利用电磁感应透明对中性原子进行纳米尺度寻址与操控

U. Saglam, [1, *] T. G. Walker, [1, †] M. Saffman, [1, ‡] 和 D. D. Yavuz[1, §]物理系，大学大道 *1150* 号，威斯康星大学麦迪逊分校，麦迪逊，威斯康星州 *53706*，美国（日期：2023年1月11日）

我们提出将基于暗态的定位技术整合到中性原子量子计算架构中，并对两种具体方案进行数值研究。第一种方案通过散射来自特定量子比特的光子，实现态选择性投影测量，同时将对系综中其他原子的串扰降至极低。第二种方案在目标原子上执行单量子比特相位门，非相干自发辐射概率低至 0.01。我们对铷（Rb）原子进行的数值模拟表明，对于这两种方案，采用近红外光并使用实验上切实可行的参数，均可实现数十纳米级的空间分辨率。

arXiv:2301.03654v1 [quant-ph] 9 Jan 2023

I. 引言

过去二十年来，由于量子计算有望高效解决复杂的计算问题，人们对量子计算的兴趣不断增长 [1]。如今，量子计算的原理已通过多种物理量子比特得到验证，每种量子比特各有优缺点，例如囚禁离子 [2], 超导量子比特 [3, 4], 量子点 [5, 6], 氮空位中心 [7],以及单光子 [8]。本文将重点探讨中性原子量子计算面临的若干挑战。过去十年间，中性原子在构建可扩展量子计算架构方面取得了长足进展 [1, 9–16]。单个原子可以用微观偶极阱囚禁，并可进行单独测量和寻址。量子信息可以存储在电子基态能级的稳定超精细态中。单量子比特门可通过微波脉冲 [17–19] 或聚焦的双频拉曼光 [20, 21]施加。最后，将原子激发到主量子数较大的里德堡态（通常为 $n > 60$），并利用偶极-偶极相互作用 [22]，即可实现双量子比特门。

可扩展性要求门错误足够低，能够兼容纠错码。近期理论和实验方面的进展表明，中性原子有望达到足以实现纠错的保真度。对于单量子比特门，实验已展示了门保真度> 0.9999 [19]。对于双量子比特里德堡门，详细的理论研究表明，保真度 > 0.999 是可以实现的，同时考虑了 r 原子结构细节和原子反冲效应 [23–26]。虽然实验结果仍远未达到理论预测，但如今已有多个研究团队展示了由里德堡态介导的纠缠，其在长寿命超精细基态中的保真度远高于 90% [27–30]。特别是，研究人员已实现保真度超过 98%[30] 的双量子比特门和三量子比特托福利门[27]，还展示了多量子比特纠缠，并利用中性原子阵列实现了若干量子算法 [28, 29]。近期在激光器、光学控制和冷却方面的技术改进，有望减少里德堡激发中的缺陷，从而实现超精细基中的双量子比特门和纠缠，其保真度足以满足纠错要求。

尽管取得了长足进展，中性原子量子计算中仍有许多亟待克服的挑战 [10, 31, 32]。即使具有高保真度的门，实现无串扰量子比特测量（或量子比特重置 [33]）仍是中性原子量子比特面临的一项重大挑战，而这些操作对于纠错是必需的。超精细态选择性投影测量通常通过利用循环跃迁收集荧光光子来实现。然而，从特定原子散射出的光子可能被邻近的原子量子比特重新吸收，在现实的实验条件下造成高达 4% 的错误。这一挑战原则上可以通过将原子阵列中的所有其他原子全局搁置到不与荧光相互作用的状态来克服 [34, 35]。然而，这要求对被测原子附近的每个量子比特执行全局操作，不仅速度较慢，还会增加错误率。

中性原子阵列面临的另一项挑战是囚禁光所需的光功率较高。由于量子纠错的开销很大，预计未来的通用计算机中，每个受保护的逻辑量子比特可能需要 100–1000 个物理量子比特。这意味着，要实现超越经典计算能力、包含数百个逻辑量子比特的机器，可能需要 10^4 to 10^5 或更多物理量子比特。目前采用原子间距为 $d \sim 5\ \mu$m 的二维光学陷阱阵列的方法，要达到如此大的规模，需要 >100 瓦的光学囚禁功率。下文所述的方法可将间距缩小至 $d \sim 0.5\ \mu$m，从而将功率需求降低 100 倍，使得仅用几瓦囚禁光就能构建含有 $> 10^5$ 个量子比特的阵列。

为应对这些挑战，我们提出将基于暗态的局域化技术整合到中性原子量子计算架构中。如今，人们已经充分认识到，电磁感应透明（EIT）的暗态可实现远小于光波长的空间分辨率。正如下文所述，核心思路是利用暗态对耦合激光强度的空间敏感性，将

* 电子地址：usaglam@wisc.edu
† 电子地址：tgwalker@wisc.edu
‡ 电子地址：msaffman@wisc.edu§ 电子地址：yavuz@wisc.edu

拉曼能级之间的相干布居转移。这种方法最初在文献 [36–38] 中从理论上提出，并在文献 [39–43]中得到实验验证。文献 [44]提出了一种相关的二维方案。最近，有人提出，在不扰动量子信息的情况下对系综进行基于电磁感应透明的测量，是一种很有前景的纠错方法 [45]。本文将重点讨论一种被俘获在驻波晶格中的量子比特阵列，相邻量子比特之间的距离为 $d \sim \lambda_{\text{lattice}}/2 = 0.5\ \mu\text{m}$。由于间距很小，难以使用传统光学手段对各个量子比特进行寻址 [46]。随后，我们将讨论如何利用暗态局域化方法的变体来：（i）通过散射来自特定量子比特的光子，实现态选择性投影测量，同时尽可能减少对系综中其他原子的串扰；（ii）实现自发辐射率 较低且具有纳米级位置分辨率的单量子比特相位门。

本文结构安排如下。在模型部分，我们讨论暗态和基于电磁感应透明的局域化。在结果部分，我们将详细介绍两种方案，并展示数值模拟的结果。模拟中，我们采用符合实际的实验参数对密度矩阵方程进行数值求解。

II. 模型

A. 电磁感应透明与暗态

电磁感应透明（EIT）是一种利用原子不同耦合能级之间的破坏性量子干涉，使激光缀饰介质对探测光透明的技术 [47, 48]。吸收抵消是因为原子系统被驱动至暗态；暗态是两个较低拉曼能级的相干叠加，在激发辐射能级上没有任何分量。除了电磁感应透明，暗态也是相干布居俘获（CPT）和受激拉曼绝热通道（STIRAP）的核心 [49, 50]。制备暗态通常需要一对近共振场，它们都与原子Λ型系统耦合。该系统的哈密顿量可写为 $H = H_0 + H_{\text{int}}$，其中H_0是裸态原子的哈密顿量，H_{int} 描述原子与施加的激光之间的相互作用。旋转波近似下的相互作用哈密顿量为：

$$H_{\text{int}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega_P \\ 0 & -2(\Delta_1 - \Delta_2) & \Omega_C \\ \Omega_P & \Omega_C & -2\Delta_1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

注意图 1a，各量 Ω_P和 Ω_C 分别是探测激光和耦合激光的拉比频率。频率失谐定义为 $\Delta_1 = \omega_e - \omega_a - \omega_P$和 $\Delta_2 = \omega_e - \omega_b - \omega_C$。方程（1）中哈密顿量的本征矢量为

$$|a^+\rangle = \sin\theta \sin\phi\, |a\rangle + \cos\phi\, |e\rangle + \cos\theta \sin\phi\, |b\rangle\,, \tag{2}$$

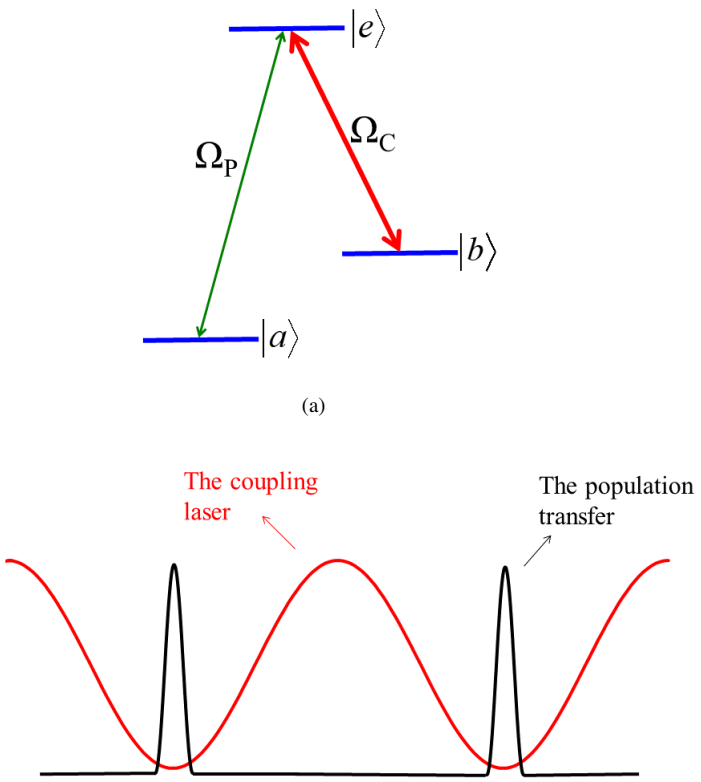

图 1. **(a)** 用于电磁感应透明的三能级 Λ 构型。探测激光 Ω_P将能级 $|a\rangle$ 与 $|e\rangle$ 耦合，耦合激光则将能级 $|b\rangle$ 与能级 $|e\rangle$耦合。**(b)** 基于暗态的布居转移局域化示意图。当原子系统被驱动至暗态时，从基态能级 $|a\rangle$ 到$|b\rangle$ 的布居转移（黑色曲线）可以局域在极小的空间尺度上。作为对比，图中还绘出了随空间变化的耦合激光强度（红色曲线）。

$$|a^0\rangle = \cos\theta\, |a\rangle - \sin\theta\, |b\rangle\,, \tag{3}$$

$$|a^-\rangle = \sin\theta \cos\phi\, |a\rangle - \sin\phi\, |e\rangle + \cos\theta \cos\phi\, |b\rangle\,. \tag{4}$$

其中各量 θ 和 ϕ 定义如下：

$$\tan\theta = \frac{\Omega_P}{\Omega_C}, \tag{5}$$

$$\tan 2\phi = \frac{\sqrt{\Omega_P^2 + \Omega_C^2}}{\Delta_1}. \tag{6}$$

态 $|a^0\rangle$ 在 $|e\rangle$ 中不含任何分量，是暗态。该态与基态平滑连接，可以通过反直觉脉冲序列绝热制备，即在探测激光 [47, 51]之前开启耦合激光束。在基于暗态的定位

方法中，关键思想是利用暗态对耦合激光束强度的空间敏感性。由公式（3）可知，态 $|b\rangle$的$|\langle b|a^0\rangle|^2 = |\Omega_P|^2/(|\Omega_P|^2+|\Omega_C|^2)$布居与耦合激光强度之间具有高度非线性的关系。具体而言，在耦合激光经过强度极小值的区域，态 $|b\rangle$ 可以被非常紧密地局域化。正如参考文献中所讨论的，[38, 43], 实现这一方案的一种简便方法是使用具有驻波空间分布的耦合激光束。这在图 1b中进行了示意性展示。可以证明，对于空间均匀的探测激光，转移的半高全宽为 $\mathrm{FWHM}_{transfer} \approx \lambda(\Omega_P/\Omega_{C,\ max})$，其中 $\Omega_{C,\ max}$ 是驻波峰值处耦合激光的拉比频率。

与其他方法相比，使用暗态实现布居转移的局域化具有显著优势[37, 52–67]。原子能够实现相干转移，同时保持其与其他量子比特之间的相位关系不变。如果演化过程足够绝热，就可以在辐射激发态中保持很低的布居来制备暗态，从而减少自发辐射引起的加热和退相干。由于激发是相干的，基于暗态的局域化可以通过短而强的激光脉冲实现。最后，得益于绝热制备的稳健性，局域化对实验参数的波动并不敏感，例如探测激光和耦合激光的频率与强度抖动。我们将在下文讨论的态选择性读出和单量子比特相位门协议充分利用了这些优势

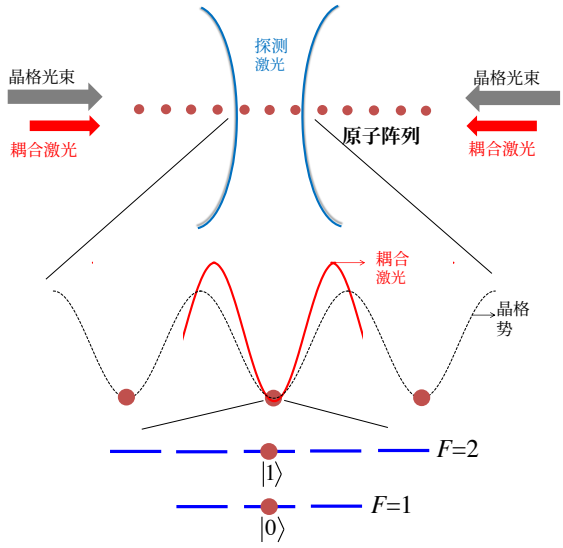

图 2. 纳米尺度测量与寻址方案。原子被俘获在一维光学晶格中，该晶格由一对反向传播的光束形成（晶格势以黑色虚线表示）。电磁感应透明（EIT）耦合激光的强度极小值（红色实线）与目标量子比特对齐。耦合激光驻波同样由一对反向传播的光束形成。探测激光束聚焦得足够紧密，因此仅与原子阵列中的三个量子比特重叠（即光斑尺寸为 $\sim \lambda_{lattice} = 1.17\ \mu$m）。在模拟中，我们聚焦于对中央量子比特进行纳米尺度寻址和操控，同时与相邻的两个量子比特几乎没有串扰。逻辑量子比特态是基态超精细流形中的钟态：$|0\rangle \equiv |F = 1, m_F = 0\rangle$ 和 $|1\rangle \equiv |F = 2\ m_F = 0\rangle$，

III. 结果

图2展示了我们将在本文其余部分重点研究的具体系统。我们考虑一种基于中性原子的量子计算架构，使用 ^{87}Rb原子，并将钟态作为逻辑量子比特态：$|0\rangle \equiv |F = 1, m_F = 0\rangle$ 和 $|1\rangle \equiv |F = 2, m_F = 0\rangle$。为简明起见，我们聚焦于一维几何结构，尽管我们讨论的协议可以直接扩展到二维。原子被俘获在晶格中，所使用的是远失谐偶极阱。借助波长接近 $\lambda_{\mathrm{D2}} = 780$ 纳米处D2线的空间变化耦合激光束，可以实现纳米尺度的态选择性测量和单量子比特门。耦合激光驻波

通过使用反向传播光束对获得驻波。耦合激光束的强度极小值经干涉对准到待寻址的量子比特。我们选择偶极阱激光的波长，使得耦合激光在附近的量子比特处达到最大值：$\lambda_{\mathrm{lattice}} = \frac{3}{2}\lambda_{\mathrm{D2}} = 1.17\ \mu$m。由此得到的量子比特间距为 $\lambda_{\mathrm{lattice}}/2 = 0.59\ \mu$m。为简化讨论，我们假设探测激光束聚焦得足够紧，只与原子阵列中的三个量子比特重叠（即光斑尺寸为 $\sim \lambda_{lattice} = 1.17\ \mu$m）。接下来，我们将重点讨论对中央量子比特进行纳米尺度寻址和操控，同时使其与另外两个邻近量子比特之间的串扰可以忽略不计。

A. 态选择性单量子比特读出

如上所述，状态选择性单量子比特读出仍是中性原子量子计算面临的重大挑战之一。即使在原子间距为 ~10 微米、并通过紧聚焦激光束实现单独寻址的原子阵列中，这一目标也难以实现。传统上，状态选择性投影测量通过利用循环跃迁收集荧光光子来完成。然而，原子阵列中特定原子散射的光子可能被重新吸收，从而导致相距 ~ 10 微米的相邻量子比特出现高达 4% 的错误率。通过将原子阵列中其余量子比特全局转移至不与荧光相互作用的状态，可以克服这一挑战 [10,31]。然而，这需要对系综中的每个量子比特执行全局操作，速度较慢且会增加错误率。本节将讨论一种基于暗态局域化的测量方案，即使相邻量子比特间距为 0.59 μm，也能在很大程度上克服这些挑战。

图 3 展示了我们设想的测量方案所涉及的能级图。目标是仅对寻址量子比特的逻辑态 $|0\rangle$ 进行投影测量，同时尽可能减少其他量子比特散射的光子数。沿

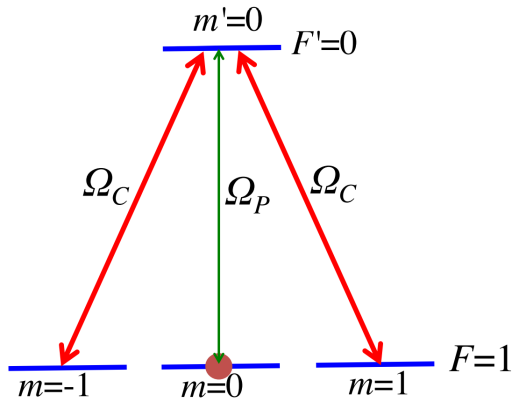

图3. 用于纳米尺度单量子比特读出的 ^{87}Rb能级示意图，由两个平行的电磁感应透明通道组成。拉比频率为Ω_C 的耦合激光耦合态 $|F=1,m_F=\pm1\rangle$和 $|F'=0,m_{F'}=0\rangle$；拉比频率为Ω_P 的探测激光耦合态 $|F=1,m_F=0\rangle$ 和 $|F'=0,m_{F'}=0\rangle$。

量子化轴（π 偏振）偏振的探测激光束耦合 $|F=1,m_F=0\rangle$至 $|F'=0,m_{F'}=0\rangle$ 态，即 D2线的能级。构成耦合激光驻波的两束光，其偏振方向均与量子化轴正交，因此包含等量的 σ^+ 和 σ^- 光。如图 3所示，结果是形成两个 Λ 方案，构成两条并行的电磁感应透明通道。

测量协议如下。在电磁感应透明脉冲期间，构成耦合激光驻波的光束强度经过平衡，使强度在极小值处为零。在耦合激光的节点处（即待测量其态的量子比特所在位置），原子会散射探测光子，并被泵浦到 $|F=1,m_F=1\rangle$ 或 $|F=1,m_F=-1\rangle$ 态之一（因为未建立电磁感应透明）。原子阵列中的其他原子则经历电磁感应透明并演化到暗态。如图4所示，探测光束开启前先打开耦合激光，并在探测光束关闭后再关闭耦合激光。因此，原子阵列中的其他量子比特从$|0\rangle$ 态绝热演化为相干叠加态，然后再演化回$|0\rangle$。这一过程保持激发态 $|F'=0,m_{F'}=0\rangle$ 的布居可忽略，因此自发辐射很低。在电磁感应透明（探测与耦合）脉冲序列结束后，节点处的原子留在$|F=1,m_F=1\rangle$ 或 $|F=1,m_F=-1\rangle$ 态之一。为将该原子泵回去，我们打开耦合激光束，但此时略微调整光束对的强度，使强度极小值处存在少量光。注意，第二个仅含耦合激光的脉冲不会与原子阵列中的其他原子相互作用（因为其他所有原子都处于 $|0\rangle$态）。该脉冲序列结束后，节点处的原子会散射 ~2光子；若电磁感应透明有效，阵列中的其他原子则几乎不散射光子。为确保探测器收到光子，可多次施加上述脉冲序列，使寻址量子比特散射足够多的光子。

这种方法的一个关键优势在于，由于其他原子处存在电磁感应透明，散射光子在原子阵列中被再吸收的概率可以忽略不计。如果其他原子所在位置的耦合激光强度远高于探测激光强度时，暗态的大部分仍处于状态 $|0\rangle$。因此，只有沿探测跃迁（π 偏振）散射的光子才有显著的再吸收概率。但只有在其他原子处的耦合激光强度较大时才会散射出这些光子，这意味着由于电磁感应透明，原子对这些光子是透明的。

在这种方法中，暗态的非绝热修正限制了串扰及相邻量子比特上的误差。只要确保邻近量子比特处的 $(\delta\omega/\Omega_C)^2$ （其中 $\delta\omega$ 是探测脉冲的带宽）足够小，就能将其保持在相当低的水平。然而， $\delta\omega$ 不能任意降低，因为探测脉冲的带宽基本上决定了测量时间。

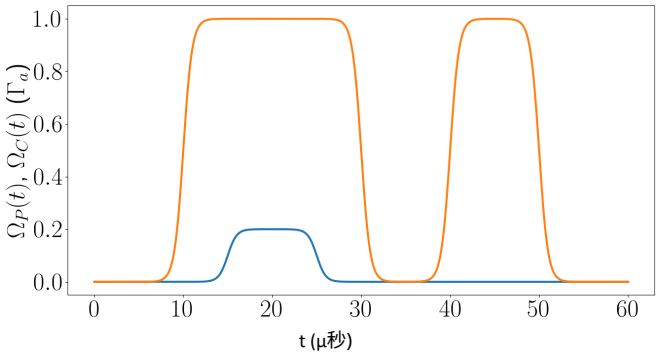

图 4. 耦合激光 Ω_C（橙色实线）和探测激光 Ω_P（蓝色实线）的拉比频率随时间的变化。激光器采用反直觉脉冲序列以绝热方式开启：即先开启耦合激光，再开启探测激光。第二个仅含耦合激光的脉冲用于通过光抽运使原子回到逻辑 $|0\rangle$ 态。

图5 展示了使用相当合理的参数，对图3所示方案的 4×4 密度矩阵进行数值求解所得的模拟结果。密度矩阵时间演化方程及其推导见附录 A。在这些模拟中，我们采用持续时间为 6 μs的探测脉冲，其探测拉比频率为 $\Omega_P=0.2\Gamma_a$ （量 $\Gamma_a=2\pi\times6.06$ MHz为D2线衰减率）。在伪彩色二维图中，驻波峰值处的耦合激光拉比频率从$\Omega_{C,\ max}=\Gamma_a$ 变化到$\Omega_{C,\ max}=18\Gamma_a$。我们取综合光子收集效率为3%（初始透镜的数值孔径为NA=0.5，从第一块透镜到光子计数器的探测效率为40%）。图5展示了散射光子总数（对数刻度）随位置的变化。位于节点处的原子会散射33个光子（产生的平均探测光子数为1），且这种散射具有极强的空间局域性。三个插图分别展示了在$\Omega_{C,\ max}=\Gamma_a$、$\Omega_{C,\ max}=10\Gamma_a$和$\Omega_{C,\ max}=18\Gamma_a$下，散射光子数随位置的变化。对于这三种情况，布居转移被

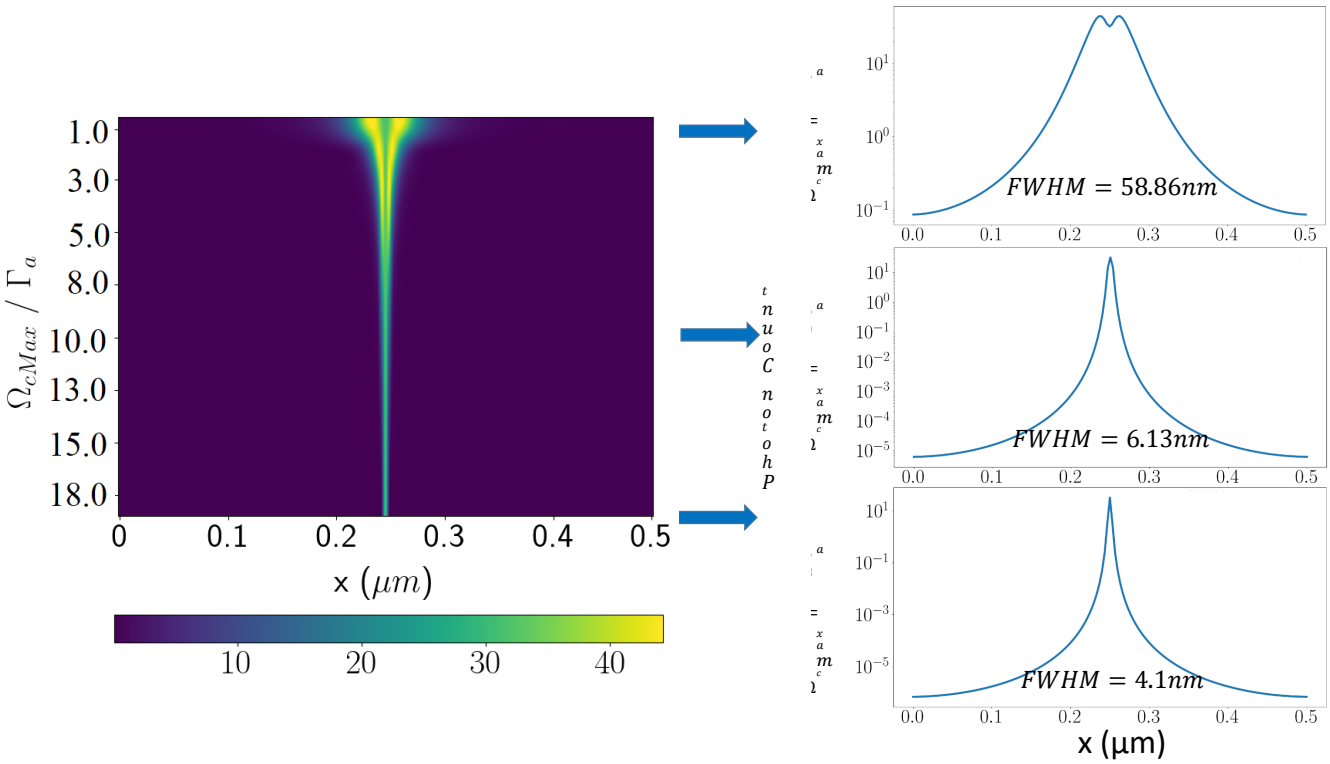

图 5. 局域化对最大耦合激光频率 $\Omega_{C,\ \max}$ 的依赖关系，以及二维图在 $\Omega_{C,\ \max} = 1\Gamma_a$、$\Omega_{C,\ \max} = 10\Gamma_a$和 $\Omega_{C,\ \max} = 18\Gamma_a$处的相关截面。相应的半高全宽分别为 58.5 纳米、6.1 纳米和 4.1 纳米。

局域在半高全宽分别为58.5纳米、6.1纳米和4.1纳米的空间区域内。通过在驻波峰值处采用更高的耦合激光拉比频率，可以实现对光子散射更紧密的局域化。

我们注意到，散射 33 个光子需要 $\sim 33/2 \sim 16$个脉冲序列。这决定了图 5 数值模拟的测量时间为 $\sim 16 \times 6 \sim 100\ \mu$秒。使用更短的脉冲可以缩短测量时间，但会增加带宽 $\delta\omega$，从而在探测和耦合激光拉比频率固定时，导致暗态的非绝热修正增大（因此串扰也更高）。可以通过提高探测和耦合激光的拉比频率，同时保持两者的比值不变来解决这一问题（以实现相近程度的空间局域化）。

晶格势的阱深为 1–10 毫开尔文，且原子被冷却至阱的基态（晶格势的波长固定为 $\lambda_{lattice} = 1.17\ \mu$m，因此量子比特间距固定为 $\lambda_{lattice}/2$=0.59 μm）。

图6展示了阱深为 5 毫开尔文这一特定情况下，我们对该效应进行的数值计算。在这里，我们假设原子处于囚禁势的基态，计算原子位置的初始概率分布展宽，并将图 5 中得到的结果与这一初始概率分布进行卷积。图6的结果对应于 $\Omega_{C,\ max} = 18\Gamma_a$ 的情况，即图 5 数值模拟中第三个插图所示的条件。散射光子的半高全宽展宽增至 ~23.8 纳米（原为 4.1 纳米）。这仍远低于寻址探测光和耦合激光的衍射极限，其波长为 $\lambda_{D2} = 780$纳米。

B. 原子位置初始展宽的影响

图 5 的数值模拟假设初始原子位置没有任何分布，即理想情况（也就是说，假设原子是位于固定位置的点粒子）。在真实实验中，由于光学阱的阱深有限且原子温度不为零，原子位置会有一定的初始分布。这种初始原子位置分布会使图 5 所示结果的范围变宽。我们计算得出的展宽约为几十纳米，其中

C. 光子散射对附近量子比特的影响

在图 5 的模拟中，我们仅数值计算了探测激光和耦合激光所对应的密度矩阵方程。结果表明，在这些模拟的假设条件下，寻址量子比特可以散射大量光子，同时将邻近量子比特的散射量保持在极低水平。我们还从定性角度论证了，由于电磁感应透明的存在，目标原子散射的光子不会被附近原子重新吸收。在本节中，我们

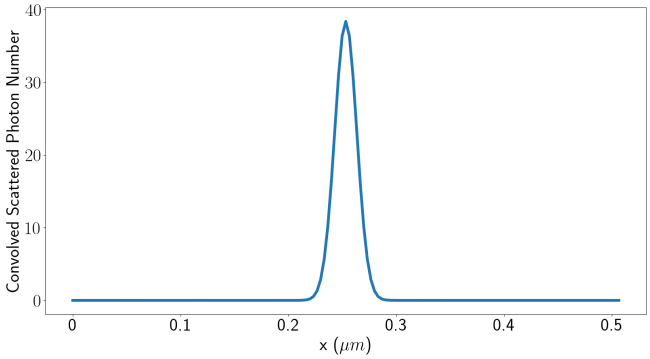

图6. 当我们假设原子处于阱深为 5 毫开尔文的囚禁势基态时，$\Omega_{C,max} = 18\Gamma_a$ 对应的光子计数图。我们将图 5 第三个插图的数值计算结果与波函数有限展宽导致的原子位置概率分布进行卷积，得到这一结果。散射光子数局域化分布的半高全宽增至 23.8 纳米。

将通过明确纳入寻址量子比特的辐射场对邻近原子的影响，对这一论证进行定量分析。为此，我们首先计算目标原子散射的光子在邻近量子比特位置产生的电场。考虑一个具有偶极矩 $\vec{p}$ 的辐射偶极子（目标量子比特）。在球坐标系中，并将寻址原子置于 $r = 0$ 处，该辐射原子产生的矢量电场为：

$$\vec{E}_{dipole} = \frac{k^3}{4\pi\epsilon_0}\{\frac{1}{kr}(\hat{r}\times\vec{p})\times\hat{r} + \left(\frac{1}{k^3r^3} - i\frac{1}{k^2r^2}\right)[3\hat{r}(\hat{r}\cdot\vec{p}) - \vec{p}]\} \quad . \quad (7)$$

这里，$\hat{r}$ 是连接观测点与辐射原子的单位矢量，$k = 2\pi/\lambda$ 是光学k矢量。目标原子辐射时，取决于激发态原子衰减至哪个特定跃迁，偶极矢量 $\vec{p}$的方向可能不同。发射到 $|F' = 0, m_{F'} = 0\rangle \rightarrow |F = 1, m_F = 0\rangle$ 跃迁中的光子将为线偏振，而发射到$|F' = 0, m_{F'} = 0\rangle \rightarrow |F = 1, m_F = \pm 1\rangle$ 跃迁中的光子则为圆偏振。这些具有不同偏振态的散射光子会对邻近量子比特位置处的探测激光和耦合激光频率引入扰动。我们将辐射电场在邻近量子比特位置处的值与相应跃迁的矩阵元相乘，计算这些时变扰动，并将其记为 $\Omega_{P,dipole}(t)$ 和 $\Omega_{C,dipole}(t)$。

我们通过在相距 $r = 0.59\ \mu$m 的邻近量子比特的密度矩阵方程中加入随时间变化的偶极辐射，模拟了这一效应。在此距离处，对拉比频率的扰动峰值分别为 $\Omega_{P,dipole} = 2\pi \times 159$ kHz 和 $\Omega_{C,dipole} = 2\pi \times 159$ kHz。将这些对探测光和耦合激光束拉比频率的偶极扰动加入后，我们便计算该另一量子比特处光子散射率的变化，并将其与

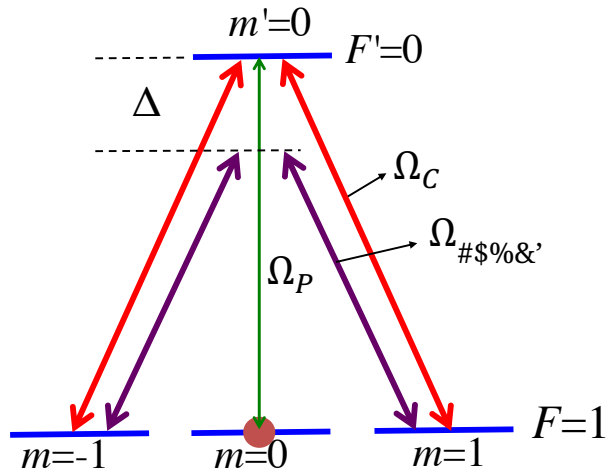

图7。四能级结构 $F' = 0$，$m_F = 0$和 $F = 1$，$m_F = 0$ ± 1，以及相关的耦合激光和探测激光，Ω_C 和 Ω_P。此外，还存在 Δ 的失谐，以及带有拉比频率 Ω_{stark}的新斯塔克位移激光器。

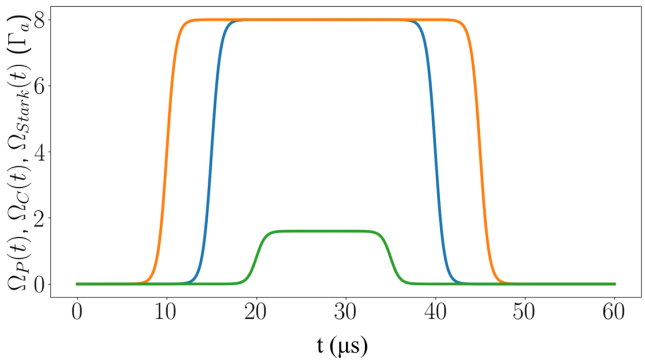

图8。具有最小空间依赖性的相位门方案的拉比频率曲线，$\Omega_{C,max} = 8\Gamma_a$。所有频率均以绝热方式开启，开启顺序为 Ω_C（实线，橙色曲线）、Ω_P（实线，蓝色曲线）和 Ω_{stark}（实线，绿色曲线）

图 5 的模拟结果进行比较。我们发现，在相邻邻近量子比特所在位置，图 5 中报告的结果变化不超过 10^{-6}。这一数值极低，原因在于电磁感应透明对探测光和耦合激光强度的具体取值具有很强的鲁棒性。

D. 单量子比特相位门

本节讨论如何利用真值表 $|1\rangle \rightarrow |1\rangle$、$|0\rangle \rightarrow \exp\{(i\varphi)\}|0\rangle$ 实现单量子比特相位门。相位门本身虽不具备普适性，但与全局旋转结合后，可对目标量子比特实施任意单量子比特旋转；全局旋转可通过沿布洛赫球赤道轴的旋转实现，而这种旋转可利用微波轻松实现——

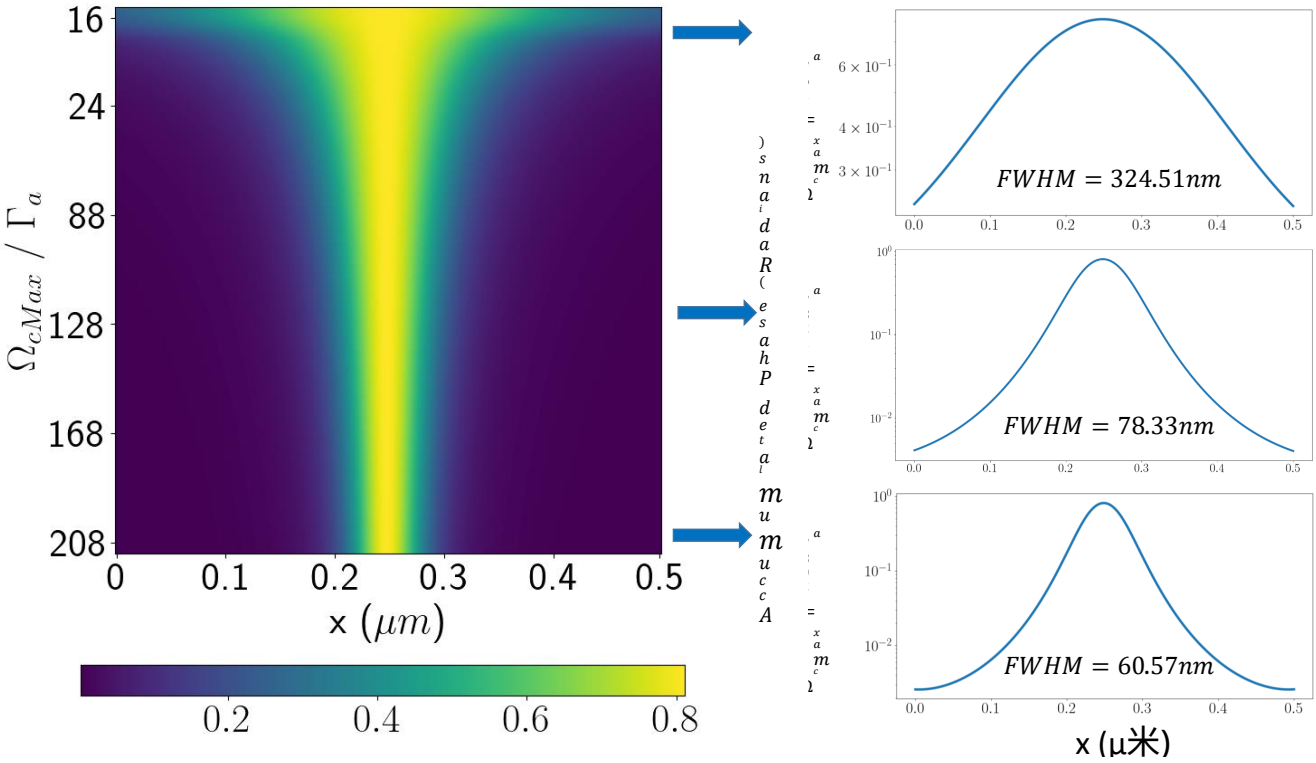

图9。相对于最大耦合激光频率 $\Omega_{C,\max}$ 的相位局域化，以及二维图中 $\Omega_{C,\max} = 16\Gamma_a$、$\Omega_{C,\max} = 128\Gamma_a$、$\Omega_{C,\max} = 208\Gamma_a$对应的截面。半高全宽分别为 324.51 纳米、78.33 纳米和 60.57 纳米。

结合全局 $\pi/2$ 以及 $-\pi/2$ 沿布洛赫球赤道轴的旋转，这种旋转可利用微波轻松实现[18, 28]。

我们的方法与文献 [38]中讨论的方法类似。相关能级图以及所涉及激光束的脉冲序列如图 7 和图 8 所示。为实现单量子比特相位门，我们关注利用电磁感应透明操控耦合激光空间分布节点附近的原子相干性。为此，与上文讨论的局域化方案类似，我们需要确保沿耦合激光驻波的所有位置都发生绝热演化。因此，我们使构成耦合激光的光束对强度不平衡，从而产生非零的强度极小值。如果耦合激光的峰值强度远高于均匀探测光强度，那么向态 $|F = 1,\ m_F = 1\rangle$ 和 $|F = 1,\ m_F = -1\rangle$的转移就会局域化。只有在耦合激光空间分布的强度极小值附近，电磁感应透明过程中才会有大量布居从逻辑态 $|0\rangle$ 转移到这些态。随后，我们绝热地开启一束远失谐激光束，使 $|F = 1,\ m_F = 1\rangle$ 和$|F = 1,\ m_F = -1\rangle$ 态发生大小为 $\Omega_{stark}^2/(2\Delta)$ 的斯塔克位移。斯塔克位移会产生 $\Omega_{stark}^2/(2\Delta)T$ 的相位积累（量 T 为斯塔克位移激光脉冲的持续时间）。但是，只有在向 $|F = 1,\ m_F = 1\rangle$ 和 $|F = 1,\ m_F = -1\rangle$态发生显著转移的强度极小值附近，波函数才会获得这一相位。

激光脉冲的拉比频率随时间的变化绘于图 8中。为确保绝热制备，先开启耦合激光束，再开启探测激光束。只有在电磁感应透明建立且系统演化至暗态之后（即探测激光束和耦合激光束开启之后），才会施加斯塔克位移激光器。

图9 展示了单量子比特相位门方案的密度矩阵数值模拟结果。这里，将耦合激光拉比频率的最大值逐渐调节至 $\Omega_{C,\max} = 208\Gamma_a$，同时保持强度极小值处的耦合激光拉比频率 $\Omega_{C,\min} = 8\Gamma_a$不变。我们将均匀探测激光的拉比频率设为 $\Omega_P = 8\Gamma_a$。调整斯塔克频移激光束的参数，以获得 $\pi/4$ 弧度的相移。具体而言，我们将斯塔克位移激光器的拉比频率设为 $\Omega_{stark} = 1.6\Gamma_a$，将其失谐设为 $\Delta = 200\Gamma_a$，并将其持续时间设为 $T = 15\mu s$。如图 7 所示，探测激光脉冲和耦合激光脉冲的持续时间分别为 $25\mu s$和 $35\mu s$。

图9 中的二维图是所施加相位的伪彩色图，其中耦合激光在强度最大值处的拉比频率 $\Omega_{C,\max}$ 不断变化。三个插图分别显示了 $\Omega_{C,max}$ =$16\Gamma_a$、$\Omega_{C,max} = 128\Gamma_a$ 和 $\Omega_{C,max} = 208\Gamma_a$ 三种情况下，散射光子数随位置的变化。对于这三种情况，布居转移分别局域于半高全宽为 324.5 纳米、78.3 纳米和 60.6 纳米的空间区域内。

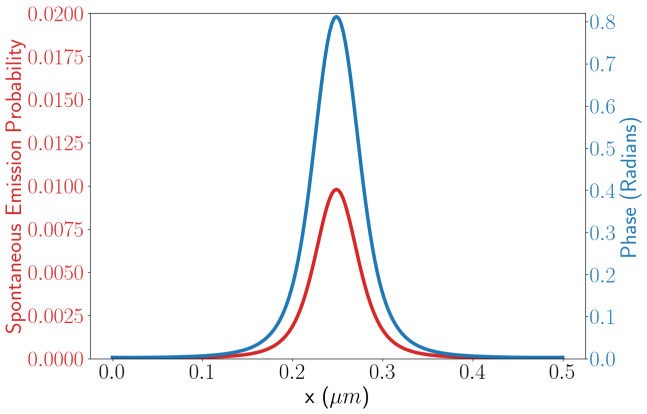

图10. 在所施加相位门持续期间，总非相干自发辐射概率（红色实线）以及累积相位（以弧度计，蓝色实线）随位置的变化。在目标原子所在位置，相位积累为 0.82 弧度，同时自发辐射概率保持在 ≈ 0.01。通过增大斯塔克位移激光器相对于激发能级的失谐量 Δ，可以降低自发辐射率（代价是增大其拉比频率，以使所施加的相位 $\Omega_{stark}^2/(2\Delta)T$ 保持不变）

在此方案中，单量子比特相位门的保真度受到激发辐射能级 $|F'=0, m_{F'}=0\rangle$ 的自发辐射（因而也受到退相干）的限制。该能级的布居源于：(1) 暗态的非绝热修正；(2) 斯塔克位移激光导致的远失谐激发。如上所述，通过使探测激光脉冲和耦合激光脉冲的带宽与其拉比频率之比保持较小，可以降低暗态的非绝热修正。通过增大斯塔克位移激光束的失谐量 Δ，可以减小斯塔克位移激光对辐射能级的激发。

对于图 9 的数值模拟，由暗态的非绝热修正导致的自发辐射率可以忽略不计（仅为 0.1%）。这是因为探测激光和耦合激光的拉比频率很高。自发辐射率实际上受限于斯塔克位移激光导致的原子跃迁至辐射能级（随后发生非相干自发辐射）。在图 10 中，我们绘出了施加相位门的整个时间段内的总自发辐射概率随位置的变化，所用条件与图9 中第三个插图相同（即强度最大值处耦合激光的拉比频率为 $\Omega_{C,\ max} = 208\Gamma_a$）。此处，我们对每个空间点计算整个自发辐射概率，即 $\int_0^T \rho_{44}\Gamma_a dt$（积分涵盖模拟的整个时间段）。此外，我们还绘出了施加相位（线性刻度）随位置的变化。在耦合激光的强度最小值处（即寻址量子比特所在位置），施加的相位约为 $\pi/4$，自发辐射概率为 $approx 0.01$。通过增大斯塔克位移激光相对于激发能级的失谐量 Δ，可以降低自发辐射率（代价是需要增大其拉比频率，以使施加的相位 $\Omega_{stark}^2/(2\Delta)T$ 保持不变）。

IV. 结论

在过去十年中，中性原子在构建可扩展量子计算架构方面取得了长足进展。尽管进展显著，中性原子量子计算仍有诸多亟待克服的挑战。即使门保真度很高，实现无串扰量子比特测量仍是中性原子量子比特面临的一项重大挑战，而这类测量是实现纠错所必需的。中性原子阵列面临的另一项挑战是囚禁光所需的高光功率。为应对这些挑战，我们提出将基于暗态的定位技术集成到中性原子量子计算架构中，并提出了两种方案：一种用于态投影测量，另一种用于单量子比特相位门。对 ^{87}Rb 原子进行的密度矩阵数值模拟表明，这两种方法均可实现纳米尺度范围内的空间分辨率。

V. 致谢

我们感谢 Diptaranjan Das 提供的许多有益讨论。本研究获得了国家科学基金会（NSF）为量子生命科学研究所中心的混合量子架构与网络项目提供的第 2016136 号资助，以及威斯康星大学麦迪逊分校的 Vilas Associates奖资助。本研究报告的模拟使用威斯康星大学麦迪逊分校高通量计算中心（CHTC）的计算机集群完成。

附录A 密度矩阵方程

对于上文讨论的四能级电磁感应透明方案，我们通过计算 4×4 密度矩阵 ρ的时间演化，对系统进行数值模拟。无弛豫情况下，密度矩阵 ρ的冯·诺依曼方程为 [68],

$$\dot{\rho}=-\frac{i}{\hbar}\left[\mathcal{H},\rho\right]. \tag{8}$$

为了将衰减和退相干过程纳入考虑，我们将具有以下矩阵元的弛豫矩阵 Γ 加入冯·诺依曼方程中:

$$\langle n|\,\Gamma\,|m\rangle=\gamma_n\delta_{mn}. \tag{9}$$

加入上述弛豫矩阵后的总运动方程为:

$$\dot{\rho}=-\frac{i}{\hbar}\left[\mathcal{H},\rho\right]-\frac{1}{2}\{\Gamma,\rho\}. \tag{10}$$

为了简化下文的记号，对于图 3 所示的四能级方案，我们定义态$|F=1、\ m_F=-1\mathbf{i}\rangle\rightarrow\ |a\mathbf{i}$、 $|F=1、\ m_F=0\mathbf{i}\rangle\rightarrow\ |b\mathbf{i}$、$|F=1、\ m_F=-1\mathbf{i}\rangle\rightarrow|c\mathbf{i}$ 以及 $|F'=0、\ m'_F=0\ \mathbf{i}\rangle\rightarrow|e\mathbf{i}$。这些态对应的相关能量分别定义为 $\hbar\omega_a$、 $\hbar\omega_b$、$\hbar\omega_c$ 和 $\hbar\omega_e$。态 $|a\mathbf{i}$ 和 $|c\mathbf{i}$ 通过拉比频率为 Ω_C 的耦合激光耦合到激发态 $|e\mathbf{i}$，而态 $|b\mathbf{i}$ 通过拉比频率为 Ω_P 的探测激光耦合到激发态 $|e\mathbf{i}$。四个原子能级的无扰（零场）哈密顿量为:

$$H_0=\begin{bmatrix}\hbar\omega_a&0&0&0\\0&\hbar\omega_b&0&0\\0&0&\hbar\omega_c&0\\0&0&0&\hbar\omega_e\end{bmatrix}. \tag{11}$$

描述四个能级与探测激光和耦合激光（频率为 Ω_C 和 Ω_P）之间相互作用的偶极相互作用哈密顿量为:

$$\vec{\mu}\cdot\vec{E}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&\Omega_Ce^{-i\omega_Ct}\\0&0&0&\Omega_Pe^{-i\omega_Pt}\\0&0&0&\Omega_Ce^{-i\omega_Ct}\\\Omega_Ce^{i\omega_Ct}&\Omega_Pe^{i\omega_Pt}&\Omega_Ce^{i\omega_Ct}&0\end{bmatrix} \tag{12}$$

注意， ω_P 和 ω_C 是拉比激光的相位差，而 ω_a、 ω_b、ω_c 和 ω_e 是跃迁频率。将偶极相互作用哈密顿量与未受扰动（零场）哈密顿量结合，可得到总哈密顿量:

$$H=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\hbar\omega_a&0&0&-\Omega_Ce^{-i\omega_Ct}\\0&\hbar\omega_b&0&-\Omega_Pe^{-i\omega_Pt}\\0&0&\hbar\omega_c&-\Omega_Ce^{-i\omega_Ct}\\-\Omega_Ce^{i\omega_Ct}&-\Omega_Pe^{i\omega_Pt}&-\Omega_Ce^{i\omega_Ct}&\hbar\omega_e\end{bmatrix}. \tag{13}$$

接下来，我们将式 (12) 中的哈密顿量代入式 (9) 中的冯·诺依曼方程，并写出密度矩阵 $\rho(t)$ 各元素的微分方程。下文中，ρ 的下标与上一段所述的态标记一致。例如，态 $|a\rangle$ 对应的对角密度矩阵元为 ρ_{aa}。密度矩阵元的完整方程组为:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{aa}&=\frac{i\Omega_C}{2}e^{i\omega_Ct}\rho^*_{ae}-\frac{i\Omega_C}{2}e^{-i\omega_Ct}\rho_{ae}-\Gamma_1\rho_{aa}\\
&\quad+\frac{\Gamma_e\rho_{ee}}{3}\\
\dot{\rho}_{ab}&=\frac{i\Omega_C}{2}e^{i\omega_Ct}\rho^*_{be}-\frac{i\Omega_P}{2}e^{-i\omega_Pt}\rho_{ae}\\
&\quad-\frac{\rho_{ab}}{2}(\Gamma_1+\Gamma_2)+i\rho_{ab}(\omega_b-\omega_a)\\
\dot{\rho}_{ac}&=\frac{i\Omega_C}{2}e^{i\omega_Ct}\rho^*_{ce}-\frac{i\Omega_C}{2}e^{-i\omega_Ct}\rho_{ae}\\
&\quad-\frac{\rho_{ac}}{2}(\Gamma_a+\Gamma_c)+i\rho_{ac}(\omega_c-\omega_a)\\
\dot{\rho}_{ae}&=\frac{i\Omega_C}{2}e^{i\omega_Ct}\rho^*_{ee}-\frac{i\Omega_C}{2}e^{-i\omega_Ct}\rho_{aa}-\frac{i\Omega_P}{2}e^{-i\omega_Pt}\rho_{ab}\\
&\quad-\frac{i\Omega_C}{2}e^{-i\omega_Ct}\rho_{ac}-\frac{\rho_{ae}}{2}(\Gamma_a+\Gamma_e)\\
&\quad+i\rho_{ae}(\omega_e-\omega_a)\\
\dot{\rho}_{bb}&=\frac{i\Omega_P}{2}e^{i\omega_Pt}\rho^*_{be}-\frac{i\Omega_P}{2}e^{-i\omega_Pt}\rho_{be}-\Gamma_2\rho_{bb}\\
&\quad+\frac{\Gamma_e\rho_{ee}}{3}\\
\dot{\rho}_{bc}&=\frac{i\Omega_P}{2}e^{i\omega_Pt}\rho^*_{ce}-\frac{i\Omega_C}{2}e^{-i\omega_Ct}\rho_{be}\\
&\quad-\frac{\rho_{bc}}{2}(\Gamma_b+\Gamma_c)+i\rho_{bc}(\omega_c-\omega_b)\\
\dot{\rho}_{be}&=\frac{i\Omega_P}{2}e^{i\omega_Pt}\rho^*_{ee}-\frac{i\Omega_C}{2}e^{-i\omega_Ct}\rho^*_{ab}\\
&\quad-\frac{i\Omega_P}{2}e^{i\omega_Pt}\rho_{bb}-\frac{i\Omega_C}{2}e^{i\omega_Ct}\rho_{bc}-\frac{\rho_{be}}{2}(\Gamma_b+\Gamma_e)\\
&\quad+i\rho_{be}(\omega_e-\omega_b)\\
\dot{\rho}_{cc}&=\frac{i\Omega_C}{2}e^{i\omega_Ct}\rho^*_{ce}-\frac{i\Omega_C}{2}e^{-i\omega_Ct}\rho_{ce}-\Gamma_c\rho_{cc}\\
&\quad+\frac{\Gamma_e\rho_{ee}}{3}\\
\dot{\rho}_{ce}&=\frac{i\Omega_C}{2}e^{i\omega_Ct}\rho_{ee}-\frac{i\Omega_C}{2}e^{-i\omega_Ct}\rho^*_{ac}-\frac{i\Omega_P}{2}e^{i\omega_Pt}\rho^*_{bc}\\
&\quad-\frac{i\Omega_C}{2}e^{i\omega_Ct}\rho_{cc}-\frac{\rho_{ae}}{2}(\Gamma_a+\Gamma_e)\\
&\quad+i\rho_{ae}(\omega_e-\omega_a)\\
\dot{\rho}_{ee}&=\frac{i\Omega_C}{2}e^{-i\omega_Ct}\rho_{ae}+\frac{i\Omega_P}{2}e^{-i\omega_Pt}\rho_{be}\\
&\quad+\frac{i\Omega_C}{2}e^{-i\Omega_Ct}\rho_{ce}\\
&\quad-\frac{i\Omega_C}{2}\rho^*_{ae}-\frac{i\Omega_P}{2}\rho^*_{be}-\frac{i\Omega_C}{2}e^{i\omega_Ct}\rho^*_{ce}-\Gamma_4\rho_{ee}
\end{aligned} \tag{14}$$

其中， ρ_{it}s 表示相关的密度矩阵元 ρ。变换到旋转坐标系后，这些项变为

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{ae} &= \rho_{ae} e^{-i\omega_C t} \\
\tilde{\rho}_{be} &= \rho_{be} e^{-i\omega_P t} \\
\tilde{\rho}_{ce} &= \rho_{ce} e^{i\omega_C t} \\
\tilde{\rho}_{ab} &= \rho_{ab} e^{-i(\omega_C-\omega_P)t} \\
\tilde{\rho}_{bc} &= \rho_{bc} e^{i(\omega_C-\omega_P)t}.
\end{aligned} \tag{15}$$

因此，密度矩阵各项的微分方程可更新为:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\rho}}_{aa} &= \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}^*_{ae} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{ae} - \Gamma_1\tilde{\rho}_{aa} + \frac{\Gamma_e\tilde{\rho}_{ee}}{3} \\
\dot{\tilde{\rho}}_{ab} &= \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}^*_{be} - \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}_{ae} - \frac{\tilde{\rho}_{ab}}{2}(\Gamma_a+\Gamma_c) \\
&\quad + i\tilde{\rho}_{ab}(\omega_b - \omega_a - \omega_C + \omega_P) \\
\dot{\tilde{\rho}}_{ac} &= \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}^*_{ce} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{ab} - \frac{\tilde{\rho}_{ac}}{2}(\Gamma_a+\Gamma_c) \\
&\quad + i\tilde{\rho}_{ac}(\omega_c - \omega_a) \\
\dot{\tilde{\rho}}_{ae} &= \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{ee} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{aa} - \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}_{ab} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{ac} \\
&\quad - \frac{\tilde{\rho}_{ae}}{2}(\Gamma_a+\Gamma_e) + i\tilde{\rho}_{ae}(\omega_e - \omega_a - \omega_b) \\
\dot{\tilde{\rho}}_{bb} &= \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}^*_{be} - \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}_{be} - \Gamma_2\tilde{\rho}_{bb} \\
&\quad + \frac{\Gamma_4\tilde{\rho}_{ee}}{2}(\Gamma_a+\Gamma_e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\rho}}_{bc} &= \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}^*_{ce} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{ce} - \frac{\tilde{\rho}_{bc}}{2}(\Gamma_b+\Gamma_c) \\
&\quad + i\tilde{\rho}_{bc}(\omega_c - \omega_b - \omega_P + \omega_C) \\
\dot{\tilde{\rho}}_{be} &= \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}_{ee} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}^*_{ab} - \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}_{bb} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{bc} \\
&\quad - \frac{\tilde{\rho}_{be}}{2}(\Gamma_b+\Gamma_e) + i\tilde{\rho}_{be}(\omega_e - \omega_b - \omega_P) \\
\dot{\tilde{\rho}}_{cc} &= \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}^*_{ce} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{ce} - \Gamma_{3c}\tilde{\rho}_{cc} + \frac{\Gamma_e\tilde{\rho}_{ee}}{3} \\
\dot{\tilde{\rho}}_{ce} &= \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{ee} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}^*_{ac} - \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}^*_{bc} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{cc} \\
&\quad - \frac{\tilde{\rho}_{ce}}{2}(\Gamma_c+\Gamma_e) + i\tilde{\rho}_{ce}(\omega_e - \omega_c - \omega_C) \\
\dot{\tilde{\rho}}_{ee} &= \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{ae} + \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}_{be} + \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{ce} \\
&\quad - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}^*_{ae} - \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}^*_{be} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}^*_{ce} - \Gamma_4\tilde{\rho}_{ee}.
\end{aligned} \tag{16}$$

由于 $|a\rangle$ 和 $|c\rangle$ 的能量相同，因此 $\omega_a = \omega_c$成立。由此，我们定义这些解耦项，

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \omega_e - \omega_a - \omega_C \\
\Delta_2 &= \omega_e - \omega_b - \omega_P
\end{aligned} \tag{17}$$

考虑这些解耦项后，我们的微分方程变为，

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\rho}}_{aa} &= \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}^*_{ae} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{ae} - \Gamma_1\tilde{\rho}_{aa} + \frac{\Gamma_e\tilde{\rho}_{ee}}{3} \\
\dot{\tilde{\rho}}_{ab} &= \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}^*_{be} - \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}_{ae} - \frac{\tilde{\rho}_{ab}}{2}(\Gamma_a+\Gamma_c) \\
&\quad + i\tilde{\rho}_{ab}(\Delta_1 - \Delta_2) \\
\dot{\tilde{\rho}}_{ac} &= \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}^*_{ce} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{ab} - \frac{\tilde{\rho}_{ac}}{2}(\Gamma_a+\Gamma_c) \\
\dot{\tilde{\rho}}_{ae} &= \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{ee} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{aa} - \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}_{ab} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{ac} \\
&\quad - \frac{\tilde{\rho}_{ae}}{2}(\Gamma_a+\Gamma_e) + i\tilde{\rho}_{ae}(\omega_e - \omega_a - \omega_b) \\
\dot{\tilde{\rho}}_{bb} &= \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}^*_{be} - \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}_{be} - \Gamma_2\tilde{\rho}_{bb} + \frac{\Gamma_4\tilde{\rho}_{ee}}{2}(\Gamma_a+\Gamma_e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\rho}}_{bc} &= \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}^*_{ce} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{ce} - \frac{\tilde{\rho}_{bc}}{2}(\Gamma_b+\Gamma_c) \\
&\quad + i\tilde{\rho}_{bc}(\Delta_2 - \Delta_1) \\
\dot{\tilde{\rho}}_{be} &= \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}_{ee} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}^*_{ab} - \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}_{bb} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{bc} \\
&\quad - \frac{\tilde{\rho}_{be}}{2}(\Gamma_b+\Gamma_e) + i\tilde{\rho}_{be}(\omega_e - \omega_b - \omega_P) \\
\dot{\tilde{\rho}}_{cc} &= \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}^*_{ce} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{ce} - \Gamma_{3c}\tilde{\rho}_{cc} + \frac{\Gamma_e\tilde{\rho}_{ee}}{3} \\
\dot{\tilde{\rho}}_{ce} &= \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{ee} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}^*_{ac} - \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}^*_{bc} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{cc} \\
&\quad - \frac{\tilde{\rho}_{ce}}{2}(\Gamma_c+\Gamma_e) + i\tilde{\rho}_{ce}(\omega_e - \omega_c - \omega_C) \\
\dot{\tilde{\rho}}_{ee} &= \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{ae} + \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}_{be} + \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}_{ce} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}^*_{ae} \\
&\quad - \frac{i\Omega_P}{2}\tilde{\rho}^*_{be} - \frac{i\Omega_C}{2}\tilde{\rho}^*_{ce} - \Gamma_4\tilde{\rho}_{ee}.
\end{aligned} \tag{18}$$

得到旋转坐标系中的耦合微分方程后，采用四阶龙格–库塔算法 [69, 70] 对这些方程进行数值求解。这些方程的解用于第III节。

[1] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang, 《量子计算与量子信息：十周年纪念版》（剑桥大学出版社，2010年）。[2] C. D. Bruzewicz、J. Chiaverini、R. McConnell 和 J. M. Sage, 《应用物理评论》6，021314（2019年）。[3] M. Kjaergaard、M. E. Schwartz、J. Braumüller、P. Krantz、J. I.- J. Wang、S. Gustavsson 和 W. D. Oliver, 《凝聚态物理年度评论》11，369（2020年）。[4] P. Krantz、M. Kjaergaard、F. Yan、T. P. Orlando、S. Gustavsson 和 W. D. Oliver, 《应用物理评论》6，021318（2019年）。[5] F. A. Zwanenburg、A. S. Dzurak、A. Morello、M. Y. Simmons、L. C. L. Hollenberg、G. Klimeck、S. Rogge、S. N. Coppersmith 和 M. A. Eriksson, 《现代物理评论》85，961（2013年）。[6] A. Chatterjee、P. Stevenson、S. D. Franceschi、A. Morello、N. P. de Leon 和 F. Kuemmeth, 《自然综述：物理》3，157（2021年）。[7] L. Gordon 、 J. R. Weber 、 J. B. Varley 、 A. Janotti 、 D. D. Awschalom 和 C. G. V. de Walle, 《MRS公报》38，802（2013年）。[8] S. Slussarenko 和 G. J. Pryde, 《应用物理评论》 6，041303（2019年）。[9] D. E. Chang、J. S. Douglas、A. González-Tudela、C.-L. Hung 和 H. J. Kimble, 《现代物理评论》90，031002（2018年）。[10] M. Saffman、T. G. Walker 和 K. Mølmer, 《现代物理评论》82，2313（2010年）。[11] D. Schrader、I. Dotsenko、M. Khudaverdyan、Y. Miroshny-chenko、A. Rauschenbeutel 和 D. Meschede, 《物理评论快报》93，150501（2004年）。[12] G. K. Brennen、C. M. Caves、P. S. Jessen 和 I. H. Deutsch, 《物理评论快报》82，1060（1999年）。[13] D. Jaksch、H.-J. Briegel、J. I. Cirac、C. W. Gardiner 和 P. Zoller, 《物理评论快报》82，1975（1999年）。[14] P. Cheinet、S. Trotzky、M. Feld、U. Schnorrberger、M. Moreno- Cardoner、S. Fölling 和 I. Bloch, 《物理评论快报》101，090404（2008年）。[15] M. Anderlini 、 P. J. Lee 、 B. L. Brown 、 J. Sebby-Strabley 、 W. D. Phillips 和 J. V. Porto, 《自然》448，452（2007年）。[16] K. D. Nelson、X. Li 和 D. S. Weiss, 《自然·物理》3，556（2007年）。[17] T. Xia 、 M. Lichtman 、 K. Maller 、 A. W. Carr 、 M. J. Piotrowicz、L. Isenhower 和 M. Saffman, 《物理评论快报》114，100503（2015年）。[18] Y. Wang、A. Kumar、T.-Y. Wu 和 D. S. Weiss, 《科学》352，1562（2016年）。[19] C. Sheng、X. He、P. Xu、R. Guo、K. Wang、Z. Xiong、M. Liu、J. Wang 和 M. Zhan, 《物理评论快报》121，240501（2018年）。[20] D. D. Yavuz、P. B. Kulatunga、E. Urban、T. A. Johnson、N. Proite、T. Henage、T. G. Walker 和 M. Saffman, 《物理评论快报》96，063001（2006年）。[21] C. Knoernschild、X. L. Zhang、L. Isenhower、A. T. Gill、F. P. Lu、M. Saffman 和 J. Kim, 《应用物理快报》97，134101（2010年）。[22] D. Jaksch、J. I. Cirac、P. Zoller、S. L. Rolston、R. Côté 和 M. D. Lukin, 《物理评论快报》85，2208（2000年）。[23] L. S. Theis、F. Motzoi、F. K. Wilhelm 和 M. Saffman, 《物理评论A》94，032306（2016年）。[24] D. Petrosyan 、 F. Motzoi 、 M. Saffman 和 K. Mølmer, 《物理评论A》96，042306（2017年）。[25] F. Robicheaux、T. Graham 和 M. Saffman, 《物理评论A》103，022424（2021年）。[26] A. Pagano 、 S. Weber 、 D. Jaschke 、 T. Pfau 、 F. Meinert、S. Mon- tangero 和 H. P. Büchler, 《物理评论研究》4，033019（2022年）。[27] H. Levine、A. Keesling、G. Semeghini、A. Omran、T. T. Wang、S. Ebadi、H. Bernien、M. Greiner、V. Vuleti´c、H. Pichler 和 M. D. Lukin, 《物理评论快报》123，170503（2019）。[28] T. M. Graham、Y. Song、J. Scott、C. Poole、L. Phuttitarn、K. Jooya、P. Eichler、J. X、A. Marra、B. Grinkemeyer、M. Kwon、M. Ebert、J. Cherek、M. T. Lichtman、M. Gillette、J. Gilbert、D. Bowman、T. Ballance、C. Campbell、E. D. Dahl、O. Crawford、N. S. Blunt、B. Rogers 和 M. Saffman, 《自然》604，457（2022）。[29] D. Bluvstein、H. Levine、G. Se meghini、T. T. Wang、S. Ebadi、M. Kalinowski、A. Keesling、N. Maskara、H. Pichler、M. Greiner、V. Vuletic 和 M. D. Lukin, 《自然》604，451（2022）。[30] Z. Fu、P. Xu、Y. Sun、Y.-Y. Liu、X.-D. He、X. Li、M. Liu、R.-B. Li、J. Wang、L. Liu 和 M.-S. Zhan, 《物理评论A》105，042430（2022）。[31] M. Saffman, 《物理学杂志 B：原子、分子与光学物理》49，202001（2016）。[32] M. Morgado 和 S. Whitlock，AVS 量子科学 3，021101（2021）。[33] D. Crow、R. Joynt 和 M. Saffman, 《物理评论快报》117，130503（2016）。[34] I. I. Beterov 和 M. Saffman, 《物理评论A》92，042710（2015）。[35] M. Kwon、M. F. Ebert、T. G. Walker 和 M. Saffman, 《物理评论快报》119，180504（2017）。[36] G. S. Agarwal 和 K. T. Kapale, 《物理学杂志 B：原子、分子与光学物理》39，3437（2006）。[37] D. D. Yavuz 和 N. A. Proite, 《物理评论A》76，041802（2007）。[38] A. V. Gorshkov、L. Jiang、M. Greiner、P. Zoller 和 M. D. Lukin, 《物理评论快报》100，093005（2008）。[39] S. Bretschneider、C. Eggeling 和 S. W. Hell, 《物理评论快报》98，218103（2007）。[40] M. Kiffner、J. Evers 和 M. S. Zubairy, 《物理评论快报》100，073602 2008( )。[41] H. Li、V. A. Sautenkov、M. M. Kash、A. V. Sokolov、G. R. Welch、Y. V. Rostovtsev、M. S. Zubairy 和 M. O. Scully, 《物理评论A》78，013803（2008）。[42] N. A. Proite、Z. J. Simmons 和 D. D. Yavuz, 《物理评论A》83，041803 2011( )。[43] J. A. Miles、Z. J. Simmons 和 D. D. Yavuz，物理评论 X 3，031014 2013( )。[44] J. C. Wu 和 B. Q. Ai, 《欧洲物理快报》107，14002（2014）。[45] F. Giraldo、A. Kumar、T.-Y. Wu、P. Du 和 D. S. Weiss, 《物理评论A》106，032425（2022）。[46] C. Weitenberg、M. Endres、J. F. Sherson、M. Cheneau、P. Schauss、T. Fukuhara、I. Bloch 和 S. Kuhr, 《自然》319，471（2011）。[47] M. Fleischhauer、A. Imamoglu 和 J. P. Marangos, 《现代物理评论》77，633（2005）。[48] S. E. Harris, 《今日物理》50，36（1997）。[49] B. Lounis 和 C. Cohen-Tannoudji, 《物理学杂志 II》2，579 1992( )。[50] C. Cohen-Tannoudji、J. Dupont-Roc 和 G. Grynberg, 《原子—光子相互作用》（Wiley，1998）。[51] J. Oreg、F. T. Hioe 和 J. H. Eberly, 《物理评论A》29，690（1984）。[52] J. E. Thomas, 《物理评论A》42，5652（1990）。[53] K. D. Stokes、C. Schnurr、J. R. Gardner、M. Marable、G. R. Welch 和 J. E. Thomas, 《物理评论快报》67，1997（1991）。[54] J. R. Gardner、M. L. Marable、G. R. Welch 和 J. E. Thomas, 《物理评论快报》70，3404（1993）。[55] F. Le Kien、G. Rempe、W. P. Schleich 和 M. S. Zubairy, 《物理评论A》56，2972（1997）。[56] S. Qamar、S.-Y. Zhu 和 M. S. Zubairy, 《物理评论A》61，063806（2000）。

[57] K. T. Kapale、S. Qamar 和 M. S. Zubairy，《物理评论A》67，023805 2003( )。[58] M. Sahrai、H. Tajalli、K. T. Kapale 和 M. S. Zubairy，《物理评论A》72，013820（2005）。[59] M. Macovei、J. Evers、C. H. Keitel 和 M. S. Zubairy，《物理评论A》75，033801（2007）。[60] J.-T. Chang、J. Evers、M. O. Scully 和 M. Suhail Zubairy，《物理评论A》73，031803（2006）。[61] E. Paspalakis 和 P. L. Knight，《物理评论A》63，065802（2001）。[62] J. Xu 和 X. ming Hu，《物理学杂志 B：原子、分子与光学物理》40，1451（2007）。[63] P. Storey、M. Collett 和 D. Walls，《物理评论快报》68，472 (1992). [64] R. Quadt、M. Collett 和 D. F. Walls，《物理评论快报》**74**，351（1995）。[65] S. Kunze、K. Dieckmann 和 G. Rempe，《物理评论快报》**78**，2038 1997（ ）。[66] M. Holland、S. Marksteiner、P. Marte 和 P. Zoller，《物理评论快报》**76**，3683（1996）。[67] J. Mompart、V. Ahufinger 和 G.Birkl，《物理评论A》**79**，053638（2009）。[68] M. O. Scully 和 M. S. Zubairy，量子光学（剑桥大学出版社，1997）。[69] C. Runge，《数学年刊》**46**，167（1895）。[70] W. Kutta，《数学物理杂志》**46**，435（1901）。