v, v-r') \sim 4\bar{n}v^{-\frac{3}{2}}(v-r').$$

如果我们选择权函数 Γ_t，使得 $\Gamma_t(v,\ r+r')$ 随 $v-r-r' \to (+\infty)$ 指数增长，并且 $\Gamma_t(v-r',\ r-r')$ 随 $v-r' \to (+\infty)$ 也呈现类似的指数增长，那么相应的积分就可以变得有界。

显然，我们必须在权函数中加入因子 $h(v,\ r)$，使其具有如下行为:

$$h(v,r)\ = \exp\ [\mu \max(v-r, c_0 v)]\,,\ ,\ \text{其中某个适当选取的}\ c_0 \in (0,1).$$

那么，上面的小计算通过比较 V_1 和 V_2，让我们了解了如何选择相对权函数 c_0。我们选择 $c_0 = 0.52$。

在附录 D 中所述的计算过程中，我们得到了 α 和 μ 可取值的上界。下面简要说明这些界是如何得出的。

- 考察附录 D 中记为 Comb.3 的项组合。该组合的正性取决于 α 具有一个小于 1 6 的上界。本质上，我们进行如下操作:

  项 $\left[-(K_3^2(v-r, v-r-r')\ - K_3^2(v, v-r-r'))\ (\ f(v-r-r')\ - f(v-r))\right]$ 受控于

  项 $K_3(v,\ \overline{\ }^{1}\ v+r')\ f(v+r')$。
  我们处于区域 $v-r<-m_0, v<-b_0$。因此，研究不含
  线奇异性的玩具模型是有意义的。于是，下界

  $\overline{K}_3^1(v, v+r') f(v+r') > (K_3^2(v-r, v-r-r') - K_3^2(v, v-r-r'))(f(v-r-r') - f(v-r))$
  对所有 $-v-b_0 > r' > r,$ 以及所有 $r>0,$ 均成立
  若 $\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}+\alpha)v} e^{-(1+\alpha)r} > \mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}+\alpha)(v-r)} e^{-(2-\alpha)r},$ 对所有 $r>0,$ 或者等价地，若 $\alpha < \frac{1}{6}$。

- 我们的计算对 $I_2[\Gamma_t](v,r)$ 下界的估计可得出 μ 和 μc_0 的上界。我们选择 $\mu c_0 \le \frac{1}{4}$，使得下述结论成立:

$$\mathrm{e}^{\mu \max(\tilde{a}, v-r, c_0(v-r'))} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'} \mathrm{e}^{\mu \max(\tilde{a}, v-r, c_0(v+r'))} > 0.$$

另一个为计算方便而选取、同时控制 $I_2[\Gamma_t](v,r)$ 的另一个上界如下 g:

$$\mu < \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\alpha.$$

最后，我们对 $I_4[\Gamma_t](v,r)$ 进行估计时，采用了选择 $\mu c_0 > \alpha$。

C. Hölder 型条件的性质

C.1. 随时间变化的 Hölder 型条件

回顾随时间变化的 Hölder 型条件 $g_t(v,r)$ 的定义 (3.4):

$$g_t(v,r) = (1-\mathrm{e}^{-\kappa r})^{\gamma_t(v,r)},\ \gamma_t(v,r) = \gamma_t(v-r) = \gamma_0 + \overline{a}(t)\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\beta(v-r)}},$$
$$\overline{a}(t) = \frac{1}{8}\min(1,\bar{n})\frac{t}{1+t}, \qquad \kappa \ge 7,\ 0<\gamma_0 \le 1/8,\ 1 \le \beta \le \kappa/4.$$

现在我们将证明 g_t 若干组合的界，这些界将在附录 D 中的计算中用到，同时也将阐明上述关于 β、γ_0 和 κ 的界。

引理 C.1. 对所有 $0 < r' \le r,$ 以下结论均成立:

$$i)\ g_t(v,r) - g_t(v, r-r') \ge 0,\quad g_t(v, r+r') - g_t(v,r) \ge 0,$$
$$ii)\ g_t(v,r) - g_t(v-r', r-r') \ge 0,\quad g_t(v+r', r+r') - g_t(v,r) \ge 0.$$

证明. 对于第 i 部分，只需注意到，对于所有 $r'' \geq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_t(v,r'')}{\partial r''} &\geq (\kappa-\beta)g_t(v,r'')\frac{\overline{a}(t)}{1+\mathrm{e}^{\beta(v-r'')}}\frac{\mathrm{e}^{-\kappa r''}}{1-\mathrm{e}^{-\kappa r''}}\\ &> 0, \quad \forall \kappa > \beta,\end{aligned}$$

因此 $g_t(v, r'')$ 是关于第二个变量 r'' 的递增函数，这说明第 i 部分中的不等式成立 .

第 ii 部分中的不等式可由 H¨older 条件 $g_t(v, r)$ 的定义直接得出，因为在这种情况下，所有涉及的项的 H¨older 指数均为 $\gamma_t(v, r)$。□

引理 C.2. 对所有 $r' > r$，对所有 $(v, r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$，下列不等式成立:

$$g_t(v,r)+g_t(v-r+r',r')-g_t(v+r',r+r') > \left(2-(1+\mathrm{e}^{-\kappa r})^{\gamma_t(v,r)}\right)g_t(v,r).$$

证明。定义函数 b_0 如下: $b_0(v, r, r') = g_t(v, r) + g_t(v - r + r', r') - g_t(v + r', r + r')$。

$$\text{Then } \frac{\partial}{\partial r'}b_0 = \kappa\gamma_t(v,r)\left[\mathrm{e}^{-\kappa r'}\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa r'}\right)^{\gamma_t(v,r)-1} - \mathrm{e}^{-\kappa(r+r')}\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r+r')}\right)^{\gamma_t(v,r)-1}\right] > 0.$$

于是我们可以写出如下内容:

$$\begin{aligned}b_0(v,r,r') > b_0(v,r,r) &= 2g_t(v,r)-g_t(v+r,2r)\\ &= 2\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa r}\right)^{\gamma_t(v,r)} - \left(1-\mathrm{e}^{-2\kappa r}\right)^{\gamma_t(v,r)}\\ &= \left(2-(1+\mathrm{e}^{-\kappa r})^{\gamma_t(v,r)}\right)g_t(v,r).\end{aligned}$$

□

引理 C.3. 对所有 $r' > r$，对所有 $(v, r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, , 以下不等式成立:

$$g_t(v,r)+g_t(v,r')-g_t(v,r+r') \geq \left(1-\frac{\mathrm{e}^{-\kappa r'}}{(1+\mathrm{e}^{-\kappa r})^{1-\gamma_t(v,r)}}\right)g_t(v,r).$$

证明. 注意:

$$\begin{aligned}g_t(v,r+r')-g_t(v,r') &= \left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r+r')}\right)^{\gamma_t(v,r+r')} - \left(1-\mathrm{e}^{-\kappa r'}\right)^{\gamma_t(v,r')}\\ &\leq \left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r+r')}\right)^{\gamma_t(v,r')} - \left(1-\mathrm{e}^{-\kappa r'}\right)^{\gamma_t(v,r')}\\ &\leq \left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r+r')}\right)^{\gamma_t(v,r')}\left[1-\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa r'}\frac{1-\mathrm{e}^{-\kappa r}}{1-\mathrm{e}^{-\kappa(r+r')}}\right)^{\gamma_t(v,r')}\right]\\ &\leq \left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r+r')}\right)^{\gamma_t(v,r)-1}\mathrm{e}^{-\kappa r'}(1-\mathrm{e}^{-\kappa r})\\ &\leq \left(1-\mathrm{e}^{-2\kappa r}\right)^{\gamma_t(v,r)-1}\mathrm{e}^{-\kappa r'}(1-\mathrm{e}^{-\kappa r})\\ &\leq (1-\mathrm{e}^{-\kappa r})^{\gamma_t(v,r)}\frac{\mathrm{e}^{-\kappa r'}}{(1+\mathrm{e}^{-\kappa r})^{1-\gamma_t(v,r)}},\end{aligned}$$

从而得到引理中所述的界。 □

顺便指出，对于所有 $r' > r$:

$$\frac{\mathrm{e}^{-\kappa r'}}{(1+\mathrm{e}^{-\kappa r})^{1-\gamma_t(v,r)}} \le f_1(r) = \frac{\mathrm{e}^{-\kappa r}}{(1+\mathrm{e}^{-\kappa r})^{3/4}}.$$

那么很容易验证， f_1 是一个递减函数，因此有如下估计:

$$\frac{\mathrm{e}^{-\kappa r'}}{(1+\mathrm{e}^{-\kappa r})^{1-\gamma_t(v,r)}} \le f_1(r) < 0.6,$$

$$\text{and consequently, } g_t(v,r) + g_t(v,r') - g_t(v,r+r') > 0.4 g_t(v,r).$$

引理 C.4. 对所有 $0 \le r' < r$， 以及所有 $(v,r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, , 都有如下不等式:

$$2g_t(v,r) - g_t(v,r-r') - g_t(v,r+r') \ge 0.$$

证明. 令 $b_2(v,r,r') = -g_t(v,r-r') - g_t(v,r+r')$.

$$\begin{aligned}
\text{Then } \frac{\partial b_2}{\partial r'} &= \gamma_0\kappa\left[\mathrm{e}^{-\kappa(r-r')}\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r-r')}\right)^{\gamma_t(v-r+r')-1} - \mathrm{e}^{-\kappa(r+r')}\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r+r')}\right)^{\gamma_t(v-r-r')-1}\right] \\
&\quad + \overline{a}(t)\left(H(v,r-r') - H(v,r+r')\right), \\
\text{where } H(v,r') &= \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\beta(v-r')}}\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa r'}\right)^{\gamma_t(v-r')}\left[\frac{\kappa\mathrm{e}^{-\kappa r'}}{1-\mathrm{e}^{-\kappa r'}} + \frac{\beta\mathrm{e}^{\beta(v-r')}}{1+\mathrm{e}^{\beta(v-r')}}\ln(1-\mathrm{e}^{-\kappa r'})\right] \\
&= \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\beta(v-r')}}\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa r'}\right)^{\gamma_t(v-r')} F_2(v,r'), \\
\text{with } F_2(v,r') &= \frac{\kappa\mathrm{e}^{-\kappa r'}}{1-\mathrm{e}^{-\kappa r'}} + \frac{\beta\mathrm{e}^{\beta(v-r')}}{1+\mathrm{e}^{\beta(v-r')}}\ln(1-\mathrm{e}^{-\kappa r'}).
\end{aligned}$$

那么不难看出:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r'}H(v,r') \\
&= \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\beta(v-r')}}\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa r'}\right)^{\gamma_t(v-r')}\left[-\left\{\kappa^2\frac{\mathrm{e}^{-\kappa r'}}{(1-\mathrm{e}^{-\kappa r'})^2} - \beta\frac{\mathrm{e}^{\beta(v-r')}}{1+\mathrm{e}^{\beta(v-r')}}\left(\frac{\kappa\mathrm{e}^{-\kappa r'}}{1-\mathrm{e}^{-\kappa r'}} - \beta\frac{\ln(1-\mathrm{e}^{-\kappa r'})}{1+\mathrm{e}^{\beta(v-r')}}\right)\right\}\right. \\
&\quad \left. + \left(\kappa\gamma_0\frac{\mathrm{e}^{-\kappa r'}}{1-\mathrm{e}^{-\kappa r'}} + \beta\frac{\mathrm{e}^{\beta(v-r')}}{1+\mathrm{e}^{\beta(v-r')}}\right)F_2(v,r') + \frac{\overline{a}(t)}{1+\mathrm{e}^{\beta(v-r')}}(F_2(v,r'))^2\right] \\
&\le \frac{g_t(v,r')}{1+\mathrm{e}^{\beta(v-r')}}\left[-\kappa^2\frac{\mathrm{e}^{-\kappa r'}}{(1-\mathrm{e}^{-\kappa r'})^2}\left(1-\frac{\beta}{\kappa}-\left(\frac{\beta}{\kappa}\right)^2\right) + \frac{\overline{a}(t)}{1+\mathrm{e}^{\beta(v-r')}}\frac{\kappa^2\mathrm{e}^{-2\kappa r'}}{(1-\mathrm{e}^{-\kappa r'})^2}\right. \\
&\quad \left. + \kappa\frac{\mathrm{e}^{-\kappa r'}}{1-\mathrm{e}^{-\kappa r'}}\left(\beta\frac{\mathrm{e}^{\beta(v-r')}}{1+\mathrm{e}^{\beta(v-r')}} + \kappa\gamma_0\frac{\mathrm{e}^{-\kappa r'}}{1-\mathrm{e}^{-\kappa r'}}\right)\right] \\
&< 0.
\end{aligned}$$

最后一行的上界成立，是因为我们选取参数时保证了以下不等式:

$$1 - \gamma_0 - \overline{a}(t) > \frac{2\beta}{\kappa} + \left(\frac{\beta}{\kappa}\right)^2.$$

上述不等式意味着 H是关于 r'的严格递减函数，因此， $H(v,r-r') \ge H(v,r+r')$。另一方面，注意到 $\gamma_t(v-r+r') \le \gamma_t(v-r-r')$, , 不难看出

$$\mathrm{e}^{-\kappa(r-r')}\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r-r')}\right)^{\gamma_t(v-r+r')-1} \ge \mathrm{e}^{-\kappa(r+r')}\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r+r')}\right)^{\gamma_t(v-r-r')-1}.$$

$$\text{Thus,} \quad \frac{\partial}{\partial r'}b_2 \ge 0.$$

这意味着我们得到以下不等式：

$$2g_t(v,r) - g_t(v,r-r') - g_t(v,r+r') = 2g_t(v,r) + b_2(v,r,r') \geq 2g_t(v,r) + b_2(v,r,r')\big|_{r'=0} = 0.$$

□

引理 C.5. 对所有 $0 \leq r' < r$，对所有 $(v,\ r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$，以下不等式成立：

$$2g_t(v,r) - g_t(v-r', r-r') - g_t(v+r', r+r') \geq 0.$$

证明。对 r' 求偏导数，可得：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r'}\left[2g_t(v,r) - g_t(v-r',r-r') - g_t(v+r',r+r')\right] = \kappa\gamma_t(v,r)\Big[&\mathrm{e}^{-\kappa(r-r')}\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r-r')}\right)^{\gamma_t(v-r)-1} \\ &- \mathrm{e}^{-\kappa(r+r')}\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r+r')}\right)^{\gamma_t(v-r)-1}\Big] \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

因此，

$$2g_t(v,r) - g_t(v-r',r-r') - g_t(v+r',r+r') \geq \left[2g_t(v,r) - g_t(v-r',r-r') - g_t(v+r',r+r')\right]\Big|_{r'=0} = 0.$$

□

引理 C.6. 对所有 $r' > r$，对所有 $(v,\ r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$，以下不等式成立：

$$2\left(g_t(v,r) + g_t(v-r+r',r') - g_t(v+r',r+r')\right) - g_t(v,r) > (1-\mathrm{e}^{-r})^{\frac{1}{2}}\, g_t(v,r).$$

证明。由引理 C.2 可知，对所有 $r' > r$：

$$2\left(g_t(v,r) + g_t(v-r+r',r') - g_t(v+r',r+r')\right) - g_t(v,r) > \left(2\left(2-(1+\mathrm{e}^{-\kappa r})^{\gamma_t(v,r)}\right)-1\right)g_t(v,r).$$

对于所有 $r < (\ln 2)/3$，显然有 $2\left(2-(1+\mathrm{e}^{-\kappa r})^{\gamma_t(v,\ r)}\right)-1 > (1-\mathrm{e}^{-r})^{\frac{1}{2}}$，因为 $\gamma_t(v,\ r) < 1/4$。对于所有 $r \geq (\ln 2)/3$，定义 $f_2(r) = 2\left(2-(1+\mathrm{e}^{-\kappa r})^{1/4}\right)-1-(1-\mathrm{e}^{-r})^{1/2}$。则容易看出，

$$\frac{d}{dr} f_2 < 0,$$

因此，$f_2(r) > 0$，这意味着 $\left(2\left(2-(1+\mathrm{e}^{-\kappa r})^{\gamma_t(v,\ r)}\right)-1\right)g_t(v,\ r) > (1-\mathrm{e}^{-r})^{1/2}\, g_t(v,\ r)$。

□

引理 C.7. 对所有 $r' \geq r$，对所有 $p > \gamma_t(v,\ r)$，以及对所有 $\nu \leq 1$，以下结论成立：

$$(1-\mathrm{e}^{-\nu r})^p\, g_t(v,r') \leq (1-\mathrm{e}^{-\nu r})^p\, g_t(v-r+r',r') \leq \left(1-\mathrm{e}^{-\nu r'}\right)^p\, g_t(v,r).$$

证明. 令 $h_1(r) = (1-\mathrm{e}^{-\nu r})(1-\mathrm{e}^{-\kappa r})^{-1}$。那么容易计算得到

$$\frac{d}{dr'} h_1 \geq 0, \text{ so that, } h_1(r') \geq h_1(r),\ \forall r' \geq r.$$

这意味着

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-\nu r}}{1-\mathrm{e}^{-\nu r'}} \leq \frac{1-\mathrm{e}^{-\kappa r}}{1-\mathrm{e}^{-\kappa r'}} < 1,$$

这意味着，

$$\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\nu r}}{1-\mathrm{e}^{-\nu r'}}\right)^p \le \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\kappa r}}{1-\mathrm{e}^{-\kappa r'}}\right)^p \le \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\kappa r}}{1-\mathrm{e}^{-\kappa r'}}\right)^{\gamma_t(v,r)}, \ \forall p > \gamma_t(v,r),$$

也就是说，

$$(1-\mathrm{e}^{-\nu r})^p \left(1-\mathrm{e}^{-\kappa r'}\right)^{\gamma_t(v,r)} \le \left(1-\mathrm{e}^{-\nu r'}\right)^p (1-\mathrm{e}^{-\kappa r})^{\gamma_t(v,r)}.$$

由于根据定义， $\gamma_t(v,r)$ 是径向变量 r 的递增函数，因此 $(1-\mathrm{e}^{-\kappa r'})^{\gamma_t(v,r')} \le (1-\mathrm{e}^{-\kappa r'})^{\gamma_t(v,r)}$；结合上面得到的不等式，即可证明该引理的结论。 □

C.2. 正则化的、与时间无关的 H¨older 型条件

在这种情况下，H¨older 指数记为 $\tilde{\gamma}_0$，它与时间无关；对于正则化线性算子，在我们的计算中允许 $\tilde{\gamma}_0$ 取两个值，即 0 和 $\gamma_0/2$，以下结果对这两个值均成立。H¨older 型条件 $\tilde{g}(v,r)$ 对第一个变量 v 的依赖仅通过在自变量中包含正则化参数 $\varepsilon(v)$，如下所示：

$$\tilde{g}(v,r) = \left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r+\varepsilon(v))}\right)^{\tilde{\gamma}_0}, \ \tilde{\gamma}_0 \in \{0, \gamma_0/2\}, \text{ and, } \varepsilon(v) = \varepsilon_0 \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{\gamma_0}\max(a_1,v)}.$$

函数 $\tilde{g}$ 具有与上面引理 C.1–C.7 中证明的性质类似的性质。大多数证明也与上文所述的非常相似，因此我们将列出这些引理的陈述，并省略部分证明。

引理 C.8. 对所有 $0 < r' \le r$，以下结论均成立：

$$\begin{aligned} &i)\ \tilde{g}_t(v,r) - \tilde{g}_t(v,r-r') \ge 0, \quad \tilde{g}_t(v,r+r') - \tilde{g}_t(v,r) \ge 0, \\ &ii)\ \tilde{g}_t(v,r) - \tilde{g}_t(v-r',r-r') \ge 0, \quad \tilde{g}_t(v+r',r+r') - \tilde{g}_t(v,r) \ge 0. \end{aligned}$$

证明. 第 i 部分中的不等式显而易见。

对于第 ii 部分，我们注意到 $0 \le \varepsilon(v-r') - \varepsilon(v) < r'$，且 $0 \le \varepsilon(v) - \varepsilon(v+r') < r'$。因此：

$$\begin{aligned} \tilde{g}(v-r',r-r') &= \left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r+(\varepsilon(v-r')-r'))}\right)^{\tilde{\gamma}_0} \le \left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r+\varepsilon(v))}\right)^{\tilde{\gamma}_0} = \tilde{g}(v,r), \\ \tilde{g}(v+r',r+r') &= \left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r+(\varepsilon(v+r')+r'))}\right)^{\tilde{\gamma}_0} \ge \left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r+\varepsilon(v))}\right)^{\tilde{\gamma}_0} = \tilde{g}(v,r). \end{aligned}$$

□

引理 C.9. 对所有 $r' > r$，对于所有 $(v, \ r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$，以下不等式成立：

$$\tilde{g}(v,r) + \tilde{g}(v,r') - \tilde{g}(v,r+r') \ge \left(2-(1+\mathrm{e}^{-\kappa(r+\varepsilon(v))})^{\tilde{\gamma}_0}\right)\tilde{g}(v,r).$$

证明. 直接求导可得

$$\frac{\partial}{\partial r'}\left[\tilde{g}(v,r') - \tilde{g}(v,r+r')\right] > 0.$$

$$\text{So, } \tilde{g}(v,r) + \tilde{g}(v,r') - \tilde{g}(v,r+r') > \tilde{g}(v,r) + \left[\tilde{g}(v,r') - \tilde{g}(v,r+r')\right]\Big|_{r'=r} \ge \left(2-(1+\mathrm{e}^{-\kappa(r+\varepsilon(v))})^{\tilde{\gamma}_0}\right)\tilde{g}(v,r).$$

□

引理 C.10. 对所有 $r' > r$，对所有 $(v,r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, ，以下不等式成立：

$$\tilde{g}(v,r) + \tilde{g}(v-r+r',r') - \tilde{g}(v+r',r+r') \ge \left(2-(1+\mathrm{e}^{-\kappa(r+\varepsilon(v))})^{\tilde{\gamma}_0}\right)\tilde{g}(v,r).$$

证明. 在区域 $v+r' \le a_1$, ，本引理的陈述与前一个引理相同。当 $v+r' > a_1$,

$$\begin{aligned}
&\tilde{g}(v,r)+\tilde{g}(v-r+r',r')-\tilde{g}(v+r',r+r')\\
&>\tilde{g}(v,r)+\tilde{g}(v+r',r')-\tilde{g}(v+r',r+r')\\
&>\tilde{g}(v,r)+[\tilde{g}(v+r',r')-\tilde{g}(v+r',r+r')]\Big|_{r'=r}, \text{ by a simple differentiation,}\\
&\ge\left(2-(1+\mathrm{e}^{-\kappa(r+\varepsilon(v))})^{\tilde{\gamma}_0}\right)\tilde{g}(v,r).
\end{aligned}$$

□

引理 C.11. 对所有 $0 \le r' < r$, 对所有 $(v,r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, 以下不等式成立:

$$2\tilde{g}(v,r)-\tilde{g}(v,r-r')-\tilde{g}(v,r+r') \ge 0.$$

此引理可通过完全仿照引理 C.4 的证明得到，并注意到本例中指数 $\tilde{\gamma}_0$ 与时间无关（因此 $a(t)=0$）。

引理 C.12. 对所有 $0 \le r' < r$, 对所有 $(v,r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, 以下不等式成立:

$$2\tilde{g}(v,r)-\tilde{g}(v-r',r-r')-\tilde{g}(v+r',r+r') \ge -\left[\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r-r'+\varepsilon(v-r'))}\right)^{\tilde{\gamma}_0}-\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r-r'+\varepsilon(v))}\right)^{\tilde{\gamma}_0}\right].$$

证明. 此引理中的不等式可由以下简单观察得到:

$$\begin{aligned}
&2\tilde{g}(v,r)-\tilde{g}(v-r',r-r')-\tilde{g}(v+r',r+r')\\
&\ge 2\tilde{g}(v,r)-\tilde{g}(v,r-r')-\tilde{g}(v,r+r')-\left[\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r-r'+\varepsilon(v-r'))}\right)^{\tilde{\gamma}_0}-\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r-r'+\varepsilon(v))}\right)^{\tilde{\gamma}_0}\right]\\
&\ge -\left[\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r-r'+\varepsilon(v-r'))}\right)^{\tilde{\gamma}_0}-\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(r-r'+\varepsilon(v))}\right)^{\tilde{\gamma}_0}\right], \text{ by Lemma C.11.}
\end{aligned}$$

□

引理 C.13. 对所有 $r' > r$, 对所有 $(v,r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, 以下不等式成立:

$$2\left(\tilde{g}(v,r)+\tilde{g}(v-r+r',r')-\tilde{g}(v+r',r+r')\right)-\tilde{g}(v,r) > (1-\mathrm{e}^{-r})^{\frac{1}{2}}\,\tilde{g}(v,r).$$

引理 C.13 的证明与 C.6 的相应证明相同。

引理 C.14. 对所有 $r' \ge r$, 、对所有 $p > \tilde{\gamma}_0$, 以及对所有 $\nu \le 1$, 以下结论成立:

$$(1-\mathrm{e}^{-\nu r})^p\,\tilde{g}(v,r') \le \left(1-\mathrm{e}^{-\nu r'}\right)^p\,\tilde{g}(v,r).$$

证明与引理 C.7 的证明相同。

D. 引理 3.6 的计算

D.1. 核函数相关的一些有用不等式

在引理 3.6 的计算中，我们使用了核函数 K_3 和权函数Γ_t 的一些性质，这些性质汇总在下面的引理中。

引理 D.1. 对于所有 $v-r<-b_0$，对于所有 $0<r'\le r$，以下不等式成立：

$$\begin{aligned}
&K_3(v-r,v-r+r')\left(f(v-r)-(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'}))^{-\alpha}\right)-K_3^1(v-r,v-r-r')\left(f(v-r-r')-f(v-r)\right)\\
&\ge K_3(v-r,v-r+r')\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})\right)^{-\alpha}\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}\right)^{\alpha}\left\{1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}\right)^{1-2\alpha}\right\}\times\\
&\quad\times\left\{1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{\alpha}\right\}
\end{aligned}$$

证明。注意：

$$\begin{aligned}
&K_3(v-r,v-r+r')\left(f(v-r)-(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'}))^{-\alpha}\right)-K_3^1(v-r,v-r-r')\left(f(v-r-r')-f(v-r)\right)\\
&\ge 4\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-3/2}\frac{\mathrm{e}^{-r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\frac{\mathrm{e}^{v-r}+2\mathrm{e}^{-r'}}{1+\mathrm{e}^{v-r}+\mathrm{e}^{-r'}}\left[\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r}))^{-\alpha}\left\{1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}\right)^{\alpha}\right\}\right.\\
&\quad\left.-(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'}))^{1-\alpha}\left\{1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{\alpha}\right\}\right].
\end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned}
&\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r}))^{-\alpha}\left\{1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}\right)^{\alpha}\right\}\\
&\quad-(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'}))^{1-\alpha}\left\{1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{\alpha}\right\}\\
&=(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'}))^{1-2\alpha}\left[(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'}))^{\alpha}\left\{\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{\alpha}-1\right\}\right]\\
&\quad-(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'}))^{1-2\alpha}\left[(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'}))^{\alpha}\left\{1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{\alpha}\right\}\right].
\end{aligned}\tag{D.1}$$

现在，对于所有 $r'\ge 0$，我们将函数 h 定义如下：

$$\begin{aligned}
(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r}))^{\alpha}h(v-r,r')&=(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'}))^{\alpha}\left\{\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{\alpha}-1\right\}\\
&\quad-(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'}))^{\alpha}\left\{1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{\alpha}\right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Then }\frac{\partial}{\partial r'}h(v-r,r')&=\alpha(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'}))^{\alpha-1}\frac{\mathrm{e}^{v-r+r'}}{1+\mathrm{e}^{v-r+r'}}\left[2(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'}))^{\alpha}-(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r}))^{\alpha}\right]\\
&\quad-\alpha(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'}))^{\alpha-1}\frac{\mathrm{e}^{v-r-r'}}{1+\mathrm{e}^{v-r-r'}}\left[2(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'}))^{\alpha}-(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r}))^{\alpha}\right].
\end{aligned}$$

注意，对于所有 $v-r<-b_0$，$\mathrm{e}^{-r'}<\underline{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}<\mathrm{e}^{-\frac{24}{25}r'}$，由于 $b_0\ge 10$。那么，对于所有满足该条件的 $r'>0$

$$\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{\alpha}<\frac{1}{2},$$

根据定义显然有

$$\frac{\partial}{\partial r'}h(v-r,r')>0.$$

另一方面，对所有满足 $r'>0$ 的

$$\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{\alpha}\ge\frac{1}{2},$$

我们有 $\mathrm{e}^{-\frac{24}{25}\alpha r'} > \frac{1}{2}$，显然可以验证，这意味着 $v - r + r' < -3$。5，对所有 $v - r < -b_0$，而这又意味着，

$$(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'}))^{\alpha-1}\frac{\mathrm{e}^{v-r+r'}}{1+\mathrm{e}^{v-r+r'}} > (\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'}))^{\alpha-1}\frac{\mathrm{e}^{v-r-r'}}{1+\mathrm{e}^{v-r-r'}},$$

因为 $\frac{w}{1+\mathrm{e}^w}(\ln(1+\mathrm{e}^w))^{\alpha-1}$ 对所有 $w < -3$ 都是严格递增函数。因此，我们再次得到，

$$\frac{\partial}{\partial r'}h(v-r,r') > 0 \text{ in this region.}$$

由于我们已经证明 $h(v-r,r')$ 是 r' 的严格递增函数，因此以下不等式成立：

$$(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'}))^{\alpha}\left\{\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{\alpha}-1\right\} > (\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'}))^{\alpha}\left\{1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{\alpha}\right\}.$$

利用上述结果，我们可以参考方程 (D.1) 并写出：

$$\begin{aligned}
&(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'}))^{1-2\alpha}\left[(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'}))^{\alpha}\left\{\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{\alpha}-1\right\}\right]\\
&\quad-(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'}))^{1-2\alpha}\left[(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'}))^{\alpha}\left\{1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{\alpha}\right\}\right]\\
&> \left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})\right)^{1-\alpha}\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}\right)^{\alpha}\left\{1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}\right)^{1-2\alpha}\right\}\times\\
&\quad\times\left\{1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{\alpha}\right\},
\end{aligned}$$

这显然意味着本引理中所述的不等式。 □

引理 D.2. 对所有 $v < -b_0$, 对所有 $0 < r' \le r$ 和 $v + r < 0$，以下不等式成立：

$$\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r' K_3(v,v+r')\left(f(v)-f(v+r')\right)g_t(v,r) \ge \int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r' K_3^1(v,v-r')\left(f(v-r')-f(v)\right)g_t(v-r',r-r').$$

证明。定义

$$h_2(v,r') = \ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})\left[(\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{-\alpha}-(\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'}))^{-\alpha}\right]-\ln(1+\mathrm{e}^{v-r'})\left[(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r'}))^{-\alpha}-(\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{-\alpha}\right].$$

Then

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r'}h_2 &= \frac{\mathrm{e}^{v+r'}}{1+\mathrm{e}^{v+r'}}\left[(\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{-\alpha}-(1-\alpha)(\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'}))^{-\alpha}\right]\\
&\qquad-\frac{\mathrm{e}^{v-r'}}{1+\mathrm{e}^{v-r'}}\left[(\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{-\alpha}-(1-\alpha)(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r'}))^{-\alpha}\right]\\
&> 0, \quad \text{since } (\ln(1+\mathrm{e}^{v-r'}))^{-\alpha} > (\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'}))^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

因此，对于所有 $r' > 0$，都有 $h_2(v,r') > h_2(v,0) = 0$。由核函数的定义以及对于所有 $r' > 0$，$(,r) > g_t($ $v-r', r-r')$这一事实，显然可得引理中所述的不等式。 □

引理 D.3. 对所有 $v + r' < 0$，对所有 $r' > r$，以下结论成立：

$$K_3(v,v+r')f(v+r') - K_3^1(v-r,v-r-r')f(v-r-r') > 0.$$

证明。

$$
\begin{aligned}
&K_3(v,v+r')f(v+r') - K_3^1(v-r,v-r-r')f(v-r-r') \\
&\geq 4\bar{n}\frac{\mathrm{e}^{-r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\frac{\mathrm{e}^{v}+2\mathrm{e}^{-r'}}{1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-r'}}(\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{-\frac{3}{2}}(\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'}))^{1-\alpha}\left[1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})}\right)^{1-\alpha}\right] \\
&\geq 4\bar{n}\frac{\mathrm{e}^{-r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\frac{\mathrm{e}^{v}+2\mathrm{e}^{-r'}}{1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-r'}}(\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{-\frac{3}{2}}(\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'}))^{1-\alpha}\left[1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}\right] \\
&> 0,
\end{aligned}
$$

其中我们使用了以下事实：$1-\alpha > \frac{1}{2}+\alpha$，对于所有 $\alpha < 1/4$，以及

$$
\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})} > \frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r'})}.
$$

□

D.2. $I_i[\Gamma_t](v,\ r)$ 的下界，$i \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

D.2.1. 估计 $I_1[\Gamma_t](v,\ r)$:

我们从以下下界开始，该下界利用上文证明的引理 C.7 很容易得到：

$$
\begin{aligned}
I_1[\Gamma_t](v,r) &= I_1[\Gamma_t^1](v,r) + I_1[\Gamma_t^2](v,r) \\
&\geq \mathcal{J}_0[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,r) + \mathcal{J}_1[\Gamma_t^1](v,r) + \mathcal{J}_2[\Gamma_t^2](v,r) + \mathcal{I}[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,r).
\end{aligned} \tag{D.2}
$$

$\mathbb{J}_0$ 已在 (3.32) 中定义。现在我们明确写出其他项。如前所述，在对角线附近，这些项相较于 $\mathbb{J}_0$ 是次主导的。

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J}_1[\Gamma_t^1](v,r) \\
&= f(v-r)\Bigg[\mathbb{I}(v<-b_0)\Bigg\{\mathrm{e}^{\mu a}\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v}\mathrm{d}r'\Big((K_3(v-r,v-r+r')-K_3(v,v+r'))g_t(v-r+r',r') \\
&\qquad -(K_3^1(v-r,v-r-r')-K_3^1(v,v-r'))g_t(v,r')\Big) \\
&\quad +\int_{r+a_1-v}^{\infty}\mathrm{d}r'\Big((K_3(v-r,v-r+r')-K_3(v,v+r'))\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}e^{\mu c_0(v-r+r')}g_t(v-r+r',r') \\
&\qquad -(K_3^1(v-r,v-r-r')-K_3^1(v,v-r'))e^{\mu a}g_t(v,r')\Big)\Bigg\} \\
&+\mathbb{I}(v\geq -b_0)\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\Big[(K_3(v-r,v-r+r')-K_3(v,v+r'))\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0(v-r+r'),v-r)}g_t(v-r+r',r') \\
&\qquad -\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r)}\Big(K_3^1(v-r,v-r-r')-K_3^1(v,v-r')\Big)g_t(v,r')\Big]\Bigg],
\end{aligned} \tag{D.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J}_2[\Gamma_t^2](v,r)\\
&=\mathbb{I}(v<-b_0)\Bigg[\mathbb{I}(r\le a_1-v\le r+\delta_1)\Bigg\{\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,\Big(\left(K_3(v-r,v-r+r')-K_3(v,v+r')\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\times\\
&\qquad\times\exp\left(\mu\max\{a,c_0(v-r+r'),v-r\}\right)f(v-r+r')g_t(v-r+r',r')\\
&\quad-\Big(K_3^1(v-r,v-r-r')-K_3^1(v,v-r')\Big)\exp\left(\mu\max\{a,c_0v,v-r'\}\right)f(v)g_t(v,r')\Big)\Bigg\}\\
&\quad+\mathbb{I}(r+\delta_1<a_1-v)\Bigg\{\int_{r+\delta_1}^{a_1-v}\mathrm{d}r'\,\Big(\left(K_3(v-r,v-r+r')-K_3(v,v+r')\right)\times\\
&\qquad\times\exp\left(\mu\max\{a,c_0(v-r+r'),v-r\}\right)f(v+r')g_t(v-r+r',r')\\
&\quad-\Big(K_3^1(v-r,v-r-r')-K_3^1(v,v-r')\Big)\exp\left(\mu\max\{a,c_0v,v-r'\}\right)f(v)g_t(v,r')\Big)\\
&\quad+\int_{a_1-v}^{\infty}\mathrm{d}r'\,\Big(\left(K_3(v-r,v-r+r')-K_3(v,v+r')\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\times\\
&\qquad\times\exp\left(\mu\max\{a,c_0(v-r+r'),v-r\}\right)f(v+r')g_t(v-r+r',r')\\
&\quad-\Big(K_3^1(v-r,v-r-r')-K_3^1(v,v-r')\Big)\exp\left(\mu\max\{a,c_0v,v-r'\}\right)f(v)g_t(v,r')\Big)\Bigg\}\\
&\quad+\mathbb{I}(r>a_1-v)\Bigg\{\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v}\mathrm{d}r'\,\Big(\Big(K_3(v-r,v-r+r')-\overline{K_3}^2(v,v+r')\Big)\times\\
&\qquad\times\exp\left(\mu\max\{a,c_0(v-r+r'),v-r\}\right)f(v+r')g_t(v-r+r',r')\\
&\quad-\Big(K_3^1(v-r,v-r-r')-K_3^1(v,v-r')\Big)\exp\left(\mu\max\{a,c_0v,v-r'\}\right)f(v)g_t(v,r')\Big)\\
&\quad+\int_{r+a_1-v}^{\infty}\mathrm{d}r'\,\Big(\left(K_3(v-r,v-r+r')-K_3(v,v+r')\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\times\\
&\qquad\times\exp\left(\mu\max\{a,c_0(v-r+r'),v-r\}\right)f(v+r')g_t(v-r+r',r')\\
&\quad-\Big(K_3^1(v-r,v-r-r')-K_3^1(v,v-r')\Big)\exp\left(\mu\max\{a,c_0v,v-r'\}\right)f(v)g_t(v,r')\Big)\Bigg\}\Bigg]\\
&\quad+\mathbb{I}(v\ge-b_0)\Bigg[\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,\Big(\left(K_3(v-r,v-r+r')-K_3(v,v+r')\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\times\\
&\qquad\times\exp\left(\mu\max\{a,c_0(v-r+r'),v-r\}\right)f(v+r')g_t(v-r+r',r')\\
&\quad-\Big(K_3^1(v-r,v-r-r')-K_3^1(v,v-r')\Big)\exp\left(\mu\max\{a,c_0v,v-r'\}\right)f(v)g_t(v,r')\Big)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{D.4}
$$

最后,

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{I}[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,r)\\
&=-\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^1(v,v-r')\left(f(v-r-r')-f(v-r')\right)g_t(v,r')\\
&\quad-\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,\Big(K_3^1(v-r,v-r-r')-K_3^1(v,v-r')\Big)\left(f(v-r-r')-f(v-r)\right)g_t(v,r')\\
&\quad-\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^1(v-r,v-r-r')\left(f(v-r-r')-f(v-r)\right)\left(g_t(v,r+r')-g_t(v,r')\right)\\
&\quad+\mathcal{I}^{(1)}[\Gamma_t^1](v,r)\;+\;\mathcal{I}^{(2)}[\Gamma_t^2](v,r)\;+\;\mathcal{I}^{(3)}[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,r),
\end{aligned}
\tag{D.5}
$$

with

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{I}^{(1)}[\Gamma_t^1](v,r)\\
&= \mathbb{1}(v < -b_0) f(v-r)\Bigg[\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\; K_3(v, v+r') \left(\mathrm{e}^{\mu a} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'} \mathrm{e}^{\mu \max\{a, v-r, c_0(v+r')\}} \right) \times \\
&\qquad\qquad \times \left(g_t(v,r) + g_t(v-r+r', r') - g_t(v+r', r+r') \right) \\
&\quad + \mathbb{1}(a_1 - v \geq r + \delta_1) \int_{a_1-v}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\; K_3(v, v+r') \left(\mathrm{e}^{\mu a} - \mathrm{e}^{\mu c_0 v} \mathrm{e}^{-(\frac{1}{2} - \mu c_0) r'} \right) g_t(v+r', r+r') \\
&\quad + \mathbb{1}(a_1 - v < r + \delta_1) \int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\; K_3(v, v+r') \left(\mathrm{e}^{\mu a} - \mathrm{e}^{\mu c_0 v} \mathrm{e}^{-(\frac{1}{2} - \mu c_0) r'} \right) g_t(v+r', r+r') \Bigg],
\end{aligned}
\tag{D.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{I}^{(2)}[\Gamma_t^2](v,r)\\
&= \mathbb{I}(v<-b_0)\Bigg[\int_{\max(r+\delta_1,a_1-v)}^{\infty} \mathrm{d}r'\; K_3(v,v+r')f(v+r')\left(\mathrm{e}^{\mu a}-\mathrm{e}^{\mu c_0 v}\right) g_t(v,r)\\
&\quad+\int_{r+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}r'\; K_3(v,v+r')\left(f(v)-f(v+r')\right)\mathrm{e}^{\mu a} g_t(v,r)\\
&\quad+\mathbb{I}(r\le a_1-v\le r+\delta_1)\Bigg\{\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\; \overline{K_3}^2(v,v+r')f(v+r')\left(\mathrm{e}^{\mu a}-\mathrm{e}^{\mu c_0(v-r+r')}\right) g_t(v-r+r',r')\\
&\qquad+\int_{r+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}r'\; \overline{K_3}^2(v,v+r')\left(f(v-r+r')-f(v+r')\right)\mathrm{e}^{\mu\max\{a,c_0(v-r+r')\}} g_t(v-r+r',r')\\
&\qquad+\int_{r+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}r'\; K_3(v,v+r')f(v+r')\mathrm{e}^{\mu c_0 v}\left(1-2\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}-\mu c_0)r'}+\mathrm{e}^{-2(\frac{1}{2}-\mu c_0)r'}\right) g_t(v,r)\\
&\qquad+\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\; \overline{K_3}^1(v-r,v-r+r')f(v-r+r')\mathrm{e}^{\mu a} g_t(v-r+r',r')\Bigg\}\\
&\quad+\mathbb{I}(a_1-v>r+\delta_1)\Bigg\{\int_{r+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}r'\; \overline{K_3}^2(v-r,v-r+r')\left(f(v-r+r')-f(v+r')\right)\times\\
&\qquad\qquad\times\mathrm{e}^{\mu\max\{a,c_0(v-r+r')\}} g_t(v-r+r',r')\\
&\qquad+\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\; \left(\overline{K_3}^1(v-r,v-r+r')-\overline{K_3}^1(v,v+r')\right)\left(f(v-r+r')-f(v+r')\right)\times\\
&\qquad\qquad\times\mathrm{e}^{\mu\max\{a,c_0(v-r+r')\}} g_t(v-r+r',r')\\
&\qquad+\int_{a_1-v}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\; \left(\overline{K_3}^1(v-r,v-r+r')-\overline{K_3}^1(v,v+r')\right) f(v+r')\mathrm{e}^{\mu\max\{a,c_0(v-r+r')\}} g_t(v-r+r',r')\\
&\qquad+\mathrm{e}^{\mu a}\int_{r+\delta_1}^{a_1-v} \mathrm{d}r'\; \overline{K_3}^1(v,v+r')f(v+r')\left(g_t(v,r)+g_t(v-r+r',r')-g_t(v+r',r+r')\right)\\
&\qquad+\int_{a_1-v}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\; K_3(v,v+r')f(v+r')\Bigg[\mathrm{e}^{\mu c_0 v}\left(1-\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}-\mu c_0)r'}\right) g_t(v,r)+\\
&\qquad\qquad+\left(\mathrm{e}^{\mu a}-\mathrm{e}^{\mu c_0 v}\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}-\mu c_0)r'}\right) g_t(v-r+r',r')\Bigg]\\
&\qquad+\mathrm{e}^{\mu a}\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\; \overline{K_3}^1(v,v+r')\left(f(v-r+r')-f(v+r')\right) g_t(v-r+r',r')\Bigg\}\\
&\quad+\mathbb{I}(a_1-v<r)\Bigg\{\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\; \overline{K_3}^2(v,v+r')f(v+r')\left(\mathrm{e}^{\mu a}-\mathrm{e}^{\mu c_0(v-r+r')}\right) g_t(v-r+r',r')\\
&\qquad+\mathrm{e}^{\mu a}\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\; \overline{K_3}^2(v,v+r')\left(f(v-r+r')-f(v+r')\right) g_t(v-r+r',r')\\
&\qquad+\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\; \overline{K_3}^1(v-r,v-r+r')\mathrm{e}^{\mu\max\{a,c_0(v-r+r')\}}\left(f(v-r+r')-f(v+r')\right) g_t(v-r+r',r')\\
&\qquad+\int_{r+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}r'\; \left(\overline{K_3}^2(v-r,v-r+r')-\overline{K_3}^2(v,v+r')\right)\left(f(v-r+r')-f(v+r')\right)\times\\
&\qquad\qquad\times\mathrm{e}^{\mu\max\{a,c_0(v-r+r')\}} g_t(v-r+r',r')\Bigg\}\Bigg],
\end{aligned}
\tag{D.7}
$$

最后，

$$\begin{aligned}&\mathcal{I}^{(3)}[\Gamma_t^2](v,r)\\&=\mathbb{I}(v\geq -b_0)\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,\overline{K_3}^2(v-r,v-r+r')\left(f(v-r+r')-f(v+r')\right)\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0(v-r+r'))}g_t(v-r+r',r')\end{aligned}\tag{D.8}$$

J_1 和 J_2 这两部分会产生一些需要加以控制的负项，我们很快就会看到这一点。

D.2.2. 估计 $I_2[\Gamma_t](v,\ r)$

$$I_2[\Gamma_t](v,r)=I_2[\Gamma_t^1](v,r)+I_2[\Gamma_t^2](v,r).$$

1. $I_2[\Gamma_t^1](v,\ r)$的下界：回忆式 (3.29)

$$\begin{aligned}&I_2[\Gamma_t^1](v,r)\\&\geq\ \mathbb{I}(v-r<-b_0)e^{\mu\max\{a,c_0v\}}\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\,\Big[K_3(v-r,v-r+r')\left(f(v-r)-(\ln(1+e^{v-r+r'}))^{-\alpha}\right)\\&\qquad\qquad-K_3^1(v-r,v-r-r')\left(f(v-r-r')-f(v-r)\right)\Big]g_t(v,r)\\&+\ \mathbb{I}(v<-b_0)\,\mathbb{I}(r>a-v)f(v-r)\int_{a_1-v}^{r}\mathrm{d}r'\,K_3(v,v+r')\left(\mathrm{e}^{\mu a}-\mathrm{e}^{\mu c_0v}\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}-\mu c_0)r'}\right)g_t(v,r)\\&+\ \mathbb{I}(v\geq -b_0)\,\mathbb{I}(v-r<-b_0)\Big[f(v-r)\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\,K_3(v,v+r')\left(\mathrm{e}^{\mu\max\{a,c_0v\}}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\mathrm{e}^{\mu\max\{a,c_0(v+r')\}}\right)g_t(v,r)\\&\quad+\int_{\min(r,r-v)}^{r}\mathrm{d}r'\,K_3(v-r,v-r+r')(\ln(1+e^{v-r+r'}))^{-\alpha}\left(2g_t(v,r)-g_t(v,r+r')\right)\Big]+I_2^-[\Gamma_t^1](v,r),\end{aligned}$$

其中

$$
\begin{aligned}
&I_2^-[\Gamma_t^1](v,r)\\
=&-f(v-r)\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ \left(K_3(v,v+r')-K_3^1(v,v-r')\right)\left(g_t(v+r',r+r')-g_t(v,r+r')\right)\\
&-\mathbb{I}(v<-b_0)\mathrm{e}^{\mu a}\Big[4\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ \left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})\right)^{1-\alpha}\frac{\mathrm{e}^{-r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\times\\
&\qquad\times\left(1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}\right)^{\alpha}\right)\left(g_t(v,r+r')-g_t(v,r)\right)\\
&\quad+\ 4\bar{n}f(v-r)\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ \ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})\frac{\mathrm{e}^{v-r'}(1-\mathrm{e}^{-r'})(1-\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}r'})}{(1+\mathrm{e}^{v-r}+\mathrm{e}^{-r'})(1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-r'})}\times\\
&\qquad\times\left(g_t(v,r+r')-g_t(v,r)\right)\Big]\\
&-\mathbb{I}(v\geq-b_0)\Big[\mathbb{I}(v-r<-b_0)e^{\mu\max(a,c_0v)}\Big\{4\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ \left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})\right)^{1-\alpha}\times\\
&\qquad\times\frac{\mathrm{e}^{-r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\left(1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}\right)^{\alpha}\right)\left(g_t(v,r+r')-g_t(v,r)\right)\\
&\quad+\ 4\bar{n}f(v-r)\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ \ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})\frac{\mathrm{e}^{-r'}(1-\mathrm{e}^{-r-2r'})}{(1+\mathrm{e}^{v-r}+\mathrm{e}^{-r'})}\times\left(g_t(v,r+r')-g_t(v,r)\right)\Big\}\\
&\quad+\ \mathbb{I}(v-r\geq-b_0)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r)}\Big\{4\bar{n}f(v-r)\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ \ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})\frac{\mathrm{e}^{-r'}(1-\mathrm{e}^{-2r'})}{(1+\mathrm{e}^{v-r}+\mathrm{e}^{-r'})}\times\\
&\qquad\times\left(g_t(v,r+r')-g_t(v,r)\right)\\
&\quad+4\bar{n}f(v-r)\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ \ln(1+\mathrm{e}^{v-r'})\frac{\mathrm{e}^{v-r'}(1-\mathrm{e}^{-r'})}{(1+\mathrm{e}^{v-r'}+\mathrm{e}^{-r'})(1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-r'})}\times\\
&\qquad\times\left(g_t(v,r+r')-g_t(v,r)\right)\Big\}\Big]
\end{aligned}
\tag{D.9}
$$

2. $I_2[\Gamma_t^2](v,r)$的一个下界：

$$
\begin{aligned}
I_2[\Gamma_t^2](v,r)\geq&\ \mathbb{I}(v<-b_0)\Big[\mathrm{e}^{\mu a}\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ K_3(v,v+r')\left(f(v)-f(v+r')\right)g_t(v,r)\\
&\quad+\mathbb{I}(r>a_1-v)\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ K_3(v,v+r')f(v+r')\left(\mathrm{e}^{\mu a}-\mathrm{e}^{\mu c_0v}\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}-\mu c_0)r'}\right)g_t(v,r)\Big]\\
&+\mathbb{I}(v\geq-b_0)\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ K_3(v,v+r')f(v)\left(\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0(v+r'))}\right)g_t(v,r)\\
&+I_2^-[\Gamma_t^2](v,r),
\end{aligned}
\tag{D.10}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&I_2^-[\Gamma_t^2](v,r)\\
=&-\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}f(v)\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ \Big(K_3(v,v+r')-K_3^1(v,v-r')\Big)\left(g_t(v+r',r+r')-g_t(v,r+r')\right)\\
&-4\bar{n}\,\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}f(v)\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ \ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})\frac{\mathrm{e}^{-r'}(1-\mathrm{e}^{-2r'})}{1+\mathrm{e}^{v-r}+\mathrm{e}^{-r'}}\left(g_t(v,r+r')-g_t(v,r)\right)\\
&-4\bar{n}\,\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}f(v)\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ \ln(1+\mathrm{e}^{v-r'})\frac{\mathrm{e}^{v-r'}(1-\mathrm{e}^{-r'})}{(1+\mathrm{e}^{v-r'}+\mathrm{e}^{-r'})(1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-r'})}\times\\
&\qquad\qquad\times\left(g_t(v,r+r')-g_t(v,r)\right)
\end{aligned}
$$

D.2.3. $I_3[\Gamma_t](v,\ r)$ 的下界：

$$I_3[\Gamma_t](v,r)=I_3^{(1)}[\Gamma_t](v,r)+I_3^{(2)}[\Gamma_t](v,r).$$

对于 I_3，我们将直接明确写出相关定义。

$I_{(1)_3}\ [\Gamma_t](v,\ r)$ 的表达式：

$$
\begin{aligned}
&\textbf{a)}\ I_3^{(1)}[\Gamma_t^1](v,r)\\
&=\mathbb{I}(v-r\le -m_0)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}f(v-r)\Big[\int_{\tilde{r}}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')g_t(v,r)\\
&\qquad+\int_0^{\tilde{r}}\mathrm{d}r'\ \Big(K_3^2(v-r,v-r-r')g_t(v,r)-(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r'))g_t(v,r+r')\Big)\Big]\\
&\quad+\mathbb{I}(-m_0<v-r<m_0)\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}f(v-r)\int_0^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')g_t(v,r)\\
&\quad+\mathbb{I}(v-r\ge m_0)f(v-r)\Big[\mathbb{I}(v\le 3r)\Big\{\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}\int_{v-r}^{\infty}dr'K_3^2(v-r,v-r-r')g_t(v,r)\\
&\qquad+\int_0^{v-r}\mathrm{d}r'\ \Big(\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}K_3^2(v-r,v-r-r')g_t(v,r)\\
&\qquad\qquad-\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r-r',c_0v)}\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\Big)g_t(v,r+r')\Big)\Big\}\\
&\qquad+\mathbb{I}(v>3r)\Big\{\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}\int_0^{v-r-c_0v}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')g_t(v,r)\\
&\qquad\quad+\int_{v-r-c_0v}^{\infty}\mathrm{d}r'\ \Big(\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}K_3^2(v-r,v-r-r')g_t(v,r)\\
&\qquad\qquad-\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r-r',c_0v)}\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\Big)g_t(v,r+r')\Big)\Big\}\Big]\\
&\quad+A_1^-[\Gamma_t^1](v,r)+A_2^-[\Gamma_t^1](v,r)+A_3^-[\Gamma_t^1](v,r)+A_4^-[\Gamma_t^1](v,r),
\end{aligned}
\tag{D.11}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&A_1^-[\Gamma_t^1](v,r)\\
=&-\mathbb{I}(v-r\le -m_0)\mathbb{I}(v<-b_0)\mathbb{I}(\tilde{r}>r+\delta_1)\int_{r+\delta_1}^{\tilde{r}}\mathrm{d}r'\ \Big(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\Big)\times\\
&\qquad\qquad\times\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\left(f(v-r-r')-f(v-r)\right)g_t(v,r+r')
\end{aligned}
\tag{D.12}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_2^-[\Gamma_t^1](v,r)\\
&= -\mathbb{I}(v-r\le -m_0)\int_{\min(\delta_1,\tilde r)}^{\min(r,\tilde r)} \mathrm{d}r'\ \left(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\right)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\times\\
&\qquad\qquad\times\left(f(v-r-r')-f(v-r)\right)g_t(v,r+r')
\end{aligned}
\tag{D.13}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_3^-[\Gamma_t^1](v,r)\\
&= -\mathbb{I}(v-r\ge m_0)\mathbb{I}(v>3r)\int_{v-r}^{\infty} \mathrm{d}r'\ \left(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\right)\times\\
&\qquad\qquad\times\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\left(f(v-r-r')-f(v-r)\right)g_t(v,r+r')
\end{aligned}
\tag{D.14}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_4^-[\Gamma_t^1](v,\ \ r)\\
&= -\mathbb{I}(v-r\le -m_0)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\Bigg[\int_0^{\min(\delta_1,\tilde r)} \mathrm{d}r'\ \left(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\right)\times\\
&\qquad\qquad\times\left(f(v-r-r')-f(v-r)\right)g_t(v,r+r')\\
&\quad+\mathbb{I}(v<-b_0)\int_r^{\min(\tilde r,r+\delta_1)} \mathrm{d}r'\ \left(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\right)\times\\
&\qquad\qquad\times\left(f(v-r-r')-f(v-r)\right)g_t(v,r+r')\Bigg].
\end{aligned}
\tag{D.15}
$$

b) $I_3^{(1)}[\Gamma_t^2](v,r)$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{I}(v-r \le -m_0) f(v) \mathrm{e}^{\mu \max(a, c_0 v)} \Bigg[\int_{\tilde{r}}^{\infty} \mathrm{d}r' \; K_3^2(v-r, v-r-r') g_t(v,r) \\
&\qquad + \int_0^{\tilde{r}} \mathrm{d}r' \; \left\{ K_3^2(v-r, v-r-r') g_t(v,r) - \left(K_3^2(v-r, v-r-r') - K_3^2(v, v-r-r') \right) g_t(v, r+r') \right\} \Bigg] \\
&+ \mathbb{I}(-m_0 < v-r < m_0) f(v) \mathrm{e}^{\mu \max(a, v-r, c_0 v)} \int_0^{\infty} \mathrm{d}r' K_3^2(v-r, v-r-r') g_t(v,r) \\
&+ \mathbb{I}(v-r \ge m_0) f(v) \Bigg[\mathbb{I}(v \le 3r) \Bigg\{ \int_0^{v-r} \mathrm{d}r' \; \left(\mathrm{e}^{\mu \max(a, v-r, c_0 v)} - \mathrm{e}^{\mu \max(a, v-r-r', c_0 v)} \right) \times \\
&\qquad \times K_3^2(v-r, v-r-r') g_t(v,r) \\
&\qquad + \int_0^{v-r} \mathrm{d}r' \; \mathrm{e}^{\mu \max(a, v-r-r', c_0 v)} \Big(K_3^2(v-r, v-r-r') g_t(v,r) - \\
&\qquad\qquad - \left(K_3^2(v-r, v-r-r') - K_3^2(v, v-r-r') \right) g_t(v, r+r') \Big) \\
&\qquad + \mathrm{e}^{\mu \max(a, c_0 v, v-r)} \int_{v-r}^{\infty} \mathrm{d}r' \; K_3^2(v-r, v-r-r') g_t(v,r) \Bigg\} \\
&\qquad + \mathbb{I}(v > 3r) \Bigg\{ \mathrm{e}^{\mu \max(a, c_0 v, v-r)} \int_0^{v-r-c_0 v} \mathrm{d}r' \; K_3^2(v-r, v-r-r') g_t(v,r) \\
&\qquad + \int_{v-r-c_0 v}^{\infty} \mathrm{d}r' \; K_3^2(v-r, v-r-r') \left(\mathrm{e}^{\mu \max(a, c_0 v, v-r)} - \mathrm{e}^{\mu \max(a, c_0 v, v-r-r')} \right) g_t(v,r) \\
&\qquad + \int_{v-r-c_0 v}^{\infty} \mathrm{d}r' \; \mathrm{e}^{\mu \max(a, v-r-r', c_0 v)} \Big(K_3^2(v-r, v-r-r') g_t(v,r) \\
&\qquad\qquad - \left(K_3^2(v-r, v-r-r') - K_3^2(v, v-r-r') \right) g_t(v, r+r') \Big) \Bigg\} \Bigg].
\end{aligned}
\tag{D.16}
$$

表达式 $I_{(2)_3}\ [\Gamma_t](v,r)$:

a) $I_3^{(2)}[\Gamma_t^1](v,r)$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{I}(v \le -m_0)\mathrm{e}^{\mu a} f(v-r)\Big[\mathbb{I}(v+r<-b_0)\int_0^r \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')\,(g_t(v,r)-g_t(v-r',r-r')) \\
&\qquad + \mathbb{I}(v+r\ge -b_0)\int_0^{-v-b_0} \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')\,(g_t(v,r)-g_t(v-r',r-r')) \\
&\quad + \mathbb{I}(v+r\ge -b_0)\int_{-v-b_0}^r \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')g_t(v,r)\Big] \\
&\quad + \mathbb{I}(-m_0<v<m_0)\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)} f(v-r)\int_0^r \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')g_t(v,r) \\
&\quad + \mathbb{I}(v\ge m_0) f(v-r)\Big[\mathbb{I}(v\le r)\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}\int_0^r \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')g_t(v,r) \\
&\qquad + \mathbb{I}(0<v-r<c_0v)\Big\{\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}\int_0^r \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')g_t(v,r) \\
&\qquad\quad - \int_{v-c_0^{-1}(v-r)}^r \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0(v-r'))} g_t(v-r',r-r')\Big\} \\
&\quad + \mathbb{I}(v-r\ge c_0v)\int_0^r \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')\Big(\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}g_t(v,r) - \mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0(v-r'))}g_t(v-r',r-r')\Big)\Big]
\end{aligned}
\tag{D.17}
$$

b) $I_{(2}{}_3\ [\Gamma_t^2])\,(v,r)$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{I}(v\le -m_0)\mathrm{e}^{\mu a}\Big[-\mathbb{I}(v+r<-b_0)\int_0^r \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')\,(f(v-r')-f(v))\,g_t(v-r',r-r') \\
&\quad - \mathbb{I}(v+r\ge -b_0)\int_0^{-v-b_0} \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')\,(f(v-r')-f(v))\,g_t(v-r',r-r') \\
&\quad + \mathbb{I}(v+r<-b_0)f(v)\int_0^r \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')\,(g_t(v,r)-g_t(v-r',r-r')) \\
&\quad + \mathbb{I}(v+r\ge -b_0)f(v)\Big\{\int_{-v-b_0}^r \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')g_t(v,r) \\
&\qquad + \int_0^{-v-b_0} \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')\,(g_t(v,r)-g_t(v-r',r-r'))\Big\}\Big] \\
&\quad + \mathbb{I}(-m_0<v<m_0)\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)} f(v)\int_0^r \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')g_t(v,r) \\
&\quad + \mathbb{I}(v\ge m_0)\Big[\mathbb{I}(v\le r)\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)} f(v)\int_0^r \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')g_t(v,r) \\
&\quad + \mathbb{I}(0<v-r<c_0v)\Big\{\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)} f(v)\int_0^{v-c_0^{-1}(v-r)} \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')g_t(v,r) \\
&\quad + \int_{v-c_0^{-1}(v-r)}^r \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')f(v)\Big(\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}g_t(v,r) - \mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0(v-r'))}g_t(v-r',r-r')\Big)\Big\} \\
&\quad + \mathbb{I}(v-r\ge c_0v)\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r)} f(v)\int_0^r \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')\,(g_t(v,r)-g_t(v-r',r-r'))\Big].
\end{aligned}
\tag{D.18}
$$

让我们回顾一下，当取较大的正值时，L

$$
{}_u\Gamma_t \qquad v \qquad \mathbb{I}\ v-r\ \ge \text{的正确渐近行为来自}\ (\,)_{0_3}\ [\Gamma_t](,\ )
$$

$m_0\ I^{\,1}$（当 和 ( ) 具有可比性时），$v\ r \qquad v \qquad v-r$ 以及 $\mathbb{I}\,(\,)_{0_3}\ [\Gamma_t](,\ )$（当 $v \gg m_0\ I^{\,2}$ 远大于 $(v-r)$ 时）。$v\ r \qquad v$

我们稍后会讨论 I_4，因为我们已经知道，它会从积分区间的长度中继承一定程度的“微小性”。

D.3. 结合各项估计得到主要下界：

本节将上一小节展开的各项组合起来，以便为 $\mathrm{L}_u\Gamma_t(v,\ r)$。找到一个有用的下界。正如引理 3.6 中所述，来自 $I_1[\Gamma_t](v,\ r)$ 下界的 $\mathrm{J}_0[\Gamma_t](v,\ r)$，以及在式 (3.34) 中定义的、来自 $I_2[\Gamma_t^1](v,\ r)$ 下界的 $\mathrm{C}_3[\Gamma_t^1](v,\ r)$，为 $\mathrm{L}_u\Gamma_t(v,\ r)$ 提供了具有点奇异性的正确渐近行为。

我们的主要目标是利用一些适当的积分组合，处理上述估计中得到的负项。我们将这些组合依次记为 Comb.1、Comb.2 等。这些组合为若干个 I_i 之和给出有用的下界，并最终导出我们的主要估计。下文将这些下界记为 LB1、LB2 等。换言之，为便于引用，我们将最重要的估计记为 LB1、LB2 等，将导出这些估计的特定项组合记为 Comb.1、Comb.2 等；其余内容则按章节采用通常的编号方式。

请注意，形如 $(g_t(.,\ r+r')\ -g_t(.,\ r))$ 的项会额外产生关于 $e^{-\kappa r}$ 的指数衰减。这种额外的“小量”使我们能够轻松处理这类负项。因此，我们将首先关注那些不包含形如 $(g_t(.,\ r+r')\ -g_t(.,\ r))$ 的差的负项。

我们首先考察 (D.5) 中前两个负项。将第一个负项与 $\mathrm{I}^{(2)}[\Gamma_t^2](v,\ r)$ 和 $I_3^1[\Gamma_t^2](v,\ r)$ 中的项合并如下：

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^1(v,v-r')\,(f(v-r-r')-f(v-r'))\,g_t(v,r') && \textbf{(Comb.1)}\\
&+\mathbb{I}(v-r\le -m_0)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}f(v)\int_{\tilde r}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')g_t(v,r)\\
&+\mathbb{I}(-m_0<v-r<m_0)\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}f(v)\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')g_t(v,r)\\
&+\mathbb{I}(v<-b_0)\,\mathbb{I}(r+\delta_1<a_1-v)\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\ \overline{K_3}^2(v-r,v-r+r')\,(f(v-r+r')-f(v+r'))\times\\
&\qquad\qquad\times\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0(v-r+r'))}g_t(v-r+r',r')\\
\ge&-\mathbb{I}(v\ge 0)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\int_{r+\delta_1}^{2r+\delta_1}\mathrm{d}r'\ K_3^1(v,v-r')\,(f(v-r-r')-f(v-r'))\,g_t(v,r')\\
&-\mathbb{I}(v-r\ge m_0)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\int_{2r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^1(v,v-r')\,(f(v-r-r')-f(v-r'))\,g_t(v,r')+B_1^+[\Gamma_t^2](v,r),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&B_1^+[\Gamma_t^2](v,r)\\
&= \mathbb{I}(v<-b_0)\mathrm{e}^{\mu a}f(v)g_t(v,r)\Bigg[\mathbb{I}(v-r<-m_0)\int_{\max(-v-b_0,r)}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\times\\
&\qquad\qquad\times\left(1-\mathrm{e}^{-(\frac{122}{250}-2\alpha)r'}+\mathrm{e}^{-(\frac{122}{250}-\alpha)r}\mathrm{e}^{-r'}\frac{1-\mathrm{e}^{-(1-\alpha)r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\right)\\
&\quad+\mathbb{I}(v-r\geq -m_0)\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\times\\
&\qquad\qquad\times\left(1-\mathrm{e}^{-(\frac{122}{250}-2\alpha)r'}+\mathrm{e}^{-(\frac{122}{250}-\alpha)r}\mathrm{e}^{-r'}\frac{1-\mathrm{e}^{-(1-\alpha)r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\right)\Bigg]\\
&+\mathbb{I}(v\geq -b_0)\Bigg[\mathrm{e}^{\mu a}f(v)g_t(v,r)\,\mathbb{I}(-b_0\leq v<0)\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\Big(1-\mathrm{e}^{-2(\frac{1}{3}-\alpha)r'}\mathrm{e}^{-(\frac{1}{3}+\alpha)(r'-r)}\\
&\qquad\qquad+\mathrm{e}^{-(r'-r)}\mathrm{e}^{-(\frac{2}{3}-\alpha)r}\frac{1-\mathrm{e}^{-(1-\alpha)r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\Big)\\
&\quad+\mathbb{I}(v\geq 0)\,\mathbb{I}(v-r<m_0)f(v)g_t(v,r)\Bigg\{\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\times\\
&\qquad\qquad\times\left(1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v})}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-(1-2\alpha)r}\mathrm{e}^{-(1-\alpha)r'}\right)\\
&\quad+4\bar{n}\ \mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\ \ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})\frac{\mathrm{e}^{v-r-r'}+2\mathrm{e}^{-r'}}{1+\mathrm{e}^{v-r-r'}+\mathrm{e}^{-r'}}\frac{1-\mathrm{e}^{-(1-\alpha)(r+r')}}{1-\mathrm{e}^{-r-r'}}\mathrm{e}^{-r'}\mathrm{e}^{-(1-\alpha)r}\\
&\quad+\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\Big(\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}-\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\Big)\Bigg\}\Bigg]
\end{aligned}
\tag{D.19}
$$

现在我们来看 (D.5) 中的第二项。我们将它与 $\mathrm{I}^{(2)}[\Gamma_t^2](v,\ r)$ 和 $B_1^+[\Gamma_t^2](v,\ r)$ 中的一项组合如下。这是第二种组合 Comb.2。

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\ \Big(K_3^1(v-r,v-r-r')-K_3^1(v,v-r')\Big)\left(f(v-r-r')-f(v-r)\right)g_t(v,r') \qquad \textbf{(Comb.2)}\\
&+\mathrm{e}^{\mu a}\,\mathbb{I}(v<-b_0)\,\mathbb{I}(a_1-v>r+\delta_1)\int_{r+\delta_1}^{a_1-v}\mathrm{d}r'\ \overline{K_3}^1(v,v+r')f(v+r')\times\\
&\qquad\qquad\times\left(g_t(v,r)+g_t(v-r+r',r')-g_t(v+r',r+r')\right)\\
&+B_1^+[\Gamma_t^2](v,r)\\
&\geq-\mathbb{I}(v-r\geq m_0)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\ \Big(K_3^1(v-r,v-r-r')-K_3^1(v,v-r')\Big)\times\\
&\qquad\qquad\times\left(f(v-r-r')-f(v-r)\right)g_t(v,r')\\
&\quad+E_1[\Gamma_t^2](v,r)+E_2[\Gamma_t^2](v,r),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&E_1[\Gamma_t^2](v,r)\\
=&\mathbb{I}(v<-b_0)\mathrm{e}^{\mu a}\Bigg[\mathbb{I}(-v-b_0>r+\delta_1)\Bigg\{\int_{-v-b_0}^{a_1-v}\mathrm{d}r'\,\overline{K_3}^1(v,v+r')f(v+r')\left(2-(1+\mathrm{e}^{-\kappa r})^{\gamma_t(v,r)}\right)g_t(v,r)\\
&+\int_{r+\delta_1}^{-v-b_0}\mathrm{d}r'\,\overline{K_3}^1(v,v+r')f(v+r')\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{124}{125}(1-\alpha)r'}\right)(1-\mathrm{e}^{-\kappa r})^{2\gamma_1}\\
&+f(v)\int_{-v-b_0}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v-r,v-r-r')\Bigg(\left(1-\mathrm{e}^{-(\frac{122}{250}-2\alpha)r'}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-(1-2\alpha)r'}\right)\\
&\qquad+\mathrm{e}^{-\frac{116}{750}r'}\mathrm{e}^{-(1-2\alpha)r'}(1-\mathrm{e}^{-\alpha r'})\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{634}{750}r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\Bigg)g_t(v,r)\Bigg\}\\
&+\mathbb{I}(-v-b_0\le r+\delta_1)\mathrm{e}^{\mu a}\Bigg\{\mathbb{I}(r+\delta_1\le a_1-v)\int_{r+\delta_1}^{a_1-v}\mathrm{d}r'\,\overline{K_3}^1(v,v+r')f(v+r')\times\\
&\qquad\times\left(2-(1+\mathrm{e}^{-\kappa r})^{\gamma_t(v,r)}\right)g_t(v,r)\\
&+f(v)\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v-r,v-r-r')\left(1-\mathrm{e}^{-(\frac{122}{250}-2\alpha)r'}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-(1-2\alpha)r'}\right)g_t(v,r')\Bigg\}\\
&+\mathrm{e}^{\mu a}f(v)\int_{\max(-v-b_0,r+\delta_1)}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v-r,v-r-r')\mathrm{e}^{-r'}\mathrm{e}^{-(\frac{122}{250}-\alpha)r}\frac{1-\mathrm{e}^{-(1-\alpha)r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}g_t(v,r)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{D.20}
$$

and,

$$
\begin{aligned}
&E_2[\Gamma_t^2](v,r)\\
=&\mathbb{I}(v\geq -b_0)\Bigg[\mathbb{I}(-b_0\leq v<0)\mathrm{e}^{\mu a}f(v)\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v-r,v-r-r')\Bigg(\left(1-\mathrm{e}^{-2(\frac{1}{3}-\alpha)r'}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-(1-2\alpha)r'}\right)\\
&\qquad+\mathrm{e}^{-(1-\alpha)r'}\left(1-\mathrm{e}^{-(\frac{2}{3}-3\alpha)r'}\right)+\mathrm{e}^{-(r'-r)}\mathrm{e}^{-(\frac{2}{3}-\alpha)r}\frac{1-\mathrm{e}^{-(1-\alpha)r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\Bigg)g_t(v,r)\\
&+\mathbb{I}(v\geq 0)\mathbb{I}(v-r<m_0)f(v)g_t(v,r)\Bigg\{\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v})}\right)^{\frac{3}{2}}\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v-r,v-r-r')\times\\
&\qquad\times\mathrm{e}^{-r'}\mathrm{e}^{-(1-\alpha)r}\frac{1-\mathrm{e}^{-(1-\alpha)(r+r')}}{1-\mathrm{e}^{-(r+r')}}\\
&+\mathbb{I}(v-r\leq\max(a,c_0v))\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v-r,v-r-r')\Bigg(\left(1-\mathrm{e}^{-(1-2\alpha)r'}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-(1-\alpha)r'}\mathrm{e}^{-(1-2\alpha)r}\right)\\
&\qquad+\mathrm{e}^{-(1-\alpha)r'}\left(1-\mathrm{e}^{-(1-2\alpha)(r+r')}\right)\Bigg)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\\
&+\mathbb{I}(v-r>\max(a,c_0v))\left(\mathrm{e}^{\mu(v-r)}-\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\right)\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v-r,v-r-r')\left(1-\mathrm{e}^{-(1-2\alpha)r}\mathrm{e}^{-(1-\alpha)r'}\right)\\
&+\mathbb{I}(v-2r-\delta_1<\max(a,c_0v)<v-r)\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v-r,v-r-r')\mathrm{e}^{-\alpha r'}\,(1-\mathrm{e}^{-\alpha r}\\
&\qquad+\mathrm{e}^{-\alpha r}(1-\mathrm{e}^{-(1-3\alpha)(r+r')})\Big)\,\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\\
&+\mathbb{I}(v-2r-\delta_1\geq\max(a,c_0v))\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v-r,v-r-r')\Bigg(\left(1-\mathrm{e}^{-(1-2\alpha)r'}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-(1-\alpha)r'}\mathrm{e}^{-(1-2\alpha)r}\right)\\
&\qquad+\mathrm{e}^{-(1-\alpha)r'}\left(1-\mathrm{e}^{-(1-2\alpha)(r+r')}\right)\Bigg)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\Bigg\}\Bigg]
\end{aligned}
\tag{D.21}
$$

显然，组合 Comb.1 和 Comb.2 对 I 的两个负项所起的作用，是将它们从点奇点推向 $v-r>0$ 和 $v>0$ 所在的区域。

现在，我们将 $E_1[\Gamma_t^2](v,\ r)$ 中的一个项与 $A_1^{-1}[\Gamma_t^1](v,\ r)$ 中的一个项按如下方式结合，记为 Comb.3：

$$
\begin{aligned}
&A_1^-[\Gamma_t^1](v,r) \qquad\qquad\qquad\

定义如下：

$$
\begin{aligned}
&E_1'[\Gamma_t^2](v,r)\\
&= E_1[\Gamma_t^2](v,r) - \mathbb{I}(-v-b_0 > r+\delta_1)\mathrm{e}^{\mu a}\int_{r+\delta_1}^{-v-b_0}\mathrm{d}r'\,\overline{K_3}^1(v,v+r')f(v+r')\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{124}{125}(1-\alpha)r'}\right)(1-\mathrm{e}^{-\kappa r})^{2\gamma_1}\\
&+\mathbb{I}(-v-b_0 > r+\delta_1)\Bigg[\mathbb{I}(v-r<-m_0)4\bar{n}\,(\ln(1+\mathrm{e}^v))^{-\frac{3}{2}}\int_{r+\delta_1}^{-v-b_0}\mathrm{d}r'\,\frac{\mathrm{e}^{v-r'}(\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'}))^{1-\alpha}}{(1+\mathrm{e}^v+\mathrm{e}^{-r'})(1+\mathrm{e}^{v-r-r'}+\mathrm{e}^{-r'})}\times\\
&\qquad\times(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'})(1-\mathrm{e}^{-(r'+r)})\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{124}{125}(1-\alpha)r'}\right)(1-\mathrm{e}^{-\kappa r})^{2\gamma_1}\\
&\quad+\mathbb{I}(v-r\geq -m_0)\int_{r+\delta_1}^{-v-b_0}\mathrm{d}r'\,\overline{K_3}^1(v,v+r')f(v+r')\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{124}{125}(1-\alpha)r'}\right)(1-\mathrm{e}^{-\kappa r})^{2\gamma_1}\Bigg]\mathrm{e}^{\mu a}.
\end{aligned}
\tag{D.22}
$$

这意味着我们可以组合 (Comb.1)、(Comb.2) 和 (Comb.3)，从而得到以下下界：

$$
\begin{aligned}
&\text{我}[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,\ r)+I(_1_3[\Gamma_t^2])(v,\ r)+A_1^-[\Gamma_t^1](v,\ r)\\
&\geq B_1^-[\Gamma_t^1](v,\ r)+B_2[\Gamma_t^2](v,\ r)+\mathrm{I}_{(1)}[\Gamma_t^1](v,\ r)+B_3[\Gamma_t^2](v,\ r)+E_1'[\Gamma_t^2](v,\ r)+E_2[\Gamma_t^2](v,\ r)+\mathrm{I}_{(3)}[\Gamma_t^2](v,\ r),
\end{aligned}
\tag{\textbf{LB1}}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&B_1^-[\Gamma_t^1](v,r)\\
&=-\mathbb{I}(v-r\geq m_0)e^{\mu\max(a,c_0v)}\Big[\int_{2r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^1(v,v-r')\,(f(v-r-r')-f(v-r'))\,g_t(v,r')\\
&\qquad+\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,\left(K_3^1(v-r,v-r-r')-K_3^1(v,v-r')\right)(f(v-r-r')-f(v-r))\,g_t(v,r')\Big]\\
&\quad-\mathbb{I}(v\geq 0)e^{\mu\max(a,c_0v)}\int_{r+\delta_1}^{2r+\delta_1}\mathrm{d}r'\,K_3^1(v,v-r')\,(f(v-r-r')-f(v-r'))\,g_t(v,r')\\
&\quad-e^{\mu\max(a,c_0v)}\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^1(v-r,v-r-r')\,(f(v-r-r')-f(v-r))\,(g_t(v,r+r')-g_t(v,r')),
\end{aligned}
\tag{D.23}
$$

$$
\begin{aligned}
&B_2[\Gamma_t^2](v,r)\\
&=I_3^{(1)}[\Gamma_t^2](v,r)-\mathbb{I}(v-r\leq -m_0)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}f(v)\int_{\tilde{r}}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v-r,v-r-r')g_t(v,r)\\
&\quad-\mathbb{I}(-m_0<v-r<m_0)e^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}f(v)\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v-r,v-r-r')g_t(v,r),
\end{aligned}
\tag{D.24}
$$

and,

$$
\begin{aligned}
&B_3[\Gamma_t^2](v,r)\\
&=\mathcal{I}^{(2)}[\Gamma_t^2](v,r)-\mathbb{I}(v<-b_0)\mathbb{I}(r+\delta_1<a_1-v)\Big[\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,\overline{K_3}^2(v-r,v-r+r')\,(f(v-r+r')-f(v+r'))\times\\
&\qquad\times\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0(v-r+r'))}g_t(v-r+r',r')\\
&\quad+\mathrm{e}^{\mu a}\int_{r+\delta_1}^{a_1-v}\mathrm{d}r'\,\overline{K_3}^1(v,v+r')f(v+r')\,(g_t(v,r)+g_t(v-r+r',r')-g_t(v+r',r+r'))\Big]
\end{aligned}
\tag{D.25}
$$

现在我们转而讨论 $\mathrm{J}_1[\Gamma_t^1](v,r)$ 和 $\mathrm{J}_2[\Gamma_t^2](v,r)$，它们定义于 (D.3) 和 (D.4) 中。不难得到这些项之和的如下下界：

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J}_1[]\Gamma_t^1](v,r)+\mathcal{J}_2[\Gamma_t^2](v,r)\\
\geq\ & \mathbb{I}(v\leq -b_0)\,4\bar{n}\Big[-\mathrm{e}^{\mu a}f(v-r)\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v}\mathrm{d}r'\ (\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{-\frac{3}{2}}\,\frac{\mathrm{e}^{v-r'}(1-\mathrm{e}^{-r})\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})}{(1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-r'})(1+\mathrm{e}^{v-r}+\mathrm{e}^{-r'})}g_t(v-r+r',r')\\
&-f(v-r)\int_{r+a_1-v}^{\infty}\mathrm{d}r'\ (\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{\mu c_0(v-r+r')}\,\frac{\mathrm{e}^{v-\frac{3}{2}r'}(1-\mathrm{e}^{-r})\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})}{(1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-r'})(1+\mathrm{e}^{v-r}+\mathrm{e}^{-r'})}g_t(v-r+r',r')\\
&-\mathbb{I}(r\leq a_1-v\leq r+\delta_1)\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\ (\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{-\frac{3}{2}}\,\frac{\mathrm{e}^{v-\frac{3}{2}r'}(1-\mathrm{e}^{-r})\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})}{(1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-r'})(1+\mathrm{e}^{v-r}+\mathrm{e}^{-r'})}\times\\
&\qquad\times\big(f(v-r+r')-f(v+r')\,\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0(v-r+r'))}\big)g_t(v-r+r',r')\\
&-\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\ (\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{-\frac{3}{2}}\,\frac{\mathrm{e}^{v-\frac{3}{2}r'}(1-\mathrm{e}^{-r})\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})}{(1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-r'})(1+\mathrm{e}^{v-r}+\mathrm{e}^{-r'})}\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0(v-r+r'))}f(v+r')g_t(v-r+r',r')\\
&-\mathbb{I}(r+\delta_1\leq a_1-v)\int_{r+\delta_1}^{a_1-v}\mathrm{d}r'\ (\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{-\frac{3}{2}}\,\frac{\mathrm{e}^{v-r'}(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'})(1-\mathrm{e}^{-r})\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})}{(1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-r'})(1+\mathrm{e}^{v-r}+\mathrm{e}^{-r'})}\times\\
&\qquad\times\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0(v-r+r'))}f(v+r')g_t(v-r+r',r')\\
&+2\mathrm{e}^{\mu a}\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v}\mathrm{d}r'\ (\ln(1+\mathrm{e}^{v-r}))^{-\frac{3}{2}}\,\frac{\mathrm{e}^{-2r'}\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}{(1-\mathrm{e}^{-r'})(1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-r'})}\left(1-\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}\right)\times\\
&\qquad\times\left(1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v})}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}\right)f(v-r)g_t(v-r+r',r')\\
&+2\int_{r+a_1-v}^{\infty}\mathrm{d}r'\ (\ln(1+\mathrm{e}^{v-r}))^{-\frac{3}{2}}\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}r'}\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}{(1-\mathrm{e}^{-r'})(1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-r'})}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}r'}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}\right)\times\\
&\qquad\times\left(1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v})}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}\right)\mathrm{e}^{\mu c_0(v-r+r')}f(v-r)g_t(v-r+r',r')\\
&+\mathbb{I}(r>a_1-v)\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v}\mathrm{d}r'\,\overline{K_3}^{1}(v-r,v-r+r')f(v+r')\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0(v-r+r'))}g_t(v-r+r',r')\Big]\\
&-\mathbb{I}(v>-b_0)\Big[4\bar{n}\,(\ln(1+\mathrm{e}^{v}))^{-\frac{3}{2}}\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\ (f(v-r)+f(v+r'))\,\frac{\mathrm{e}^{v-\frac{3}{2}r'}(1-\mathrm{e}^{-r})\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})}{(1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-r'})(1+\mathrm{e}^{v-r}+\mathrm{e}^{-r'})}\times\\
&\qquad\times\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0(v-r+r'))}g_t(v-r+r',r')\\
&\quad+\mathbb{I}(v-r\geq 0)\,\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^1(v-r,v-r-r')\,(f(v-r)+f(v))\times\\
&\qquad\times(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'})(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r})g_t(v-r+r',r')\Big]
\end{aligned}
$$

现在，我们将 $\mathrm{J}_0[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,\ r)$、$\mathrm{I}^{(1)}[\Gamma_t^1](v,\ r)$ 和 $E_1'[\Gamma_t^2](v,\ r)$ 与上文所写的 $\mathrm{J}_1[\Gamma_t^1](v,\ r)+\mathrm{J}_2[\Gamma_t^2](v,\ r)$ 的下界结合起来，得到如下估计，记为 Comb.4。

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J}_1[\Gamma_t^1](v,r)+\mathcal{J}_2[\Gamma_t^2](v,r)+\mathcal{J}_0[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,r)+\mathcal{I}^{(1)}[\Gamma_t^1](v,r)+E_1'[\Gamma_t^2](v,r) \qquad \textbf{(Comb.4)}\\
&\geq\overline{\mathcal{J}}_0[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,r)+\overline{E}[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,r),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{J}}_0[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,r)\\
&=-\mathbb{I}(v<-b_0)\mathbb{I}(r\le a_1-v\le r+\delta_1)4\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{r+\delta_1}^{r-v}\mathrm{d}r'\,\frac{\mathrm{e}^{v-\frac{3}{2}r'}(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'})(1-\mathrm{e}^{-r})}{(1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-r'})(1+\mathrm{e}^{v-r}+\mathrm{e}^{-r'})}\times\\
&\qquad\times\mathrm{e}^{\mu a}\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})\left(f(v-r+r')-f(v+r')\right)g_t(v-r+r',r')\\
&\quad+\mathbb{I}(v<-b_0)\mathrm{e}^{\mu a}\left(f(v-r)+f(v)\right)\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^1(v-r,v-r-r')\left(g_t(v,r)+g_t(v,r')-g_t(v,r+r')\right)\\
&\quad+\mathbb{I}(v\ge -b_0)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r)}\left(f(v-r)+f(v)\right)\Big[\mathbb{I}(v-r<0)\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^1(v-r,v-r-r')\times\\
&\qquad\times\left(g_t(v,r)+g_t(v,r')-g_t(v,r+r')\right)\\
&\qquad+\mathbb{I}(v-r\ge 0)\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^1(v-r,v-r-r')\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\left(g_t(v,r)+g_t(v,r')-g_t(v,r+r')\right)\Big]\\
&\quad+4\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})\frac{\mathrm{e}^{v}+2}{1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-r'}}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0(v+r'))}\times\\
&\qquad\times\left(f(v-r)+f(v+r')\right)\left(g_t(v,r)+g_t(v-r+r',r')-g_t(v+r',r+r')\right)\\
&\quad+\mathbb{I}(v\ge -b_0)4\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})\frac{\mathrm{e}^{v-r}+\mathrm{e}^{-r'}}{1+\mathrm{e}^{v-r}+\mathrm{e}^{-r'}}\frac{\mathrm{e}^{v-\frac{3}{2}r'}}{1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-r'}}\times\\
&\qquad\times\left(f(v-r)+f(v+r')\right)\left(2-(1+\mathrm{e}^{-\kappa r})^{\gamma_t(v,r)}\right)\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0(v+r'))}g_t(v,r),
\end{aligned}
\tag{D.26}
$$

and,

$$
\begin{aligned}
&\overline{E}[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,r)\\
&= \mathbb{I}(v<-b_0)\Big[4\bar{n}f(v-r)\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v}\mathrm{d}r'\ \frac{\mathrm{e}^{v}+2}{1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-r'}}\frac{\mathrm{e}^{-2r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})\times\\
&\qquad\qquad\times\left(\mathrm{e}^{\mu a}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0(v+r'))}\right)\left(g_t(v,r)+g_t(v-r+r',r')-g_t(v+r',r+r')\right)\\
&\quad+\mathrm{e}^{\mu a}f(v)\int_{\max(-v-b_0,r+\delta_1)}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\mathrm{e}^{-r'}\mathrm{e}^{-(\frac{122}{250}-\alpha)r}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-(1-\alpha)r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\right)g_t(v,r)\\
&\quad+\mathbb{I}(r+\delta_1<-v-b_0)\Bigg\{\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\ \overline{K_3}^2(v-r,v-r+r')\left(f(v-r+r')-f(v+r')\right)\times\\
&\qquad\qquad\times\left(\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0(v-r+r'))}-\mathrm{e}^{\mu a}\right)g_t(v-r+r',r')\\
&\quad+\mathrm{e}^{\mu a}f(v)\int_{-v-b_0}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\Big(\left(1-\mathrm{e}^{-(\frac{122}{250}-2\alpha)r'}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-(1-2\alpha)r'}\right)\\
&\qquad\qquad+\mathrm{e}^{-\frac{116}{750}r'}\mathrm{e}^{-(1-2\alpha)r'}(1-\mathrm{e}^{-\alpha r'})\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{634}{750}r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\right)\Big)g_t(v,r)\Bigg\}\\
&\quad+\mathbb{I}(r+\delta_1>-v-b_0)\mathrm{e}^{\mu a}f(v)\int_{\max(-v-b_0,r)}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\left(1-\mathrm{e}^{-(\frac{122}{250}-2\alpha)r'}\right)\times\\
&\qquad\qquad\times\left(1-\mathrm{e}^{-(1-2\alpha)r'}\right)g_t(v,r)\\
&\quad+\mathbb{I}(r>a_1-v)\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v}\mathrm{d}r'\ \overline{K_3}^1(v-r,v-r+r')f(v+r')\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0(v-r+r'))}g_t(v-r+r',r')\\
&\quad+\mathbb{I}(r+\delta_1>a_1-v)f(v-r)\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v}\mathrm{d}r'\ K_3(v,v+r')\left(\mathrm{e}^{\mu a}-\mathrm{e}^{\mu c_0 v}\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}-\mu c_0)r'}\right)g_t(v+r',r+r')\\
&\quad+\mathbb{I}(a_1-v\geq r+\delta_1)f(v-r)\int_{a_1-v}^{r+a_1-v}\mathrm{d}r'\ K_3(v,v+r')\left(\mathrm{e}^{\mu a}-\mathrm{e}^{\mu c_0 v}\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}-\mu c_0)r'}\right)g_t(v+r',r+r')\Big].
\end{aligned}
\tag{D.27}
$$

这引导我们将 (Comb.4) 和 (LB1) 合并为第二个下界 (LB2)

$$
\begin{aligned}
&I_1[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,r)+I_3^{(1)}[\Gamma_t^2](v,r)+A_1^-[\Gamma_t^1](v,r)\\
&\geq B_1^-[\Gamma_t^1](v,r)+B_2[\Gamma_t^2](v,r)+B_3[\Gamma_t^2](v,r)+E_2[\Gamma_t^2](v,r)+\mathcal{I}^{(3)}[\Gamma_t^2](v,r)\\
&\quad+\overline{\mathcal{J}}_0[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,r)+\overline{E}[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,r),
\end{aligned}
\tag{\textbf{LB2}}
$$

现在回顾由 (3.33) 给出的关于 $I_2[\Gamma_t^1](v,\ r)$ 的下界，以及以下定义（参见 (3.34)）：

$$
\begin{aligned}
&\overline{C}_3[\Gamma_t^1](v,r)\\
&= \mathbb{I}(v-r<-b_0)\mathrm{e}^{\mu\max\{a,c_0v\}}g_t(v,r)\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ \Big[K_3(v-r,v-r+r')\left(f(v-r)-\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})\right)^{-\alpha}\right)\\
&\qquad\qquad-K_3^1(v-r,v-r-r')\left(f(v-r-r')-f(v-r)\right)\Big].
\end{aligned}
$$

现在必须用这一项来抵消负项 $A_2^-[\Gamma_t^1](v,\ r)$。根据引理 D.1，这一组合

得出以下不等式:

$$
\begin{aligned}
&\overline{C}_3[\Gamma_t^1](v,r) + A_2^-[\Gamma_t^1](v,r) \qquad \textbf{(Comb.5)}\\
&\geq \mathbb{I}(-m_0 < v-r < -b_0)\overline{C}_3[\Gamma_t^1](v,r)\\
&+ \mathbb{I}(v-r \leq -m_0)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}4\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{\delta_1}^{\min(r,\bar{r})}\mathrm{d}r'\ \frac{\mathrm{e}^{v-r-r'}+2\mathrm{e}^{-2r'}}{1+\mathrm{e}^{v-r}+\mathrm{e}^{-r'}}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})\right)^{1-\alpha}\times\\
&\quad\times\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}\right)^{1-2\alpha}\left[\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{248}{125}(1-2\alpha)r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\right)-\mathrm{e}^{r'}\mathrm{e}^{-\frac{248}{125}(1-2\alpha)r'}\right]\left[1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^{\alpha}\right]g_t(v,r)\\
&\geq \mathbb{I}(-m_0 < v-r < -b_0)\overline{C}_3[\Gamma_t^1](v,r) + \mathbb{I}(v-r\leq -m_0)\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}}\Gamma_t^1(v,r)b_1(\alpha)\left(1-\mathrm{e}^{-3\alpha r}\right)^3.
\end{aligned}
$$

我们定义

$$
\tilde{B}[\Gamma_t^1](v,r) = \mathbb{I}(v-r\leq -m_0)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}f(v-r)b_1(\alpha)\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\mathrm{e}^{-3\alpha r}\right)^3 g_t(v,r), \tag{D.28}
$$

~其中 b_1 为正且远离 0，对所有 $\alpha > 0$。注意， B 具有所需的奇异行为，类似于 $r \gg 1$时的 ***(ln(e))***。

接着，将 $I_2[\Gamma_t](v,\ r)$、$\overline{E}[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,\ r)$ 和 $\mathrm{J}_0[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,\ r)$的其余部分合并，得到以下下界:

$$
\begin{aligned}
&I_1[\Gamma_t](v,r) + I_2[\Gamma_t](v,r) + I_3^{(1)}[\Gamma_t^2](v,r) + A_1^-[\Gamma_t^1](v,r) + A_2^-[\Gamma_t^1](v,r) \qquad \textbf{(LB3)}\\
&\geq B_1^-[\Gamma_t^1](v,r) + \mathbb{I}(-m_0 < v-r < -b_0)\overline{C}_3[\Gamma_t^1](v,r) + \tilde{B}[\Gamma_t^1](v,r) + \overline{B}_2[\Gamma_t^2](v,r) + B_3^f[\Gamma_t^2](v,r)\\
&\quad + E_2[\Gamma_t^2](v,r) + \mathcal{I}^{(3)}[\Gamma_t^2](v,r) + \overline{\mathcal{J}}_0^f[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,r) + \overline{E}^f[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,r),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\overline{B}_2[\Gamma_t^2](v,r)\\
&= B_2[\Gamma_t^2](v,r) + \mathbb{I}(v<-b_0)\mathrm{e}^{\mu a}\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ K_3(v,v+r')(f(v)-f(v+r'))g_t(v,r)\\
&\qquad + \mathbb{I}(v\geq -b_0)\int_{\delta_1}^{r}\mathrm{d}r'\ K_3(v,v+r')f(v)\left(\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0(v+r'))}\right)g_t(v,r), \qquad \text{(D.29)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{J}}_0^f[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,r)\\
&= \mathbb{I}(v<-b_0)\mathrm{e}^{\mu a}\left(f(v-r)+f(v)\right)\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^1(v-r,v-r-r')\left(g_t(v,r)+g_t(v,r')-g_t(v,r+r')\right)\\
&\quad + \mathbb{I}(v\geq -b_0)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r)}\left(f(v-r)+f(v)\right)\Big[\mathbb{I}(v-r<0)\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^1(v-r,v-r-r')\times\\
&\qquad\qquad\times\left(g_t(v,r)+g_t(v,r')-g_t(v,r+r')\right)\\
&\quad + \mathbb{I}(v-r\geq 0)\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^1(v-r,v-r-r')\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\left(g_t(v,r)+g_t(v,r')-g_t(v,r+r')\right)\Big]\\
&\quad + 4\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{2r}^{\infty}\mathrm{d}r'\ \ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})\frac{\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\times\\
&\qquad\qquad\times\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}f(v+r')\left(2-(1+\mathrm{e}^{-\kappa r})^{\gamma_t(v,r)}\right)g_t(v,r)\\
&\quad + \mathbb{I}(v\geq -b_0)4\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{2r}^{\infty}\mathrm{d}r'\ \ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})\frac{\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\times\\
&\qquad\qquad\times\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}f(v-r)\left(2-(1+\mathrm{e}^{-\kappa r})^{\gamma_t(v,r)}\right)g_t(v,r), \qquad \text{(D.30)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{E}^f[\Gamma_t^1+\Gamma_t^2](v,r)\\
&= \mathbb{I}(v<-b_0)\Bigg[\mathrm{e}^{\mu a}f(v)\int_{\max(-v-b_0,r+\delta_1)}^{\infty}\mathrm{d}r'\;K_3^2(v-r,v-r-r')\mathrm{e}^{-r'}\mathrm{e}^{-(\frac{122}{250}-\alpha)r}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-(1-\alpha)r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\right)g_t(v,r)\\
&\quad+\mathbb{I}(r+\delta_1<-v-b_0)\Bigg\{\int_{r+\delta_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\;\overline{K_3}^2(v-r,v-r+r')\left(f(v-r+r')-f(v+r')\right)\times\\
&\qquad\qquad\times\left(\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0(v-r+r'))}-\mathrm{e}^{\mu a}\right)g_t(v-r+r',r')\\
&\quad+\mathrm{e}^{\mu a}f(v)\int_{-v-b_0}^{\infty}\mathrm{d}r'\;K_3^2(v-r,v-r-r')\Bigg(\left(1-\mathrm{e}^{-(\frac{122}{250}-2\alpha)r'}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-(1-2\alpha)r'}\right)\\
&\qquad\qquad+\mathrm{e}^{-\frac{116}{750}r'}\mathrm{e}^{-(1-2\alpha)r'}(1-\mathrm{e}^{-\alpha r'})\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{634}{750}r'}}{1-\mathrm{e}^{-r'}}\right)\Bigg)g_t(v,r')\Bigg\}\\
&\quad+\mathbb{I}(r+\delta_1\geq-v-b_0)\mathrm{e}^{\mu a}f(v)\int_{\max(-v-b_0,r)}^{\infty}\mathrm{d}r'\;K_3^2(v-r,v-r-r')\left(1-\mathrm{e}^{-(\frac{122}{250}-2\alpha)r'}\right)\times\\
&\qquad\qquad\times\left(1-\mathrm{e}^{-(1-2\alpha)r'}\right)g_t(v,r')\\
&\quad+\mathbb{I}(r>a_1-v)\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v}\mathrm{d}r'\;\overline{K_3}^1(v-r,v-r+r')f(v+r')\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0(v-r+r'))}g_t(v-r+r',r')\Bigg],
\end{aligned}
\tag{D.31}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&B_3^f[\Gamma_t^2](v,r)\\
&= \mathbb{I}(v<-b_0)\Bigg[\int_{\max(r+\delta_1,a_1-v)}^{\infty} \mathrm{d}r'\ K_3(v,v+r')f(v+r')\left(\mathrm{e}^{\mu a}-\mathrm{e}^{\mu c_0 v}\right) g_t(v,r)\\
&\qquad+\int_{r+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}r'\ K_3(v,v+r')\left(f(v)-f(v+r')\right)\mathrm{e}^{\mu a} g_t(v,r)\\
&\quad+\mathbb{I}(r\le a_1-v\le r+\delta_1)\Bigg\{\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\ \overline{K_3}^2(v,v+r')f(v+r')\left(\mathrm{e}^{\mu a}-\mathrm{e}^{\mu c_0(v-r+r')}\right) g_t(v-r+r',r')\\
&\quad+\int_{r+\delta_1}^{r-v} \mathrm{d}r'\ \overline{K_3}^2(v,v+r')\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\left(f(v-r+r')-f(v+r')\right)\mathrm{e}^{\mu a} g_t(v-r+r',r')\\
&\quad+\int_{r+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}r'\ K_3(v,v+r')f(v+r')\mathrm{e}^{\mu c_0 v}\left(1-2\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}-\mu c_0)r'}+\mathrm{e}^{-2(\frac{1}{2}-\mu c_0)r'}\right) g_t(v,r)\\
&\quad+\int_{r+\delta_1}^{r+a-v} \mathrm{d}r'\ \overline{K_3}^1(v-r,v-r+r')f(v-r+r')\mathrm{e}^{\mu a} g_t(v-r+r',r')\Bigg\}\\
&\quad+\mathbb{I}(a_1-v>r+\delta_1)\Bigg\{\int_{r+\delta_1}^{a_1-v} \mathrm{d}r'\ \overline{K_3}^1(v-r,v-r+r')\left(f(v-r+r')-f(v+r')\right)\mathrm{e}^{\mu a} g_t(v-r+r',r')\\
&\quad+\int_{a_1-v}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\ \overline{K_3}^2(v,v+r')f(v+r')\left(\mathrm{e}^{\mu a}-\mathrm{e}^{\mu c_0 v}\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}-\mu c_0)r'}\right) g_t(v-r+r',r')\\
&\quad+8\bar{n}\,\mathrm{e}^{\mu c_0 v}\int_{a_1-v}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\ \left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v+r'})\right)^{1-\alpha}\frac{\mathrm{e}^{-2r'}(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'})(1-\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}-\mu c_0)r'})}{(1-\mathrm{e}^{-r'})(1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-r'})} g_t(v,r)\\
&\quad+8\bar{n}\,\mathrm{e}^{\mu a}\int_{a_1-v}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\ \left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r+r'})\right)^{1-\alpha}\frac{\mathrm{e}^{-2r'}(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'})^2}{(1-\mathrm{e}^{-r'})(1+\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-r'})} g_t(v-r+r',r')\Bigg\}\\
&\quad+\mathbb{I}(a_1-v<r)\Bigg\{\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\ \overline{K_3}^2(v-r,v-r+r')\left(f(v-r+r')-f(v+r')\right)\mathrm{e}^{\mu a} g_t(v-r+r',r')\\
&\qquad+\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\ \overline{K_3}^2(v,v+r')\left(\mathrm{e}^{\mu a}-\mathrm{e}^{\mu c_0(v-r+r')}\right) f(v+r')g_t(v-r+r',r')\\
&\qquad+\int_{r+\delta_1}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\ \overline{K_3}^1(v-r,v-r+r')\mathrm{e}^{\mu a}\left(f(v-r+r')-f(v+r')\right) g_t(v-r+r',r')\Bigg\}\Bigg].
\end{aligned}
$$

现在让我们转向$\mathbb{I}(v<-m_0)I(2)_3[\Gamma_t^2](v,r)$中的负项，并注意到我们可以利用$\overline{B}_2[\Gamma_t^2](v,r)$中的一项来控制这些负项，如下所示：

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{I}(v\le -m_0)\mathrm{e}^{\mu a}\Big[-\mathbb{I}(v+r<b_0)\int_0^r \mathrm{d}r'\ K_3^2(v,v-r')\left(f(v-r')-f(v)\right) g_t(v-r',r-r')\\
&\qquad-\mathbb{I}(v+r\ge b_0)\int_0^{-v-b_0} \mathrm{d}r'\ K_3^2(v,v-r')\left(f(v-r')-f(v)\right) g_t(v-r',r-r')\Big]\\
&\quad+\mathbb{I}(v<-b_0)\mathrm{e}^{\mu a}\int_{\delta_1}^r \mathrm{d}r'\ K_3(v,v+r')(f(v)-f(v+r'))g_t(v,r)\\
&\ge \mathbb{I}(-m_0<v<-b_0)\mathrm{e}^{\mu a}\int_{\delta_1}^r \mathrm{d}r'\ K_3(v,v+r')(f(v)-f(v+r'))g_t(v,r),
\end{aligned}
$$

因此我们可以写成

$$\begin{aligned}
&\overline{B}_2[\Gamma_t^2](v,r) + I_3^{(2)}[\Gamma_t^2](v,r) \qquad \textbf{(Comb.6)}\\
&\geq \overline{B}_2^{+}[\Gamma_t^2](v,r) + \mathbb{I}(v-r\geq m_0) I_3^{(1)}[\Gamma_t^2](v,r) + \mathbb{I}(v\geq m_0) I_3^{(2)}[\Gamma_t^2](v,r),\\
&\qquad + \mathbb{I}(-m_0<v<m_0)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r)} f(v)\int_0^r \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')g_t(v,r),
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\overline{B}_2^{+}[\Gamma_t^2](v,r)\\
&= \mathbb{I}(v-r\leq -m_0)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)} f(v)\int_0^{\bar{r}} \mathrm{d}r'\,\Big\{K_3^2(v-r,v-r-r')g_t(v,r)\\
&\qquad\qquad - \Big(K_3^2(v-r,v-r-r') - K_3^2(v,v-r-r')\Big) g_t(v,r+r')\Big\}\\
&\quad + \mathbb{I}(v\leq -m_0)\mathrm{e}^{\mu a} f(v)\Bigg[\mathbb{I}(v+r<b_0)\int_0^r \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')\left(g_t(v,r) - g_t(v-r',r-r')\right)\\
&\qquad + \mathbb{I}(v+r\geq -b_0) f(v)\Bigg\{\int_{-v-b_0}^r \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')g_t(v,r)\\
&\qquad\qquad + \int_0^{-v-b_0} \mathrm{d}r'\, K_3^2(v,v-r')\left(g_t(v,r) - g_t(v-r',r-r')\right)\Bigg\}\Bigg]\\
&\quad + \mathbb{I}(-m_0<v<-b_0)\mathrm{e}^{\mu a}\int_{\delta_1}^r \mathrm{d}r'\, K_3(v,v+r')(f(v)-f(v+r'))g_t(v,r)\\
&\quad + \mathbb{I}(v\geq -b_0)\int_{\delta_1}^r \mathrm{d}r'\, K_3(v,v+r')f(v)\left(\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0(v+r'))}\right) g_t(v,r). \qquad \text{(D.32)}
\end{aligned}$$

我们用来自 $I_3^{(1)}[\Gamma_t^2]$ 的一项来控制负项 $A_3^{-}[\Gamma_t^1]$，如下所示：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{I}(v-r\geq m_0)\mathbb{I}(v>3r) f(v)\left(\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)} - \mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\right) g_t(v,r)\int_{v-r-c_0v}^{\infty} \mathrm{d}r'\, K_3^2(v-r,v-r-r')\\
&+ A_3^{-}[\Gamma_t^1](v,r)\\
&> \mathbb{I}(v-r\geq m_0)\mathbb{I}(v>3r) 4\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{v-r}^{\infty}\mathrm{d}r'\,\frac{\mathrm{e}^{v-r-r'}+2\mathrm{e}^{-r'}}{1+\mathrm{e}^{v-r-r'}+\mathrm{e}^{-r'}}\times\\
&\qquad\qquad \times\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})\right)^{1-\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}r}\left(1-\mathrm{e}^{-(\kappa-\frac{2}{3})r}\right)\mathrm{e}^{\mu c_0 v} g_t(v,r+r'),
\end{aligned}$$

由此我们可以得到如下估计：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{I}(v-r\geq m_0)\left(I_3^{(1)}[\Gamma_t^1](v,r) + I_3^{(1)}[\Gamma_t^2](v,r)\right)\\
&\geq B_4[\Gamma_t](v,r) + \mathbb{I}(v-r\geq m_0)\overline{I}_3^{1,+}[\Gamma_t](v,r),
\end{aligned}$$

其中

$$
\begin{aligned}
&B_4[\Gamma_t](v,r)\\
&= \mathbb{I}(v-r\geq m_0)\mathbb{I}(v>3r)4\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{v-r}^{\infty}\mathrm{d}r'\ \frac{\mathrm{e}^{v-r-r'}+2\mathrm{e}^{-r'}}{1+\mathrm{e}^{v-r-r'}+\mathrm{e}^{-r'}}\times\\
&\qquad\qquad\times\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r-r'})\right)^{1-\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}r}\left(1-\mathrm{e}^{-(\kappa-\frac{2}{3})r}\right)\mathrm{e}^{\mu c_0 v}g_t(v,r+r')\\
&\quad+\mathbb{I}(v-r\geq m_0)\Bigg[\mathbb{I}(v\leq 3r)\left(f(v-r)+f(v)\right)\Bigg\{\bar{n}(\ln 2)^2\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}g_t(v,r)\\
&\qquad+\int_0^{v-r}\mathrm{d}r'\ \left(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\right)\left(\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}-\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r-r',c_0v)}\right)g_t(v,r)\Bigg\}\\
&\qquad+\mathbb{I}(v>3r)\Bigg\{f(v-r)\int_{v-r-c_0v}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\left(\mathrm{e}^{\mu\max(a,v-r,c_0v)}-\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\right)g_t(v,r)\\
&\qquad\quad+\left(f(v-r)+f(v)\right)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}\int_{v-r-c_0v}^{\infty}\mathrm{d}r'\ \Big(K_3^2(v-r,v-r-r')g_t(v,r)\\
&\qquad\qquad-\left(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\right)g_t(v,r+r')\Big)\Bigg\}\Bigg],
\end{aligned}
\tag{D.33}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\overline{I}_3^{1,+}[\Gamma_t](v,r)\\
&=\mathbb{I}(v-r\geq m_0)\Gamma_t(v,r)\Bigg[\mathbb{I}(v\leq 3r)\ \frac{4}{3}\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v})}\right)^2\\
&\qquad+\mathbb{I}(v>3r)\ 2\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{c_0v})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^2\right)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{D.34}
$$

$\overline{I}_3^{+}$ 在 v 和 $v-r$ 相当时，对较大的正值 $v-r$，贡献了正确的渐近行为。综合以上估计，我们可以写出以下下界：

$$
\begin{aligned}
&I_1[\Gamma_t](v,r)+I_2[\Gamma_t](v,r)+I_3^{(1)}[\Gamma_t](v,r)+I_3^{(2)}[\Gamma_t](v,r) \qquad \textbf{(LB4)}\\
&\geq B_1^{-}[\Gamma_t^1](v,r)+A_4^{-}[\Gamma_t^1](v,r)+\mathbb{I}(-m_0<v-r<-b_0)\overline{C}_3[\Gamma_t^1](v,r)+\tilde{B}[\Gamma_t^1](v,r)\\
&\quad+\overline{B}_2^{+}[\Gamma_t^2](v,r)+B_3^{f}[\Gamma_t^2](v,r)+E_2[\Gamma_t^2](v,r)+\overline{\mathcal{J}}_0^{f}[\Gamma_t](v,r)+\overline{E}^{f}[\Gamma_t](v,r)+B_4[\Gamma_t](v,r)\\
&\quad+\mathbb{I}(-m_0<v-r<m_0)I_3^{(1)}[\Gamma_t^1](v,r)+\mathbb{I}(-m_0<v<m_0)I_3^{(2)}[\Gamma_t](v,r)\\
&\quad+\overline{I}_3^{1,+}[\Gamma_t](v,r)+\mathbb{I}(v\geq m_0)I_3^{2}[\Gamma_t](v,r)+\mathcal{I}^{(3)}[\Gamma_t^2](v,r).
\end{aligned}
$$

我们来思考一下，当 v 取较大的正值时的渐近行为。注意，$v\leq 3r\Longleftarrow\Longrightarrow v-r\leq\frac{2}{3}v$ 且 $v>3r\Longleftarrow\Longrightarrow v-r>\frac{2}{3}v$。模仿势 $\mathrm{V}_u(v,\ r)$ 的预期行为来自 $\overline{I}^{1}{}_{,\ 3}{}^{+}[\Gamma_t](v,\ r)$，

$\mathbb{I}(-m_0 < v-r < m_0) I_{(1)_3}\ [\Gamma_t](v,\ r)$ 和 $\mathbb{I}(v \geq m_0) I_3^2[\Gamma_t](v,\ r)$，这可由下面的下界显而易见地看出：

$$
\begin{aligned}
&\overline{I}_3^{1,+}[\Gamma_t](v,r) + \mathbb{I}(-m_0 < v-r < m_0) I_3^{(1)}[\Gamma_t](v,r) + \mathbb{I}(v \geq m_0) I_3^2[\Gamma_t](v,r) \\
&\geq \mathbb{I}(v \geq m_0) \Bigg[\mathbb{I}(v-r \leq 0) \bar{n}(\ln(1+\mathrm{e}^v))^{\frac{1}{2}} \left(1 - \left(\frac{\ln 2}{\ln(1+\mathrm{e}^v)}\right)^2\right) \Gamma_t(v,r) \\
&\quad + \mathbb{I}(-m_0 < v-r < m_0) \mathrm{e}^{\mu \max(a, c_0 v, v-r)} f(v-r) g_t(v,r) \int_0^\infty \mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r, v-r-r') \\
&\quad + \mathbb{I}(0 < v-r < c_0 v) \frac{3}{2} \bar{n}(\ln(1+\mathrm{e}^v))^{\frac{1}{2}} \left(1 - \left(\frac{v-r}{c_0 v}\right)^2\right) \Gamma_t(v,r) \\
&\quad + \mathbb{I}(v-r \geq m_0) \Gamma_t(v,r) \Bigg\{ \mathbb{I}(v-r \leq \frac{2}{3}v)\ \frac{4}{3} \bar{n}\ (\ln(1+\mathrm{e}^v))^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}{\ln(1+\mathrm{e}^v)}\right)^2 \\
&\qquad + \mathbb{I}(v-r > \frac{2}{3}v)\ 2\bar{n}\ (\ln(1+\mathrm{e}^{v-r}))^{\frac{1}{2}} \left(1 - \left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{c_0 v})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}\right)^2\right) \Bigg\} \Bigg]
\end{aligned}
\tag{D.35}
$$

在下界（LB4）中，前两项，即 $B_1^-[\Gamma_t^1]$ 和 $A_4^-[\Gamma_t^1]$，是唯一的非正项。在这两项中，A_4 具有 δ_1-小性（也就是说，尽管该项可能有点奇异性，但它还包含一个 δ_1因子，我们可以将其取得任意小），这从（D.15）中显而易见。下一步，我们将选取一些合适的正项与 B_1^-结合，使剩下的负项具有 δ_1-小性。因此，在下一步结束时，所有负项都将具有这种小性。

我们结合 $\overline{B}_2^+[\Gamma_t^2]$、$\mathbb{I}(-m_0 < v < m_0) I_{(2)_3}\ [\Gamma_t^2]$ 以及 $\mathrm{J}_0^f[\Gamma_t]$ 中的一些项，按如下方式控制负项 $B_1^-[\Gamma_t^1]$：

$$
\begin{aligned}
&B_1^-[\Gamma_t^1](v,r) + \mathbb{I}(v \geq -b_0) f(v) \int_{\delta_1}^r \mathrm{d}r'\ K_3(v, v+r') \left(\mathrm{e}^{\mu \max(a, c_0 v, v-r)} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'} \mathrm{e}^{\mu \max(a, c_0(v+r'), v-r)}\right) g_t(v,r) \\
&\qquad + \mathrm{e}^{\mu \max(a, c_0 v, v-r)} f(v) \int_{r+\delta_1}^\infty \mathrm{d}r'\ K_3^1(v-r, v-r-r') \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'} \left(g_t(v,r) + g_t(v,r') - g_t(v,r+r')\right) \\
&\qquad + \mathbb{I}(0 \leq v < m_0) \mathrm{e}^{\mu \max(a, c_0 v, v-r)} f(v) \int_0^r \mathrm{d}r'\ K_3^2(v, v-r') g_t(v,r) \\
&\geq \mathcal{B}_1^-[\Gamma_t^1](v,r) + \tilde{B}_1^+[\Gamma_t^2](v,r),
\end{aligned}
\tag{\textbf{Comb.}7}
$$

其中

$$
\mathcal{B}_1^-[\Gamma_t^1](v,r) = -\mathbb{I}(v \geq 0) \int_{2r}^{2r+\delta_1} \mathrm{d}r'\ K_3^1(v, v-r') \mathrm{e}^{\mu \max(a, c_0 v)} \left(f(v-r-r') - f(v-r')\right) g_t(v,r'),
$$

and

$$
\begin{aligned}
\tilde{B}_1^+[\Gamma_t^2](v,r) &= \mathbb{I}(0 \leq v < m_0) \mathrm{e}^{\mu \max(a, c_0 v, v-r)} f(v) g_t(v,r) \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r}} \int_0^r \mathrm{d}r'\ K_3^2(v, v-r') \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathrm{e}^{\mu \max(a, c_0 v, v-r)} f(v) \int_{r+\delta_1}^\infty \mathrm{d}r'\ K_3^1(v-r, v-r-r') \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'} \left(g_t(v,r) + g_t(v,r') - g_t(v,r+r')\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(2 - 2^{\gamma_0} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{\mu \max(a, c_0 v, v-r)} f(v) g_t(v,r) \int_{r+\delta_1}^\infty \mathrm{d}r'\ K_3^1(v-r, v-r-r') \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'} (1 - \mathrm{e}^{-(\kappa-1)r'}) \\
&\quad + \mathbb{I}(v \geq 0) \mathrm{e}^{\mu \max(a, c_0 v, v-r)} f(v) g_t(v,r) \int_{\delta_1}^r \mathrm{d}r'\ K_3(v, v+r') \left(1 - \mathrm{e}^{-(\frac{1}{2} - \mu c_0)r'}\right).
\end{aligned}
$$

在此阶段，我们剩下的所有负项都是在长度为 δ_1 和 $(\delta_1-\delta_2)_+$ 的区间上的积分。我们将这些负项之和记为 $S^-_{\delta_1,\ \delta_2}[\Gamma_t](v,\ r)$，如下：

$$S^-_{\delta_1,\delta_2}[\Gamma_t](v,r)=\mathcal{B}_1^-[\Gamma_t^1](v,r)+I_4[\Gamma_t](v,r)+A_4^-[\Gamma_t^1](v,r).$$

由于 $S^-_{\delta_1,\ \delta_2}$ 具有 δ_1-小量性质，因此截断函数定义中的常数 M （见 (3.20)）可以选取得足够大，使得估计 (LB4) 中出现的正项能够抵消这一负项，从而得到以下下界：

$$I_1[\Gamma_t](v,r)+I_2[\Gamma_t](v,r)+I_3^{(1)}[\Gamma_t](v,r)+I_3^{(2)}[\Gamma_t](v,r)+I_4[\Gamma_t](v,r)\geq\ G[\Gamma_t](v,r),\qquad\textbf{(LB5)}$$

其中

$$\begin{aligned}
&G[\Gamma_t](v,r)\\
&=\mathbb{I}(v-r\leq -b_0)\bar{b}_1(\alpha)\bar{n}\Gamma_t(v,r)\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\mathrm{e}^{-3\alpha r}\right)^3\\
&+\frac{\bar{n}}{2}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}}\ln\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{7}{2}(r+\delta_1)}\right)^{-1}\Gamma_t(v,r)+\mathbb{I}(-m_0<v-r<m_0)\frac{\bar{n}}{4}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}}\Gamma_t(v,r)\\
&+\mathbb{I}(0<v<m_0)\frac{\bar{n}}{2}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})}{\ln(1+\mathrm{e}^{v})}\right)^2\right)\Gamma_t(v,r)\\
&+\mathbb{I}(0<v-r<m_0)\frac{\bar{n}}{8}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma_t(v,r)\\
&+\mathbb{I}(v\geq m_0)b_3(c_0)\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma_t(v,r),
\end{aligned}\qquad\text{(D.36)}$$

其中 $\bar{b}_1(\alpha)$ 和 $b_3(c_0)$ 是远离零的正数。

这里需要注意的是，为了控制 $S^-_{\delta_1,\ \delta_2}$，我们需要对常数 M 施加一个适当的上界。下面简要说明这一点是如何得到的。这个界源于以下事实： $\tilde{B}[\Gamma_t^1](v,\ r)$ 被用来按照如下方式控制 $A_4^-[\Gamma_t^1](v,\ r)$：

$$\begin{aligned}
A_4^-[\Gamma_t^1](v,r)\geq-\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v)}f(v-r)g_t(v,r)\bar{n}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v-r})\right)^{-\frac{1}{2}}\mathbb{I}(v-r\leq -m_0)\Bigg[\frac{3}{4}\left(\min(\delta_1,\tilde{r})\right)^2\\
+\mathbb{I}(v<-b_0)\mathbb{I}(r<-b_0-v)2\mathrm{e}^{-r}\delta_1\Bigg],
\end{aligned}$$

并且我们选择 M 使得

$$\frac{1}{M^2}+\frac{1}{M}\leq\frac{b_1(\alpha)}{10},$$

因此， $\tilde{B}[\Gamma_t^1](v,\ r)$（见 (D.28)）占主导地位于 $A_4^-[\Gamma_t^1](v,\ r)$。

E. 关于正则化问题的计算

E.1. 与定理 3.12 相关的公式与计算

无界算子 K_u 和 L^2-有界部分 K_b 定义如下，其中截断参数为 b_0' 和 m_0':

$$
\begin{aligned}
&(K_u^{\varepsilon}\psi_t^{\varepsilon})(v)\\
=&\mathbb{I}(v<-b_0')\Big[\int_0^{-v-b_0'}\mathrm{d}r'\,K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,v-r')\psi_t^{\varepsilon}(v-r')+\int_{-v-b_0'}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,v-r')\mathrm{e}^{-r'}\psi_t^{\varepsilon}(v-r')\\
&\quad+\int_0^{-v-b_0'}\mathrm{d}r'\,K_3^{\varepsilon(v+r')}(v,v+r')\psi_t^{\varepsilon}(v+r')+\int_{-v-b_0'}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^{\varepsilon(v+r')}(v,v+r')\mathrm{e}^{-r'}\psi_t^{\varepsilon}(v+r')\Big]\\
&+\mathbb{I}(v\geq -b_0')\Big[\mathbb{I}(-b_0'\leq v\leq m_0')\int_0^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,v-r')\mathrm{e}^{-r'}\psi_t^{\varepsilon}(v-r')\\
&\quad+\mathbb{I}(v>m_0')\int_0^{v}\mathrm{d}r'\,K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,v-r')\psi_t^{\varepsilon}(v-r')+\mathbb{I}(v\leq m_0')\int_0^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^{\varepsilon(v+r')}(v,v+r')\mathrm{e}^{-r'}\psi_t^{\varepsilon}(v+r')\\
&\quad+\mathbb{I}(v>m_0')\int_0^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^{\varepsilon(v+r')}(v,v+r')\psi_t^{\varepsilon}(v+r')\Big]\\
&+\mathbb{I}(v<-m_0')\int_0^{r_0}\mathrm{d}r'\,K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,v-r')\psi_t^{\varepsilon}(v-r')+\mathbb{I}(v>m_0')\int_0^{v-a_1}\mathrm{d}r'\,K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,v-r')\psi_t^{\varepsilon}(v-r'),
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&(K_b^{\varepsilon}\psi_t^{\varepsilon})(v)\\
=&\mathbb{I}(v<-b_0')\Big[\int_{-v-b_0'}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,v-r')(1-\mathrm{e}^{-r'})\psi_t^{\varepsilon}(v-r')\\
&\quad+\int_{-v-b_0'}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^{\varepsilon(v+r')}(v,v+r')(1-e^{-r'})\psi_t^{\varepsilon}(v+r')\Big]\\
&+\mathbb{I}(v\geq -b_0')\Big[\mathbb{I}(v\leq m_0')\int_0^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,v-r')(1-\mathrm{e}^{-r'})\psi_t^{\varepsilon}(v-r')\\
&\quad+\mathbb{I}(v>m_0')\int_v^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,v-r')\psi_t^{\varepsilon}(v-r')\\
&\quad+\mathbb{I}(-b_0'\leq v\leq m_0)\int_0^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^{\varepsilon(v+r')}(v,v+r')(1-\mathrm{e}^{-r'})\psi_t^{\varepsilon}(v+r')\Big]\\
&+\mathbb{I}(v<-m_0')\int_{r_0}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,v-r')\psi_t^{\varepsilon}(v-r')+\mathbb{I}(-m_0'\leq v\leq m_0')\int_0^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,v-r')\psi_t^{\varepsilon}(v-r')\\
&+\mathbb{I}(v>m_0')\int_{v-a_1}^{\infty}\mathrm{d}r'\,K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,v-r')\psi_t^{\varepsilon}(v-r').
\end{aligned}
$$

在上述公式中，$r_0=-v-b_0'$ 扮演的角色与上一节中的 $\tilde{r}$ 相同。必须将 $m_0'>\max(b_0',\ 2a_1)$ 选得足够大。

引理 3.11 的计算遵循附录 D 中采用的相同步骤，而且相当直接，因此我们略去这些计算，并给出所得估计，其中 p_2 和 p_3 是远离零的正数常数:

$$
V^{\varepsilon}(v)\tilde{\Gamma}(v)-(K_u^{\varepsilon}\tilde{\Gamma})(v)\geq\tilde{\Gamma}(v)\left[\mathbb{I}(v\leq 0)p_2(\alpha)\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{-\frac{1}{2}}+\mathbb{I}(v>0)p_3\left(\ln(1+\mathrm{e}^{v})\right)^{\frac{1}{2}}\right].
$$

E.2. 与定理 3.4 相关的公式与计算

定理 3.4 的计算与附录 D 中所述的计算几乎相同（这些计算针对 Δ 变量得出了类似结果，即定理 3.3），因此重复这些论证并无益处，而且

此处的估计。我们只写出算子的显式形式，因为积分的上下限现在略有不同（这是由于这两种情况下截断函数 δ 和 ε 不同所致）。˜回想一下，我们所求的解证明了方程 (3.13)。算子 $\mathrm{L}_s^{\varepsilon}$ 已在

（3.41）。现在我们写出其他算子的表达式。

$$
\begin{aligned}
&(\tilde{\mathcal{L}}_u^{\varepsilon} D\psi_t^{\varepsilon})(v,r)\\
&= \mathbb{I}(v<a_1)\Bigg[\int_{-\infty}^{v-r} \mathrm{d}w\, K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) D\psi_t^{\varepsilon}(v,r)\\
&\quad - \int_{-\infty}^{v-r} \mathrm{d}w \left(K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) - K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v,w)\right) D\psi_t^{\varepsilon}(v,v-w)\Bigg]\\
&+ \mathbb{I}(v\geq a_1)\Bigg[\int_{-\infty}^{v-r} \mathrm{d}w\, K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) D\psi_t^{\varepsilon}(v,r)\\
&\qquad - \int_{-\infty}^{v-r} \mathrm{d}w\, \left(K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) - K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,w)\right) D\psi_t^{\varepsilon}(v,v-w)\, \mathbb{I}(v-w>\varepsilon(v-r))\Bigg]\\
&+ \int_{v}^{\infty} \mathrm{d}w\, K_3^{\varepsilon(w)}(v,w) D\psi_t^{\varepsilon}(v,r) - \Bigg[\mathbb{I}(v<-b_0)\Big[\int_{v}^{a_1} \mathrm{d}w \left(K_3^{\varepsilon(w)}(v,w) - K_3^{\varepsilon(w)}(v-r,w)\right) D\psi_t^{\varepsilon}(w,w-v+r)\\
&\quad + \int_{a_1}^{\infty} \mathrm{d}w\, \left(\overline{K_3}^{2,\varepsilon(w)}(v,w) - \overline{K_3}^{2,\varepsilon(w)}(v-r,w)\right) D\psi_t^{\varepsilon}(w,w-v+r)\Big]\\
&\quad + \mathbb{I}(v\geq -b_0) \int_{v}^{\infty} \mathrm{d}w\, \left(\overline{K_3}^{2,\varepsilon(w)}(v,w) - \overline{K_3}^{2,\varepsilon(w)}(v-r,w)\right) D\psi_t^{\varepsilon}(w,w-v+r)\Bigg]\\
&+ \int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^{\varepsilon(w)}(v-r,w) D\psi_t^{\varepsilon}(v,r) - \Bigg[\mathbb{I}(v-r<-b_0)\Big[\mathbb{I}(v>0)\int_{v-r}^{0} \mathrm{d}w\, K_3^{\varepsilon(w)}(v-r,w) D\psi_t^{\varepsilon}(v,v-w)\\
&+ \mathbb{I}(v\leq 0)\int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^{\varepsilon(w)}(v-r,w) D\psi_t^{\varepsilon}(v,v-w)\Big] + \mathbb{I}(v-r\geq -b_0)\int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w \overline{K_3}^{2,\varepsilon(w)}(v-r,w) D\psi_t^{\varepsilon}(v,v-w)\Bigg]\\
&+ \int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,w) D\psi_t^{\varepsilon}(v,r)\\
&- \mathbb{I}(v<-m_0)\int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w\, \mathbb{I}(v-w<\min(r,-v-b_0)) K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,w) D\psi_t^{\varepsilon}(w,w-v+r)\\
&- \mathbb{I}(v\geq -m_0)\int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,w)\mathrm{e}^{-(v-w)} D\psi_t^{\varepsilon}(w,w-v+r) + \int_{-\infty}^{v-r} \mathrm{d}w\, K_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) D\psi_t^{\varepsilon}(v,r)\\
&- \mathbb{I}(v-r\leq -m_0)\int_{v-r-\max(\tilde{r},\varepsilon(v-r))}^{v-r-\varepsilon(v-r)} \mathrm{d}w\, \left(K_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) - K_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v,w)\right) D\psi_t^{\varepsilon}(v,v-w)\\
&- \mathbb{I}(v-r\geq m_0)\Big[\mathbb{I}(v\leq 3r)\int_{0}^{v-r-\varepsilon(v-r)} \mathrm{d}w \left(K_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) - K_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v,w)\right) D\psi_t^{\varepsilon}(v,v-w)\\
&\quad + \mathbb{I}(v>3r)\int_{-\infty}^{c_0 v} \mathrm{d}w \left(K_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) - K_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v,w)\right) D\psi_t^{\varepsilon}(v,v-w)\Big]\\
&+ \int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,w) D\psi_t^{\varepsilon}(v,r) - \mathbb{I}(v\leq -m_0)\Big[\mathbb{I}(v+r<-b_0)\int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,w) D\psi_t^{\varepsilon}(w,w-v+r)\\
&\quad + \mathbb{I}(v+r\geq -b_0)\int_{2v+b_0}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,w) D\psi_t^{\varepsilon}(w,w-v+r)\Big]\\
&\quad - \mathbb{I}(v\geq m_0)\Big[\mathbb{I}(0<v-r<c_0 v)\int_{v-r}^{c_0^{-1}(v-r)} \mathrm{d}w\, K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,w) D\psi_t^{\varepsilon}(w,w-v+r)\\
&\quad + \mathbb{I}(v-r\geq c_0 v)\int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,w) D\psi_t^{\varepsilon}(w,w-v+r)\Big],
\end{aligned}
$$

这意味着我们可以写成

$$(\tilde{\mathcal{L}}_u^{\varepsilon} D\psi_t^{\varepsilon})(v,r) = \tilde{\mathcal{V}}^{\varepsilon}(v,r) D\psi_t^{\varepsilon}(v,r) - (\tilde{\mathcal{K}}_u^{\varepsilon} D\psi_t^{\varepsilon})(v,r),$$

$\tilde{\mathrm{V}}^{\varepsilon}$和$\mathrm{K}_u^{\varepsilon}$的定义显然可由上文所写的 L 公式得出。最后,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}_b^{\varepsilon}[\psi_t^{\varepsilon}](v,r) \\
=& -\mathbb{I}(v<-b_0)\int_{a_1}^{\infty} \mathrm{d}w \left(\overline{K}_3^{1,\varepsilon(w)}(v,w) - \overline{K}_3^{1,\varepsilon(w)}(v-r,w)\right)\left(\psi_t^{\varepsilon}(w)-\psi_t^{\varepsilon}(v-r)\right) \\
&-\mathbb{I}(v\geq -b_0)\int_{v}^{\infty} \mathrm{d}w \left(\overline{K}_3^{1,\varepsilon(w)}(v,w) - \overline{K}_3^{1,\varepsilon(w)}(v-r,w)\right)\left(\psi_t^{\varepsilon}(w)-\psi_t^{\varepsilon}(v-r)\right) \\
&-\mathbb{I}(v-r<-b_0)\mathbb{I}(v>0)\int_0^{v} \mathrm{d}w\, K_3^{\varepsilon(w)}(v-r,w)\left(\psi_t^{\varepsilon}(v)-\psi_t^{\varepsilon}(w)\right) \\
&-\mathbb{I}(v-r\geq -b_0)\int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w\, \overline{K}_3^{1,\varepsilon(w)}(v-r,w)\left(\psi_t^{\varepsilon}(v)-\psi_t^{\varepsilon}(w)\right) \\
&-\mathbb{I}(v<-m_0)\int_{v-r}^{v-\min(r,-v-b_0)} \mathrm{d}w\, K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,w)\left(\psi_t^{\varepsilon}(w)-\psi_t^{\varepsilon}(v-r)\right) \\
&-\mathbb{I}(v-r\leq -m_0)\int_{-\infty}^{v-r-\max(\tilde{r},\varepsilon(v-r))} \mathrm{d}w \left(\overline{K}_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) - \overline{K}_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v,w)\right)\left(\psi_t^{\varepsilon}(v)-\psi_t^{\varepsilon}(w)\right) \\
&-\mathbb{I}(-m_0<v-r<m_0)\int_{-\infty}^{v-r-\varepsilon(v-r)} \mathrm{d}w \left(\overline{K}_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) - \overline{K}_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v,w)\right)\left(\psi_t^{\varepsilon}(v)-\psi_t^{\varepsilon}(w)\right) \\
&-\mathbb{I}(v-r\geq m_0)\Bigg\{\mathbb{I}(v\leq 3r)\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}w \left(\overline{K}_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) - \overline{K}_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v,w)\right)\left(\psi_t^{\varepsilon}(v)-\psi_t^{\varepsilon}(w)\right) \\
&\quad +\mathbb{I}(v>3r)\int_{c_0 v}^{v-r-\varepsilon(v-r)} \mathrm{d}w \left(\overline{K}_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) - \overline{K}_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v,w)\right)\left(\psi_t^{\varepsilon}(v)-\psi_t^{\varepsilon}(w)\right)\Bigg\} \\
&-\mathbb{I}(v\leq -m_0)\mathbb{I}(v+r\geq -b_0)\int_{v-r}^{2v+b_0} \mathrm{d}w\, K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,w)\left(\psi_t^{\varepsilon}(w)-\psi_t^{\varepsilon}(v-r)\right) \\
&-\mathbb{I}(-m_0<v<m_0)\int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,w)\left(\psi_t^{\varepsilon}(w)-\psi_t^{\varepsilon}(v-r)\right) \\
&-\mathbb{I}(v\geq m_0)\Bigg[\mathbb{I}(0<v-r<c_0 v)\int_{c_0^{-1}(v-r)}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,w)\left(\psi_t^{\varepsilon}(w)-\psi_t^{\varepsilon}(v-r)\right) \\
&\quad +\mathbb{I}(v-r\leq 0)\int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,w)\left(\psi_t^{\varepsilon}(w)-\psi_t^{\varepsilon}(v-r)\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

$D\psi^{\varepsilon}$关于 Δ的结果采用与第1节中关于变量 Δ所用方法完全类似的方法证明。因此，关键是证明$(\tilde{\mathrm{L}}_u^{\varepsilon}\overline{\Gamma})(v, r)$与 $\tilde{\mathrm{V}}^{\varepsilon}(v, r)\Gamma(v, r)$, $\forall(v, r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$具有相同的渐近行为。与 3.1.2 中一样（参见方程（3.27））$\overline{\ }$，我们现在将$\mathrm{L}_u^{\varepsilon}\Gamma$拆分为如下所示的若干项。我们用符号 I_i（回顾一下 3.1.2 中的 I_i）表示主要积分项。于是显然:

$$\begin{aligned}
&(\tilde{\mathcal{L}}_u^{\varepsilon}\overline{\Gamma}'_{\varepsilon})(v,r) \\
=&\overline{I}_1[\overline{\Gamma}](v,r) + \overline{I}_2[\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}](v,r) + \overline{I}_3[\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}](v,r) + \sum_{i=1}^{8}\overline{e}_i[\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}](v,r) + \overline{I}_4^{\varepsilon}[\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}](v,r).
\end{aligned}$$

我们先定义 I_1, $\overline{I}_2$ 和 I_3。

1) $\overline{I}_1[\overline{\Gamma}'_\varepsilon](v,r)$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\max(r,\varepsilon(v-r))}^{\infty} \mathrm{d}r' \Big(K_3^1(v-r, v-r-r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r) + K_3^1(v, v-r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r') - K_3^1(v-r, v-r-r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v, r+r') \Big) \\
&+ \mathbb{I}(v < -b_0) \Bigg[\int_{\max(r,\varepsilon(v-r))}^{\infty} \mathrm{d}r'\, K_3(v, v+r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r) \\
&- \mathbb{I}(r \le a_1 - v) \Bigg\{ \int_{\max(r,\varepsilon(v-r))}^{a_1-v} \mathrm{d}r'\, K_3(v, v+r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v+r', r+r') + \int_{a_1-v}^{\infty} \mathrm{d}r'\, \overline{K_3}^2(v, v+r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v+r', r+r') \\
&- \int_{\max(r,\varepsilon(v-r))}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\, K_3(v-r, v-r+r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v-r+r', r') - \int_{r+a_1-v}^{\infty} \mathrm{d}r'\, \overline{K_3}^2(v-r, v-r+r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v-r+r', r') \Bigg\} \\
&- \mathbb{I}(r > a_1 - v) \Bigg\{ \int_{\max(r,\varepsilon(v-r))}^{\infty} \mathrm{d}r'\, \overline{K_3}^2(v, v+r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v+r', r+r') \\
&- \int_{\max(r,\varepsilon(v-r))}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\, K_3(v-r, v-r+r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v-r+r', r') - \int_{r+a_1-v}^{\infty} \mathrm{d}r'\, \overline{K_3}^2(v-r, v-r+r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v-r+r', r') \Bigg\} \Bigg] \\
&+ \mathbb{I}(v \ge -b_0) \int_{\max(r,\varepsilon(v-r))}^{\infty} \mathrm{d}r' \Big(K_3(v, v+r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r) + \overline{K_3}^2(v-r, v-r+r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v-r+r', r') \\
&\qquad - \overline{K_3}^2(v, v+r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v+r', r+r') \Big),
\end{aligned}
$$

2) $\overline{I}_2[\overline{\Gamma}'_\varepsilon](v,r)$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{I}(v-r<-b_0)\Bigg[\int_{\min(r,\varepsilon(v-r))}^{\min(r,r-v)} \mathrm{d}r'\; K_3(v-r,v-r+r')\left(\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)-\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r-r')\right)\\
&+\int_{\min(r-v,r)}^{r} \mathrm{d}r'\; K_3(v-r,v-r+r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)-\int_{\min(r,\varepsilon(v-r))}^{r} \mathrm{d}r'\; K_3^1(v-r,v-r-r')\left(\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r+r')-\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)\right)\Bigg]\\
&\quad+\mathbb{I}(v-r\geq -b_0)\Bigg[\int_{\min(r,\varepsilon(v-r))}^{r} \mathrm{d}r'\; K_3(v-r,v-r+r')\left(\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r-r')\right)\\
&\qquad-\int_{\min(r,\varepsilon(v-r))}^{r} \mathrm{d}r'\; K_3^1(v-r,v-r-r')\left(\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r+r')-\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)\right)\Bigg]\\
&\quad+\mathbb{I}(v<-b_0)\Bigg[\int_{\min(r,\varepsilon(v-r))}^{r} \mathrm{d}r'\; K_3^1(v,v-r')\left(\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)-\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v-r',r-r')\right)\\
&\qquad-\int_{\min(r,\varepsilon(v-r))}^{\min(r,a_1-v)} \mathrm{d}r' K_3(v,v+r')\left(\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v+r',r+r')-\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)\right)\\
&\qquad+\int_{\min(r,a_1-v)}^{r} \mathrm{d}r'\; K_3(v,v+r')\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v+r',r+r')-\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)\right)\Bigg]\\
&\quad+\mathbb{I}(v\geq -b_0)\Bigg[\int_{\min(r,\varepsilon(v-r))}^{r} \mathrm{d}r'\; K_3^1(v,v-r')\left(\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)-\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v-r',r-r')\right)\\
&\qquad-\int_{\min(r,\varepsilon(v-r))}^{r} \mathrm{d}r'\; K_3(v,v+r')\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v+r',r+r')-\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)\right)\Bigg]\\
&\quad+\mathbb{I}(v<-m_0)\int_{\min(r,-v-b_0)}^{r} \mathrm{d}r' K_3^1(v,v-r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v-r',r-r')\\
&\quad+\mathbb{I}(v\geq -m_0)\int_{\min(r,\varepsilon(v-r))}^{r} \mathrm{d}r' K_3^1(v,v-r')(1-\mathrm{e}^{-r'})\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v-r',r-r'),
\end{aligned}
$$

and

3) $\overline{I}_3[\overline{\Gamma}'_\varepsilon](v,r)=\overline{I}_3^{(1)}[\overline{\Gamma}'_\varepsilon](v,r)+\overline{I}_3^{(2)}[\overline{\Gamma}'_\varepsilon](v,r),$

其中

$$
\begin{aligned}
&a)\ \overline{I}_3^{(1)}[\overline{\Gamma}'_\varepsilon](v,r)\\
&=\mathbb{I}(v-r\le -m_0)\Bigg[\mathbb{I}(v<-b_0)\Bigg\{\mathbb{I}(\tilde r<\max(r,\varepsilon(v-r)))\int\limits_{\varepsilon(v-r)}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)\\
&\quad+\mathbb{I}(\tilde r\ge\max(r,\varepsilon(v-r)))\Bigg(\mathbb{I}(r>\varepsilon(v-r))\int\limits_{\varepsilon(v-r)}^{r}\mathrm{d}r'\mathrm{e}^{\mu a}(f(v-r)+f(v))\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')\tilde g(v,r)\\
&\qquad\qquad-\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\Big)\tilde g(v,r+r')\Big)\\
&\quad+\int\limits_{\max(r,\varepsilon(v-r))}^{\tilde r}\mathrm{d}r'\mathrm{e}^{\mu a}(f(v-r)+f(v))\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')\tilde g(v,r)\\
&\qquad\qquad-\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\Big)\tilde g(v,r+r')\Big)\\
&\quad+\int_{\tilde r}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)\Bigg)\Bigg\}\\
&\quad+\mathbb{I}(v\ge -b_0)\Bigg\{\int\limits_{\max(\tilde r,\varepsilon(v-r))}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)\\
&\quad+\int\limits_{\min(\tilde r,\varepsilon(v-r))}^{\tilde r}\mathrm{d}r'\Bigg(K_3^2(v-r,v-r-r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)\\
&\qquad-\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\Big)\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r-r')}(f(v)+f(v-r))\tilde g(v,r+r')\Bigg)\Bigg\}\Bigg]\\
&\quad+\mathbb{I}(-m_0<v-r<m_0)\int_{\varepsilon(v-r)}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)\\
&\quad+\mathbb{I}(v-r\ge m_0)\Bigg[\mathbb{I}(v\le 3r)\Bigg\{\int_{v-r}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)\\
&\qquad+\int_{\varepsilon(v-r)}^{v-r}(f(v)+f(v-r))\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r)}\tilde g(v,r)\\
&\qquad-\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r-r')}\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\Big)\tilde g(v,r+r')\Big)\Bigg\}\\
&\quad+\mathbb{I}(v>3r)\Bigg\{\int\limits_{\varepsilon(v-r)}^{v-r-c_0v}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)\\
&\qquad+\int\limits_{v-r-c_0v}^{\infty}(f(v)+f(v-r))\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r)}\tilde g(v,r)\\
&\qquad-\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r-r')}\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\Big)\tilde g(v,r+r')\Big)\Bigg\}\\
&\quad+\overline{A}_1^-[\overline{\Gamma}'^{,1}_\varepsilon](v,r)+\overline{A}_2^-[\overline{\Gamma}'^{,1}_\varepsilon](v,r)+\overline{A}_3^-[\overline{\Gamma}'^{,1}_\varepsilon](v,r),
\end{aligned}
$$

with

$$\overline{A_1}^{-}[\overline{\Gamma}'^{,1}_{\varepsilon}](v,r) = -\mathbb{I}(v-r\le -m_0)\,\mathbb{I}(v<-b_0)\,\mathbb{I}(\tilde r>\max(r,\varepsilon(v-r)))\mathrm{e}^{\mu a}\times$$
$$\times\int\limits_{\max(r,\varepsilon(v-r))}^{\tilde r}\mathrm{d}r'\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\Big)\,(f(v-r-r')-f(v-r))\,\tilde g(v,r+r'),$$

$$\overline{A_2}^{-}[\overline{\Gamma}'^{,1}_{\varepsilon}](v,r) = -\mathbb{I}(v-r\le -m_0)\Bigg[\mathbb{I}(v<-b_0)\,\mathbb{I}(r>\varepsilon(v-r))\mathrm{e}^{\mu a}\times$$
$$\times\int\limits_{\varepsilon(v-r)}^{r}\mathrm{d}r'\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\Big)\,(f(v-r-r')-f(v-r))\,\tilde g(v,r+r')$$
$$+\mathbb{I}(v\ge -b_0)\,\mathbb{I}(\tilde r>\varepsilon(v-r))\int\limits_{\varepsilon(v-r)}^{\tilde r}\mathrm{d}r'\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\Big)\times$$
$$\times\,(f(v-r-r')-f(v-r))\,\tilde g(v,r+r')\Bigg],$$

$$\overline{A_3}^{-}[\overline{\Gamma}'^{,1}_{\varepsilon}](v,r) = -\mathbb{I}(v-r>m_0)\,\mathbb{I}(v>3r)\int\limits_{v-r}^{\infty}\mathrm{d}r'\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\Big)\times$$
$$\times\,\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r-r')}\,(f(v-r-r')-f(v-r))\,\tilde g(v,r+r'),$$

and $b)$ $\overline{I}_3^{(2)}[\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}](v,r) = \int\limits_{\min(r,\varepsilon(v-r))}^{r}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v,v-r')\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v,r)$

$$-\mathbb{I}(v\le -m_0)\Bigg\{\mathbb{I}(v+r<-b_0)\int\limits_{\min(r,\varepsilon(v-r))}^{r}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v,v-r')\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v-r',r-r')$$
$$+\mathbb{I}(v+r\ge -b_0)\int\limits_{\varepsilon(v-r)}^{-v-b_0}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v,v-r')\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v-r',r-r')\Bigg\}$$
$$-\mathbb{I}(v\ge m_0)\Bigg\{\mathbb{I}(0<v-r<c_0v)\int\limits_{\max(v-c_0^{-1}(v-r),\varepsilon(v-r))}^{r}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v,v-r')\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v-r',r-r')$$
$$+\mathbb{I}(v-r\ge c_0v)\int\limits_{\min(r,\varepsilon(v-r))}^{r}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v,v-r')\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v-r',r-r')\Bigg\}.$$

其他项都很“小”，如下列定义所示:

$$4)\ \overline{I}_4^{\varepsilon}[\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}](v,r)=\mathbb{I}(v\geq a_1)\mathbb{I}(r\leq\varepsilon(v-r))\Big[\int_r^{\varepsilon(v-r)}\mathrm{d}r'\,K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v-r,v-r-r')\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v,r)$$
$$-\int_{\max(r,\varepsilon(v-r)-r)}^{\varepsilon(v-r)}\mathrm{d}r'\,K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v-r,v-r-r')\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v,r+r')\Big]$$
$$+\mathbb{I}(v\geq -b_0)\int_0^{\infty}\mathrm{d}r'\left(\overline{K_3}^{2,\varepsilon(v-r+r')}(v-r,v-r+r')-\overline{K_3}^{2,\varepsilon(v+r')}(v-r,v-r+r')\right)\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v-r+r',r'),$$

$$5)\ \overline{e}_1[\vec{\Gamma}_{\varepsilon}](v,r)$$
$$=\mathbb{I}(v<a_1)\int_r^{\max(r,\varepsilon(v-r))}\mathrm{d}r'\,\Big[K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v-r,v-r-r')\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v,r)-K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v-r,v-r-r')\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v,r+r')$$
$$K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v,v-r')\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v,r')\Big],$$

$$6)\ \overline{e}_2[\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}](v,r)=\mathbb{I}(v<-b_0)\int_r^{\max(r,\varepsilon(v-r))}\mathrm{d}r'\,\Big[K_3^{\varepsilon(v+r')}(v,v+r')\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v,r)-K_3^{\varepsilon(v+r')}(v,v+r')\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v+r',r+r')$$
$$+K_3^{\varepsilon(v+r')}(v-r,v-r+r')\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v-r+r',r')\Big],$$

$$7)\ \overline{e}_3[\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}](v,r)=\mathbb{I}(v\geq -b_0)\int_r^{\max(r,\varepsilon(v-r))}\mathrm{d}r'\,\Big[K_3^{\varepsilon(v+r')}(v,v+r')\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v,r)-\overline{K_3}^{2,\varepsilon(v+r')}(v,v+r')\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v+r',r+r')$$
$$+\overline{K_3}^{2,\varepsilon(v+r')}(v-r,v-r+r')\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v-r+r',r')\Big],$$

$$8)\ \overline{e}_4[\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}](v,r)=\mathbb{I}(v-r<-b_0)\int_0^{\min(r,\varepsilon(v-r))}\mathrm{d}r'\,K_3^{\varepsilon(v-r+r')}(v-r,v-r+r')\left(\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v,r)-\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v,r-r')\right)$$
$$+\mathbb{I}(v-r\geq -b_0)\int_0^{\min(r,\varepsilon(v-r))}\mathrm{d}r'\,K_3^{\varepsilon(v-r+r')}(v-r,v-r+r')\left(\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v,r)-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v,r-r')\right)$$
$$-\mathbb{I}(v<a_1)\int_0^{\min(r,\varepsilon(v-r))}\mathrm{d}r'\,K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v-r,v-r-r')\left(\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v,r+r')-\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v,r)\right)$$
$$-\mathbb{I}(v\geq a_1)\int_0^{\min(r,\varepsilon(v-r))}\mathrm{d}r'\,\mathbb{I}(r+r'>\varepsilon(v-r))K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v-r,v-r-r')\left(\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v,r+r')-\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v,r)\right)$$
$$+\mathbb{I}(v\geq a_1)\int_0^{\min(r,\varepsilon(v-r))}\mathrm{d}r'\,\mathbb{I}(r+r'\leq\varepsilon(v-r))K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v-r,v-r-r')\overline{\Gamma}'_{\varepsilon}(v,r),$$

$$9)\ \ \overline{e}_5[\overline{\Gamma}'_\varepsilon](v,r) = \int_0^{\min(r,\varepsilon(v-r))} \mathrm{d}r'\ K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,v-r')\left(\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r) - \overline{\Gamma}'_\varepsilon(v-r',r-r')\right)$$
$$- \int_0^{\min(r,\varepsilon(v-r))} \mathrm{d}r'\ K_3^{\varepsilon(v+r')}(v,v+r')\left(\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v+r',r+r') - \overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)\right)$$
$$+ \mathbb{I}(v \geq -b_0) \int_0^{\min(r,\varepsilon(v-r))} \mathrm{d}r'\ K_3^{\varepsilon(v+r')}(v,v+r')(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'})\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v+r',r+r'),$$

$$10)\ \ \overline{e}_6[\overline{\Gamma}'_\varepsilon](v,r) = \mathbb{I}(v \geq -m_0) \int_0^{\min(r,\varepsilon(v-r))} \mathrm{d}r'\ K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,v-r')(1-\mathrm{e}^{-r'})\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v+r',r+r'),$$

$$11)\ \ \overline{e}_7[\overline{\Gamma}'_\varepsilon](v,r) = \int_0^{\varepsilon(v-r)} \mathrm{d}r'\ K_3^{v-r,v-r-r'}\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r),$$

and

$$12)\ \ \overline{e}_8[\overline{\Gamma}'_\varepsilon](v,r) = \int_0^{\min(r,\varepsilon(v-r))} \mathrm{d}r' K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,v-r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v,r)$$
$$- \mathbb{I}(v \leq -m_0)\Bigg\{\mathbb{I}(v+r < -b_0) \int_0^{\min(r,\varepsilon(v-r))} \mathrm{d}r' K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,v-r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v-r',r-r')$$
$$+ \mathbb{I}(v+r \geq -b_0) \int_0^{\varepsilon(v-r)} \mathrm{d}r'\ K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,v-r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v-r',r-r')\Bigg\}$$
$$- \mathbb{I}(v \geq m_0)\Bigg\{\mathbb{I}(0 < v-r < c_0 v) \int_{v-c_0^{-1}(v-r)}^{\max(\varepsilon(v-r,v-c_0^{-1}(v-r)))} \mathrm{d}r'\ K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,v-r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v-r',r-r')$$
$$+ \mathbb{I}(v-r \geq c_0 v) \int_0^{\min(r,\varepsilon(v-r))} \mathrm{d}r'\ K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,v-r')\overline{\Gamma}'_\varepsilon(v-r',r-r')\Bigg\}.$$

F. 关于 $\boldsymbol{D_t = D\psi_t^\varepsilon - \Delta_t}$ 演化的计算

在演化方程 (3.42) 中，算子 L^ε 定义如下：

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}^\varepsilon \Delta_t(v,r) \\
&= \int_{-\infty}^{v-r-\delta_1} \mathrm{d}w\, K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v-r,w)\Delta_t(v,r) - \int_{-\infty}^{v-r-\delta_1} \mathrm{d}w\, \left(K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) - K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,w)\right)\Delta_t(v,v-w) \\
&+ \int_{v+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}w\, K_3^{\varepsilon(w)}(v,w)\Delta_t(v,r) - \int_{v+\delta_1}^{\infty} \mathrm{d}w\, \left(K_3^{\varepsilon(w)}(v,w) - K_3^{\varepsilon(w)}(v-r,w)\right)\Delta_t(w,w-v+r) \\
&+ \int_{v-r}^{v-\delta_1} \mathrm{d}w\, K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,w)\left(\Delta_t(v,r) - \Delta_t(w,w-v+r)\right) + \int_{v-r+\delta_1}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^{\varepsilon(w)}(v-r,w)\left(\Delta_t(v,r) - \Delta_t(v,v-w)\right) \\
&+ \int_{v+\delta_2}^{v+\delta_1} \mathrm{d}w\, K_3^{\varepsilon(w)}(v,w)\left(\Delta_t(v,r) - \Delta_t(w,w-v+r)\right) + \int_{v-\delta_1}^{v-\delta_2} \mathrm{d}w\, K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,w)\left(\Delta_t(v,r) - \Delta_t(w,w-v+r)\right) \\
&+ \int_{v-r}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,w)\left(\Delta_t(v,r) - \Delta_t(w,w-v+r)\right) \\
&\quad + \int_{-\infty}^{v-r} \mathrm{d}w\, K_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v-r,w)\Delta_t(v,r) - \int_{-\infty}^{v-r} \mathrm{d}w\, \left(K_3^{2,\varepsilon(v-r)}(v-r,w) - K_3^{2,\varepsilon(v)}(v,w)\right)\Delta_t(v,w) \\
&\quad + \Bigg[\int_{v-r-\delta_1}^{v-r} \mathrm{d}w\, K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,w)\Delta_t(v,v-w) - \int_{v-r-\delta_1}^{v-r} \mathrm{d}w\, K_3^{1,\varepsilon(v-r)}(v,w)\Delta_t(v-r,v-r-w) \\
&\quad + \int_{v}^{v+\delta_1} \mathrm{d}w\, K_3^{\varepsilon(w)}(v-r,w)\Delta_t(w,w-v+r) - \int_{v}^{v+\delta_2} \mathrm{d}w\, K_3^{\varepsilon(w)}(v,w)\Delta_t(w,w-v) \\
&\quad + \int_{v-\delta_2}^{v} \mathrm{d}w\, K_3^{1,\varepsilon(v)}(v,w)\Delta_t(v,v-w) + \int_{v-r}^{v-r+\delta_1} \mathrm{d}w\, K_3^{\varepsilon(w)}(v-r,w)\Delta_t(w,w-v+r) \Bigg].
\end{aligned}
$$

注意，方括号中的最后六项对我们新的“$\mathrm{L}_\delta \Delta_t(v,\ r)$”有所贡献。另一部分 L_0^ε 的定义与上文完全相同，但将 $K^{\varepsilon(\cdot,\cdot)}3(\cdot,\cdot)$ 替换为 $K_3(\cdot,\cdot) - K^{\varepsilon(\cdot,\cdot)}3(\cdot,\cdot)$。

和之前一样，L^ε 分为三个部分：$\mathrm{L}^\varepsilon =、\mathrm{L}_u^\varepsilon +、\mathrm{L}_\delta^\varepsilon +、\mathrm{L}_b^\varepsilon$，然后 $\mathrm{L}_u^\varepsilon \overline{\Gamma}_\varepsilon$ 写为：

$$
\mathcal{L}_u^\varepsilon \overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r) = \tilde{I}_1[\overline{\Gamma}_\varepsilon](v,r) + \tilde{I}_2[\overline{\Gamma}_\varepsilon](v,r) + \tilde{I}_3[\overline{\Gamma}_\varepsilon](v,r) + \sum_{i=1}^{8} \tilde{e}_i[\overline{\Gamma}_\varepsilon](v,r) + \tilde{I}_4^\varepsilon[\overline{\Gamma}_\varepsilon](v,r).
$$

下面我们将给出 $\tilde{I}_1$、$\tilde{I}_2$ 和 $\tilde{I}_3$ 的定义。这些项决定了 $\mathrm{L}_u^\varepsilon \overline{\Gamma}_\varepsilon$ 的渐近行为。由于两类“小量”参数—— δ 函数和 ε 函数——之间出现了新的相互作用，相关积分的下限与之前遇到的类似项不同，因此我们在下文写出它们的完整表达式。$\tilde{I}_4$ 以及所有的 $\tilde{e}_i$ 都来自 ε 或 δ 的“小量”，而我们已经了解了

如何控制这类项，因此不再写出它们的显式公式。

1) $\tilde{I}_1[\overline{\Gamma}_\varepsilon](v,r)$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{\max(r+\delta_1,\varepsilon(v-r))}^{\infty} \mathrm{d}r' \Big(K_3^1(v-r, v-r-r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r) + K_3^1(v, v-r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r') - K_3^1(v-r, v-r-r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v, r+r') \Big) \\
&+ \mathbb{I}(v < -b_0) \Bigg[\int\limits_{\max(r+\delta_1,\varepsilon(v-r))}^{\infty} \mathrm{d}r'\ K_3(v, v+r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r) \\
&- \mathbb{I}(r+\delta_1 \le a_1 - v) \Bigg\{ \int\limits_{\max(r+\delta_1,\varepsilon(v-r))}^{a_1-v} \mathrm{d}r'\ K_3(v, v+r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v+r', r+r') \\
&+ \int_{a_1-v}^{\infty} \mathrm{d}r'\ \overline{K_3}^2(v, v+r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v+r', r+r') \\
&- \int\limits_{\max(r+\delta_1,\varepsilon(v-r))}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\ K_3(v-r, v-r+r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v-r+r', r') - \int\limits_{r+a_1-v}^{\infty} \mathrm{d}r'\ \overline{K_3}^2(v-r, v-r+r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v-r+r', r') \Bigg\} \\
&- \mathbb{I}(r+\delta_1 > a_1 - v) \Bigg\{ \int\limits_{\max(r+\delta_1,\varepsilon(v-r))}^{\infty} \mathrm{d}r'\ \overline{K_3}^2(v, v+r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v+r', r+r') \\
&- \int\limits_{\max(r,\varepsilon(v-r))}^{r+a_1-v} \mathrm{d}r'\ K_3(v-r, v-r+r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v-r+r', r') - \int\limits_{r+a_1-v}^{\infty} \mathrm{d}r'\ \overline{K_3}^2(v-r, v-r+r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v-r+r', r') \Bigg\} \Bigg] \\
&+ \mathbb{I}(v \ge -b_0) \int\limits_{\max(r+\delta_1,\varepsilon(v-r))}^{\infty} \mathrm{d}r' \Big(K_3(v, v+r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r) + \overline{K_3}^2(v-r, v-r+r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v-r+r', r') \\
&\qquad - \overline{K_3}^2(v, v+r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v+r', r+r') \Big),
\end{aligned}
$$

2) $\tilde{I}_2[\overline{\Gamma}_\varepsilon](v,r)$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{I}(v-r<-b_0)\Bigg[\int_{\min(r,\max(\delta_1,\varepsilon(v-r)))}^{\min(r,r-v)} \mathrm{d}r'\; K_3(v-r,v-r+r')\left(\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)-\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r-r')\right)\\
&+\int_{\min(r-v,r)}^{r} \mathrm{d}r'\; K_3(v-r,v-r+r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)\\
&-\int_{\min(r,\max(\delta_1,\varepsilon(v-r)))}^{r} \mathrm{d}r'\; K_3^1(v-r,v-r-r')\left(\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r+r')-\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)\right)\Bigg]\\
&+\mathbb{I}(v-r\geq -b_0)\Bigg[\int_{\min(r,\max(\delta_1,\varepsilon(v-r)))}^{r} \mathrm{d}r'\; K_3(v-r,v-r+r')\left(\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r-r')\right)\\
&\qquad-\int_{\min(r,\max(\delta_1,\varepsilon(v-r)))}^{r} \mathrm{d}r'\; K_3^1(v-r,v-r-r')\left(\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r+r')-\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)\right)\Bigg]\\
&+\mathbb{I}(v<-b_0)\Bigg[\int_{\min(r,\max(\delta_1,\varepsilon(v-r)))}^{r} \mathrm{d}r'\; K_3^1(v,v-r')\left(\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)-\overline{\Gamma}_\varepsilon(v-r',r-r')\right)\\
&\quad-\int_{\min(r,\max(\delta_1,\varepsilon(v-r)))}^{\min(r,a_1-v)} \mathrm{d}r' K_3(v,v+r')\left(\overline{\Gamma}_\varepsilon(v+r',r+r')-\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)\right)\\
&\quad+\int_{\min(r,a_1-v)}^{r} \mathrm{d}r'\; K_3(v,v+r')\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\overline{\Gamma}_\varepsilon(v+r',r+r')-\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)\right)\Bigg]\\
&+\mathbb{I}(v\geq -b_0)\Bigg[\int_{\min(r,\max(\delta_1,\varepsilon(v-r)))}^{r} \mathrm{d}r'\; K_3^1(v,v-r')\left(\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)-\overline{\Gamma}_\varepsilon(v-r',r-r')\right)\\
&\quad-\int_{\min(r,\max(\delta_1,\varepsilon(v-r)))}^{r} \mathrm{d}r'\; K_3(v,v+r')\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r'}\overline{\Gamma}_\varepsilon(v+r',r+r')-\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)\right)\Bigg]\\
&\quad+\mathbb{I}(v<-m_0)\int_{\min(r,-v-b_0)}^{r} \mathrm{d}r' K_3^1(v,v-r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v-r',r-r')\\
&\quad+\mathbb{I}(v\geq -m_0)\int_{\min(r,\max(\delta_1,\varepsilon(v-r)))}^{r} \mathrm{d}r' K_3^1(v,v-r')(1-\mathrm{e}^{-r'})\overline{\Gamma}_\varepsilon(v-r',r-r'),
\end{aligned}
$$

3) $\tilde{I}_3[\overline{\Gamma}_\varepsilon](v,\ r) = \tilde{I}_{(1)3}\ [\overline{\Gamma}_\varepsilon](v,\ r) + \tilde{I}_{(2)3}\ [\overline{\Gamma}_\varepsilon](v,\ r),$

其中

$$
\begin{aligned}
&a)\ \ \tilde{I}_3^{(1)}[\overline{\Gamma}_\varepsilon](v,r)\\
&=_{\mathbb{I}}(v-r\le -m_0)\Bigg[{}_{\mathbb{I}}(v<-b_0)\Bigg\{\int\limits_{\max(\tilde{r},\varepsilon(v-r))}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)\\
&\quad+{}_{\mathbb{I}}(r>\varepsilon(v-r))\int\limits_{\max(\delta_1,\varepsilon(v-r))}^{r}\mathrm{d}r'\ \mathrm{e}^{\mu a}(f(v-r)+f(v))\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')\overline{g}(v,r)\\
&\qquad\qquad-(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r'))\overline{g}(v,r+r')\Big)\\
&\quad+{}_{\mathbb{I}}(\tilde{r}>\max(r+\delta_1,\varepsilon(v-r)))\int\limits_{\max(r+\delta_1,\varepsilon(v-r))}^{\tilde{r}}\mathrm{d}r'\mathrm{e}^{\mu a}(f(v-r)+f(v))\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')\overline{g}(v,r)\\
&\qquad\qquad-(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r'))\overline{g}(v,r+r')\Big)\Bigg\}\\
&\quad+{}_{\mathbb{I}}(v\ge -b_0)\Bigg\{\int\limits_{\tilde{r}}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)\\
&\quad+{}_{\mathbb{I}}(\tilde{r}>\max(\delta_1,\varepsilon(v-r)))\int\limits_{\max(\delta_1,\varepsilon(v-r))}^{\tilde{r}}\mathrm{d}r'\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)\\
&\qquad-(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r'))\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r-r')}(f(v)+f(v-r))\overline{g}(v,r+r')\Big)\Bigg\}\Bigg]\\
&\quad+{}_{\mathbb{I}}(-m_0<v-r<m_0)\int_{\varepsilon(v-r)}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)\\
&\quad+{}_{\mathbb{I}}(v-r\ge m_0)\Bigg[{}_{\mathbb{I}}(v\le 3r)\Bigg\{\int_{v-r}^{\infty}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)\\
&\qquad+\int_{\varepsilon(v-r)}^{v-r}(f(v)+f(v-r))\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r)}\overline{g}(v,r)\\
&\qquad-\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r-r')}(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r'))\overline{g}(v,r+r')\Big)\Bigg\}\\
&\quad+{}_{\mathbb{I}}(v>3r)\Bigg\{\int\limits_{\varepsilon(v-r)}^{v-r-c_0v}\mathrm{d}r'\ K_3^2(v-r,v-r-r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)\\
&\qquad+\int\limits_{v-r-c_0v}^{\infty}(f(v)+f(v-r))\Big(K_3^2(v-r,v-r-r')\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r)}\overline{g}(v,r)\\
&\qquad-\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r-r')}(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r'))\overline{g}(v,r+r')\Big)\Bigg\}\\
&\quad+\tilde{A}_1^-[\overline{\Gamma}_\varepsilon^1](v,r)+\tilde{A}_2^-[\overline{\Gamma}_\varepsilon^1](v,r)+\tilde{A}_3^-[\overline{\Gamma}_\varepsilon^1](v,r),
\end{aligned}
$$

with

$$\tilde{A}_1^-[\overline{\Gamma}_\varepsilon^1](v,r) = -\mathbb{I}(v-r\le -m_0)\,\mathbb{I}(v<-b_0)\,\mathbb{I}(\tilde{r}>\max(r+\delta_1,\varepsilon(v-r)))\mathrm{e}^{\mu a}\times$$
$$\times\int\limits_{\max(r+\delta_1,\varepsilon(v-r))}^{\tilde{r}}\mathrm{d}r'\left(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\right)\left(f(v-r-r')-f(v-r)\right)\overline{g}(v,r+r'),$$

$$\tilde{A}_2^-[\overline{\Gamma}_\varepsilon^1](v,r) = -\mathbb{I}(v-r\le -m_0)\Bigg[\mathbb{I}(v<-b_0)\,\mathbb{I}(r>\varepsilon(v-r))\mathrm{e}^{\mu a}\times$$
$$\times\int\limits_{\max(\delta_1,\varepsilon(v-r))}^{r}\mathrm{d}r'\left(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\right)\left(f(v-r-r')-f(v-r)\right)\overline{g}(v,r+r')$$
$$+\mathbb{I}(v\ge -b_0)\,\mathbb{I}(\tilde{r}>\max(\delta_1,\varepsilon(v-r)))\int\limits_{\min(\delta_1,\varepsilon(v-r))}^{\tilde{r}}\mathrm{d}r'\left(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\right)\times$$
$$\times\left(f(v-r-r')-f(v-r)\right)\overline{g}(v,r+r')\Bigg],$$

$$\tilde{A}_3^-[\overline{\Gamma}_\varepsilon^1](v,r) = -\mathbb{I}(v-r>m_0)\,\mathbb{I}(v>3r)\int\limits_{v-r}^{\infty}\mathrm{d}r'\left(K_3^2(v-r,v-r-r')-K_3^2(v,v-r-r')\right)\times$$
$$\times\mathrm{e}^{\mu\max(a,c_0v,v-r-r')}\left(f(v-r-r')-f(v-r)\right)\overline{g}(v,r+r'),$$

and

$$b)\ \ \tilde{I}_3^{(2)}[\overline{\Gamma}_\varepsilon](v,r) = \mathbb{I}(v\le -m_0)\Bigg[\int\limits_{\min(r,\max(\varepsilon(v-r),\delta_1))}^{\min(r,-v-b_0)}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v,v-r')\left(\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)-\overline{\Gamma}_\varepsilon(v-r',r-r')\right)$$
$$-\int\limits_{\min(r,-v-b_0)}^{r}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v,v-r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)\Bigg]+\mathbb{I}(-m_0<v<m_0)\int\limits_{\min(\varepsilon(v),r)}^{r}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v,v-r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)$$
$$+\mathbb{I}(v\ge m_0)\Bigg[\mathbb{I}(0<v-r<c_0v)\Bigg\{\int\limits_{\max(v-c_0^{-1}(v-r),\varepsilon(v-r))}^{r}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v,v-r')\left(\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)-\overline{\Gamma}_\varepsilon(v-r',r-r')\right)$$
$$+\int\limits_{\min(\varepsilon(v-r),v-c_0^{-1}(v-r))}^{v-c_0^{-1}(v-r)}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v,v-r')\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)\Bigg\}$$
$$+\mathbb{I}(v-r\ge c_0v)\int\limits_{\min(r,\max(\delta_1,\varepsilon(v-r)))}^{r}\mathrm{d}r'\,K_3^2(v,v-r')\left(\overline{\Gamma}_\varepsilon(v,r)-\overline{\Gamma}_\varepsilon(v-r',r-r')\right)\Bigg].$$

致谢

我们衷心感谢 Antti Kupiainen 就这一问题进行的许多富有启发性的讨论，以及对本文提出的宝贵建议和意见。在我们多年开展这一项目的过程中，

我们也受益于与其他几位同事的讨论。我们特别要感谢 Cl´ement Mouhot、Herbert Spohn 和 Juan J. L. Vel´azquez 提出的意见。我们也感谢 Miguel Escobedo 就他们关于这一主题的最新研究与我们通信交流。本研究获得了芬兰科学院的支持，资助途径包括科学院项目（项目编号：339228）、芬兰随机性与结构卓越中心（项目编号：346306），以及欧洲研究委员会高级研究员资助 741487 和 227772。J Bandyopadhyay 在本文中的工作旨在表达对其父亲 Raghab Bandyopadhyay 的些许敬意。

参考文献

[1] O. Bratteli 和 D. W. Robinson，《算子代数与量子统计力学 II》。施普林格，纽约，1981。[2] E. Cortes 和 M. Escobedo，关于玻色气体中正常流体-凝聚体相互作用方程组，《泛函分析杂志》278(2)（2020）108315。[3] Yu Deng 和 Zaher Hani，波动动理学方程的完整推导，arXiv:2201.07169v1 [math.AP]。[4] S. Dyachenko、A. C. Newell、A. Pushkarev 和 V. E. Zakharov，光学湍流：非线性薛定谔方程中的弱湍流、凝聚体和塌缩丝状结构，《物理学D》57(1-2)（1992）96–160。[5] Klaus-Jochen Engel 和 Rainer Nagel，《线性演化方程的单参数半群》。数学研究生教材，施普林格，2000。[6] L. Erd˝os、B. Schlein 和 H.-T. Yau，玻色-爱因斯坦凝聚体动力学的 Gross-Pitaevskii 方程推导，《数学年刊》172(1)（2010）291–370。[7] M. Escobedo，线性化三波动理学方程的经典近似，《泛函分析杂志》282(8)（2022）109390。[8] M. Escobedo，临界温度附近凝聚体-正常流体相互作用的线性化方程组，arXiv:2201.07169v1 [math.AP]。[9] M. Escobedo、S. Mischler 和 J. J. L. Vel´azquez，Uehling-Uhlenbeck方程的奇异解，《爱丁堡皇家学会学报A辑》138(1)（2008）67–107。[10] A. Griffin、T. Nikuni 和 E. Zaremba，《有限温度下的玻色凝聚气体》。剑桥大学出版社，剑桥，2009。[11] T. Kato，《线性算子微扰理论》，施普林格，1980。[12] E. H. Lieb、R. Seiringer 和 J. Yngvason，陷阱中的玻色子：Gross-Pitaevskii能量泛函的严格推导，《物理评论A辑》61(4)（2000）043602。[13] E. H. Lieb 和 R. Seiringer，旋转玻色气体的 Gross-Pitaevskii 方程推导，《数学物理通讯》264(2)（2006）505–537。[14] X. Lu，玻色-爱因斯坦粒子玻尔兹曼方程的各向同性分布解，《统计物理学杂志》116(5)（2004）1597–1649。[15] X. Lu，玻色-爱因斯坦粒子的玻尔兹曼方程：速度集中与趋于平衡，《统计物理学杂志》119(5-6)（2005）1027–1067。[16] J. Lukkarinen 和 H. Spohn，不要正则排序——弱相互作用量子流体动理学极限札记，《统计物理学杂志》134(5)（2009）1133–1172。[17] J. Lukkarinen 和 H. Spohn，具有随机初始数据的弱非线性薛定谔方程，《数学创刊》183(1)（2011）79–188。[18] F. Riesz、B. Sz.-Nagy，《泛函分析》，多佛出版社，纽约，1953。[19] W. Rudin，《泛函分析》。塔塔麦格劳-希尔，新德里，1974。[20] D. V. Semikoz 和 I. I. Tkachev，动理学区域中的玻色子凝聚，《物理评论D辑》55(2)（1997）489–502。[21] H. Spohn，玻色-爱因斯坦凝聚动力学，《物理学D》239(10)（2010）627–634。