arXiv:2301.03680v1 [math.GR] 9 Jan 2023

阶与三互素的有限 Moufang 环的同余可解性

ˇ´ALEŠ DRÁPAL 和 PETR VOJTĚCHOVSKÝ

Abstract. 我们证明，若 Moufang 环 Q 的正规子环路 X 诱导出 Q 的阿贝尔同余，当且仅当 Q 的每个内映射在 X 上的限制都是自同构，并且对于所有 x、$y \in X$ 和 $u \in Q$，$u(xy) = (uy)x$。当 X 是 3-可除时，可以省略前一个条件。随后利用这一刻画证明，经典可解的有限 3-可除 Moufang 环路是同余可解的。

1. 引言

环理论中有两种可解性的概念。经典可解性推广了群论中的标准定义，因此，拟群 Q 是经典可解的，当且仅当存在一个级数 $Q = Q_0 \geq Q_1 \geq \cdots \geq Q_n = 1$，使得 $Q_{i+1} \trianglelefteq Q_i$ 且 Q_i/Q_{i+1} 是交换群。等价地，拟群 Q 是经典可解的，当且仅当存在一个级数 $Q = Q_0 \geq Q_1 \geq \cdots \geq Q_n = 1$，使得 $Q_{i+1} \trianglelefteq Q$ 且 Q_i/Q_{i+1} 是交换群。同余可解性是同余模簇中某一定义的特例，因此，拟群 Q 是同余可解的，当且仅当存在一个级数 $Q = Q_0 \geq Q_1 \geq \cdots \geq Q_n = 1$，使得 $Q_{i+1} \trianglelefteq Q$，且 Q/Q_{i+1} 的正规子环路 Q_i/Q_{i+1} 诱导出 Q/Q_{i+1} 的阿贝尔同余。

每个同余可解拟群都是经典可解的，但反过来一般不成立。是否每个经典可解的 Moufang 环都是同余可解的，仍是一个未解决的问题。我们在 [5] 中证明了，在奇数阶 Moufang 环和 6-可除 Moufang 环中，这两种可解性概念是一致的。

一个非平凡的经典可解 Moufang 环 Q 包含一个非平凡的交换子群 X，它是 Q的正规子群。如果 Q 也是同余可解的，X 则可以假设它满足一些容易表述的附加性质（参见定理 2.2），这些性质对 Q的结构具有重要影响。无论这两种可解性概念在 Moufang 环中是否一致，同余可解性都有望显著影响并深化 Moufang 环理论。

本文刻画了能够诱导阿贝尔同余的 3-可除 Moufang 环路的正规子环路，并证明在有限 3-可除 Moufang 环路中，两种可解性概念是等价的，从而改进了 [5] 在有限情形下得到的 6-可除性结果。

2020年数学主题分类。20N05。关键词与短语：同余可解性、可解性、阿贝尔同余、阿贝尔扩张、Moufang 环、3-可除 Moufang 环。ˇ A. Dr´apal 获捷克共和国教育、青年和体育部 INTER-EXCELLENCE 项目 LTAUSA19070 资助。P. Vojtˇechovsk´y 获西蒙斯基金会数学与物理科学数学家合作资助（编号 855097）以及丹佛大学 PROF 资助。

以下是本文的概要。环路的同余交换子理论在[15]中已有描述。在后续论文 [16], 中，Stanovsk´y 和 Vojt˘echovsk´y 列出了若干等价条件，用以刻画能够在 Q中诱导阿贝尔同余的正规子环路 X ，参见[16, 定理 4.1]。我们将其结果中相关部分列为定理 2.1。以定理 2.1 为基础，我们证明，在 Moufang 环的情形下，正规子环路 X 能够在 Q 中诱导阿贝尔同余，当且仅当 (i) Q 的每个内映射在 X上的限制都是一个自同构，并且 (ii) $u(xy) = (uy)x$ 对所有 x、$y \in X$ 和$u \in Q$均成立，参见定理 2.2。对于 3-可除 Moufang 环路，由于条件 (i) 自动满足，我们还可以进一步改进定理 2.2，参见定理 2.5。

给定一个 3-可除 Moufang 环 Q 及其正规子环路 S，我们随后在乘法群 Mlt(Q) 中构造一个特定的次正规列（3.6），该列以相对乘法群 Mlt$_Q$(S) 为起点。该列的一个中间子环路是通过考察 Q的伪自同构而构造的。

在第 5 节中，我们证明每个经典可解的有限 3-可除 Moufang 环都是同余可解的，参见定理 5.7。证明采用对最小反例 Q的阶进行归纳。由于环路中成立三大同构定理和对应定理，群论中的标准证明也适用，从而得到以下结果：若 X 是环路 Q的正规子环路，则 Q 是经典可解的，当且仅当X 和 Q/X 都是经典可解的。同样，若 X 是 Q 的正规子环路，且诱导出 Q的阿贝尔同余，则 Q 同余可解，当且仅当 X 和 Q/X都同余可解。

因此，只需找出一个非平凡的正规子环路 X ，使其 Q 在 Q上诱导阿贝尔同余。如果 Q的核 Nuc(Q 非平凡，则它包含一个非平凡的正规交换子群 X，而每个这样的子群都会根据命题 5.5 在 Q上诱导阿贝尔同余。

如果 Nuc(Q) 是平凡的，那么根据[9, 定理 6]，Mlt(Q) 具有某些三元性自同构。我们在较短的第 4 节中研究具有三元性自同构的 Moufang 环。继续归纳证明，我们接着证明 Q包含一个非平凡的正规 p子群S。级数 (3.6) 给出一个次正规列，它以 p群 Mlt$_Q$(S) 开始（参见定理 5.4），并以 Mlt(Q) $\rtimes S_3$ 结束；后者是由三元性自同构扩张的 Q 乘法群。这就得到 Mlt(Q) 的一个非平凡正规三元性 p子群 U （参见命题 5.6）。最后， $X = U$ (1) 就是所寻得的 Q 正规子环路，它在 Q 上诱导阿贝尔同余（参见命题 4.2，其证明用到了定理 2.5 的刻画）。

本文的主要结果是定理2.2、2.5和5.7。不过，许多辅助结果很可能有助于未来对 Moufang 拟群中同余可解性的研究，以及我们对 Moufang 拟群结构的理解。

2. A characterization of abelian congruences in Moufang loops

参见 [1, 13] ， 了解环理论；参见 [6] ， 了解同余模簇中的交换子理论。

设 $Q = (Q, \cdot, \backslash, /, 1)$ 为一个拟群，即满足恒等式 $x\backslash(x \cdot y) = x \cdot (x\backslash y) = y = (y \cdot x)/x = (y/x) \cdot x$ 和 $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$ 的泛代数，其中对所有 $x, y \in Q$ 均成立。与通常做法相同，我们也用并置表示乘法运算 $\cdot$ ，并假设并置的优先级高于运算 $\cdot$、$\backslash$ 和 $/$。例如， $xy \cdot (u\backslash v) = (x \cdot y) \cdot (u\backslash v)$。

如果对每个 $x \in Q$，都存在 $x^{-1} \in Q$ 使得 $x^{-1} \cdot xy = y = yx \cdot x^{-1}$，则称拟群 Q 为逆性质拟群。这意味着 $1 = xx^{-1} = x^{-1}x$、$(x^{-1})^{-1} = x$、$x\backslash y = x^{-1}y$ 和 $x/y = xy^{-1}$。因此，逆性质拟群可以视为具有群论中熟知的型 $(\cdot, {}^{-1}, 1)$ 的泛代数。

拟群 Q 的结合子拟群称为 Q的子群。拟群 Q 若其中任意元素 Q 都生成一个子群，则称其为幂结合的；若其中任意两个元素 Q 都生成一个子群，则称其为二结合的。对于二结合拟群，我们通常省略不必要的括号，例如写作 xyx，而不写作 $x \cdot yx$ 或 $xy \cdot x$。

拟群恒等式

$$x(y \cdot xz) = (xy \cdot x)z,\ (zx \cdot y)x = z(x \cdot yx),\ x(yz \cdot x) = xy \cdot zx, (x \cdot yz)x = xy \cdot zx \qquad \text{(M)}$$

两两等价，满足其中任一（因而也满足全部）恒等式的拟群称为*Moufang* 环。每个 Moufang 环都是二结合的[12]。

幂结合拟群 Q 若映射 $x \mapsto x^d$ 是到 Q上的满射，则称其为 d-可除。我们断言，有限 Moufang 环路 Q 是 3-可除的，当且仅当 Q 的阶与 3 互素。显然，若 Q 不是 3-可除的，则存在 $x \neq y$ 使得 $x^3 = y^3$，因此群 $\langle x, y\rangle$ 不是 3-可除的，其中含有一个阶为 3 的元素，故由 Moufang 环的逐元素拉格朗日定理，3 整除 $|Q|$。反过来，若 3 整除 $|Q|$，则根据引理[2, 4]，Q 含有一个阶为 3 的元素，因此 Q 不是 3-可除的。

若 u 是拟群 Q的一个元素，则由 u 定义的左平移和右平移分别为 $L_u(v) = uv$ 和 $R_u(v) = vu$。群 $\mathrm{Mlt}(Q) = \langle L_u, R_u : u \in Q\rangle$是 Q的乘法群。$\mathrm{Mlt}(Q)$中固定 1 的元素称为内映射。Q 的内映射构成 $\mathrm{Mlt}(Q)$的子群 $\mathrm{Inn}(Q)$。众所周知，$\mathrm{Inn}(Q) = \langle T_u, L_{u,v}, R_{u,v} : u, v \in Q\rangle$，其中

$$T_u = R_u^{-1}L_u,\ L_{u,v} = L_{uv}^{-1}L_uL_v \text{ and } R_{u,v} = R_{uv}^{-1}R_vR_u, \qquad (2.1)$$

是 $\mathrm{Inn}(Q)$的标准生成元。

设 A 是底集为 A的一个泛代数。A 的同余是 A 上的一个等价关系，它与 A 的所有运算相容。按照[6], ，若对 A 的型中的任意（n+1）元项运算 t，对于所有满足 $a\,\alpha\,b$和 $u_1\,\beta\,v_1, \ldots, u_n\,\beta\,v_n$的 $a, b, u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n \in A$，下述蕴含成立，则称同余 α 在同余 γ 之上中心化同余 β：

$$t(a, u_1, \ldots, u_n)\ \delta\ t(a, v_1, \ldots, v_n)\ \Rightarrow\ t(b, u_1, \ldots, u_n)\ \delta\ t(b, v_1, \ldots, v_n) \qquad (2.2)$$

同余 α 是 阿贝尔的，如果条件（2.2）对 $\beta = \alpha$ 和 $\delta = \{(a, a) : a \in A\}$。

Q 的正规子环路与Q的同余之间存在一一对应关系。对于 $X \trianglelefteq Q$，模$_X$ 诱导的同余定义为：u模$_X$ v 当且仅当 $uX = vX$。对于 Q的同余 α，诱导的正规子环是包含 1 的 α 等价类。

设 $X \trianglelefteq Q$。如果模$_X$ 是 Q 的阿贝尔同余，那么 X 是一个交换群，但在一般拟群中，甚至在 Moufang 环中，反过来并不成立。

以下结果摘自 [16, 定理 4.1]。其中使用了[16], 中采用的略显特殊的交换子和结合子，即 $[x, y] = ((xy)/x)/y$ 和 $[x, y, z] = ((xy \cdot z)/(yz))/x$。注意，我们有 $[x, y] = 1$ 当且仅当 $xy = yx$，并且 $[x, y, z] = 1$ 当且仅当 $xy \cdot z = x \cdot yz$。

定理 2.1（[16]）。设 X 是拟群 Q 的正规子环路。那么以下条件等价：

(i) X 诱导出 Q的阿贝尔同余，

(ii) Q 的每个内映射限制为 X 的一个自同构；并且对于任意 x、 $y \in X$和 u、 v、 $w \in Q$，若 v 模$_X$ w，则有 $[x,y] = [x,y,u] = [x,u,y] = [u,x,y] = 1$ 和$[x,u,v] = [x,u,w]$,

(iii) Q 是 X 通过 Q/X的阿贝尔扩张，也就是说， X 是一个交换群， Q 中存在 X 的一个包含 1 的截面 T；对于任意 r、 $s \in T$，都存在自同构$\varphi_{r,s}$、 $\psi_{r,s} \in$∈Aut(X)以及$\theta_{r,s} \in X$，使得$\varphi_{r,1} = \psi_{1,s} =$、id$_X$、$\theta_{1,s} = \theta_{r,1} = 1$，并且$rx \cdot sy = t \cdot \varphi_{r,s}(x)\psi_{r,s}(y)\theta_{r,s}$，其中 t 是 $T \cap (rs)X$的唯一元素。

对于 Moufang 环路，条件 (ii) 可以大大简化：

定理 2.2. 设 X 是 Moufang 环 Q的一个正规子环路。那么，当且仅当 Q 的每个内映射限制在 X上都是自同构，且对于所有 $u \in Q$ 和 x， $u \cdot xy = uy \cdot x$ 时， X 才诱导 Q 的一个阿贝尔同余。

证明。 直接推论由定理 2.1(ii) 得出，理由如下。显然， Q 的每个内映射限制在 X上都是一个自同构。由于 $[x,y] = 1$ 对所有 x， $y \in X$，正规子环路 X 是交换的。利用交换性以及 $[u,x,y] = 1$ 对 $u \in Q$， x， $y \in X$，我们可推出 $u \cdot yx = u \cdot xy = ux \cdot y$。

反向推论中，设 Q 的每个内映射限制在 X 上都是一个自同构，并且 $u \cdot xy = uy \cdot x$ 对所有 $u \in Q$ 和 x， $y \in X$。后一条件意味着 X 是一个交换群。我们将证明， Q 是 X 被 Q/X扩张得到的阿贝尔扩张，如定理 2.1(iii) 项所述。

设 T是 Q中的 X的一个截面，且 $1 \in T$。设 r、 $s \in T$以及 x、 $y \in X$。在下面的计算中，我们将不再特别说明地使用这样一个事实： Q 的每个内映射限制在 X上都是一个自同构。每当使用 $u \cdot xy = ux \cdot y$，并满足 $u \in Q$ 和 x、 $y \in X$时，我们还会写上 $[Q,X,X] = 1$作为依据说明。最后，对于只涉及交换群 X中因子的子项，我们省略括号。现在：

$$
\begin{aligned}
rx \cdot sy &= rx \cdot T_s(y)s = s(s^{-1}r \cdot L_{s^{-1},r}(x)) \cdot T_s(y)s \\
&= s \cdot (s^{-1}r \cdot L_{s^{-1},r}(x))T_s(y) \cdot s && \text{by (M)} \\
&= s \cdot (s^{-1}r \cdot L_{s^{-1},r}(x)T_s(y)) \cdot s && [Q,X,X] = 1 \\
&= s(s^{-1}r) \cdot L_{s^{-1},r}(x)T_s(y)s = r \cdot L_{s^{-1},r}(x)T_s(y)s && \text{by (M)} \\
&= r \cdot sT_s^{-1}(L_{s^{-1},r}(x)T_s(y)) = rs \cdot L_{r,s}T_s^{-1}(L_{s^{-1},r}(x)T_s(y)) \\
&= tz \cdot L_{r,s}T_s^{-1}(L_{s^{-1},r}(x)T_s(y)) && t \in T \cap (rs)X,\ z \in X \\
&= t \cdot zL_{r,s}T_s^{-1}(L_{s^{-1},r}(x)T_s(y)) && [Q,X,X] = 1 \\
&= t \cdot L_{r,s}T_s^{-1}(L_{s^{-1},r}(x)T_s(y))z && X \text{ is commutative} \\
&= t \cdot (L_{r,s}T_s^{-1}L_{s^{-1},r}(x) \cdot L_{r,s}T_s^{-1}T_s(y) \cdot z).
\end{aligned}
$$

因此，$rx \cdot sy = t \cdot \varphi_{r,s}(x)\psi_{r,s}(y)\theta_{r,s}$，其中 $\varphi_{r,s}$ 是 $L_{r,s}T_s^{-1}L_{s^{-1},r}$ 在 X,$\psi_{r,s}$ 上的限制，$L_{r,s}T_s^{-1}T_s = L_{r,s}$ 在 X 和 $\theta_{r,s} = z \in X$ 上的限制。若 $r = 1$，则 t 是 $T \cap sX$ 的唯一元素，因此 $t = s$ 且$\theta_{1,s} = z = 1$。类似地，$\theta_{r,1} = 1$。我们还有$\varphi_{r,1} = L_{r,1}T_1^{-1}L_{1,r} =id_X$，以及 $\psi_{1,s} = L_{1,s} =$id$_X$。□

我们将改进 2.2 中的定理，针对 3-可除 Moufang 环路的情形展开讨论。首先回顾 Gagola 的两个结果。

Pr命题 2.3 （ [7,定理 1]的对偶）。设 Q 为一个 Moufang 环。那么

$$u^{3i}x \cdot u^{3j}y = u^{3(i+j)}T_u^{-i-2j}(T_u^{i-j}(x)T_u^{i-j}(y))$$

对于所有 u、x、$y \in Q$，以及所有 i、$j \in \mathbb{Z}$。

我们只需在 2.3 命题 的情形 $i = 1$ 和 $j = 0$下使用 [5] 。该情形的简短证明见此处。

命题 2.4 （[8, 定理 1]）。设 Q 是由一组元素生成的 Moufang 环，其中每个元素都是 Q中某个元素的立方。则 Inn(Q) $= \langle T_u : u \in Q\rangle$。

定理 2.5。设 X 是 3-可除 Moufang 环 Q的正规子环路。则 X 在且仅在满足以下条件时诱导出 Q 的阿贝尔同余：对于所有 $u \in Q$ 和 x， $u \cdot xy = uy \cdot x$， $y \in X$。

证明。直接推出由定理 2.2 得出。为证明逆向蕴含，假设对于所有 $u \in Q$ 和 x，$u \cdot xy = uy \cdot x$， $y \in X$，因此 X 是交换群。由于 Q 是 3-可除的， Q 中的每个元素都是 Q 中某个元素的立方，因此命题 2.4 适用。根据命题 2.4 和定理 2.2，只需证明对于每个 $u \in Q$， T_u 在 X 上的限制是一个自同构。令 x、$y \in X$。由$i = 1$ 和 $j = 0$，命题 2.3 的公式变为 $u^3x \cdot y = u^3T_u^{-1}(T_u(x)T_u(y))$。由于假设了 $u^3x \cdot y = u^3 \cdot yx = u^3 \cdot xy$，我们有 $u^3 \cdot xy = u^3T_u^{-1}(T_u(x)T_u(y))$， $xy = T_u^{-1}(T_u(x)T_u(y))$，且 $T_u(xy) = T_u(x)T_u(y)$。□

3. A subnormal series in the multiplication group

若 $S \leq Q$ 和 Q 是拟群，则 Mlt$_Q$(S) $= \langle L_s, R_s : s \in S\rangle \leq$ Mlt(Q) 是 Q 中 S 的相对乘法群。

若 $S \trianglelefteq Q$，则 Mlt(Q/S) 是 Mlt(Q) 在由 $L_x \mapsto L_{xS}$ 和 $R_x \mapsto R_{xS}$ 确定的同态下的像。令 $\mathcal{C}(Q, S)$ 为此同态的核。不难证明， $\mathcal{C}(Q, S)$ 由所有能使 S 在 Q 中的陪集保持不变的 $\varphi \in$ Mlt(Q) 构成，即对所有 $u \in Q$， $\varphi(uS) = uS$。

引理 3.1. 设 S 是 Q 的正规子环路。那么

$$\mathcal{C}(Q, S) = \{L_s\sigma, R_s\sigma : s \in S,\ \sigma \in \mathrm{Inn}(Q) \cap \mathcal{C}(Q, S)\}.$$

证明。给定 $\varphi \in$ Mlt(Q)，存在唯一确定的 $v \in Q$ 和 $\sigma \in$ Inn(Q)，使得$\varphi = L_v\sigma$。若 $\sigma \in$ Inn(Q) $\cap\, \mathcal{C}(Q, S)$ 且 $s \in S$，则对所有 $u \in Q$， $L_s\sigma(uS) = L_s(uS) = L_s(Su) = s(Su) =$($sS$) $u = Su = uS$，因此 $\sigma \in$Inn(Q) $\cap\, \mathcal{C}(Q, S)$ 且 $L_s\sigma \in \mathcal{C}(Q, S)$。反过来，设 $\varphi = L_v\sigma \in \mathcal{C}(Q, S)$。由于 $S = \varphi(S) = L_v\sigma(S) = L_v(S) = vS$，可得 $v \in S$。此外， $\sigma(uS) = L_v^{-1}L_v\sigma(uS) = L_v^{-1}($ $uS) = uS$，因为 $v \in S$。关于 $R_s\sigma$ 的论证类似。□

特别地，Mlt$_Q$(S) $= \langle L_s, R_s : s \in S\rangle \leq \mathcal{C}(Q, S) \trianglelefteq$Mlt($Q$). 本节将针对 3-可除 Moufang 环路的情形，将这个级数细化为次正规列。

F对于拟群 Q，定义核 Nuc(Q) 和左核 Nuc$_\ell$(Q) 如下：

$$\mathrm{Nuc}(Q) = \{a \in Q : a(uv) = (au)v,\ u(av) = (ua)v,\ u(va) = (uv)a \text{ for all } u, v \in Q\},$$

Nuc$_\ell$(Q) $= \{a \in Q :$ $a(uv)$ $=$ $(au)v$ 对所有 $u, v \in Q\}$.

Bruck 在 [1] 证明，核是 Q 的子群；若 Q 是 Moufang 拟群，则 Nuc(Q) =Nuc$_\ell$(Q) 是 Q 的正规子环路。

Q 的（左）伪自同构 φ 是 Q 的一个置换，并且存在某个 $c \in Q$ 使得

$$c\varphi(x) \cdot \varphi(y) = c\varphi(xy)$$

对所有 $x, y \in Q$。元素 c 称为 φ 的（左）伴随元。当且仅当 $d/c \in \mathrm{Nuc}_\ell(Q)$ 时，$d \in Q$ 是 φ 的另一个伴随元。

用 $\mathrm{Psa}_\ell(Q)$ 表示所有满足以下条件的有序对 (c, φ) 的集合：c 是 Q 的伪自同构 φ 的左伴随元。则 $\mathrm{Psa}_\ell(Q)$ 在以下运算下构成一个群

$$(c, \varphi)(d, \psi) = (c\varphi(d), \varphi\psi) \text{ and } (c, \varphi)^{-1} = (\varphi^{-1}(c^{-1}), \varphi^{-1}). \tag{3.1}$$

伪自同构可以通过自同位来解释。Q 的置换三元组 (α, β, γ) 是 Q 的一个自同位，当且仅当

$$\alpha(x)\beta(y) = \gamma(xy) \tag{3.2}$$

对所有 $x, y \in Q$。显然，

$$(c, \varphi) \in \mathrm{Psa}_\ell(Q) \quad \Leftrightarrow \quad (L_c\varphi, \varphi, L_c\varphi) \in \mathrm{Atp}(Q). \tag{3.3}$$

Q 的所有自同位构成自同位群 $\mathrm{Atp}(Q)$，其运算为逐分量复合。若 $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{Atp}(Q)$ 且 $\beta(1) = 1$，则 $\alpha = \gamma$，并且 $(\alpha(1)\ \beta) = (\gamma(1)\ \beta) \in \mathrm{Psa}_\ell(Q)$。令 $y = 1$，再令 $x = 1$，代入 (3.2) 即可容易验证这一点。

现在我们总结 Moufang 环中有关自同位和伪自同构的基本事实，参见 [1]。

设 Q 是一个 Moufang 环。Q 的每个内映射都是一个伪自同构。通过验证以下众所周知的恒等式即可看出这一点：

$$\begin{gathered}(x^{-3}, T_x) \in \mathrm{Psa}_\ell(Q),\ ([x^{-1}, y], [L_x, R_y]) \in \mathrm{Psa}_\ell(Q), \\ L_{x,y} = [L_x, R_y^{-1}] = [R_x^{-1}, L_y] \text{ and } R_{x,y} = [L_y^{-1}, R_x] = [R_y, L_x^{-1}].\end{gathered} \tag{3.4}$$

设 $M_x = L_x R_x$。由于 Q 是 Moufang 的，M_x 也等于 $R_x L_x$。若 $x \in Q$，则 $\mathrm{Atp}(Q)$ 包含以下每个三元组：

$$(L_x, R_x, M_x),\ (M_x, L_x^{-1}, L_x) \text{ and } (R_x^{-1}, M_x, R_x). \tag{3.5}$$

Moufang 环 Q 的半自同构是 Q 上满足 $\varphi(1) = 1$ 和 $\varphi(xyx) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)$ 的双射 φ，对所有 x、$y \in Q$ 均成立。每个半自同构都满足 $\varphi(x^i) = \varphi(x)^i$，对所有 $x \in Q$ 和 $i \in \mathbb{Z}$ 均成立。Moufang 环的每个伪自同构都是半自同构。特别地，若 $\varphi \in \mathrm{Inn}(Q)$，则 $\varphi(x^{-1}) = x^{-1}$。

引理 3.2. 设 Q 是一个 Moufang 环。假设 $x \in Q$ 和 $(c, \varphi) \in \mathrm{Psa}_\ell(Q)$。那么

$$(c^{\varphi(x^{-1})}, L_{\varphi(x)}^{-1}\varphi L_x) \in \mathrm{Psa}_\ell(Q),$$

其中 $c^y = y^{-1}cy$。

证明。设 $\psi = L_{\varphi x}^{-1}\varphi L_x$ 并注意到 $\psi(1) = 1$。由（3.3）和（3.5）可知该复合映射 on

$$(M_{\varphi(x)}, L_{\varphi(x)}^{-1}, L_{\varphi(x)})(L_c\varphi, \varphi, L_c\varphi)(M_x^{-1}, L_x, L_x^{-1})$$

是 Q 的一个自同位。因此，$\psi = L_{\varphi x}^{-1}\varphi L_x$ 的一个伴随元等于 $L_{\varphi(x)}L_c\varphi L_x^{-1}(1) = \varphi(x)c\varphi(x^{-1}) = \varphi(x^{-1})^{-1}c\varphi(x^{-1})$。□

以下结果将用于定理 5.7的归纳证明。

引理 3.3. 设 A 是 Moufang 环 Q 的有限交换正规子群。设 p 是整除 $|A|$ 的素数。那么存在 A 的一个非平凡正规 p-子群，且该子群正规于 Q。

证明。令 S 为交换群 A的 p-主分量。令 φ 为 Q的一个内映射。由于 $A \trianglelefteq Q$， $\varphi(A) = A$。由于 φ 是 Q的半自同构，它在 A上的限制是一个半自同构。回顾一下，对于所有 $x \in Q$ 和 $i \in \mathbb{Z}$， $\varphi(x^i) = \varphi(x)^i$。特别地，若$x \in S$，则 $|\varphi(x)|$ 整除 $|x|$，因此 $\varphi(x) \in S$。□

令 S 为 Moufang 环 Q的一个正规子环路。回顾 Mlt(Q) 的正规子群 $\mathcal{C}(Q, S)$，并将 $\mathcal{C}_0(Q, S)$ 定义为所有满足以下条件的 $\varphi \in \mathcal{C}(Q, S)$ 的集合：当 φ 写作 $\varphi = L_s\sigma$，其中 $s \in S$ 且 $\sigma \in$Inn(Q)（参见引理 3.1）时，伪自同构 σ 在 S中有一个伴随元。

命题 3.4. 设 S 是 Moufang 环 Q 的正规子环路。那么 $\mathcal{C}_0(Q, S)$ 是 $\mathcal{C}(Q, S)$ 的正规子群。

证明. 设 $\varphi = L_s\sigma \in \mathcal{C}(Q, S)$，其中 $s \in S$ 和 $\sigma \in$ 属于 Inn(Q)，并设 $c \in Q$ 是σ 的伴随元。我们证明映射

$$f : \mathcal{C}(Q, S) \to Q/(\mathrm{Nuc}(Q)S), \quad L_s\sigma \mapsto c(\mathrm{Nuc}(Q)S)$$

是一个定义良好的同态，其核为 $\mathcal{C}_0(Q, S)$。

由于 S 和 Nuc(Q) 都是 Q 的正规子环路，它们生成正规子环路 Nuc(Q)$S \trianglelefteq Q$。若 c 和 d 是 σ 的伴随元，则 $d \in c$Nuc(Q) $\subseteq c$Nuc(Q)S，因此 f 定义良好。为验证同态性质，考虑 $L_s\sigma$, $L_t\tau \in \mathcal{C}(Q, S)$（其中 $s, t \in S$ 和 $\sigma, \tau \in$ 属于 Inn(Q)），使得 (c, σ)、$(d, \tau) \in \mathrm{Psa}_\ell(Q)$，其中某些 $c, d \in Q$ 满足条件。我们有 $f(L_s\sigma)f(L_t\tau) = c$Nuc($Q$)$S \cdot d$Nuc($Q$)$S = (cd)$ Nuc(Q)S。令

$$\psi = L_{s\sigma(t)}^{-1} L_s\sigma L_t\tau = L_{s\sigma(t)}^{-1} L_s L_{\sigma(t)} L_{\sigma(t)}^{-1} \sigma L_t\tau$$

并注意到 $\psi(1) = 1$，因此 $\psi \in$ Inn(Q)。为计算 ψ的一个伴随元，注意到$[s^{-1}, \sigma(t^{-1})]$ 是 $L_{s\sigma(t)}^{-1} L_s L_{\sigma(t)} = L_s$的一个伴随元，$_{\sigma(t)} = [L_s, R_{\sigma(t)}^{-1}(\,)]$，由(3.4)可知；根据引理 3.2， $c^{\sigma(t^{-1})}$ 是$L_{\sigma(t)}^{-1}(\,)\sigma L_t$的一个伴随元。利用(3.1)， $L_{\sigma(t)}^{-1}(\,)\sigma L_t\tau$ 有一个伴随元 $c^{\sigma(t^{-1})}L_{\sigma(t)}^{-1}(\,)\sigma L_t(d) = c^{\sigma(t^{-1})} \cdot \sigma(t^{-1})\sigma(td)$。再次利用(3.1)表明， ψ 具有一个伴随元

$$e = [s^{-1}, \sigma(t^{-1})]\,[L_s, R_{\sigma(t)}^{-1}]\left(c^{\sigma(t^{-1})} \cdot \sigma(t^{-1})\sigma(td)\right).$$

根据引理 3.1， σ、 τ、 $L_{s\sigma(t)}$、 $L_{\sigma(t)}$和 L_s都属于 $\mathcal{C}(Q, S)$。因此 $\psi \in$Inn(Q) $\cap \mathcal{C}(Q, S)$。由于 $s\sigma(t) \in S$，我们看到 $L_s\sigma L_t\tau$ 分解为 $L_{s\sigma(t)}\psi$，且 $f(\psi) = e$Nuc(Q)S。对于同态性质，只需证明 $e \equiv cd$ 模 Nuc(Q)S。由于 σ中心化 S 的陪集，且我们在模 Nuc(Q)$S \geq S$的意义下工作， e 等价于

$$[s^{-1}, t^{-1}][L_s, R_t^{-1}](c^{(t^{-1})} \cdot t^{-1}(td)).$$

由于 $s, t \in S$，我们进一步得到 $e \equiv [L_s, R_t^{-1}](cd)$。左平移 L_s 模S相同，因此 $e \equiv cd$ 成立。

f 的核由所有满足 σ 在 Nuc(Q)S中有一个伴随元的 $L_s\sigma \in \mathcal{C}(Q, S)$组成。由于这些伴随元在模 Nuc($Q$) 的意义下唯一确定，因此该核与 $\mathcal{C}_0(Q, S)$ 重合。□

命题 3.5. 设 S 是 Moufang 环 Q 的正规子环路。若 S 是 3-可除的，则 Mlt$_Q(S) \trianglelefteq \mathcal{C}_0(Q, S)$。

证明. 设 $t \in S$ 和 $L_s\sigma \in \mathcal{C}_0(Q,S)$，其中 $s \in S$ 和 $\sigma \in \mathrm{Inn}(Q) \cap \mathcal{C}(Q,S)$ 有一个伴随元 $c \in S$。我们需要证明 $L_t^{L_s\sigma}, R_t^{L_s\sigma} \in \mathrm{Mlt}_Q(S)$。由于 $L_t^{L_s\sigma} = (L_s^{-1}L_tL_s)^\sigma = (L_s^{-1})^\sigma L_t^\sigma L_s^\sigma$，$(L_s^{-1})^\sigma = (L_s^\sigma)^{-1}$，对 $R_t^{L_s\sigma}$ 也同理，因此我们只需证明 $L_s^\sigma, R_s^\sigma \in \mathrm{Mlt}_Q(S)$。我们将证明 $L_s^\sigma \in \mathrm{Mlt}_Q(S)$，另一种情况的证明与此对偶。

由于 S 是 3-可除的，因此存在 $d \in S$ 使得 $d^3 = c$。注意到 $T_d(c) = c$。根据 (3.1)，$\mathrm{Psa}_\ell(Q)$ 包含 $(c^{-1}, T_d)(c,\sigma) = (c^{-1}T_d(c)\ T_d\sigma) = (1, T_d\sigma)$，这意味着 $\alpha = T_d\sigma$ 是 Q 的自同构。回顾一下，对于所有 $x \in Q$，都有 $L_x^\alpha = \alpha^{-1}L_x\alpha = L_{\alpha^{-1}(x)}, R_x^\alpha = R_{\alpha^{-1}(x)}$，因此 $T_x^\alpha = T_{\alpha^{-1}(x)}$。此外，在 Moufang 拟群中有 $T_x^{-1} = T_{x^{-1}}$。因此

$$L_s^\sigma = (L_s^{T_d^{-1}})^\alpha = (T_dL_sT_{d^{-1}})^\alpha = T_{\alpha^{-1}(d)}L_{\alpha^{-1}(s)}T_{\alpha^{-1}(d^{-1})}$$

属于 $\mathrm{Mlt}_Q(S)$，因为 $\alpha(S) = T_d\sigma(S) = T_d(S) = S$。 □

推论 3.6。设 S 是 Moufang 环 Q的一个正规 3-可除子环。 n

$$\mathrm{Mlt}_Q(S) \trianglelefteq \mathcal{C}_0(Q,S) \trianglelefteq C(Q,S) \trianglelefteq \mathrm{Mlt}(Q). \tag{3.6}$$

4. Moufang loops admitting triality automorphisms

Glauberman 在 [9, 定理 6] 中指出，如果 Q 是核平凡的 Moufang 拟群，那么这些映射

$$\sigma : L_x \mapsto R_x^{-1},\ R_x \mapsto L_x^{-1}$$
$$\rho : L_x \mapsto R_x,\ R_x \mapsto M_x^{-1} = L_x^{-1}R_x^{-1}\ (\text{and } M_x \mapsto L_x^{-1})$$

可唯一延拓为 $\mathrm{Mlt}(Q)$ 的自同构。关于具有三重性的群和 Moufang 环的更多信息，参见 [2, 14] 和 [11, 第 13] 章。

如果一个 Moufang 拟群 Q 允许三元性自同构，我们就称之为允许三元性自同构。若上述映射 σ 和 ρ 可延拓为 $\mathrm{Mlt}(Q)$ 的自同构。（确实存在核非平凡且允许三元性自同构的 Moufang 拟群。）

设 Moufang 拟群 Q 允许三元性自同构。由于子群 $\langle\sigma,\rho\rangle$满足对称群 S_3的标准表示关系，因此它同构于 S_3的一个同态像。于是 Q 确定了一个半直积 $\mathrm{Mlt}(Q) \rtimes S_3$（其作用由 S_3 给出，但该作用未必忠实）。令 $\alpha = \sigma\rho$ 和 $\beta = \sigma\rho^2$，使得 $\alpha(L_x) = L_x^{-1}$,$\alpha(R_x) = M_x$, $\beta(L_x) = M_x$, $\beta(R_x) = R_x^{-1}$以及 $\sigma = \alpha\beta\alpha$。注意， σ 与 $\mathrm{Inn}(Q)$ 对易。事实上， $\sigma(T_x) = \sigma(R_x^{-1}L_x) = L_xR_x^{-1} = T_x$, $\sigma(L_{x,y}) = \sigma([L_x, R_y^{-1}]) = [R_x^{-1}, L_y] = L_{x,y}$ 和 $\sigma(R_{x,y}) = \sigma([L_y^{-1}, R_x]) = [R_y, L_x^{-1}] = R_{x,y}$，这里用到了 (3.4)。

设 Q 是一个具有三元性自同构的 Moufang 环。若子群 $U \leq \mathrm{Mlt}(Q)$ 在三元性自同构 σ 和 ρ下保持不变，则称其为三重性子群。如果 $U \trianglelefteq \mathrm{Mlt}(Q)$，那么 U 是三重性子群，当且仅当 $U \trianglelefteq \mathrm{Mlt}(Q)$ 在 S_3的诱导作用下 $\rtimes S_3$。

引理 4.1. 设 Q 是一个具有三元性自同构的 Moufang 环，且 $U \trianglelefteq \mathrm{Mlt}(Q)$ 是一个三重性子群。令 $S = U(1)$ 为包含元素 1 的 U 的轨道。那么 S 是 Q 的正规子环路，且 $\mathrm{Mlt}_Q(S) \leq U$。

证明。由于 U 是正规子环，与 S 在 $\mathrm{Mlt}(Q)$ 中共轭的块构成 Q的某个同余的等价类。这意味着 S 在 Q中是正规的。对于每个 $s \in S$，存在 $\varphi \in \mathrm{Inn}(Q)$，使得 $L_s\varphi \in U$。于是 $M_s = L_sR_s = L_s\varphi(R_s^{-1}\varphi)^{-1} = L_s\varphi\sigma(L_s\varphi)^{-1} \in U$。因此，$R_s = \alpha(M_s) \in U$ 且 $L_s = \beta(M_s) \in U$。□

命题 4.2. 设 Q 是一个具有三元性自同构的 3-可除 Moufang 环。设 $U \trianglelefteq \mathrm{Mlt}(Q)$ 是一个非平凡的交换三元性子群。则 Q 含有一个非平凡子环 $X \trianglelefteq Q$，它在 Q上诱导一个阿贝尔同余。

证明。由引理 4.1，$X = U(1)$ 是 Q such L_x 的正规子环路，$R_x \in U$ 对所有 $x \in X$ 均成立。由于 U 是交换的，$[L_x, L_y] = \mathrm{id}_Q = [L_x, R_y]$ 对所有 x、$y \in Q$ 均成立。第一个条件意味着 X 是交换的。第二个条件表明，对于所有 x、$y \in X$、$u \in Q$，$x \cdot uy = xu \cdot y$。于是，由 Moufang 定理 [12, 3]，对所有 x、$y \in X$、$u \in Q$，$u \cdot xy = ux \cdot y$。因此，对所有 x、$y \in X$、$u \in Q$，$u \cdot yx = u \cdot xy = ux \cdot y$。根据定理 2.5，$X$ 在 Q 上诱导出一个阿贝尔同余。□

5. Solvability in finite Moufang loops of order coprime to three

本节将证明，对于有限 3-可除 Moufang 环路，可解性的两个概念是一致的。我们从初等群论中的一个众所周知的事实开始：

引理 5.1. 设 H 是有限群 G的次正规子群。若存在非平凡的 p-群 $N \trianglelefteq H$，其中 p 是素数，则 G 含有非平凡正规 p-子群。

证明. 不失一般性，可假设 N 是 H的极小正规 p-子群。因此，存在 $U \leq H$，使得 $N \leq U$，且 U 是 H的极小特征子群。由于 $N \trianglelefteq U$，群 U 必为 p-群。

若 $H \trianglelefteq G$，则 $U \trianglelefteq G$，因为 U 是 H的特征子群。这就证明了推广情形 $N \trianglelefteq H = H_k \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_0 = G$中的 $k = 1$ 情形。设 $k > 1$，并用归纳法进行证明。由归纳假设，H_1存在一个非平凡正规 p-子群。由 $k = 1$情形即可得证。□

接下来，我们回顾 Glauberman 和 Wright 关于素数幂阶 Moufang 环的一个结果。奇数情形在 [9] 中得到证明，偶数情形在 [10] 中得到证明。一种涵盖这两种情形的新证明见于 [4]。

定理 5.2（[9, 10]）。设 Q 是一个素数幂阶的 Moufang 环 p^k。那么 Q 是中心幂零的，且 Mlt(Q) 是一个 p-群。

下文不会用到定理 5.3，但我们将其作为定理 5.4 的动机；后者取自 [4]。为方便读者，我们给出了定理 5.4 的证明。

对于一个素数集合 π，幂结合环路 Q 若对每个 $x \in Q$，x 的阶都是来自 π 的某个素数的幂，则称其为 π-环路。

定理 5.3（[9,定理 3]）。设 Q 是一个奇数阶 Moufang 环，π 是一个素数集合，且 S 是 Q 的一个经典可解 π- 子环。那么 Mlt$_Q$(S) 是一个可解的 π- 群。

定理 5.4（[4]）。设 Q 是一个有限 Moufang 环路，p 是一个素数，且 S 是 Q 的一个 p-子环。那么 Mlt$_Q$(S) 是一个 p-群。

证明。将 $\varphi \in$ Mlt$_Q$(S) 限制到 Mlt(S)，得到一个核为 Fix$_Q$(S) $=\{\varphi \in$ Mlt$_Q$(S) : $\varphi(s) = s$ for all $s \in S\}$ 的满同态。根据定理 5.2，Mlt(S) 是一个 p-群，因此 Mlt$_Q$(S)/Fix$_Q$(S) 是一个 p-群。

考虑群 Inn$_Q$(S) $=$ Mlt$_Q$(S) $\cap$ Inn(Q) $= \langle T_s, L_{s,t}, R_{s,t} : s, t \in S\rangle$。对于每个$\varphi \in$ Inn$_Q$(S)，令 $C(\varphi)$为 φ的所有伴随元构成的集合，它是 $N =$ Nuc(Q)的一个陪集。由于

Inn 的标准生成元$_Q(S)$ 是伪自同构，其伴随元属于 S，且每个$\varphi \in \mathrm{Inn}_Q(S)$ 都满足 $\varphi(S) = S$，由（3.1）可得 $C(\varphi) \cap S \neq \emptyset$。

对于 $\varphi, \psi \in \mathrm{Fix}_Q(S)$，因此我们必然有 $c, d \in S$，使得 (c, φ)、$(d, \psi) \in \mathrm{Psa}_\ell(Q)$。由于 $\varphi(d) = d$，根据 (3.1)，我们还有 $(cd, \varphi\psi) = (c, \varphi)(d, \psi) \in \mathrm{Psa}_\ell(Q)$，从而证明了 $cd \in C(\varphi\psi)$。元素 cd 也属于 $C(\varphi)C(\psi) = cNdN = cdN$。因此，$\varphi \mapsto C(\varphi)$ 是从群 $\mathrm{Fix}_Q(S)$ 到拟群 $SN/N \cong S/(S \cap N)$ 的同态。设 A 为该同态的核。由于像是结合的，它等于 $S/(S \cap N)$ 的一个子群，即某个 p-群。因此，$\mathrm{Fix}_Q(S)/A$ 是一个 p-群。

核 A 由 Q 中所有包含于 $\mathrm{Fix}_Q(S)$ 的自同构构成。现在，$\alpha L_s \alpha^{-1} = L_{\alpha(s)} = L_s$ 对每个 $s \in S$ 和 $\alpha \in A$ 都成立。R_s 的情形类似。因此，$A \leq Z(\mathrm{Mlt}_Q(S))$ 是一个交换群。将 A 写作 $B \times D$，其中 B 是 A 的 p-主分量。B 和 D 都是 $\mathrm{Mlt}_Q(S)$ 的正规子群，因为它们位于中心。$\mathrm{Mlt}_Q(S)/\mathrm{Fix}_Q(S)$、$\mathrm{Fix}_Q(S)/A$ 和 A/D 这三者都是 p-群。因此，$\mathrm{Mlt}_Q(S)/D$ 是一个 p-群。子群 D 是交换的正规子群，且其阶与 $\mathrm{Mlt}_Q(S)/D$ 互素。因此，它在 $\mathrm{Mlt}_Q(S)$ 中有一个补群，记为 P，它是 $\mathrm{Mlt}_Q(S)$ 的一个 Sylow p-子群。由于 $D \leq Z(\mathrm{Mlt}_Q(S))$，$P$ 是 $\mathrm{Mlt}_Q(S)$ 的正规子群，因而是 $\mathrm{Mlt}_Q(S)$ 的唯一 Sylow p-子群。对于 $s \in S$，由二结合性可得 $|L_s| = |R_s| = |s|$。由于 S 是一个 p-环，且穆芳环满足逐元素拉格朗日定理，因此 L_s 和 R_s 均属于 P。因此，$P = \mathrm{Mlt}_Q(S) = \langle L_s, R_s : s \in S \rangle$。□

命题 5.5. 设 X 是 Moufang 环 Q 的交换正规子拟群。若 $X \leq \mathrm{Nuc}(Q)$，则 X 诱导出 Q 的阿贝尔同余。

证明。由 [1], $\mathrm{Nuc}(Q) \trianglelefteq Q$。因此，若 $a, b \in \mathrm{Nuc}(Q)$ 且 $x \in Q$，则

$$T_x(ab) = (x \cdot ab)x^{-1} = (xa \cdot b)x^{-1} = (T_x(a)x \cdot b)x^{-1} = (T_x(a) \cdot xb)x^{-1} = T_x(a)T_x(b), \quad (5.1)$$

这里我们在 $T_x(a) \in \mathrm{Nuc}(Q)$ 中使用了这一步。$\mathrm{Inn}(Q)$ 的其余标准生成元在 $\mathrm{Nuc}(Q)$ 上的作用均为平凡。根据定理 2.2，X 诱导出 Q 的阿贝尔同余。□

命题 5.6. 设 Q 是一个有限 3-可除 Moufang 环，且有一个非平凡正规 p-子环 S，其中 $p \neq 3$ 为素数。则 $\mathrm{Mlt}(Q)$ 包含一个非平凡正规初等阿贝尔p-子群。此外，若 Q 也具有三元性自同构，则 $\mathrm{Mlt}(Q)$ 包含一个非平凡正规初等阿贝尔三元性 p-子群。

证明。只需证明 $\mathrm{Mlt}(Q)$ 含有一个非平凡正规 p-子群，因为这类 p-群的中心是特征子群，而阿贝尔 p-群的根基也是特征子群。根据引理 5.1，甚至只需证明存在一个次正规 p-群。

推论 3.6表明次正规列 (3.6) 存在。根据定理 5.4，$\mathrm{Mlt}_Q(S)$ 是一个 p-群。

如果 Q 承认三元性自同构，则可通过 $\mathrm{Mlt}(Q) \trianglelefteq \mathrm{Mlt}(Q) \rtimes S_3$来扩展次正规列 (3.6)。□

定理 5.7. 设 Q 是一个有限 3-可除 Moufang 环。则 Q 经典可解，当且仅当它是同余可解的。

证明。反向蕴含一般成立。对于正向蕴含，设 Q 是一个最小的 3-可除 Moufang 环，它是经典可解的，但不是同余可解的。如果 Q 的正规子环路 X 所诱导的 Q 的同余是阿贝尔同余，那么 Q/X 是 3-可除且经典可解的，因此根据 Q 的极小性，它是同余可解的，但是

于是 Q 是同余可解的，因为它是一个同余可解拟群 Q/X 对交换群 X 的阿贝尔扩张，这就产生了矛盾。

设 $1 < N = \mathrm{Nuc}(Q) \trianglelefteq Q$。由于 Q 是经典可解的，群 N 是可解的。因此，它包含一个非平凡的特征交换子群 $X \trianglelefteq N$。根据 (5.1)，$\mathrm{Inn}(Q)$ 作为 $\mathrm{Aut}(N)$ 的子群作用于 X。因此，对每个 $\varphi \in \mathrm{Inn}(Q)$，都有 $\varphi(X) = X$。但这意味着 X 是 Q的正规子环路。于是，根据命题 5.5， X 诱导出 Q 的一个阿贝尔同余。

现在设 $\mathrm{Nuc}(Q) = 1$。那么 Q 具有三元性自同构，参见第 4 节。由于 Q 是经典可解的，它有一个由 Q 的正规子环构成的级数，其因子为交换群。特别地， Q包含一个非平凡的正规交换子群A，它是该级数中第一个非平凡项。令 p 为整除 $|A|$的任一素数，必然有$p \neq 3$。根据引理 3.3， Q 包含一个非平凡的正规 p-子群 S （包含于 A中）。根据命题 5.6，$\mathrm{Mlt}(Q)$ 包含一个非平凡的正规交换三元性子群。根据命题 4.2， Q包含一个非平凡的正规子环路，它诱导出 Q的一个阿贝尔同余。□

References

[1] R. H. Bruck，《二元系统概论》，施普林格出版社，1971。[2] S. Doro，简单 Moufang 环，《剑桥哲学学会数学论文集》83（1978），第3期，377–392。[3] A. Dr´apal，Moufang 定理的一个简化证明，《美国数学会会刊》139（2011），第1期，93–98。[4] A. Dr´apal，素数幂阶 Moufang 环的中心幂零性的一个简短证明，已投稿。[5] A. Dr´apal 和 P. Vojtˇechovsk´y，Moufang 环中的阿贝尔同余与可解性，已投稿。[6] R. Freese 和 R. McKenzie，同余模簇的环路交换子理论，伦敦数学会讲义系列125，剑桥大学出版社，剑桥，1987。[7] S.M. Gagola, III，由半自同构诱导的 Moufang 环循环扩张，《代数与应用杂志》13（2014），第4期，1350128，共7页。[8] S.M. Gagola, III，内映射群何时由共轭映射生成? 《数学文献》（巴塞尔）101（2013），207–212。[9] G. Glauberman，奇数阶环路，第二部分，《代数杂志》8（1968），393–414。[10] G. Glauberman 和 C.R.B. Wright，有限 Moufang 2-环路的幂零性，《代数杂志》8（1968），415–417。[11] J.I. Hall，Moufang 环与具有三重性的群本质上是同一回事，《美国数学会回忆录》260（2019），第1252期。[12] R. Moufang，关于交错代数的结构，《数学年刊》110（1935），第1期，416–430。[13] H.O. Pflugfelder，《拟群与环路：导论》，Heldermann，柏林（1990）。[14] J.D. Phillips，具有三重性的 Moufang 环乘法群，《落基山数学杂志》29（1999），第4期，1483–1490。[15] D. Stanovsk´y 和 P. Vojtˇechovsk´y，环路交换子理论，《代数杂志》399（2014），290–322。[16] D. Stanovsk´y 和 P. Vojtˇechovsk´y，阿贝尔扩张与可解环路，《数学成果》66（2014），367–384。

(Dr´apal) Dept. of Mathematics, Charles University, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, CzechRepublic电子邮箱，Dr´apal：drapal@karlin.mff.cuni.cz

(Vojtˇechovsk´y) Dept. of Mathematics, University of Denver, 2390 S. York St., Denver, CO80208, USA电子邮箱，Vojtˇechovsk´y：petr@math.du.edu