arXiv:2301.03649v1 [math.RT] 9 Jan 2023

[s-snake-c，一月 11, 2023]

蛇引理的变体

Markus Schmidmeier

摘要：核复形引理指出，给定一个交换图，其中各行和各列均正合，并覆盖 aΓ-形状下方的区域，那么顶部的核序列与左侧的核序列在每个位置都具有同构同调。其对偶版本——余核复形引理——已被用于确定有限表示函子在 Auslander-Reiten 箭图上的支撑。我们指出，蛇引理是这两个结果结合后的推论。

2010年数学主题分类：13D02、16E05、18G10、16G70

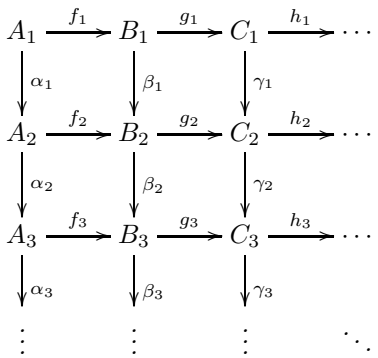
关键词：蛇引理、核复形引理、余核复形引理

谨以此文献给张普教授，祝贺他 60 岁生日

1. The Kernel Complex Lemma

本节将展示并讨论以下结果。

命题 1（核复形引理）。给定一个行与列均正合的交换图，



那么，通过取顶行中垂直映射的核以及左列中水平映射的核所得到的两个复形，

$$0 \to \operatorname{Ker}\alpha_1 \to \operatorname{Ker}\beta_1 \to \operatorname{Ker}\gamma_1 \to \cdots$$

and

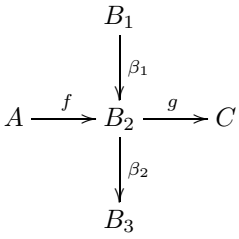
$$0 \to \operatorname{Ker} f_1 \to \operatorname{Ker} f_2 \to \operatorname{Ker} f_3 \to \cdots,$$

在每个位置都有同构同调。

在证明中，我们使用关系。给定模 A、B，则 $B\times A$ 上的关系是 $B\oplus A$ 的子模。例如，若 $f\colon A\to B$ 和 $g\colon A\to C$ 是同态，那么 $f=\{(f(a),a)\colon a\in A\}$ 是 $B\times A$ 上的关系，$g^{-1}=\{(a,g(a))\colon a\in A\}$ 是 $A\times C$ 上的关系，而 $f\circ g^{-1}=\{(b,c)\colon (b,a)\in f$ 和 $(a,c)\in g^{-1}$ 是 $B\times C$ 上某个 $a\in A\}$ 的关系。关于使用关系证明蛇引理的方法，请参阅 [3]。

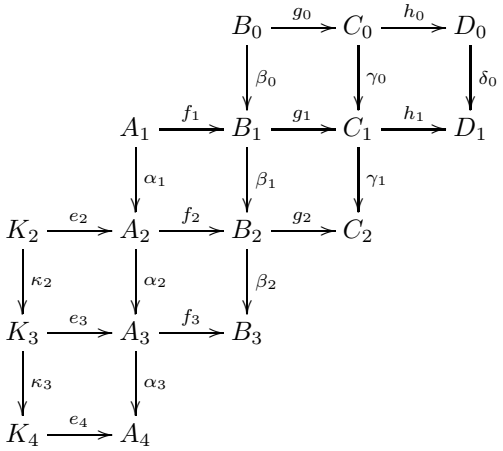
我们反复应用以下基本结果 [4, 2.1 引理]:

引理 2. 考虑一个具有正合行和正合列的图表。



(1) 令 $u \subset C \oplus B_3$ 为由 $g \circ \beta_2^{-1}$给出的关系。对于 $(c, b_3) \in u$，我们有$b_3 \in$ 像 $\beta_2 f$ 当且仅当 $c \in$ 像 $g\beta_1$。(2) 令 $v \subset B_1 \oplus A$ 为由 ${\beta_1}^{-1} \circ f$给出的关系。(a) 令 $a \in A$。那么 $a \in$ 核 $\beta_2 f$ 当且仅当存在 $b_1 \in B_1$ 满足 $(b_1, a) \in v$。(b) 给定 $b_1 \in B_1$，我们有 $b_1 \in$ 核 $g\beta_1$ 当且仅当存在 $a \in A$ 满足 $(b_1, a) \in v$。□

命题 1 的证明。我们只证明 $C_0 =$ 核 γ_1 处的同调与 $K_3 =$ 核 f_3处的同调同构。在第（6）部分，我们将说明如何处理一般情形。考虑以下图，其中我们用 $B_0 =$ 核 β_1, $\beta_0 = \mathrm{incl}\colon B_0 \to B_1$, $C_0 =$ 核 γ_1, $g_0\colon B_0 \to C_0$ 表示由取核诱导的映射，等等；在左侧，对于 $i \in \mathbb{N}$, $K_i =$ 核 f_i, $e_i = \mathrm{incl}\colon K_i \to A_i$,$\kappa_i : K_i \to K_{i+1}$。该图是交换图，所有行和列均为正合的，除了顶行在 C_0 处以及左列在 K_3处可能不正合。



考虑关系 $u = e_3^{-1}\alpha_2 f_2^{-1}\beta_1 g_1^{-1}\gamma_0 \subset K_3 \times C_0$。

(1) 对于 $c_0 \in$核 h_0，存在 $z_3 \in$核 κ_3，使得 $(z_3, c_0) \in u$：$c_0 \in$核 h_0成立，当且仅当 $c_0 \in$ 核 $h_1\gamma_0$，因为 δ_0 是单态射且最右边的方块是交换的。将引理 2 应用于以 C_1 为中心的交叉，根据第 (2) 部分的 (a) 和 (b)，存在 $b_1 \in B_1$，使得 $(b_1, c_0) \in g_1^{-1}\gamma_0$; 此外，$b_1 \in$核 $\gamma_1 g_1 =$核 $g_2\beta_1$。再次应用该引理，此次以 B_2 为中心，存在 $a_2 \in A_2$，使得 $(a_2, b_1) \in f_2^{-1}\beta_1$，且 $a_2 \in$核 $\beta_2 f_2 =$核 $f_3\alpha_2$。再次应用该引理，以 A_3 为中心，可得 $z_3 \in K_3$，使得 $(z_3, a_2) \in e_3^{-1}\alpha_2$且 $z_3 \in$核 $\alpha_3 e_3$。因此，$z_3 \in$核κ_3，因为 $\alpha_3 e_3 = e_4\kappa_3$ 且 e_4 是单态射。最后，数对 $(z_3, c_0) \in u$，因为

存在 $b_1 \in B_1$ 和 $a_2 \in A_2$，使得 $(b_1, c_0) \in g_1^{-1}\gamma_0$、$(a_2, b_1) \in f_2^{-1}\beta_1$ 以及 $(z_3, a_2) \in e_3^{-1}\alpha_2$。

(2) 反过来，给定 $z_3 \in \operatorname{Ker}\kappa_3$，存在 $c_0 \in \operatorname{Ker} h_0$，使得 $(z_3, c_0) \in u$。

(3) 假设 $(z_3, c_0) \in u$。那么，$c_0 \in \operatorname{Im} g_0$ 当且仅当 $z_3 \in \operatorname{Im} \kappa_2$：由于 $(z_3, c_0) \in u = e_3^{-1}\alpha_2 f_2^{-1}\beta_1 g_1^{-1}\gamma_0$，有序对 $(e_3(z_3)\ \gamma_0(c_0))$ 属于关系 $\alpha_2 f_2^{-1}\beta_1 g_1^{-1}$，因此存在 $b_2 \in B_2$，使得 $(e_3(z_3)\ b_2) \in \alpha_2 f_2^{-1}$ 且 $(b_2, \gamma_0(c_0)) \in \beta_1 g_1^{-1}$。现在，$c_0 \in \operatorname{Im} g_0$ 当且仅当 $\gamma_0(c_0) \in \operatorname{Im} g_1\beta_0$，因为 γ_0 是单态射。以 B_1 为中心应用引理 2 (1)，这等价于 $b_2 \in \operatorname{Im} \beta_1 f_1 = \operatorname{Im} f_2\alpha_1$。再次应用该引理，这次以 A_2 为中心，这等价于 $e_3(z_3) \in \operatorname{Im} \alpha_2 e_2 = \operatorname{Im} e_3\kappa_2$。由于 e_3 是单态射，这成立当且仅当 $z_3 \in \operatorname{Im} \kappa_2$。

(4) 存在映射 $f\colon \operatorname{Ker} h_0 \to \operatorname{Ker} \kappa_3/\operatorname{Im}\kappa_2$：给定 $c_0 \in \operatorname{Ker} h_0$，根据 (1)，存在 $z_3 \in \operatorname{Ker}\kappa_3$，使得 $(z_3, c_0) \in u$。若还有 $z_3' \in \operatorname{Ker} \kappa_3$ 满足 $(z_3', c_0) \in u$，则 $(z_3 - z_3', 0) \in u$。由于 $0 \in \operatorname{Im} g_0$，根据 (3)，$z_3 - z_3' \in \operatorname{Im} \kappa_2$。因此，映射 f 有定义。

(5) 映射 f 诱导出一个同构 $f\colon \operatorname{Ker} h_0/\operatorname{Im} g_0 \cong \operatorname{Ker}\kappa_3/\operatorname{Im} \kappa_2$：根据 (2)，映射 f 是满射。若 $(z_3, c_0) \in u$，其中 $z_3 \in \operatorname{Ker}\kappa_3$ 且 $c_0 \in \operatorname{Im} g_0$，则根据 (3)，$z_3 \in \operatorname{Im}\kappa_2$。因此，$f$ 诱导出映射 f，它必为满射。若 $(z_3, c_0) \in u^-$，其中 $c_0 \in \operatorname{Ker} h_0$ 且 $z_3 \in \operatorname{Im} \kappa_2$，则根据 (2)，$c_0 \in \operatorname{Im} g_0$。因此，$f$ 是一个同构。

（6）我们重新审视证明：为了证明顶部核序列中的第三项（C_0）处的同调与左侧核序列中的第三项（K_3）处的同调同构，我们用到了上图沿一条反对角线有 3+4 个交换方块，行和列分别在 B_1、A_2 以及 C_1、B_2、A_3 处正合，并且 γ_0、δ_0 和 e_3、e_4 是单态射。一般而言，要证明对于 $n \in \mathbb{N}$，顶部核序列中的第 n 项处的同调与左侧核序列中的第 n 项处的同调同构，需要满足相应反对角线上的交换性和正合性条件，并反复使用引理 2。□

我们在证明的第（6）部分看到，某些条件足以证明一个部分结论：两个核复形在某个给定位置处具有同构同调。对于核复形序列中的第一项和第二项，我们特别得到：

推论 3. 给定一个具有正合行与列的交换图，

$$\begin{array}{ccccc}
A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & C_1 \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_1} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_1} \\
A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & C_2 \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha_2} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_2} & & \\
A_3 & \xrightarrow{f_3} & B_3 & &
\end{array}$$

那么这些序列

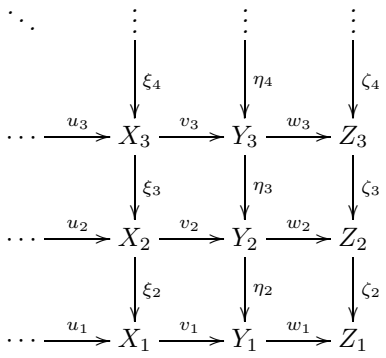
$$0 \to \operatorname{Ker}\alpha_1 \to \operatorname{Ker}\beta_1 \to \operatorname{Ker}\gamma_1,$$
$$0 \to \operatorname{Ker} f_1 \to \operatorname{Ker} f_2 \to \operatorname{Ker} f_3$$

在位置 1 和 2 具有同构同调。 □

2. The Cokernel Complex Lemma

核复形引理有一个对偶版本，即余核复形引理。该结果已在 [4] 中针对 3×3-区域进行了陈述和证明。我们将以更一般的形式陈述该结果，并说明如何在 [4] 中使用它来可视化有限表示函子的支撑。

命题 4（余核复形引理）。给定一个行与列均正合的交换图，



那么，对右列中的水平映射和底行中的垂直映射分别取余核所得到的两个复形，其每个分量上的同调均同构：

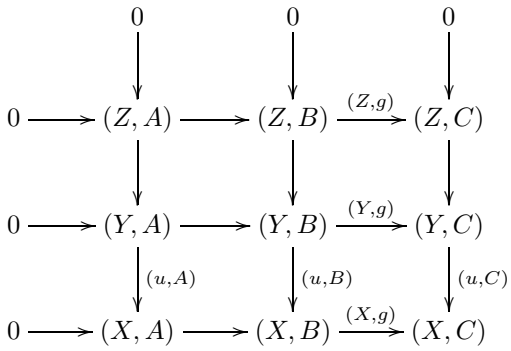
$$\cdots \to \operatorname{Cok} w_3 \to \operatorname{Cok} w_2 \to \operatorname{Cok} w_1 \to 0$$
$$\cdots \to \operatorname{Cok} \xi_2 \to \operatorname{Cok} \eta_2 \to \operatorname{Cok} \zeta_2 \to 0$$

证明用到引理 2，与命题 1 和 [4,命题 1.4] 的证明类似，故略去。□

余核复形引理中的情形出现在 [4]：此时给定一个短正合列和一个短右正合列，记为

$$\mathcal{A} : 0 \to A \to B \xrightarrow{g} C \to 0 \qquad \text{and} \qquad \mathcal{E} : X \xrightarrow{u} Y \to Z \to 0.$$

由两个序列中的模给出的协变与反变 Hom 函子构成如下交换图，其行与列均正合；其中我们用 (X, A) 表示 $\operatorname{Hom}(X, A)$。



根据命题 4，这两个复形，

$$0 \to \operatorname{Cok}(Z,g) \to \operatorname{Cok}(Y,g) \to \operatorname{Cok}(X,g) \to 0,$$
$$0 \to \operatorname{Cok}(u,A) \to \operatorname{Cok}(u,B) \to \operatorname{Cok}(u,C) \to 0$$

在每个位置都有同构同调。

在 [4] 中，我们关注这样的情形：$\mathcal{A}$ 是模范畴中有限维代数上的一个 Auslander-Reiten 序列，定义和基本结果见 [2] 。于是，Cok (X, g) 的维数决定了 C 作为 X 的直和项时的重数。另一方面，如果

$$0 \to (Z,-) \to (Y,-) \xrightarrow{(u,-)} (X,-) \to E \to 0$$

E 是有限表示协变函子的投射分解，那么对于对象 A， $E(A)$ 的维数与 Cok (u, A) 的维数相等。由两个余核复形的同调之间的相互作用，我们特别推得，函子 E 在 Auslander-Reiten 序列 $\mathcal{A}$ 上是可加的（即 dim $E(B) = \dim E(A) + \dim E(C)$），除非 C 是 $X \oplus Y \oplus Z$ 的直和项。在 [4] 中，我们可以将有限表示函子 E 在 Auslander-Reiten 箭图上的支撑视为一个吊床。

3. The Snake Lemma revisited

当然，自 [1,命题 2.10]提出以来，蛇引理已被证明过许多次。我们再给出一种证明，因为该结论可由命题 1（或其推论）和命题 4 立即推出。

命题 5（蛇引理）。给定一个行与列均正合的交换图，

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

存在一个同态 δ：核 $\gamma \to$余核 α，使得核与余核映射构成的序列正合。

$$\operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta \to \operatorname{Ker}\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{Cok}\alpha \to \operatorname{Cok}\beta \to \operatorname{Cok}\gamma$$

此外， f 是单态当且仅当映射 核 $\alpha \to$ 核 β 是单态；并且， g' 是满射当且仅当映射 余核 $\beta \to$余核 γ 是满射。

证明。由假设可知，下图

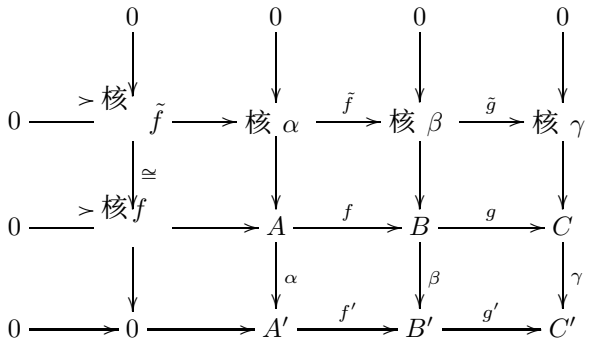
$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha'} & & \downarrow{\scriptstyle\beta'} & & \\ \text{余核 } \alpha & \xrightarrow{f''} & \text{余核 } \beta & & \end{array}$$

是交换图，且其行与列均正合。由推论 3 可得，核复形

$$(*)\qquad \begin{aligned} &0 \to \operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\tilde{f}} \operatorname{Ker}\beta \xrightarrow{\tilde{g}} \operatorname{Ker}\gamma, \\ &0 \to \operatorname{Ker} f \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \operatorname{Ker} f' \xrightarrow{\tilde{\alpha}'} \operatorname{Ker} f'' \end{aligned}$$

具有同构同调（在第一和第二个位置）。特别地，如果 f 是单态射，那么 $\operatorname{Ker} f = 0$ 与复形 $(*)$ 在 $\operatorname{Ker}\alpha$ 处正合。回顾~假设，即 f' 是单态射，我们一般可得 $\operatorname{Ker} f \cong$ 与 $\operatorname{Ker} f$。由于 f' 是单态射，我们还可得复形 $(*)$ 在 $\operatorname{Ker}\beta$ 处正合。

我们已经看到，下图



是可交换的，且具有正合行与列。应用命题 4，余核复形

$$(**)\qquad \begin{aligned} &0 \to \operatorname{Cok}\alpha \xrightarrow{f''} \operatorname{Cok}\beta \xrightarrow{g''} \operatorname{Cok}\gamma \to 0, \\ &0 \to \operatorname{Cok}\tilde{g} \to \operatorname{Cok} g \to \operatorname{Cok} g' \to 0 \end{aligned}$$

具有同构同调。从右侧开始，我们可以读出：当且仅当 g' 是满射时，$(**)$ 在 $\operatorname{Cok}\gamma$ 处正合。一般而言，由于根据假设 $\operatorname{Cok} g = 0$，存在一个同构 $\operatorname{Cok} g'' \cong \operatorname{Cok} g'$。同样，由于 $\operatorname{Cok} g = 0$，复形 $(**)$ 在 $\operatorname{Cok}\beta$ 处正合。最后，$\operatorname{Cok}\tilde{g}$ 处的同调（即 $\operatorname{Cok}\tilde{g}$）与 $\operatorname{Cok}\alpha$ 处的同调（即 $\operatorname{Ker} f''$）同构——这个同构给出了所需的连接同态 δ。□

利益冲突声明。作者声明不存在利益冲突。本文没有相关数据集。

References

[1] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison–Wesley（1969年）。[2] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, 《高等数学研究》 36，剑桥，1995 年。[3] C. M. Ringel, J. Schr¨oer, *Representation theory of algebras I: modules*, 讲义（2009年），283 页。[4] M. Schmidmeier, *Hammocks to visualize the support of finitely presented functors*, J. Algebra 616（2023年），68–96。

数学科学 佛罗里达大西洋大学 博卡拉顿,
佛罗里达州
33431markusschmidmeier@gmail.com