arXiv:2301.03675v1 [math.DG] 9 Jan 2023

具有反循环结构的黎曼流形上关于不定度量的球面与圆

GEORGI DZHELEPOV、IVA DOKUZOVA 和 DIMITAR RAZPOPOV

Abstract. 我们研究四维可微流形切空间中关于不定度量的超球面、球面与圆。该流形配备了一个正定度量以及一个额外的 (1, 1) 型张量结构。该额外结构的四次幂为负单位算子，并且其分量在某个局部坐标系中构成一个反循环矩阵。这两种结构相容，并在流形上确定了一个关联不定度量。

1. 引言

圆与椭圆（圆与双曲线、圆与抛物线）之间，以及球面与其他二次曲面之间的对应关系有多种应用，例如在几何学、力学和天体物理学中。可以关于不定度量确定圆和球面，然后在欧几里得空间中求得它们的像。基于此，我们考察关于黎曼流形上的关联不定度量所确定的圆，以及欧几里得空间中相应的二次曲线。此外，我们还研究关于黎曼流形上的关联不定度量所确定的球面（超球面），以及欧几里得空间中相应的二次曲面（超曲面）。我们将提及一些论文，它们探讨了关于某些不定度量的超球面、球面与圆的模型，以及它们与相应二次几何对象之间的关系（[1, 5, 10, 11, 12]）。

厄米流形构成了一类具有可积近复结构 J ([8]) 的流形。其中一个子类是所谓的局部共形 K¨ahler 流形，其特征由 J 的协变导数的一种特殊性质所决定。近期对局部共形 K¨ahler 流形的一些研究见于 [2, 3, 9, 13, 14, 16]。

我们考虑一个四维黎曼流形 M，它赋有正定度量 g，并在流形 M 上任意一点 p 的切空间 T_pM 中配备一个端omorphism S。S 的四次方等于负恒等映射，并且相对于 T_pM 的某个基，S 的分量构成一个斜循环矩阵。假设 S 与 g 相容。这样一个流形（M，g，S）在 [6] 中定义。在 [15] 中证明了（M，g，J）是一个局部共形 K¨ahler 流形，其中 $J = S^2$。我们考虑由结构 g 和 S 共同定义在（M，g，S）上的伴随度量 $\tilde{g}$。度量 $\tilde{g}$ 必为不定度量，它在每个 T_pM 中确定类空向量、各向同性向量和类时向量。我们研究 T_pM 中的超球面，以及相对于 $\tilde{g}$ 而言，T_pM 的某些特殊子空间中的球面与圆。

本文组织如下。第2节中，我们回顾在 [6] 和 [15] 中得到的流形（M， g， S）的一些必要事实、定义和结论。第3节中，我们求出相对于伴随度量 $\tilde{g}$ 而言，T_pM 中心超球面的方程。第4节中，我们考察相对于 $\tilde{g}$ 而言， T_pM 的特殊三维子空间中的球面，并求得其方程。第5节中，我们考察 T_pM 中一些特殊的二维平面，并求得相对于 $\tilde{g}$ 而言这些二维平面中圆的方程。我们用 g 来解释第3节、第4节和第5节中所研究曲线与曲面的全部方程。

2. Preliminaries

斜循环矩阵是托普利兹矩阵，在 [4]和 [7]中已有深入研究。本文考虑一个四维可微流形上的张量结构，其分量矩阵为斜循环矩阵。因此，我们回顾以下定义。首行为（a_1, a_2, a_3, a_4） $\in R^4$的实斜循环矩阵是如下形式的方阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & a_1 \end{pmatrix}.$$

现在我们详细介绍流形（M, g, S）。设 M是一个配备了(1, 1)型张量 S 的四维黎曼流形。设 S 的分量在局部坐标系中构成以下斜循环矩阵:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

那么 S 具有如下性质

$$S^4 = -\mathrm{id}. \tag{1}$$

我们假设 g 是 M 上的正定度量，并满足等式

$$g(Su, Sv) = g(u, v), \quad u, v \in \mathfrak{X}M. \tag{2}$$

这样的流形 (M, g, S) 在 [6] 中引入。流形 (M, g, J)，其中 $J = S^2$，是局部共形 K¨ahler 流形（ [15]中的定理5.3）。

(M, g, S) 上的伴随度量 $\tilde{g}$，定义为

$$\tilde{g}(u, v) = g(u, Sv) + g(Su, v), \tag{3}$$

它必然是不定的。因此，考虑到 (3)，对于任意向量 v ，有:

$$\tilde{g}(v, v) = 2g(v, Sv) = a, \qquad a \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

根据物理学术语，我们给出如下

定义 2.1. 设 $\tilde{g}$ 为 (M, g, S) 上的伴随度量。若向量 u 满足$\tilde{g}(u, u) > 0$ （分别地， $\tilde{g}(u, u) < 0$），则 u 为类空（分别为类时）向量。若u 非零且满足 $\tilde{g}(u, u) = 0$，则 u 为各向同性向量。

众所周知，切空间 T_pM 中每个向量 u 的范数，以及 T_pM 中两个非零向量 u 和 v 之间夹角的余弦，可表示为

$$\|u\| = \sqrt{g(u,u)}, \tag{5}$$

$$\cos\angle(u,v) = \frac{g(u,v)}{\|u\|\|v\|}. \tag{6}$$

类型为 $\{u, Su, S^2u, S^3u\}$ 的 T_pM 的基称为 S-基。在这种情况下，我们称向量 u 诱导了 T_pM的 S-基。在 [6] 中证明了以下断言。如果向量 u 诱导了 S-基，则

(i) 基向量之间的角为

$$\begin{gathered}\angle(u,Su) = \angle(Su,S^2u) = \angle(S^2u,S^3u) = \pi - \angle(S^3u,u),\\ \angle(u,S^2u) = \angle(Su,S^3u) = \tfrac{\pi}{2}.\end{gathered} \tag{7}$$

(ii) 由 φ确定的角

$$\varphi = \angle(u,Su), \tag{8}$$

满足不等式

$$\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}. \tag{9}$$

接下来有

定理 2.2. 设 $\tilde{g}$ 是 (M,g,S) 上的伴随度量，且向量 u 诱导一个 S-基。以下命题成立。

(i) 向量 u 是类空的，当且仅当 $\varphi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$。(ii) 向量 u 是各向同性的，当且仅当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$。(iii) 向量 u 是类时的，当且仅当 $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$。

证明. 利用 (4)、(5)、(6) 和 (8)，我们得到 $\tilde{g}(u,u) = 2\|u\|^2\cos\varphi$。结合定义 2.1 和不等式 (9)，证明即得。□

显然，由于 (1)、(2) 和 (3)，我们有

推论 2.3. 如果 u 是类空（各向同性或类时）向量，那么 Su、 S^2u 和 S^3u 分别是类空（各向同性或类时）向量。

在接下来的几节中，我们将求出关于 $\tilde{g}$ 的超球面、球面和圆的方程，这些对象位于 T_pM 的某些子空间中，关于 (M, g, S)。显然，所得曲线和曲面不依赖于基的选择。为了更容易地求出它们的方程，我们使用关于度量 g 的标准正交基，其中度量定义在 (M, g, S) 上。在第 3 节中，我们使用 T_pM 的一个标准正交 S-基。这种基的存在性已在 [6] 中证明。在第 4 节和第 5 节中，我们借助任意一个 S-基，构造 T_pM 的三维子空间和 T_pM 的二维子空间的标准正交基。

3. Hyper-spheres with respect to the associated metric

设 $\{u, Su, S^2u, S^3u\}$ 是关于度量 g的 T_pM 的正交归一 S-基，其中定义在 (M, g, S)上。若 p_{xyzt}是一个坐标系，使向量 u, Su,

S^2u和 S^3u 分别位于坐标轴 p_x, p_y, p_z 和 p_t上，则 p_{xyzt} 是正交归一的。 T_pM中任意一点 (x, y, z, t)的径向量 v可由等式表示为

$$v = xu + ySu + zS^2u + tS^3u. \tag{10}$$

相对于 $\tilde{g}$ 上的 (M, g, S)，以原点 p 为中心的超球面 s 由 (4) 定义。将 (10) 代入 (4)，并考虑到 p_{xyzt} 是一个正交归一坐标系，以及等式 (1) 和 (2)，我们得到 s 的方程如下:

$$2(xy - xt + yz + zt) = a. \tag{11}$$

现在，我们通过以下方式将坐标系 p_{xyzt} 变换为 $p_{x'y'z't'}$

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(x' - y' + z' - t'), \quad & y &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}(-y' + t') \\ z &= -\tfrac{1}{2}(x' + y' + z' + t'), \quad & t &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}(-x' + z'). \end{aligned} \tag{12}$$

将 (12) 代入 (11)，可得其形式为

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 - t'^2 = \frac{a}{\sqrt{2}}. \tag{13}$$

显然，用 g 表示时，(13) 是一个三维双曲面的方程。

因此，我们陈述如下

定理 3.1. 设 $\tilde{g}$ 是 (M, g, S) 上的伴随度量，且向量 u 在 T_pM 中诱导出一个正交归一 S-基。若 p_{xyzt} 是一个满足 $u \in p_x$, $Su \in p_y$, $S^2u \in p_z$, $S^3u \in p_t$ 的坐标系，则超球面 (4) 关于坐标系 $p_{x'y'z't'}$ 的方程为 (13)，其中 $p_{x'y'z't'}$ 由 p_{xyzt} 经变换 (12) 得到。

推论 3.2. 设 s 为三维双曲面 (13)。以下命题成立。

i) s 上每个满足 $a < 0$ 的点都具有类时径向量；ii) s 上每个满足 $a = 0$ 的点都具有各向同性径向量；iii) s 上每个满足 $a > 0$ 的点都具有类空径向量。

证明. 根据定义 2.1，由于 (4)，结论成立。 □

推论 3.3. 设 s 为三维双曲面 (13)。那么， s 与 $p_{x'y'z't'}$的坐标平面之间的交集σ_1、σ_2、 σ_3 和 σ_4 分别为以下曲面:

i) 在 $a > 0$的情况下， σ_1、 σ_2 为双叶双曲面， σ_3、 σ_4 为单叶双曲面；
ii) 在 $a < 0$的情况下， σ_1、 σ_2 为单叶双曲面， σ_3、 σ_4 为双叶双曲面；
iii) 在 $a = 0$的情况下， σ_1、 σ_2、 σ_3 和 σ_4 为圆锥面。

证明。利用 (13) 和坐标平面 $x' = 0$ 的方程，我们得到曲面 σ_1: $\sqrt{2}(y'^2 - z'^2 - t'^2) = a$， $x' = 0$。因此，如果 $a > 0$，那么 σ_1 是双叶双曲面；如果 $a < 0$，那么 σ_1 是单叶双曲面；如果 $a = 0$，那么 σ_1 是圆锥面。类似地，我们考虑交集 σ_2、σ_3 和 σ_4 的其他情形。□

定理 3.4。设 $\tilde{g}$ 是 (M, g, S) 上的伴随度量，且向量 u 在 T_pM 中诱导出一个正交归一 S-基。若 p_{xyzt} 是满足 $u \in p_x$、$Su \in p_y$、$S^2u \in p_z$ 和 $S^3u \in p_t$ 的坐标系，则 u、Su、S^2u 和 S^3u 是各向同性向量，且其端点位于方程为

$$x'^2 + y'^2 = \frac{1}{2}, \quad z'^2 + t'^2 = \frac{1}{2}, \tag{14}$$

其中 $p_{x'y'z't'}$ 是通过对 p_{xyzt}作变换 (12) 得到的坐标系。

证明. 注意到 (3) 和定义 2.1，可得 u、Su、S^2u 和 S^3u 是相对于 $\tilde{g}$的各向同性向量。因此，在 $a = 0$的情况下，它们的端点位于超锥面 (13) 上。另一方面，这些端点位于相对于 g的单位超球面上。这个相对于 $p_{x'y'z't'}$ 的超球面的方程为

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2 = 1. \tag{15}$$

由 (13) 的系统（其中 $a = 0$）和 (15) 得到超锥面与超球面的交集。相对于坐标系 $p_{x'y'z't'}$，这个交集可由等价系统 (14) 表示。□

4. Spheres in a 3-dimensional subspace of T_pM

设单位向量 u 诱导出 S的一个基。因此，u 诱导出四个不同的棱锥，分别由以下三元组张成：$\{u, Su, S^2u\}$、$\{Su, S^2u, S^3u\}$、$\{u, Su, S^3u\}$ 和 $\{u, S^2u, S^3u\}$。根据（2）和（7），以这些基向量构造的第一个和第二个棱锥相等，第三个和第四个棱锥也相等。因此，我们只研究以第一个和第三个棱锥定义的基所对应的子空间。

4.1. T_pM中的三维子空间内的一个球面，由向量 u、Su 和 S^2u张成。

引理 4.1. 设 α_1 是 T_pM 的一个子空间，其基为 $\{u, Su, S^2u\}$。由等式确定的向量系统 $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$e_1 = u, \quad e_2 = \frac{(-\cos\varphi)u + Su - (\cos\varphi)S^2u}{\sqrt{1 - 2\cos^2\varphi}}, \quad e_3 = S^2u \tag{16}$$

构成 α_1的一组正交归一基。

证明。利用 (2)、(7) 和 (16)，我们得到 $g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = 1$，以及$g(e_1, e_2) = g(e_2, e_3) = g(e_1, e_3) = 0$. □

坐标系 p_{xyz} 满足 $e_1 \in p_x$、$e_2 \in p_y$ 和 $e_3 \in p_z$ 为正交归一。

在 α_1 中，以原点 p为球心的球面 s_1，相对于(M, g, S)上的 $\tilde{g}$，由 (4) 定义。在接下来的陈述中，我们得到球面 s_1 关于正交归一坐标系 p_{xyz}的方程。

定理 4.2. 设 $\tilde{g}$ 是 (M, g, S) 上的伴随度量，且 α_1 是 T_pM 的一个 3 维子空间，其基为 $\{u, Su, S^2u\}$。若 e_1、e_2 和 e_3 由 (16) 确定，且 p_{xyz} 是满足 $e_1 \in p_x$、$e_2 \in p_y$、$e_3 \in p_z$ 的坐标系，则 α_1 中球面 s_1 的方程为

$$2(\cos\varphi)(x^2 - y^2 + z^2) + 2\sqrt{1 - 2\cos^2\varphi}(xy + yz) = a. \tag{17}$$

证明. α_1 上任意一点 (x, y, z) 的径向量 v 可表示为$v = xe_1 + ye_2 + ze_3$. 。将后一个等式代入 (4)，可得

$$\begin{aligned}&\tilde{g}(e_1,e_1)x^2+\tilde{g}(e_2,e_2)y^2+\tilde{g}(e_3,e_3)z^2+2\tilde{g}(e_1,e_2)xy\\&+2\tilde{g}(e_1,e_3)xz+2\tilde{g}(e_2,e_3)yz=a.\end{aligned}\tag{18}$$

利用 (2)、(3)、(7) 和 (16)，我们得到

$$\tilde{g}(e_1,e_1)=2\cos\varphi,\quad \tilde{g}(e_3,e_3)=2\cos\varphi,\quad \tilde{g}(e_2,e_2)=-2\cos\varphi,$$
$$\tilde{g}(e_1,e_2)=\tilde{g}(e_2,e_3)=\sqrt{1-2\cos^2\varphi},\quad \tilde{g}(e_1,e_3)=0.$$

将后面的等式代入 (18)，可得 (17)。 □

现在，我们通过以下变换将坐标系 p_{xyz} 变为 $p_{x'y'z'}$

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\lambda_1y'+\mu_1z',\quad y=\lambda_2y'+\mu_2z',\quad z=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\lambda_1y'+\mu_1z',$$

其中

$$\begin{aligned}&\lambda_1=\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}\cos\varphi},\quad \lambda_2=\tfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{2}\cos\varphi},\\&\mu_1=\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sqrt{2}\cos\varphi},\quad \mu_2=-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}\cos\varphi}.\end{aligned}\tag{19}$$

因此，方程 (17) 可写为

$$2\cos\varphi x'^2+\sqrt{2}y'^2-\sqrt{2}z'^2=a.\tag{20}$$

推论 4.3. 设 s_1 是在情形 $a=0$ 下由 (20) 确定的曲面。以下结论成立。

i) 若 $\varphi\neq\frac{\pi}{2}$，则 s_1 是一个圆锥面；ii) 若 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，则 s_1 分解为两个平面 $z'=\pm y'$。

推论 4.4. 设 s_1 是在情形 $a>0$ 下由 (20) 确定的曲面。以下结论成立。

i) 若 $\varphi\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，则 s_1 是一个单叶双曲面；ii) 若 $\varphi\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$，则 s_1 是一个双叶双曲面；iii) 若 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，则 s_1 是一个双曲柱面。

推论 4.5. 设 s_1 是在情形 $a<0$ 下由 (20) 确定的曲面。以下结论成立。

i) 若 $\varphi\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，则 s_1 是双叶双曲面；ii) 若 $\varphi\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$，则 s_1 是单叶双曲面；iii) 若 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，则 s_1 是双曲柱面。

4.2. T_pM 的三维子空间中的一个球面，由向量 u、Su 和 S^3u 张成。

引理 4.6. 设 α_2 是 T_pM 的一个子空间，其一组基为 $\{u, Su, S^3u\}$。由等式确定的向量系统 $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$e_1=Su,\quad e_2=\frac{u-(\cos\varphi)Su+(\cos\varphi)S^3u}{\sqrt{1-2\cos^2\varphi}},\quad e_3=S^3u,\tag{21}$$

是 α_2 的一个标准正交基。

证明。利用 (1)、(2)、(7) 和 (21)，我们得到 $g(e_1,e_2)=g(e_2,e_3)=g(e_1,e_3)=0$以及 $g(e_1,e_1)=g(e_2,e_2)=g(e_3,e_3)=1$。 □

坐标系 p_{xyz} 中，向量 e_1、 e_2 和 e_3 分别位于坐标轴 p_x、 p_y 和 p_z 上，且该坐标系为正交归一坐标系。

以原点 p为中心的 s_2 中球面 α_2 ，相对于 $\tilde{g}$ 在（M， g， S）上，由（4）定义。下一条陈述给出了相对于正交归一坐标系 p_{xyz}的 s_2 方程。

定理4.7. 设 $\tilde{g}$是（M， g， S）上的伴随度量， α_2是 T_pM 的一个三维子空间，其一组基为 $\{u, Su, S^2u\}$。若 e_1、 e_2 和 e_3 由（21）确定，且 p_{xyz} 是满足 $e_1 \in p_x$、 $e_2 \in p_y$、 $e_3 \in p_z$的坐标系，则 α_2 中球面 s_2 的方程为

$$2(\cos\varphi)(x^2 - y^2 + z^2) + 2\sqrt{1 - 2\cos^2\varphi}(xy - yz) = a. \tag{22}$$

证明。 α_2上任意一点（x， y， z）的径向量 v表示为$v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$。于是（4）可写成

$$\begin{aligned}&\tilde{g}(e_1,e_1)x^2 + \tilde{g}(e_2,e_2)y^2 + \tilde{g}(e_3,e_3)z^2 + 2\tilde{g}(e_1,e_2)xy\\ &+2\tilde{g}(e_1,e_3)xz + 2\tilde{g}(e_2,e_3)yz = a.\end{aligned} \tag{23}$$

由 (2)、(3)、(7) 和 (21) 可得

$$\tilde{g}(e_1,e_1) = 2\cos\varphi, \quad \tilde{g}(e_3,e_3) = 2\cos\varphi, \quad \tilde{g}(e_2,e_2) = -2\cos\varphi,$$
$$\tilde{g}(e_1,e_2) = \sqrt{1 - 2\cos^2\varphi}, \quad \tilde{g}(e_1,e_3) = 0, \quad \tilde{g}(e_2,e_3) = -\sqrt{1 - 2\cos^2\varphi}.$$

将后面的等式代入 (23)，得到 (22)。 □

将坐标系 p_{xyz} 变换为 $p_{x'y'z'}$ ，变换为

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \lambda_1 y' + \mu_1 z', \quad y = \lambda_2 y' + \mu_2 z', \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \lambda_1 y' - \mu_1 z'$$

结合 (19)，方程 (22) 化为 m

$$2\cos\varphi x'^2 + \sqrt{2}y'^2 - \sqrt{2}z'^2 = a.$$

上述方程与 (20) 相同。

5. Circles in a special 2-planes of T_pM

设单位向量 u 诱导出 T_pM的一个 S-基。现在我们研究由二维平面 $\{u, S^2u\}$、$\{u, Su\}$ 和 $\{u, S^3u\}$分别张成的三个不同子空间 β_1、 β_2 和 β_3 中的圆。

5.1. 二维平面 β_1中的圆。由 (7) 可知，向量 u 和 S^2u构成 β_1的标准正交基。我们在 β_1上建立坐标系 p_{xy}，使 u 位于轴 p_x 上， S^2u 位于轴 p_y上。因此， p_{xy} 是 β_1的正交坐标系。

引理 5.1. 系统 $\{u, S^2u\}$ 满足以下等式:

$$\tilde{g}(u,u) = \tilde{g}(S^2u, S^2u) = 2\cos\varphi, \quad \tilde{g}(u, S^2u) = 0. \tag{24}$$

证明. 由 (2)、(3)、(7) 通过直接计算可得 (24)。 □

以原点 p 为圆心的 β_1 中的圆 k_1，相对于 (M, g, S) 上的 $\tilde{g}$，由 (4) 定义。现在我们得到相对于 p_{xy} 的 k_1 方程。

定理5.2。设 $\tilde{g}$ 为 (M,g,S) 上的伴随度量，且 β_1 为 T_pM 中的一个二维平面，其基为 $\{u,S^2u\}$。若 p_{xy} 是一个坐标系，使得 $u\in p_x, Su\in p_y$，则 β_1 中的圆 k_1 的方程为

$$2\cos\varphi x^2+2\cos\varphi y^2=a,\quad \varphi\neq\frac{\pi}{2}. \tag{25}$$

证明。任意点的径向量 v 由 β_1 表示为

$$v=xu+yS^2u, \tag{26}$$

这意味着 $S^2v=-yu+xS^2u$。然后由（4）、（24）和（26）可得（25）。 □

推论5.3。设 k_1 为由（25）确定的曲线。当 $a>0$和$\varphi\in\left(\frac{\pi}{4}、\ \frac{\pi}{2}\right)$，或当 $a<0$和 $\varphi\in\left(\frac{\pi}{2}、\ \frac{3\pi}{4}\right)$时， k_1 为圆。曲线 k_1在 $a=0$的情况下退化为点 p。

我们注意到，在近似Hermite流形（M,g,J）上，满足 $\delta=J\delta$的二维平面 $\delta=\{u,Ju\}$称为 T_pM 的 J-不变截面。因此，在流形（M,g,J）上，二维平面 $\beta_1=\{u,S^2u\}$ 是 T_pM的 J-不变截面， $J=S^2$。

5.2. 二维平面 β_2中的圆。

引理5.4. 设 β_2 为由单位向量 u 和 Su张成的二维平面。由以下等式确定的向量系统 $\{e_1,e_2\}$

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}}(u+Su),\quad e_2=\frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\varphi)}}(-u+Su), \tag{27}$$

是 β_2的标准正交基。

证明. 利用(7)和(27)，我们计算得 $g(e_1,e_2)=0$, $g(e_1,e_1)=g(e_2,e_2)=1$。 □

我们在 β_2上构造坐标系 p_{xy}，使得 e_1 位于轴 p_x 上，且e_2 位于轴 p_y上，即 p_{xy} 为正交归一的。

引理 5.5. 系统 $\{e_1,e_2\}$ 满足以下等式:

$$\tilde{g}(e_1,e_1)=\frac{2\cos\varphi+1}{1+\cos\varphi},\quad \tilde{g}(e_2,e_2)=\frac{2\cos\varphi-1}{1-\cos\varphi},\quad \tilde{g}(e_1,e_2)=0. \tag{28}$$

证明。利用 (2)、(3) 和 (7)，通过直接计算可得 (28)。 □

在 β_2 中，以原点 p 为圆心的圆 k_2，相对于 (M,g,S) 上的 $\tilde{g}$，由 (4) 定义。此外，我们得到关于 p_{xy} 的 k_2 方程。

定理 5.6. 设 $\tilde{g}$ 是 (M,g,S) 上的伴随度量， $\beta_2=\{u,Su\}$ 是 T_pM 中的一个二维平面，其标准正交基为 (27)。若 p_{xy} 是一个坐标系，使得 $e_1\in p_x, e_2\in p_y$，则 β_2 中圆 k_2 的方程为

$$\frac{2\cos\varphi+1}{1+\cos\varphi}x^2+\frac{2\cos\varphi-1}{1-\cos\varphi}y^2=a. \tag{29}$$

证明。 β_2 上任意一点的径向量 v 为 $v=xe_1+ye_2.$。利用后一等式，由 (4) 可得

$$\tilde{g}(v,v)=\tilde{g}(e_1,e_1)x^2+2\tilde{g}(e_1,e_2)xy+\tilde{g}(e_2,e_2)y^2=a.$$

将 (28) 代入上述方程，可得 (29)。 □

根据参数 a 和 φ，方程 (29) 描述了不同的二次曲线。表 1 研究了这些参数的所有可能取值以及曲线 (29) 的相应类型。

5.3. 二维平面 β_3 中的圆。

引理 5.7. 设 β_3 为由单位向量 u 和 S^3u张成的二维平面。由以下等式确定的向量系统 $\{e_1, e_2\}$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\varphi)}}(u + S^3u), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}}(-u + S^3u), \tag{30}$$

是 β_3 的标准正交基。

证明。利用 (7) 和 (30)，我们计算 $g(e_1, e_2) = 0$, $g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = 1$。 □

我们构造一个坐标系 p_{xy}，使得 $e_1 \in p_x$ 和 $e_2 \in p_y$，即 p_{xy} 是正交归一的。

引理 5.8. 系统 $\{e_1, e_2\}$ 满足以下等式:

$$\tilde{g}(e_1, e_1) = \frac{2\cos\varphi - 1}{1-\cos\varphi}, \quad \tilde{g}(e_2, e_2) = \frac{2\cos\varphi + 1}{1+\cos\varphi}, \quad \tilde{g}(e_1, e_2) = 0. \tag{31}$$

证明. 利用 (1)、(2)、(3) 和 (7)，通过直接计算可得 (31)。 □

以原点 p为圆心的 β_3 中的圆 k_3，相对于 (M, g, S) 上的 $\tilde{g}$，由 (4) 定义。下面的命题将给出相对于 p_{xy} 的 k_3 的方程。

定理 5.9. 设 $\tilde{g}$ 是 (M, g, S) 上的伴随度量，且 $\beta_3 = \{u, S^3u\}$ 是 T_pM 中的一个二维平面，其标准正交基为 (30)。若 p_{xy} 是一个坐标系，使得 $e_1 \in p_x$, $e_2 \in p_y$，则 β_3 中的圆 k_3 的方程为

$$\frac{2\cos\varphi - 1}{1-\cos\varphi}x^2 + \frac{2\cos\varphi + 1}{1+\cos\varphi}y^2 = a. \tag{32}$$

证明。 β_3 上任意一点的径向量 v 为 $v = xe_1 + ye_2$. 。因此，由 (4) 可得

$$\tilde{g}(v, v) = \tilde{g}(e_1, e_1)x^2 + 2\tilde{g}(e_1, e_2)xy + \tilde{g}(e_2, e_2)y^2 = a. \tag{33}$$

将 (31) 代入 (33)，可得 (32)。 □

方程 (32) 确定的曲线与由 (29) 得到的曲线相同。它们见表 1。

TABLE 1. 曲线 k_2 和 k_3

φ	a	k_2, k_3
$(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$	$a > 0$	椭圆
	$a = 0$	点 p
	$a < 0$	空集
$\frac{\pi}{3}$	$a > 0$	两条直线 $x = \pm\frac{\sqrt{3a}}{2}$
	$a = 0$	直线 x=0
	$a < 0$	空集
$(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$	$a > 0$	一条双曲线
	$a = 0$	两条直线 $y = \pm cx$, c 是一个常数
	$a < 0$	一条双曲线
$\frac{2\pi}{3}$	$a > 0$	空集
	$a = 0$	直线 y=0
	$a < 0$	两条直线 $y = \pm\frac{\sqrt{-3a}}{2}$
$(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$	$a > 0$	空集
	$a = 0$	点 p
	$a < 0$	椭圆

REFERENCES

[1] N. ABE, Y. NAKANISHI AND S. YAMAGUCHI: *Circles and spheres in pseudo-Riemannian geometry* **39** 1990 2 3, 134 145 , Aequationes Math. ( ), no. - – . https://doi.org/ 10 1007 01833144 . /BF :

[2] D. ANGELLA AND M. ORIGLIA: *Locally conformally Kähler structures on four-dimensional solvable Lie algebras* **7** 2020 1, 1 35 , Complex Manifolds ( ), no. – . https://doi.org/ 10 1515 2020 0001 . /coma- - , ,

[3] Y. CHEREVKO V. BEREZOVSKI I. HINTERLEITNER AND D. SMETANOVA: *Infinitesimal transformations of locally conformal Kähler manifolds* **7** 2019 , Mathematics ( ), no. 8, 658 pp. https://doi.org/ 10 3390 7080658 . /math , : A Wiley-Interscience Publication. 纯粹数学与应用数学。John Wiley and Sons, 纽约-奇切斯特-布里斯班, 1979.

[4] P. J. DAVIS *Circulant matrices*

[5] I. DOKUZOVA AND G. DZHELEPOV: *Spheres and circles in a tangent space of a 4-dimensional Riemannian manifold with respect to an indefinite metric* **109**, , J. Geom. (2018), no. 3, Paper No. 49, 11 pp. https://doi.org/10.1007/s00022-018-0455-x

[6] I. DOKUZOVA AND D. RAZPOPOV: *Four-dimensional almost Einstein manifolds with skew-circulant structures* **111** 2020 , J. Geom. ( ), no. 1, Paper No. 9, 18 pp. https://doi.org/10.1007/s00022-020-0521-z

[7] R. M. GRAY: *Toeplitz and circulant matrices: A review*, Found. Trends Commun. Inf. Theory 2 (2006), no. 3, 155–239. http://dx.doi.org/ 10 1561 0100000006 . / :

[8] A. GRAY AND L. M. HERVELLA: *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants* 4 **123** 1980 35 58 , Ann. Mat. Pura Appl. ( ), ( ), – . https://doi.org/ 10 1007 01796539 . /BF :

[9] T. HUANG *A note on Euler number of locally conformally Kähler manifolds*, Math. Z. 296 (2020), no. 3-4, 1725-1733. https://doi.org/10.1007/s00209-020-02491-y

[10] T. IKAWA: *On curves and submanifolds in an indefinite-Riemannian manifold*, Tsukuba J. Math. 9 (1985), no. 2, 353–371. https://doi.org/10.21099/tkbjm/1496160296

[11] J. J. Konderak: *Construction of harmonic maps between pseudo-Riemannian spheres and hyperbolic spaces* **109** 1990 2, 469 476 , 《Proc. Amer. Math. Soc.》（ ）, 第 期, –。https://doi.org/ 10 1090 0002 9939 1990 0993755 2 。/S - - - -: [12] R. Lopez *Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space*, 《Int. Electron. J. Geom.》7（2014）, 第 1 期, 44–107。https://doi.org/ 10 36890 594497 。/iejg。, [13] A. Moroianu S. Moroianu and L. Ornea: *Locally conformally Kähler manifolds with holomorphic Lee field* **60** 2018 33 38 , 《Differential Geom. Appl.》, （ ）, -。https://doi.org/ 10 1016 2018 05 004 。/j.difgeo。。: [14] M. Prvanović *Some properties of the locally conformal Kähler manifold*, 《Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math.》35（2010）, 9–23。https://www.emis.de/journals/BSANU/35/2.html [15] D. Razpopov and I. Dokuzova: *A Riemannian manifold with skew-circulant structuresand an associated locally conformal Kähler manifold*,（2020）https://arxiv.org/abs/ 2007 03386 。: [16] G. E. Vilcu *Ruled CR-submanifolds of locally conformal Kähler manifolds*, 《J. Geom. Phys.》62（2012）, 第 6 期, 1366–1372。https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2012.02.004。

GEORGI DZHELEPOV 经济学院 数学与信息学院 普罗夫迪夫农业大学 保加利亚，普罗夫迪夫 4000 dzhelepov@abv.bg

IVA DOKUZOVA 数学与信息学院 代数与几何系 普罗夫迪夫大学 Paisii Hilendarski 24 Tzar Asen，保加利亚，普罗夫迪夫 4000 dokuzova@uni-plovdiv.bg

DIMITAR RAZPOPOV 经济学院 数学与信息学院 普罗夫迪夫农业大学 保加利亚，普罗夫迪夫 4000 razpopov@au-plovdiv.bg