arXiv:2301.03735v1 [math.RA] 10 Jan 2023

代数的乘子与弱乘子

Yuji Kobayashi 和 Sin-Ei Takahasi

数学与博弈实验室(https://math-game-labo.com)

2020年数学学科分类号：主分类 43A22；次分类 17A99、46J10。$Keywords$：（弱）乘子、（非）结合代数、约当代数、零幂代数、湮灭子、零分解、矩阵表示。

摘要

我们研究代数的乘子与弱乘子的一般性质，并运用所得结果确定代数闭域上3维结合代数和幂零代数的（弱）乘子。

1 引言

代数的乘子，尤其是巴拿赫代数的乘子，已在分析学中有所讨论。本文将以纯代数的方式讨论它们。

设 B 是一个巴拿赫代数。若映射 $T\colon B\to B$ 满足条件 (I) $xT(y)=T(xy)=T(x)y(x,y\in B)$，则称其为 B 的乘子。用 $M(B)$ 表示 B 的所有乘子所构成的集合，用 $B(B)$表示 B上所有有界线性算子所构成的集合。那么，$M(B)$构成一个代数，而 $B(B)$构成一个巴拿赫代数。若 B 没有非零的左湮灭子或右湮灭子，则称其为无序的。若 B 无序，则 $M(B)$构成 $B(B)$的交换闭子代数（见 [2], 命题1.4.11）。1953年，Wendel [7] 证明了一个重要结果：局部紧阿贝尔群 G 上的 $L^1(G)$的乘子代数与 G上的测度代数等距同构。Johnson[1]发展了巴拿赫代数乘子的一般理论。Larsen [5]的著作是巴拿赫代数乘子理论的一本优秀参考书。

当 B 没有序时，若 T 满足条件 (II)$xT(y)=T(x)y(x,y\in B)$，则称其为乘子。直到最近，许多研究者仍未意识到条件 (I) 与 (II) 之间的区别，Zivari-Kazempour [8] （另见 [9]）对此作了明确阐述。我们称满足条件 (II) 的映射 T 为弱乘子，并将 B的弱乘子集合记为 $M'(B)$。因此，$M(B)$ 一般是 $M'(B)$ 的真子集。此外，（弱）乘子可以

定义在不一定满足结合律的代数 A 上，并且它们一般不是线性映射。我们分别将 A的线性乘子空间和线性弱乘子空间记为 $LM(A)$ 和 $LM'(A)$。 $M(A)$ 和 $LM(A)$ 是代数 A^A 的子代数，其中包含从 A 到其自身的所有映射。同时，$M'(A)$ 和 $LM'(A)$ 在运算 $\circ$下封闭，该运算由 $T \circ S = TS + ST$定义，并且它们构成一个约当代数。

在第2至5节中，我们研究（弱）乘子的常见性质。特别是，在第3节和第4节中，我们给出了关于（弱）乘子的分解定理（定理 3.1）和矩阵方程（定理 4.2）。它们在分析（弱）乘子时发挥着重要作用。

Kobayashi 等人在 [3] 和 [4]中给出了代数闭域上特征不等于 2 的3维结合代数和幂零代数的完整分类。在第6节和第7节中，我们完全确定了这些代数的（线性）弱乘子。

2 乘子与弱乘子

设 K 是一个域， A 是其上的一个（不一定是结合的）代数。所有从 A 到 A 的映射构成的集合 A^A 按照通常的方式构成一个域 K 上的结合代数。令 $L(A)$ 表示 A^A 中所有从 A 到 A的线性映射构成的子代数。

映射 $T\colon A \to A$ 是 A 的弱乘子，当且仅当

$$xT(y) = T(x)y \tag{1}$$

对任意 x、$y \in A$，上述关系均成立；若对任意 x、$y \in A$， T 均成立，则 T 是乘子。

$$xT(y) = T(xy) = T(x)y \tag{2}$$

对任意 x、 $y \in A$。令 $M(A)$（分别为 $M'(A)$）表示 A 的所有乘子（分别为弱乘子）所构成的集合。定义

$$LM(A) \stackrel{\text{def}}{=} M(A) \cap L(A) \text{ and } LM'(A) \stackrel{\text{def}}{=} M'(A) \cap L(A).$$

命题 2.1. $M(A)$（分别为 $LM(A)$）是 A^A（分别为 $L(A)$）的含幺子代数，且 $M'(A)$（分别为 $LM'(A)$）是 A^A（分别为 $L(A)$）的若尔当子代数。

证明。首先，零映射是一个乘子，因为（2）中的三个项都为零。其次，恒等映射也是一个乘子，因为（2）中的三个项为 xy。令 $T, U \in M(A)$。于是我们有

$$x(T+U)(y) = xT(y)+xU(y) = T(xy)+U(xy) = T(x)y+U(x)y = (T+U)(x)y \tag{3}$$

and

$$x(TU)(y) = xT(U(y)) = T(xU(y)) = TU(xy) = T(U(x)y) = (TU)(x)y \tag{4}$$

对于任意 $x, y \in A$ 均成立。因此， $T+U, TU \in M(A)$。最后令 $k \in K$，则

$$x(kT)(y) = kxT(y) = kT(xy) = kT(x)y = (kT)(x)y, \tag{5}$$

因此 $kT \in M(A)$。所以， $M(A)$ 是 A^A 的含幺子代数，并且 $LM(A) = M(A) \cap L(A)$ 是 $L(A)$ 的含幺子代数。

接下来，令 $T, U \in M'(A)$。那么，(3) 和 (5) 中的等式分别去掉中心项 $T(xy) + U(xy)$ 和 $kT(xy)$ 后仍然成立。因此， $M'(A)$ 是 A^A 的子空间。此外，我们有

$$x(TU)(y) = xT(U(y)) = T(x)U(y) = U(T(x))y = UT(x)y$$

类似地，对于任意 $x, y \in A$，有 $x(UT)(y) = TU(x)y$。因此，

$$x(TU + UT)(y) = (TU + UT)(x)y.$$

由此可得 $TU + UT \in M'(A)$。[1] □

A 的相反代数 A^{op} 是一个具有与 A 相同的元素和加法的代数，但其中的乘法 $*$ 被反转，即对于所有 $x, y \in A$，都有 $x * y = yx$。

命题 2.2. A 和 A^{op} 具有相同的乘子和弱乘子，即

$$M(A^{\mathrm{op}}) = M(A) \quad and \quad M'(A^{\mathrm{op}}) = M'(A).$$

证明. 设 $T \in A^A$。那么，当且仅当 $T \in M'(A)$

$$x * T(y) = T(y)x = yT(x) = T(x) * y$$

对任意 x、 $y \in A$，当且仅当 $T \in M'(A^{\mathrm{op}})$。进一步地，当且仅当 $T \in M(A)$

$$x * T(y) = T(y)x = T(yx) = T(x * y) = yT(x) = T(x) * y$$

对任意 x、 $y \in A$，当且仅当 $T \in M(A^{\mathrm{op}})$。 □

令 $\mathrm{Ann}_l(A)$（分别地，$\mathrm{Ann}_r(A)$）为 A 的左湮灭子（分别地，右湮灭子），并令 A_0 为它们的交，即

$$\mathrm{Ann}_l(A) = \{a \in A \,|\, ax = 0 \text{ for all } x \in A\},$$

$$\mathrm{Ann}_r(A) = \{a \in A \,|\, xa = 0 \text{ for all } x \in A\}$$

and

$$A_0 = \mathrm{Ann}_l(A) \cap \mathrm{Ann}_r(A).$$

它们都是 A 的子空间；当 A 是结合代数时，它们是双边理想。对于 A 的子集 X， $\langle X \rangle$ 表示由 X 生成的 A 的子空间。

[1] 一般地，对于域 K 上特征为 $\neq 2$的结合代数 A， $Jordanproduct$ $\circ$ 在 A 上的定义为 $x \circ y = (xy + yx)/2$，其中 x、 $y \in A$。

命题 2.3. A 的弱乘子 T 满足 $\langle T(A)\rangle \cap A_0 = \{0\}$ 是一个线性映射。

证明。设 x、y、$z \in A$ 和 a、$b \in K$，并设 T 是一个弱乘子。我们有

$$\begin{aligned} T(ax+by)z &= (ax+by)T(z) = axT(z)+byT(z) = aT(x)z+bT(y)z \\ &= (aT(x)+bT(y))z. \end{aligned}$$

由于 z 是任意的，我们有 $w = T(ax+by) - aT(x) - bT(y) \in \mathrm{Ann}_l(A)$。类似地，我们可以证明 $w \in \mathrm{Ann}_r(A)$，因此 $w \in A_0$。于是，如果 $\langle T(A)\rangle \cap A_0 = \{0\}$，那么 $w = 0$，因为 $w \in \langle T(A)\rangle$。由于 a、b、x、y 是任意的，T 是一个线性映射。□

推论 2.4。如果 $A_0 = \{0\}$，那么任意弱乘子都是关于 K 的线性映射，即 $M'(A) = LM'(A)$ 以及 $M(A) = LM(A)$。

命题 2.5。如果 T 是一个弱乘子，那么 $T(\mathrm{Ann}_l(A)) \subseteq \mathrm{Ann}_l(A)$，$T(\mathrm{Ann}_r(A)) \subseteq \mathrm{Ann}_r(A)$ 且 $T(A_0) \subseteq A_0$。

证明。令 $x \in \mathrm{Ann}_l(A)$，则对任意 $y \in A$，有

$$0 = xT(y) = T(x)y.$$

因此，$T(x) \in \mathrm{Ann}_l(A)$。其他情形类似。□

本文用 A^2表示 A的子集 $\{xy \mid x, y \in A\}$，尽管通常 A^2 表示由该集合生成的 A 的子空间。

命题 2.6. 任何满足 $T(A) \subseteq A_0$ 的映射 $T: A \to A$ 都是弱乘子。这样的映射 T 是乘子，当且仅当 $T(A^2) = \{0\}$。特别地，若 A 是零代数，则每个映射 T 都是弱乘子，并且它是乘子当且仅当 $T(0) = 0$。

证明。如果 $T(A) \subseteq A_0$，则 (1) 两边均为 0，且 T 是弱乘子。这个 T 是乘子，当且仅当 (2) 中间的项 $T(xy)$ 对所有 x、$y \in A$均为 0，也就是说，$T(A^2) = \{0\}$。如果 A是零代数，则 $A = A_0$且 $A^2 = \{0\}$。因此，任何 T 都是弱乘子，且它是乘子当且仅当 $T(0) = 0$。□

3 零分解

设 A_1 是 A 的一个子空间，使得

$$A = A_1 \oplus A_0. \tag{6}$$

这里，A_1 并不唯一，但选择合适的 A_1 将在后文变得重要。当 A_1 固定时，任意映射 $T \in A^A$ 都可唯一分解为

$$T = T_1 + T_0 \tag{7}$$

其中 $T_1(A) \subseteq A_1$ 且 $T_0(A) \subseteq A_0$。我们分别称 (6) 和 (7) 为 A 和 T 的零分解。设 π : $A \to A_1$ 为投影， μ : $A_1 \to A$ 为嵌入，也就是说，对于 $x_1 \in A_1$ 和 $x_0 \in A_0$， $\pi(x_1 + x_0) = \mu(x_1) = x_1$ 。

令 $M_1(A)$（分别地， $M_0(A)$）表示所有满足 $T(A) \subseteq A_1$（分别地， $T(A) \subseteq A_0$）的 T of A 乘子的集合。类似地，定义 A 的弱乘子集合 $M_1'(A)$ 和 $M_0'(A)$。此外，令

$$LM_i(A) = M_i(A) \cap L(A) \text{ and } LM_i'(A) = M_i'(A) \cap L(A)$$

对于 $i = 0$， 1。由命题 2.3 可知

$$M_1'(A) = LM_1'(A) \text{ and } M_1(A) = LM_1(A),$$

由命题 2.6 可得

$$M_0'(A) = A_0^A,\ M_0(A) = \{T \in A_0^A \mid T(A^2) = \{0\}\}. \tag{8}$$

定理 3.1。设 $A = A_1 \oplus A_0$ 和 $T = T_1 + T_0$ 分别是 A 和 $T \in A^A$ 的零分解。

(i) T 是弱乘子，当且仅当 T_1 是弱乘子。若 T 是弱乘子，则 T_1 是满足 $T_1(A_0) = \{0\}$ 的线性映射。

(ii) 若 T_1 是乘子且 $T_0(A^2) = \{0\}$，则 T 是乘子。若 A_1 是 A 的子代数，则逆命题也成立。

假设 A_1 是 A 的子代数，并设 Φ 是一个将 $R \in (A_1)^{A_1}$ 映射到 $\mu \circ R \circ \pi \in A^A$ 的映射。那么，

(iii) Φ 给出了从 $M(A_1)$ 到 $M_1(A)$ 的代数同构，以及从 $M'(A_1)$ 到 $M_1'(A)$ 的 Jordan 同构。

证明。令 $x, y \in A$。

(i) 若 T 是弱乘子，则

$$xT_1(y) = x(T(y) - T_0(y)) = xT(y) = T(x)y = T_1(x)y.$$

因此， T_1 也是弱乘子。此外，根据命题 2.3， T_1 是线性映射；并且根据命题 2.5， $T_1(A_0) \subseteq A_1 \cap A_0 = \{0\}$ 。反之，若 T_1 是弱乘子，则

$$xT(y) = xT_1(y) = T_1(x)y = T(x)y,$$

因此 T 是弱乘子。

(ii) 如果 T_1 是乘子且 $T_0(A^2) = 0$，那么 T 是乘子，因为

$$xT(y) = xT_1(y) = T_1(xy) = T(xy) - T_0(xy) = T(xy) = T_1(x)y = T(x)y.$$

接下来假设 A_1 是一个子代数。如果 T 是一个乘子，那么对于任意的x、$y \in A$ ，我们有

$$T_1(xy) + T_0(xy) = T(xy) = xT(y) = x_1T_1(y), \tag{9}$$

其中 $x = x_1 + x_0$ 满足 $x_1 \in A_1$ 和 $x_0 \in A_0$。这里， $x_1T_1(y) \in A_1$ ，因为 A_1是一个子代数，因此我们有 $T_0(xy) = x_1T_1(y) - T_1(xy) \in A_0 \cap A_1 = \{0\}$。由于 x、y 是任意的，我们得到 $T_0(A^2) = \{0\}$。此外， T_1 是一个乘子，因为根据（9），$T_1(xy) = x_1T_1(y) = xT_1(y)$，类似地， $T_1(xy) = T_1(x)y$。逆命题已在上文证明。

(iii) 设 $S \in (A_1)^{A_1}$ 和 $x = x_1 + x_0, y = y_1 + y_0 \in A$ ，其中 $x_1, y_1 \in A_1$ 且x_0, $y_0 \in A_0$。那么， $\pi(x) = \mu(x_1) = x_1, \pi(y) = \mu(y_1) = y_1$ 并且

$$\Phi(S)(x) = \mu(S(\pi(x))) = \mu(S(x_1)) = S(x_1).$$

因此，若 $S \in M'(A_1)$，则有

$$x\Phi(S)(y) = xS(y_1) = x_1S(y_1) = S(x_1)y_1 = \Phi(S)(x)y_1 = \Phi(S)(x)y.$$

因此， $\Phi(S) \in M_1'(A)$。此外，若 $S \in M(A_1)$，那么由于 π是同态，我们有

$$\Phi(S)(xy) = S(\pi(xy)) = S(x_1y_1) = x_1S(y_1) = x\Phi(S)(y),$$

因此 $\Phi(S) \in M_1(A)$。反过来，设 $T \in M_1'(A)$，那么由于 T 是满足 $T(A_0) = \{0\}$的线性映射，存在一个定义在A_1 上的线性映射 $S \in L(A_1)$，使得 $\Phi(S) = T$，也就是说，$S(x_1) = T(x) = T(x_1)$。我们有

$$x_1S(y_1) = x_1T(y_1) = T(x_1)y_1 = S(x_1)y_1,$$

因此 $S \in M'(A_1)$。所以， Φ是从 $M'(A_1)$ 到 $M_1'(A)$ 的线性同构。类似地， Φ 给出从 $M(A_1)$ 到 $M_1(A)$ 的线性同构。此外，对于 T、$U \in M'(A_1)$，我们有

$$\Phi(TU) = \mu \circ T \circ U \circ \pi = \mu \circ T \circ \pi \circ \mu \circ U \circ \pi = \Phi(T)\Phi(U).$$

因此， Φ 给出了从 $M(A_1)$ 到 $M_1(A)$ 的代数同构，以及从 $M'(A_1)$ 到 $M_1'(A)$ 的 Jordan 同构。 □

定理 3.1 蕴含

$$M'(A) = M_1'(A) \oplus M_0'(A),\ M_1(A) \oplus M_0(A) \subseteq M(A),$$

其中 $M_0'(A)$ 和 $M_0(A)$ 如式 (8) 所示。此外，如果 A_1 是子代数，我们有

$$M'(A) \cong M'(A_1) \oplus (A_0)^A,\ M(A) \cong M(A_1) \oplus \{T \in (A_0)^A \mid T(A^2) = \{0\}\}. \quad (10)$$

推论 3.2. 任意弱乘子 T 都可写为

$$T = T_1 + R \quad (11)$$

其中 $T_1 \in LM_1'(A)$ 和 $R \in (A_0)^A$，并且它是乘子当且仅当

$$R(x_1y_1) = x_1T_1(y_1) - T_1(x_1y_1) \quad (12)$$

对于任意的 $x_1, y_1 \in A_1$。

证明。如上所述， T写作 (11)。任取满足 $x_1, y_1 \in A_1$ 且 $x_0, y_0 \in A_0$ 的 $x = x_1 + x_0, y = y_1 + y_0 \in A$，则有

$$xT(y) = x_1(T_1(y) + R(y)) = x_1T_1(y) = x_1T_1(y_1) \tag{13}$$

因为 $R(A) \subseteq A_0$ 和 $T_1(A_0) = \{0\}$。式 (13) 中的最后一项也等于 $T_1(x_1)y_1 = T(x)y$。因此， T 是乘子，当且仅当它等于$T(xy) = T(x_1y_1) = T_1(x_1y_1) + R(x_1y_1)$，当且仅当式 (12) 成立。 □

4 线性乘子与矩阵方程

本节中， A 是 K 上的有限维代数。我们推导出一个矩阵方程，用以判定 A 上的线性映射是否为（弱）乘子。设 A是 n 维的，且基为 $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$。

引理 4.1. 线性映射 $T\colon A \to A$ 是弱乘子，当且仅当

$$e_iT(e_j) = T(e_i)e_j, \tag{14}$$

它是乘子，当且仅当

$$T(e_ie_j) = e_iT(e_j) = T(e_i)e_j, \tag{15}$$

对所有 $e_i, e_j \in E$。

证明。条件（14）和（15）的必要性显然。设 $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$、$y = y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n \in A$ with $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in K$。如果 T 满足（14），则有

$$\begin{aligned} xT(y) &= (\sum_i x_ie_i)T(\sum_j y_je_j) = (\sum_i x_ie_i)(\sum_j y_jT(e_j)) = \sum_{i,j} x_iy_je_iT(e_j) \\ &= \sum_{i,j} x_iy_jT(e_i)e_j = (\sum_i x_iT(e_i))(\sum_j y_je_j) = T(x)y. \end{aligned}$$

因此， T 是一个弱乘子。此外，如果 T 满足（15），则以类似方式可知它是一个乘子 □

设 $\boldsymbol{A}$ （我们使用粗体字符）为 A 在 E上的乘法表。 $\boldsymbol{A}$是一个元素取自 A 的矩阵，其定义为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}^t\boldsymbol{E}, \tag{16}$$

其中， $\boldsymbol{E} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$（我们再次使用粗体字母 $\boldsymbol{E}$）是由基元素组成的行向量。对于 A 上的线性映射 T 和 A 上的矩阵 $\boldsymbol{B}$， $T(\boldsymbol{B})$ 表示逐分量应用 T 所得到的矩阵，也就是说， $T(\boldsymbol{B})$ 的第 (i, j) 个元素是 $T(b_{ij})$，其中 b_{ij} 是 $\boldsymbol{B}$ 的第 (i, j) 个元素。[2] 我们用同一个符号 T 表示 E 上 T 的表示矩阵，也就是说，

$$T(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E}T. \tag{17}$$

[2] 这称为广播（参见 [6]）。

定理 4.2. 线性映射 T 是 A 的弱乘子，当且仅当

$$\boldsymbol{A}T = T^t\boldsymbol{A}, \tag{18}$$

并且 T 是一个乘子，当且仅当

$$T(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}T = T^t\boldsymbol{A}. \tag{19}$$

证明。由 (16) 和 (17)，我们有

$$(e_1, e_2, \ldots, e_n)^t(T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)) = \boldsymbol{E}^tT(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E}^t\boldsymbol{E}T = \boldsymbol{A}T \tag{20}$$

and

$$(T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_2))^t(e_1, e_2, \ldots, e_n) = T(\boldsymbol{E})^t\boldsymbol{E} = T^t\boldsymbol{E}^t\boldsymbol{E} = T^t\boldsymbol{A}. \tag{21}$$

根据引理 4.1，T 是一个弱乘子，当且仅当 (20) 和 (21) 相等，也当且仅当 (18) 成立。此外，T 是一个乘子，当且仅当 (20) 和 (21) 的最左端相等于 $(T(e_ie_j))_{i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n} = T(\boldsymbol{A})$，也当且仅当 (19) 成立。 □

相反代数 A^{op} 的乘法表为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$。因此，乘法表互为转置的代数具有相同的（弱）乘子。

5 结合代数

本节中，A 是一个定义在 K 上的结合代数。

命题 5.1. 如果 $A_0 = \{0\}$，那么我们有

$$M(A) = M'(A) = LM(A) = LM'(A).$$

证明。令 $T \in M'(A)$，那么我们有

$$T(xy)z = xyT(z) = xT(y)z \quad \text{and} \quad zT(xy) = T(z)xy = zT(x)y$$

对于任意 x、y、$z \in A$。由此可得

$$T(xy) - xT(y) \in \mathrm{Ann}_l(A) \cap \mathrm{Ann}_r(A) = A_0 = \{0\}.$$

因此，$T(xy) = xT(y)$，并且我们看到 $T \in M(A)$。此外，根据命题 2.3，$T \in LM(A)$。 □

设 $a \in A$。若对于任意 $x, y \in A$, a，有 $xay = axy$（分别地，$xay = xya$），则称其为左（分别地，右）中心元；若对于任意 $x \in A$，有 $ax = xa$，则称 a 为中心元。令 $Z_l(A)$、$Z_r(A)$、$Z(A)$ 分别表示所有左中心元、右中心元和中心元组成的集合。

引理 5.2. Z_l（A）、 Z_r（A）、 Z（A）是 A 的子代数，分别包含 Ann_l（A）、Ann_r（A）和 A_0。

证明。显然。 □

对于 $a \in A$， l_a （分别为 r_a）表示由 a 进行的左（分别为右）乘法，即，

$$l_a(x) = ax, \quad r_a(x) = xa$$

对于 $x \in A$。它们是线性映射。

引理 5.3. 对于 $a \in A$ ，以下陈述等价。

(i) l_a （分别为 r_a）是乘子，(ii) l_a （分别为 r_a）是弱乘子，(iii) a 是左（分别为右）中心的。

证明。如果 l_a 是弱乘子，那么

$$xay = xl_a(y) = l_a(x)y = axy$$

对任意 $x, y \in A$ 均成立。因此， a 是左中心。由于对于任意 $x, y \in A$, l_a ， $l_a(x)y = axy = l_a(xy)$ 且 $xl_a(y) = xay$ ，若 a 是左中心，则它是一个乘子。另一种情况类似，由此可知这三个命题等价。 □

引理 5.4. 设 A 有右（分别为左）单位元。则左（分别为右）中心元是中心元，并且 $\mathrm{Ann}_l(A) = \{0\}$ （分别地，$\mathrm{Ann}_r(A) = \{0\}$）。

证明。显然。 □

由引理 5.2 可知，$\mathrm{Ann}_l(A) \subseteq Z_l$ 且 $\mathrm{Ann}_r(A) \subseteq Z_r$ ，因此我们可以构造商代数 $Z_l(A) = Z_l(A)/\mathrm{Ann}_l(A)$ 和 $Z_r(A) = Z_r(A)/\mathrm{Ann}_r(A)$。

定理 5.5. 设 A 有左（分别为右）单位元 e。则任意乘子都是由某个左（分别为右）中心元左（分别为右）乘得到的，并且是一个线性乘子。映射 $\phi: Z_l(A) \to M(A)$ 将 $a \in Z_l(A)$ 送到 l_a ，从而诱导出代数的一个同构 $\phi: \overline{Z_l}(A) \to M(A)$。特别地，若 A 是含幺的，则 $M(A)$ 与 $Z(A)$ 同构。

证明。假设 A 有一个左单位元 e。令 $T \in M'(A)$，并设 $a = T(e)$。于是我们有

$$T(x) = eT(x) = T(e)x = ax$$

对于任意 $x \in A$。因此， $T = l_a$，其中 $a \in Z_l(A)$，且由引理 5.3 可知， T 是一个线性乘子。因此， $M'(A) = LM(A)$，且 ϕ 是满射。此外，对于 $a \in Z_l(A)$， $\phi(a) = 0$，当且仅当 $ax = 0$ 对于任意 $x \in A$ 成立；这又当且仅当 $a \in \mathrm{Ann}_l(A)$。因此我们有 $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ann}_l(A)$，而 ϕ 导出了所需的同构。类似地，若 A 有右单位元，则 $M(A)$ 与 $\overline{Z_r}(A)$ 同构。最后，若 A 有单位元，则 $\mathrm{Ann}_l(A) = \mathrm{Ann}_r(A) = \{0\}$ ，因此 $M(A)$ 与 $Z(A)$ 同构。 □

6 三维结合代数

在特征不等于 2 的代数闭域 K 上，忽略同构差异，存在 24 个3维结合代数族。它们是定义在基 $E=\{e,f,g\}$ 上的 5 个含幺代数 U_0,U_1,U_2,U_3,U_4，其定义如下

$$\begin{pmatrix} e & f & g \\ f & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f & g \\ f & 0 & f \\ g & -f & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & g & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f & g \\ f & g & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由下式定义的 5 个卷曲代数 C_0,C_1,C_2,C_3,C_4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \\ 0 & -e & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e & f & 0 \\ 0 & g & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e & f & g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix},$$

由下式定义的 4 个非含幺直代数 S_1,S_2,S_3,S_4

$$\begin{pmatrix} f & g & 0 \\ g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f & 0 \\ f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

以及由下式定义的 10 族非含幺波状代数 W_1, W_2, W_4, W_5, W_6, W_7, W_8,W_9, W_{10} 和 $\{W_3(k)\}_{k\in H}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e & 0 \\ e & f & 0 \\ 0 & g & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e & 0 \\ e & f & g \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & ke & e \end{pmatrix},$$

其中 H 是 K 的一个子集，满足 $K=H\cup -H$ 和 $H\cap -H=\{0\}$（详情见 [3] ）。下面我们将确定它们的（弱）乘子。

（0) $A=C_0$ 是零代数，因此由命题 2.6 可得

$$M'(A)=A^A,\ \ M(A)=\{T\in A^A\,|\,T(0)=0\}$$

and

$$LM(A)=LM'(A)=L(A).$$

(i) 含幺代数 U_0、U_2、U_3、U_4 是交换的，因此对于这样的 A，我们有

$$M(A)=LM(A)=M'(A)=LM'(A)=\{l_x|x\in A\}\cong A$$

由定理 5.5 可知。对于 $A=U_1$，我们有

$$M(A)=LM(A)=M'(A)=LM'(A)\cong Z(A)=Ke.$$

(ii) 对于 $A=C_1$，我们有 $A_0=\mathrm{Ann}_l(A)=\mathrm{Ann}_r(A)=Ke$，以及一个幂零分解 $A=A_1\oplus A_0$ with $A_1=Kf+Kg$。令 $T_1\in M_l'(A)$，则由定理 3.1，T_1 是一个线性映射，使得 $T_1(Ke)=\{0\}$。令

$$T_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & r \\ 0 & t & u \end{pmatrix} \tag{22}$$

with $q,r,t,u \in K$为 T_1在 E上的表示矩阵。由定理 4.2， T_1是一个弱乘子，当且仅当

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & te & ue \\ 0 & -qe & -re \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}T_1 = T_1^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -te & qe \\ 0 & -ue & re \end{pmatrix},$$

当且仅当 $r = t = 0$和 $q = u$。因此， $M_1'(A) = \{T_q \,|\, q \in K\}$，其中 $T_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$。由定理 3.1 可知

$$M'(A) = \{T_q \,|\, q \in K\} \oplus (Ke)^A,$$

and

$$LM'(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,q \in K \right\}.$$

根据 A $\alpha\beta = xv - yz\ e$ $\alpha = xf + yg\ \beta =$的乘法表，
$zf + vg \in A_1$ $x\ y\ z\ v \in K.$ 3 2 $T \in M'\ A$ $T = T_q + R$
我们有 ( )，其中 , , , 由推论 . 可得， ( ) 由 给出，其中 $R \in (Ke)^A$，且此 T是一个乘子，当且仅当

$$\begin{aligned} R((xv - yz)e) &= R(\alpha\beta) = \alpha T_q(\beta) - T_q(\alpha\beta) \\ &= \alpha(q\beta) - T_q((xv - yz)e) = q(xv - yz)e \end{aligned}$$

对于任意 α和 β，当且仅当对所有 $x \in K$都有 $R(xe) = qxe$。设 $S_q = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$

是由 $q \in K$定义的数乘。那么，我们看到 $(T - S_q)(A) \subseteq A_0 = Ke$并且

$$(T - S_q)(xe) = T_q(xe) + R(xe) - S_q(xe) = 0 + qxe - qxe = 0,$$

对于任意 $x \in K$，也就是说， $(T - S_q)(Ke) = \{0\}$。因此，我们有

$$M(A) = \{S_q \,|\, q \in K\} \oplus \{R \in (Ke)^A \,|\, R(Ke) = \{0\}\},$$

and

$$LM(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c \in K \right\}.$$

(iii) $A = C_2$: 因为 $\mathrm{Ann}_l(A) = Ke$且 $\mathrm{Ann}_r(A) = Kg$，我们可知 $A_0 = \{0\}$。因此，根据命题 5.1，任意弱乘子 T都是线性乘子。由定理 4.2，

$$T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix} \tag{23}$$

是一个（弱）乘子，当且仅当

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ ae + pf & be + qf & ce + rf \\ pg & qg & rg \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}T = T^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} pe & pf + sg & 0 \\ qe & qf + tg & 0 \\ re & rf + ug & 0 \end{pmatrix},$$

当且仅当 $b=c=p=r=s=t=0$ 和 $a=q=u$，也就是说，T 是 a对 S_a 的数乘。因此，

$$M(A)=M'(A)=LM(A)=LM'(A)=\{S_a \,|\, a\in K\}\cong K.$$

(iv) C_3 和 C_4 互为对立元素，根据命题 2.2，它们具有相同的（弱）乘子。于是令 $A=C_3$，A 有左单位元 g，$Z_l(A)=A$ 且 $\mathrm{Ann}_l(A)=Ke+Kf$。因此，根据定理 5.4，

$$M(A)=M'(A)=LM(A)=LM'(A)=A/(Ke+Kg)=\{S_a \,|\, a\in K\}.$$

(v) $A=S_1$：我们有 $A_0=\mathrm{Ann}_l(A)=\mathrm{Ann}_r(A)=Kg$，以及满足 $A_1=Ke+Kf$ 的 $A=A_1\oplus A_0$。那么，$T_1\in M'_1(A)$ 是一个满足 $T(Kg)=\{0\}$ 的线性映射。令

$$T_1=\begin{pmatrix} a & b & 0\\ p & q & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{24}$$

为它在 E 上的表示。当且仅当以下条件成立时，T_1 是弱乘子

$$\begin{pmatrix} af+pg & bf+qg & 0\\ ag & bg & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}T_1=T_1^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} af+pg & ag & 0\\ bf+qg & bg & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

当且仅当 $b=0$ 和 $a=q$。因此，

$$M'(A)=\{T_1^{a,p}\,|\,a,p\in K\}\oplus (Kg)^A,$$

其中 $T^{a,}{}_1{}^{p}=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ p & a & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$。因此，$T\in M'(A)$ 可写为 $T=T^{a,}{}_1{}^{p}+R$，其中 $R\in (Kg)^A$；当且仅当以下条件成立时，这个 T 是乘子

$$\begin{aligned} R(xzf+(xv+yz)g) &= R(\alpha\beta)=\alpha T_1^{a,p}(\beta)-T_1^{a,p}(\alpha\beta)\\ &= \alpha(aze+(pz+av)f)-T_1^{a,p}(xzf+(xv+yz)g)\\ &= axzf+(pxz+axv+ayz)g-axzf\\ &= (pxz+a(xv+yz))g\end{aligned}$$

对于任意 $\alpha=xe+yf,\beta=ze+vf\in A_1$，满足 $x,y,z,v\in K$，当且仅当对所有 $x,y\in K$，$R(xf+yg)=(px+ay)g$。设 $T^{a,p}=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ p & a & 0\\ 0 & p & a\end{pmatrix}$，则 $(T-T^{a,p})(A)\subseteq Kg$，并且

$$\begin{aligned}(T-T^{a,p})(xf+yg) &= \left(T_1^{a,p}+R-T^{a,p}\right)(xf+yg)\\ &= axf+(px+ay)g-(axf+pxg+ayg)=0.\end{aligned}$$

对于任意 $x,y\in K$。因此，$(T-T^{a,p})(Kf+Kg)=\{0\}$，于是

$$M(A)=\{T^{a,p}\,|\,a,p\in K\}\oplus\{R\in (Kg)^A\,|\,R(Kf+Kg)=\{0\}\}.$$

取 $M'(A)$ 和 $M(A)$ 与 $L(A)$ 的交集，我们得到

$$LM'(A)=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ p & a & 0\\ s & t & u\end{pmatrix}\,\middle|\, a,p,s,t,u\in K\right\}$$

and

$$LM(A)=\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\p&a&0\\s&p&a\end{pmatrix}\,\middle|\,a,p,s\in K\right\}.$$

(vi) $A=S_2$：我们有 $A_0=\mathrm{Ann}_l(A)=\mathrm{Ann}_r(A)=Kg$，且 $A=A_1\oplus A_0$ 与 $A_1=Ke+Kf$。设线性映射 $T_1\in M_1'(A)$ 表示为 **(24)**，则 T_1 是弱乘子，当且仅当

$$\begin{pmatrix}ae&be&0\\pg&qg&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}T=T^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}ae&pg&0\\be&qg&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

当且仅当 $b=p=0$。因此，

$$M'(A)=\{T_1^{a,q}\,|\,a,q\in K\}\oplus(Kg)^A,$$

其中 $T^{a,}{}_1{}^{q}=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&q&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

并且

$$LM'(A)=\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\0&q&0\\s&t&u\end{pmatrix}\,\middle|\,a,q,s,t,u\in K\right\}.$$

根据推论 3.2，弱乘子 T写作 $T=T^{a,}{}_1{}^{q}+R$，其中 a、$q\in K$ 和 $R\in(Kg)^A$ 是乘子，当且仅当

$$\begin{aligned}R(xze+yvg)&=R(\alpha\beta)=\alpha T_1^{a,q}(\beta)-T_1^{a,q}(xze+yvg)\\&=(xe+yf)(aze+qvf)-axze\\&=yqvg,\end{aligned}$$

对于任意 $\alpha=xe+yf$、$\beta=ze+vf\in A_1$，若 x、y、z、$v\in K$，则当且仅当对所有 x、$y\in K$，$R(xe+yg)=qyg$。令 $T^{a,}{}_q=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&q&0\\0&0&q\end{pmatrix}$，则 $T^{a,}{}_q\in M(A)$，并且我们有 $(T-T^{a,}{}_q)(xe+yg)=0$，对于任意 x、$y\in K$，这与上面的 **(v)** 同理。因此，$(T-T^{a,}{}_q)(Ke+Kg)=\{0\}$，并且我们有

$$M(A)=\{T^{a,p}\,|\,a,p\in K\}\oplus\{R\in(Kg)^A\,|\,R(Ke+Kg)=\{0\}\}$$

and

$$LM(A)=\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\0&p&0\\0&t&0\end{pmatrix}\,\middle|\,a,p,t\in K\right\}.$$

(vii) $A=S_3$：我们有 $A_0=Kg$ 和 $A=A_1\oplus A_0$，且 $A_1=Ke+Kf$。由于 A_1 是 A的子代数，根据定理 3.1，我们得到第 3 节中的等式 **(10)**。因为 A_1 是交换含幺代数，

$$M(A_1)=M'(A_1)=A_1=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\,\middle|\,a,b\in K\right\}$$

根据定理 5.5。因此，

$$M'(A)=A_1\oplus(Kg)^A\ \text{ and }\ M(A)=A_1\oplus\{T\in(Kg)^A\,|\,T(Ke+Kf)=0\}.$$

与 $L(A)$ 相交可得

$$LM'(A)=\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\s&t&u\end{pmatrix}\,\middle|\,a,b,s,t,u\in K\right\}\text{ and }LM(A)=\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&u\end{pmatrix}\,\middle|\,a,b,u\in K\right\}.$$

(viii) $A=S_4$: 我们有 $A=A_1\oplus A_0$，其中 $A_0=Kg$ 且 $A_1=Ke+Kf$。由于 A_1 是 A 的交换含幺子代数，与上文类似，我们有

$$M'(A)=A_1\oplus(Kg)^A=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\b&a\end{pmatrix}\,\middle|\,a,b\in K\right\}\oplus(Kg)^A,$$

$$\begin{aligned}M(A)&=A_1\oplus\left\{T\in(Kg)^A\,|\,T(A^2)=0\right\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\b&a\end{pmatrix}\,\middle|\,a,b\in K\right\}\oplus\{T\in(Kg)^A\,|\,T(Ke+Kf)=0\},\end{aligned}$$

$$LM'(A)=\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\s&t&u\end{pmatrix}\,\middle|\,a,b,s,t,u\in K\right\}\text{ and }LM(A)=\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\0&0&u\end{pmatrix}\,\middle|\,a,b,u\in K\right\}.$$

(ix) $A=W_1$：我们有 $A=A_1\oplus A_0$，其中 $A_0=Ke+Kf$ 且 $A_1=Kg$。令 $T_1\in M_1'(A)$，则 T_1 是一个线性映射，且满足 $T_1(A_0)=\{0\}$。因此，T_1 由满足 $a\in K$ 的 $T_1(g)=ag$ 确定。将这个 T_1 记为 T_1^a。我们有

$$M'(A)=\{T_1^a\,|\,a\in K\}\oplus(Ke+Kf)^A.$$

弱乘子 $T=T_1^a+R$ 满足 $R\in(Ke+Kf)^A$，当且仅当它是乘子

$$R(xye)=R((xg)(yg))=xgT_1^a(yg)-T_1^a(xye)=axye$$

对所有 $x,y\in K$，当且仅当对于任意 $x\in K$，$R(xe)=axe$。令 $T_a=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&0&0\\0&0&a\end{pmatrix}$。

于是，$(T-T_a)(Ke)=\{0\}$，由此可得

$$M(A)=\{T_a\,|\,a\in K\}\oplus\{R\in(Ke+Kf)^A\,|\,R(Ke)=\{0\}\}.$$

此外，我们有

$$LM'(A)=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\p&q&r\\0&0&u\end{pmatrix}\,\middle|\,a,b,c,p,q,r,u\in K\right\}$$

and

$$LM(A)=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\0&q&r\\0&0&a\end{pmatrix}\,\middle|\,a,b,c,q,r\in K\right\}.$$

(x) $A=W_2$ [3]: 我们有 $A=A_1\oplus A_0$，其中 $A_0=Ke$ 且 $A_1=Kf+Kg$。$T\in M_1'(A)$ 是一个线性映射，满足 $T(Ke)=\{0\}$。设 T 表示为 (22)，则 T 是弱乘子当且仅当

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&qe&re\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}T=T^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&te&0\\0&ue&0\end{pmatrix},$$

[3]这是在 [8] 中讨论的代数

当且仅当 $r = t = 0, q = u$。因此,

$$M'(A) = \{T_q \mid q \in K\} \oplus (Ke)^A,$$

where $T_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$. So,

$$LM'(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \Big| \, a, b, c, q \in K \right\}.$$

弱乘子 $T = T_q + R$ with $R \in (Ke)^A$ 是乘子，当且仅当

$$R(yze) = R(\alpha\beta) = \alpha T_q(\beta) - T_q(yze) = \alpha(q\beta) = qyze$$

对于任意 $\alpha = xf + yg, \beta = zf + vg \in A_1$ with $x, y, z, v \in K$，当且仅当 $R(xe) = qxe$ 对所有 $x \in K$ 都成立。令 S_a 为由 $a \in K$ 定义的数乘。那么，$(T - S_a)(Ke) = \{0\}$，因此,

$$M(A) = \{S_a \mid a \in K\} \oplus \{R \in (Ke)^A \mid R(Ke) = \{0\}\}$$

and

$$LM(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \Big| \, a, b, c \in K \right\}.$$

(xi) $A = W_4$: 我们有 $A = A_1 \oplus A_0$ with $A_0 = Kf + Kg$ and $A_1 = Ke$。因为A_1 是一个与基域 K 同构的子代数，对于由 $T_1^a(e) = ae$给出的 $a \in K$，取 $T_1^a \in M(A_1)$，我们可知

$$M'(A) = \{T_1^a \mid a \in K\} \oplus (fK + gK)^A$$

and

$$M(A) = \{T_1^a \mid a \in K\} \oplus \{R \in (fK + gK)^A \mid R(Ke) = 0\}$$

由定理 3.1。与 $L(A)$ 取交集，得到

$$LM'(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix} \Big| \, a, p, q, r, s, t, u \in K \right\}$$

and

$$LM(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & q & r \\ 0 & t & u \end{pmatrix} \Big| \, a, q, r, t, u \in K \right\}.$$

(xii) W_5 和 W_6 互为对立。令 $A = W_5$，则 $A = A_1 \oplus A_0$ with $A_0 = Ke$ and $A_1 = Kf + Kg$。由于 A_1 是 A的子代数，我们有等式 (10)。因为A_1 有一个左单位元 g，所以

$$M(A_1) = LM(A_1) = M'(A_1) = LM'(A_1) \cong (A_1)/Kf \cong Kg$$

由定理 5.5。因此， $M(A_1)$ 中的任意元素都是 $q \in K$在 A_1 中的数乘 S_1^q。由定理 3.1，我们有

$$M'(A) = \{S_1^q \mid q \in K\} \oplus (Ke)^A,$$

$$M(A)=\{S_1^q\,|\,q\in K\}\oplus\{R\in(Ke)^A\,|\,R(Kf+Kg)=0\},$$

$$LM'(A)=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\0&q&0\\0&0&q\end{pmatrix}\Big|\,a,b,c,q\in K\right\}\text{ and }LM(A)=\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\0&q&0\\0&0&q\end{pmatrix}\Big|\,a,q\in K\right\}.$$

(xiii) W_7 与 W_8 互为相反数。令 $A=W_7$。我们看到 $A_0=\mathrm{Ann}_r(A)=\{0\}$。因此，根据命题 5.1，任意弱乘子都是线性乘子；而 T 表示为 (23) 时是弱乘子，当且仅当

$$\begin{pmatrix}ae&be&ce\\0&0&0\\pf+sg&qf+tg&rf+ug\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}T=T^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}ae&sf&sg\\be&tf&tg\\ce&uf&ug\end{pmatrix},$$

当且仅当 $b=c=p=r=s=t=0,q=u$。因此，

$$M(A)=LM(A)=M'(A)=LM'(A)=LM'(A)=\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\0&q&0\\0&0&q\end{pmatrix}\Big|\,a,q\in K\right\}.$$

(xiv) W_9 和 W_{10} 互为对立。设 $A=W_9$。那么，由于 $A_0=\mathrm{Ann}_l(A)=\{0\}$，任意弱乘子都是线性乘子，而线性映射 T 由 (23) 表示，当且仅当它是弱乘子

$$\begin{pmatrix}pe&qe&re\\ae+pf&be+qf&ce+rf\\pg&qg&rg\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}T=T^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}pe&ae+pf+sg&0\\qe&be+qf+tg&0\\re&ce+rf+ug&0\end{pmatrix}$$

$c=p=r=s=t=0,a=q=u$。因此，

$$LM(A)=M(A)=LM'(A)=M'(A)=\left\{\begin{pmatrix}a&b&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}\Big|\,a,b\in K\right\}.$$

(xv) $A=W_3(k)$。我们有 $A=A_1\oplus A_0$，其中 $A_0=Ke$ 且 $A_1=Kf+Kg$。$T\in M_1'(A)$ 是一个满足 $T(Ke)=\{0\}$ 的线性映射。设 T 由 (22) 表示，则T 是弱乘子，当且仅当

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&qe&re\\0&(kq+t)e&(kr+u)e\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}T=T^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&(q+kt)e&te\\0&(r+ku)e&ue\end{pmatrix}.$$

若 $k=0$，则上述结论成立当且仅当 $r=t$；否则，成立当且仅当 $r=t=0,q=u$。因此，

$$M'(A)=\{T_1^{q,r,u}\,\big|\,q,r,u\in K\}\oplus(Ke)^A,\ LM'(A)=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\0&q&r\\0&r&u\end{pmatrix}\Big|\,a,b,c,q,r,u\in K\right\}$$

若 $k=0$，且

$$M'(A)=\{T_1^q\,\big|\,q\in K\}\oplus(Ke)^A,\ LM'(A)=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\0&q&0\\0&0&q\end{pmatrix}\Big|\,a,b,c,q\in K\right\}$$

若 $k \neq 0$, 其中

$$T_1^{q,r,u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & r \\ 0 & r & u \end{pmatrix} \text{ and } T_1^q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}.$$

当 $k = 0, T = T^{q,r,u}_1 + R$, 且 $R \in (Ke)^A$ 是乘子, 当且仅当

$$\begin{aligned} R((xz+yv)e) &= R(\alpha\beta) = \alpha T_1^{q,r,u}(\beta) - T_1^{q,r,u}((xz+yv)e) \\ &= \alpha((qz+rv)f + (rz+uv)g) = (qxz + r(xv+yz) + uyv)e \end{aligned}$$

对任意 $\alpha = xf + yg, \beta = zf + vg \in A_1$, 若 $x, y, z, v \in K$, 当且仅当 $q = u, r = 0$ 且对所有 $x \in K$, $R(xe) = qxe$。而当 $k \neq 0, T = T_1^q + R$ 且 $R \in (Ke)^A$ 是乘子时, 当且仅当

$$\begin{aligned} R((xz+y(kz+v))e) &= R(\alpha\beta) = \alpha T_1^q(\beta) - T_1^q(xue + y(kz+v)e) \\ &= \alpha(q\beta) = q(xz + y(kz+v))e \end{aligned}$$

对任意 α, β, 当且仅当对任意 $x \in K$, $R(xe) = qxe$。在这两种情况下, 令 S_a 乘以 $a \in K$ 作数乘, 我们有 $(T - S_a)(Ke) = \{0\}$。因此, 对任意 k (无论 k 为零还是非零), 我们有

$$M(A) = \{S_a \,|\, a \in K\} \oplus \{R \in (Ke)^A \,|\, R(Ke) = \{0\}\}$$

and

$$LM(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in K \right\}.$$

7 三维零幂代数

若对所有 $x \in A$ 都有 $x^2 = 0$, 则 A 是一个 *zeropotent algebra*。域 K 上的零幂代数 A 是反交换的, 也就是说, 对所有 $x, y \in A$ 都有 $xy = -yx$。因此我们看到

$$A_0 = \mathrm{Ann}_l(A) = \mathrm{Ann}_r(A).$$

设 A 是一个定义在 K 上、特征为 $K \neq 2$ 的 3 维幂零代数。设 $E = \{e, f, g\}$ 是 A 的一组基。由于 A 是反交换的, A 在 E 上的乘法表 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -\beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ \beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{cases} \gamma = fg = a_{11}e + a_{12}f + a_{13}g \\ \beta = ge = a_{21}e + a_{22}f + a_{23}g \\ \alpha = ef = a_{31}e + a_{32}f + a_{33}g \end{cases}$$

对 $a_{ij} \in K$ 成立。我们称 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}. \end{pmatrix}$ 为 A 的 *structural matrix* (代数及其结构矩阵使用相同的符号 A)。

引理 7.1. *If* 秩$(A) \geq 2$, *then* $A_0 = \{0\}$.

Proof. 如果秩$(A) \geq 2$，那么 fg、ge、ef中至少有两个线性无关。假设 $\alpha = ef$和 $\beta = ge$线性无关（其他情形类似）。如果$x = ae + bf + cg$满足 $a, b.c \in K$且属于 $\mathrm{Ann}_l(A)$，那么 $xe = -b\alpha + c\beta$、 $xf = a\alpha - c\gamma$和 $xg = -a\beta + b\gamma$都为零。因此，$a = b = c = 0$。于是，我们有 $\mathrm{Ann}_l(A) = \{0\}$且 $A_0 = \mathrm{Ann}_l(A) = \{0\}$。 □

定理 **7 2** *Let A be a zeropotent algebra A of dimension 3 with rank $A \geq 2$ over .. ( ) , K. Then any weak multiplier of A is the scalar multiplication S_a for some $a \in K$,that is,*

$$M(A) = M'(A) = LM(A) = LM'(A) = \{S_a \,|\, a \in K\}.$$

Proof. 由引理 7.1 和推论 2.4，任意弱乘子 T 都是线性映射。设 $T \in L(A)$ 表示为 (23)。根据定理 4.2， T 是弱乘子，当且仅当 $\boldsymbol{A}T = T^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}$，当且仅当

$$\begin{pmatrix} p\alpha - s\beta & q\alpha - t\beta & r\alpha - u\beta \\ -a\alpha + s\gamma & -b\alpha + t\gamma & -c\alpha + u\gamma \\ a\beta - p\gamma & b\beta - q\gamma & c\beta - r\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p\alpha + s\beta & a\alpha - s\gamma & -a\beta + p\gamma \\ -q\alpha + t\beta & b\alpha - t\gamma & -b\beta + q\gamma \\ -r\alpha + u\beta & c\alpha - u\gamma & -c\beta + r\gamma \end{pmatrix} \quad (25)$$

成立。假设 $\alpha = ef, \beta = ge$线性无关（其他情况类似）。那么，由于 $p\alpha - s\beta = -p\alpha + s\beta$，比较 (25) 中两个矩阵的 (1,1) 元素可得 $p = s = 0$。比较 (1,2) 和 (1,3) 元素，分别可得 $q\alpha - t\beta = a\alpha - s\gamma = a\alpha$和 $r\alpha - u\beta = -a\beta + p\gamma = -a\beta$。由此可得 $a = q = u$和 $r = t = 0$。比较 (2,2) 和 (3,3) 元素，可知 $b = c = 0$ 23 $b = c = p = r = s = t =$。因此，0 $a = q = u$ $T = S_a$ □ ( ) 成立当且仅当 和，即 。

在 [4] 中，我们对特征不等于 2 的代数闭域 K 上的 3维幂零代数进行分类。在同构意义下，共有 10 个族的幂零代数。它们

$$Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \{Z_4(a)\}_{a\in H}, Z_5, Z_6, \{Z_7(a)\}_{a\in H}, Z_8 \text{ and } Z_9$$

分别由以下结构矩阵定义

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

分别 .

Z_0 是零代数，而 Z_1 同构于 3维结合代数 C_1，它们的（弱）乘子已在第 6 节中确定。代数 Z_3 至 Z_9 的秩大于或等于 2，属于定理 7.2 的讨论范围。

因此，只剩下 $A = Z_2$ 需要分析。 A的乘法表 $\boldsymbol{A}$ 为$\begin{pmatrix} 0 & g & 0 \\ -g & 0 & g \\ 0 & -g & 0 \end{pmatrix}$。我们看到

$A_0 = \mathrm{Ann}_l(A) = \mathrm{Ann}_r(A) = K(e+g)$，并且有零分解 $A = A_0 \oplus A_1$，其中 $A_1 = Ke + Kf$。弱乘子 $T \in M_1'(A)$ 是一个由 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 表示的线性映射，满足

$$\begin{pmatrix} pg & qg & rg \\ -ag & -bg & -cg \\ -pg & -qg & -rg \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}T = T^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -pg & ag & pg \\ -qg & bg & qg \\ -rg & cg & rg \end{pmatrix}.$$

因此， $a = -c = q$ 且 $b = p = r = 0$。设 T_a 为该线性映射，则根据定理 3.1，有

$$M'(A) = \{T_a \mid a \in K\} \oplus (K(f+g))^A$$

and

$$LM'(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a+s & t & -a+u \\ 0 & a & 0 \\ s & t & u \end{pmatrix} \Big| \, a, s, t, u \in K \right\}.$$

根据推论 3 2, . 具有 $R \in (K(e+g))^A$ 的弱乘子 $T = T_a + R$ 是乘子，当且仅当对任意 $\zeta = xe + yf$ 和满足 x、 y、 z、 $v \in K$ 的 $\eta = ze + vf$，

$$\begin{aligned} R((xv - yz)g) &= R(\zeta\eta) = \zeta T_a(\eta) - T_a((xv - yz)g) \\ &= \zeta(a\eta) + a(xv - yz)e = a(xv - yz)(e + g) \end{aligned}$$

成立。因此，对所有 $x \in K$，有 $R(xg) = ax(e + g)$。令 S_a 为由 a 进行的数乘，则 $(T - S_a)(A) \subseteq K(e + g)$ 且 $(T - S_a)(Kg) = \{0\}$。因此，我们得到

$$M(A) = \{S_a \mid a \in K\} \oplus \{R \in (K(e+g))^A \mid R(Kg) = 0\},$$

and

$$LM(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a+s & t & 0 \\ 0 & a & 0 \\ s & t & a \end{pmatrix} \Big| \, a, s, t \in K \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ a-c & b & c \end{pmatrix} \Big| \, a, b, c \in K \right\}.$$

参考文献

[1] B. E. Johnson，《中心化子理论导论》，Proc. London Math. Soc.，14 (1964)，299–320。[2] E. Kaniuth，《交换巴拿赫代数教程》，Springer，2008。[3] Y. Kobayashi、K. Shirayanagi、M. Tsukada 和 S.-E. Takahasi，《代数闭域上的三维代数及 $\mathbb{C}$ 的完整分类》，Asian-European J. Math.，14 (2021) 2150131。[4] Y. Kobayashi、K. Shirayanagi、M. Tsukada 和 S.-E. Takahasi，《代数闭域上的三维零势代数分类》，Commu-nication in Algebra，第 45 卷，2017，5037—5052。[5] R. Larsen，《乘子理论导论》，柏林、纽约，Springer–Verlag，1971。[6] T. Tsukada 等，《Python 线性代数：理论与应用》，即将由 Springer 出版。[7] J. G. Wendel，《群代数上的左中心化子与同构》，Pacific J. Math.，2 (1952)，251–261。[8] A. Zivari-Kazempour，《弗雷歇代数的几乎乘子》，The J. Anal.，28(4) (2020)，1075-1084[9] A. Zivari-Kazempour，《巴拿赫代数上的近似 θ-乘子》，Surv. Math. Appl.，77 (2022)，79–88。