arXiv:2301.03738v1 [math.NT] 10 Jan 2023

利用雅可比函数 dc 和 nc 推导的双曲求和

John M. Campbell

摘要

我们介绍一种基于雅可比椭圆函数相关傅里叶级数展开的方法，并用该方法确定新的恒等式，以完全椭圆积分 K 和 E 表示双曲无穷和的值。我们运用此方法，求得拉马努金给出的一族双曲正割和的推广，以及 Zucker 给出的一族双曲余割和的推广。此方法的优点是能够求出含有符号函数的双曲和的值，而这类求和此前尚未见于双曲和相关文献。我们运用雅可比椭圆函数 dc 和 nc，结合椭圆阿尔法函数，得到 q-双伽马表达式的新闭式，以及与拉马努金、Berndt 等人的发现相关级数的新闭式。

关键词：雅可比椭圆函数、椭圆积分、双曲函数、 Γ-函数、符号求值、椭圆阿尔法函数

数学主题分类：42A16, 33E05

1 引言

雅可比椭圆函数通过对第一类椭圆积分求逆来定义

$$u = F(\phi, k) = \int_0^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \tag{1}$$

令 $0 < k^2 < 1$。表达式 $k = \operatorname{mod} u$ 称为椭圆模数，而 $\phi = \operatorname{am}(u, k) = \operatorname{am}(u)$称为雅可比振幅。雅可比椭圆函数 sn、cn 和 dn 可定义如下：

$$\sin\phi = \operatorname{sn}(u, k), \tag{2}$$

$$\cos\phi = \operatorname{cn}(u, k), \quad \text{and} \tag{3}$$

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} = \operatorname{dn}(u, k). \tag{4}$$

本文运用与雅可比椭圆函数相关的傅里叶级数展开，在 Zucker [67], Yakubovich [64], 和 Xu [63]关于双曲无穷和的研究基础上进一步展开。Zucker 在 [67] 中的研究（参见 [66]）与高能物理 [17, 18, 23], 核物理 [22], 静电学 [38], 格点和研究 [16], 斐波那契和研究中的数论课题 [24, 25, 26, 27, 28], 以及涉及拉马努金级数的数论领域的相关性（包括$\frac{1}{\pi}$ [4, 5, 15] 以及 Ap´ery 常数等常数 [59] ），构成了本文所提出技巧和结果的主要研究动机。

1.1 背景与进一步的预备知识

第一类完全椭圆积分 K 满足 $K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$。我们也可以写作 $K(k) = K$ 和 $K' = K'(k) = K(k')$，其中 $k' = \sqrt{1-k^2}$；第二类完全椭圆积分 $E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta$ 也有类似表示。

由 sn、cn 和 dn 函数组合可得其余的雅可比椭圆函数，如下所示：

$$\begin{aligned}
\mathrm{cd}(u,k) &= \frac{\mathrm{cn}(u,k)}{\mathrm{dn}(u,k)}, && (5)\\
\mathrm{cs}(u,k) &= \frac{\mathrm{cn}(u,k)}{\mathrm{sn}(u,k)},\\
\mathrm{dc}(u,k) &= \frac{\mathrm{dn}(u,k)}{\mathrm{cn}(u,k)}, && (6)\\
\mathrm{ds}(u,k) &= \frac{\mathrm{dn}(u,k)}{\mathrm{sn}(u,k)},\\
\mathrm{nc}(u,k) &= \frac{1}{\mathrm{cn}(u,k)},\\
\mathrm{nd}(u,k) &= \frac{1}{\mathrm{dn}(u,k)},\\
\mathrm{ns}(u,k) &= \frac{1}{\mathrm{sn}(u,k)},\\
\mathrm{sc}(u,k) &= \frac{\mathrm{sn}(u,k)}{\mathrm{cn}(u,k)}, \quad \text{and}\\
\mathrm{sd}(u,k) &= \frac{\mathrm{sn}(u,k)}{\mathrm{dn}(u,k)}.
\end{aligned}$$

Γ-函数 [49, §8] 作为一种特殊函数而闻名且应用广泛，在我们的工作中也经常出现。我们回顾一下，这个特殊函数对 $\Re(x) > 0$ 的定义为，其欧拉积分为 $\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}\, du$ [49, §8]。关于我们在第 1.2 节中所用方法，一个有用的特点是，该方法可用于求出涉及 q-双伽马函数 $\psi_q(z)$ 的表达式的新求值结果；该函数可定义如下：

$$\psi_q(z) = \frac{1}{\Gamma_q(z)}\frac{\partial\Gamma_q(z)}{\partial z},$$

其中 Γ_q 表示 Γ 函数的 q 类比形式。等价地，我们可以将 q 双伽马函数定义为

$$\psi_q(z) = -\ln(1-q) + \ln q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+z}}{1-q^{n+z}}. \tag{7}$$

在拉马努金的第二本笔记 [12, §17] 中（参见 [8]），有用于求值的恒等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^s\mathrm{sech}\left(\frac{2n+1}{2}\frac{K'}{K}\pi\right) \tag{8}$$

以 K 的形式给出，例如恒等式 [12, 第 134] 页。

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\mathrm{sech}\left(\frac{2n+1}{2}\frac{K'}{K}\pi\right)=\frac{2kk'K^2}{\pi^2}. \tag{9}$$

在 Zucker 关于双曲和的开创性论文中，[67]，也给出了一个用于计算 (8) 的恒等式，而 [67] 还给出了将拉马努金在 (8) 中的和里的双曲正割替换为双曲余割后所得各和的恒等式：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^s\mathrm{csch}\left(\frac{2n+1}{2}\frac{K'}{K}\pi\right)=2J_s, \tag{10}$$

例如，

$$4J_0=\left(\frac{2K}{\pi}\right)k \quad \text{and} \quad 4J_2=\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3k(1-k^2).$$

Zucker 在 [67] 中的方法主要依赖于双重级数变换，以及诸如下式的展开：

$$J_s(c)=J_s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)^sq^{n-1/2}}{1-q^{2n-1}},$$

记

$$q=e^{-\pi\frac{K'}{K}} \tag{11}$$

表示雅可比椭圆函数的椭圆模数。本文提供了一种方法，可用于计算以下所示的 (8) 和 (10) 的两个推广族中的各项：

1. 将（8）（分别为（10））中的 sech（分别为双曲余割）替换为更高次幂 sech^2（分别为双曲余割^2）所得的求和，其中 s 为所有奇数次幂；以及
2. 在前一点所示的求和中，将符号函数 $(-1)^n$ 替换为符号函数 $(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ 所得的求和。

除了上述列出的双曲和族之外，我们的求值技巧还可以应用于更广泛的范围。例如，我们的方法也可以用来推导出与以下求和相似且相关的新求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{2\pi n}-1}=\frac{1}{24}-\frac{1}{8\pi} \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{13}}{e^{2n\pi}-1}=\frac{1}{24}$$

拉马努金所给出的 [51, 第326页，xxvi]。这些拉马努金求和已由 Nanjundiah [44] 和 Sandham [53]等作者进行研究。如 [44], 中所记载，拉马努金在其关于模方程及其近似值的开创性文章中，给出了上述恒等式中的第一个恒等式。

如同 Yakubovich 的文章 [64], ，我们的工作延续了 Ling 和 Zucker [39, 40, 67]提出的方法。Yakubovich 的符号形式，如

$$\frac{\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)}{32\pi^4}+\frac{\Gamma^8\left(\frac{1}{4}\right)}{512\pi^6}-\frac{1}{8\pi^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cosh(\pi n)\mathrm{csch}^2(\pi n)$$

关于含双曲余割^2 的无穷级数，在 [64] 中被列为推论重点介绍，并启发我们提出了用于双曲余割^{2}求和的符号形式，如下文示例 7 和 8 所示。

1.2 主要技巧

我们的主要技巧可概括如下：令 j(u, k) 表示一个雅可比椭圆函数。

1. 从 j(u, k) 的傅里叶级数展开开始，或从涉及雅可比椭圆函数的某个表达式开始，亦可从对此类傅里叶级数展开进行某种处理所得的结果开始，例如逐项应用微分算子得到的级数展开；

2. 为了使用内置的计算机代数系统算法，在可能的情况下化简关于椭圆模数的 q 次幂的导数，并利用双曲函数，我们需要改写上一步所述级数的求和项，使任何指数表达式都只出现在分母中，并化简这些表达式的幂；

3. 对变量 w 进行诸如 $u \mapsto 2wK$ 的代换；

4. 尽可能论证：若将 w 设为某个特殊值，则第三步所得的级数会化为闭式求值；并且

5. 如果所得的被加数非零，且对椭圆模数求导后得到的被加数可用双曲函数表示，则化简所得的被加数。

1.3 文章结构

上述技巧可应用于 cd、cn、cs、dc、dn、ds、nc、nd、ns、sc、sd 和 sn 这 12 种雅可比函数中的许多种。不过，有时将这一技巧应用于不同的雅可比椭圆函数，也会得到等价的结果。例如，若将这一技巧应用于 ns，那么得到的结果也可以通过将这一技巧应用于 dc 获得。本文第 2 节和第 3 节的结果专门

讨论将这一技巧应用于 dc函数和和 nc函数；如果尝试将同一方法应用于 dc函数和和 nc函数以外的雅可比椭圆函数，那么这种方法要么不适用，要么会得到与下文第 2 节和第 3 节相同的结果。

我们的方法也可应用于我们所列出的 12 个雅可比函数以外的表达式的傅里叶级数展开。例如， q- 展开的一个等价表述

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \mathrm{ns}^2(2Kw,k) = \frac{4K(K-E)}{\pi^2} + \csc^2(\pi w) - 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{2n}\cos(2n\pi w)}{1-q^{2n}} \tag{12}$$

对于 ns^2，如 [67], 中所记载，该式收录于经典著作 [62, 第 535] 页，其渊源可追溯至雅可比的工作 [32], ，可依照第 1.2 节中的技巧进行处理。第 4 节将对此作简要讨论。

2 雅可比椭圆函数 dc函数的应用

正如 [20], 中所探讨的，雅可比椭圆函数与广义贝塞尔函数之间的联系，进一步激发了我们对 [20] 中所给级数展开相关应用的研究。首先，我们记录下傅里叶级数展开

$$\mathrm{dc}(u,k) = \frac{\pi}{2K}\sec v + \frac{2\pi}{K}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\cos((2n+1)v) \tag{13}$$

该展开见于 [20]，也见于 [61, 第 511–512], 页等经典著作中。令 $v = \frac{\pi u}{2K}$，并回顾式 (11)。按照第 1.2 节中的求值技巧，我们将 dc函数的上述级数展开改写如下:

$$\mathrm{dc}(2Kw,k) = \frac{\pi}{2K}\left(\frac{1}{\cos(\pi w)} + 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{(2n+1)\pi\frac{K'}{K}}-1}\cos((2n+1)\pi w)\right). \tag{14}$$

令 $w=0$，由 (14) 可得

$$\frac{K}{2\pi} - \frac{1}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{(2n+1)\pi\frac{K'}{K}}-1}, \tag{15}$$

而 (15) 中的公式也由 Bagis 在 [3] (推论 1) 中利用拉马努金 [12, p. 174] 给出的恒等式证明。对 (15) 关于椭圆模数逐项求导，可得

$$\frac{2K^2\left(E+\left(k^2-1\right)K\right)}{\pi^2(K'(E-K)+E'K)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\mathrm{csch}^2\left(\frac{2n+1}{2}\frac{K'}{K}\pi\right). \tag{16}$$

我们打算仿照式 (10) 中 Zucker 的和，对式 (16) 进行推广。

2.1 推广 Zucker 的和

为了将式 (10) 中的 Zucker 的和推广为以双曲余割[2] 替换式 (10) 中的双曲余割，我们采用下文证明中所示的第 1.2 节技术。

定理 1. 等式

$$\frac{1}{4}+\frac{2\left(k^2-1\right)K^3}{\pi^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)^2}{e^{(2n+1)\frac{K'}{K}\pi}-1}$$

当上述级数收敛时成立。

证明。我们再次从式 (13) 中 dc函数的傅里叶级数展开开始。根据式 (6) 改写式 (13) 的左边，然后对所得等式两边应用算子 $\frac{d^2}{du^2}$。接着，根据以下微分方程展开左边:

$$\frac{d\,\mathrm{sn}u}{du}=\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u, \tag{17}$$

$$\frac{d\,\mathrm{cn}\ u}{du}=-\mathrm{sn}u\,\mathrm{dn}u,\quad \text{and} \tag{18}$$

$$\frac{d\,\mathrm{dn}u}{du}=-k^2\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u, \tag{19}$$

经过 大量化简，并利用式 (17)–(19) 重新整理后，我们可以证明 tha t

$$\frac{\mathrm{dn}(u,k)\left(\mathrm{dn}^2(u,k)-k^2\mathrm{cn}^2(u,k)\right)\left(\mathrm{cn}^2(u,k)+2\mathrm{sn}^2(u,k)\right)}{\mathrm{cn}^3(u,k)} \tag{20}$$

等于

$$\frac{\pi^3\left(3-\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)\right)\sec^3\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{16K^3}-\frac{\pi^3}{2K^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nq^{2n+1}(2n+1)^2\cos\left(\frac{(2n+1)\pi u}{2K}\right)}{1-q^{2n+1}}, \tag{21}$$

交换极限运算 $\frac{d^2}{du^2}$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}$ 的顺序。按照第 1.2 节中的步骤，我们令 $u\mapsto 2wK$。令 $w=0$ 后，便可得到所需结果的一个等价表述。

□

我们用通常的记法 [14, p 表示椭圆奇异值。 298],写作

$$\frac{K'(k_r)}{K(k_r)}=\sqrt{r}, \tag{22}$$

其中椭圆 λ 函数满足

$$\lambda^*(r)=k_r, \tag{23}$$

其中，形如 $K(k_r)$ 的表达式对于自然数 $r\in\mathbb{N}$ 可以进行显式符号求值。尽管定理 1 中强调的结果旨在用于求得新的双曲求和，但我们将利用关系式 (22) 和 (23) 来应用这一相同结果。

例 1. 在 (22) 中令 $r=1$，根据符号形式

$$\lambda^*(1)=k_1=\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{24}$$

and

$$K(k_1)=\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\sqrt{\pi}}, \tag{25}$$

由此根据定理 1 可得

$$\frac{1}{4}-\frac{\Gamma^6\left(\frac{1}{4}\right)}{64\pi^{9/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)^2}{e^{(2n+1)\pi}-1}.$$

例 2. 在 (22) 中令 $r=4$，符号形式

$$\lambda^*(4)=k_4=3-2\sqrt{2}, \tag{26}$$

and

$$K(k_4)=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt{2\pi}} \tag{27}$$

由此根据定理 1 可得

$$\frac{1}{4}-\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\Gamma^6\left(\frac{1}{4}\right)}{128\pi^{9/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)^2}{e^{2(2n+1)\pi}-1}.$$

进一步应用定理 1，可得到如下求和结果：在 (10) 中的 Zucker 的和里令 $s=3$，并将双曲余割替换为双曲余割[2]。

定理 2. 恒等式

$$\frac{8\left(k^2-1\right)K^4\left(3E+\left(k^2-3\right)K\right)}{\pi^4(K'(E-K)+E'K)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^3\mathrm{csch}^2\left(\frac{2n+1}{2}\frac{K'}{K}\pi\right)$$

若上述级数收敛，则该式成立。

证明。对定理 1 中的椭圆模数逐项求导即可直接得到此结果。

□

例 3. 使用椭圆阿尔法函数

$$\alpha(r)=\frac{\pi}{4K^2(k_r)}+\sqrt{r}-\frac{E(k_r)\sqrt{r}}{K(k_r)} \tag{28}$$

以及椭圆函数恒等式

$$E'=\frac{\pi}{4K}+\alpha(r)K \tag{29}$$

以及已知公式 $\alpha(1) = \frac{1}{2}$，我们可以得到 $E(k_1)$ 和 $E'(k_1)$ 的符号形式。因此，在定理 2 中，我们令 $k = k_1$ 为式 (24) 中的值，从而得到

$$\frac{\Gamma^{10}\left(\frac{1}{4}\right)}{128\pi^{15/2}} - \frac{3\Gamma^{6}\left(\frac{1}{4}\right)}{32\pi^{11/2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^3\operatorname{csch}^2\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right).$$

例 4. 将 $k = k_4$ 作为 (26) 中的取值，根据已知的求值 $\alpha(4) = 2(\sqrt{2}-1)^2$，，再结合 (28) 和 (29) 中的椭圆阿尔法函数恒等式，通过定理 2 可得：

$$\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\Gamma^{10}\left(\frac{1}{4}\right)}{1024\pi^{15/2}} - \frac{3\left(1+\sqrt{2}\right)\Gamma^{6}\left(\frac{1}{4}\right)}{128\pi^{11/2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^3\operatorname{csch}^2((2n+1)\pi).$$

与定理 2 的证明类似，我们可以求得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^s\operatorname{csch}^2\left(\frac{2n+1}{2}\frac{K'}{K}\pi\right) \tag{30}$$

对于奇自然数 $s \in \mathbb{N}_{\geq 5\circ}$ 若能显式求出奇数 $s \in \mathbb{N}$ 对应的 (30)，将会很有帮助。这并非易事，可能需要利用反复应用 (17)–(19) 所给微分方程组得到的 $\mathsf{dc}(u,k)$ 的高阶导数组合公式。我们将此问题以及第 5 节讨论的其他一些问题留待另行研究。

2.2 一个新符号函数

我们关于含有以下形式因子的交错和的恒等式

$$\operatorname{csch}^2\left(\frac{2n+1}{2}\frac{K'}{K}\pi\right), \tag{31}$$

如下文定理 4 所示，这些恒等式之所以值得关注，部分原因在于它们无法从此前关于含有如下表达式的和的已知结果中推导出来

$$\operatorname{csch}\left(\frac{2n+1}{2}\frac{K'}{K}\pi\right),$$

例如，通过以下关系

$$\frac{kK}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\operatorname{csch}\left(\frac{2n+1}{2}\frac{K'}{K}\pi\right)$$

在 [48] 中给出为 (5.3.4.1)，并在 [64] 中通过关于椭圆模数的逐项求导加以应用。为了获得涉及 (31) 的新双曲和，我们需要在新结果中交换应用 $\frac{d}{dk}$ 和应用 $\sum_{n=0}^{\infty}\cdot$ 所给出的极限运算

如下文定理 3 所强调的那样。据我们所知，涉及诸如 $n \mapsto (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ 等符号函数的双曲和，此前尚未出现在关于双曲和的相关文献中，这进一步激发了对如下文定理 3 和定理 4 所述结果的研究兴趣。

定理 3. 恒等式

$$\frac{\left(\sqrt{1-k}+\sqrt{1+k}\right)K}{2\pi}-\frac{1}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{e^{(2n+1)\frac{K'}{K}\pi}-1}$$

在上述级数收敛时成立。

证明. 由 (14) 中的恒等式可得，该商

$$\frac{\mathrm{dn}(2Kw,k)}{\mathrm{cn}(2Kw,k)}$$

具有与 (14) 相同的展开。因此，令 $w=\frac{1}{4}$ 并应用半-K 公式

$$\mathrm{cn}\left(\frac{1}{2}K,k\right)=\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt{1+k}+\sqrt{1-k}} \tag{32}$$

and

$$\mathrm{dn}\left(\frac{1}{2}K,k\right)=\sqrt[4]{1-k^2}, \tag{33}$$

我们得到展开式

$$\frac{\sqrt{1-k}+\sqrt{k+1}}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2K}\left(\sqrt{2}+4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{4}\pi\right)}{e^{(2n+1)\frac{K'}{K}\pi}-1}\right),$$

这与所需结果等价。 □

例 5. 对于定理 3 中与 $r=1$ 情形对应的椭圆奇异值，我们得到

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\pi^{3/2}}-\frac{1}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{e^{(2n+1)\pi}-1}.$$

这等价于下面给出的 q-双伽马函数求值：

$$4\pi+\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)=-\psi_{e^{8\pi}}\left(\frac{1}{8}\right)-\psi_{e^{8\pi}}\left(\frac{3}{8}\right)+\psi_{e^{8\pi}}\left(\frac{5}{8}\right)+\psi_{e^{8\pi}}\left(\frac{7}{8}\right).$$

例 6。将 $k=k_4$ 代入定理 3，可得

$$\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}+2\sqrt{4+3\sqrt{2}}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{16\pi^{3/2}}-\frac{1}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{e^{2(2n+1)\pi}-1}.$$

这等价于下面给出的 q-双伽马函数求值:

$$8\pi+\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}+2\sqrt{4+3\sqrt{2}}}{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)= \\ -\psi_{e^{16\pi}}\left(\frac{1}{8}\right)-\psi_{e^{16\pi}}\left(\frac{3}{8}\right)+\psi_{e^{16\pi}}\left(\frac{5}{8}\right)+\psi_{e^{16\pi}}\left(\frac{7}{8}\right).$$

定理 4。恒等式

$$\frac{2k\left(k^2-1\right)K^2\left(\frac{\left(\sqrt{1-k}+\sqrt{1+k}\right)\left(E+\left(k^2-1\right)K\right)}{k(k^2-1)}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+k}}-\frac{1}{\sqrt{1-k}}\right)K\right)}{\pi^2(E'K+(E-K)K')} \\ =\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(2n+1)\mathrm{csch}^2\left(\frac{2n+1}{2}\frac{K'}{K}\pi\right)$$

对有界性适当的 k 成立。

证明。对定理 3 中的恒等式两边关于椭圆模数求导，然后交换求导与无穷求和的顺序，并经过大量化简，即可直接得到此结果。

□

我们的级数（如例 8 中所示）受到 [7]中记载的类似形式的级数求值启发。例如，级数求值

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\mathrm{csch}(\pi n)=\frac{1}{4\pi}$$

[7] 中记载的结果，正如 [7], 所指出的，此前已由 [19, 35,44, 45, 52, 54, 67]中的许多不同作者证明。为了从定理 4 得到新的闭式，我们将使用椭圆阿尔法函数 [14, §5]

例7。使 取椭圆奇异值 k_1，定理 4 的一个特殊情形给出

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\pi^{5/2}}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\Gamma^6\left(\frac{1}{4}\right)}{64\pi^{9/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(2n+1)\mathrm{csch}^2\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right).$$

例8. 使用 取椭圆奇异值 k_4，定理 4 的一个特例给出

$$\frac{\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{16\pi^{5/2}}-\frac{\sqrt{4+\sqrt{2}+2^{7/4}}\Gamma^6\left(\frac{1}{4}\right)}{256\pi^{9/2}}= \\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(2n+1)\mathrm{csch}^2((2n+1)\pi).$$

与 [13], 一样，我们记录 Nanjundiah公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{csch}^2(n\pi) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi}$$

继 Nanjundiah 于 1951 年证明 [44], 之后，许多不同的作者都证明了这一结果，其中包括 Berndt [9], Ling [40], Kiyek 和 Schmidt [33], Muckenhoupt [43], 以及 Shafer [55]。Nanjundiah公式以及我们在例 7 和例 8 中给出的涉及双曲余割^2 的新求和结果，促使我们进一步运用这一方法计算涉及双曲余割^2 的和。

2.3 2n + 1 的更高次幂

我们再次利用 (20) 和 (21) 的等式关系，来证明定理 1 的以下对应结果。

定理 5。等式

$$\frac{3}{2} + \frac{4\left(k^2\left(3+k'\right) - 3\left(1+k'\right)\right)K^3}{\left(\sqrt{1-k}+\sqrt{1+k}\right)\pi^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(2n+1)^2}{e^{(2n+1)\frac{K'}{K}\pi} - 1}$$

在上述级数收敛时成立。

证明。从 (20) 和 (21) 的等式关系出发，我们再次令 $u \mapsto 2wK$。利用 (32) 和 (33) 中的半-K 公式，以及半-K 公式

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K}{2}, k\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+k}+\sqrt{1-k}},$$

我们可以得到

$$\frac{\sqrt{2}\left(k'+2\right)\left(k'+1-k^2\right)}{\sqrt{1-k}+\sqrt{k+1}} = \frac{3\pi^3}{4\sqrt{2}K^3} - \frac{\pi^3}{2\sqrt{2}K^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2(-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}{e^{(2n+1)\frac{K'}{K}\pi} - 1},$$

这等价于所需结果。 □

例 9. 定理 5 与椭圆积分奇异值 k_1 一起给出

$$\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{26+17\sqrt{2}}\Gamma^6\left(\frac{1}{4}\right)}{64\pi^{9/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2(-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}{e^{(2n+1)\pi} - 1}.$$

例 10. 定理 5 与椭圆积分奇异值 k_4 告诉我们

$$\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{54+37\sqrt{2}+4\sqrt{352+249\sqrt{2}}}\Gamma^6\left(\frac{1}{4}\right)}{128\pi^{9/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2(-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}{e^{2(2n+1)\pi} - 1}.$$

如下所示，定理 5 可用于求值 $s=3$ 情形下的和；该和由式 (10) 中 Zucker 的和通过将 $(-1)^n$ 替换为 $(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$，并将双曲余割替换为双曲余割^2 得到。

定理 6. 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(2n+1)^3\operatorname{csch}^2\left(\frac{2n+1}{2}\frac{K'}{K}\pi\right)$$

可计算为

$$\Big(4k'K^4\big(6\big(k\big(k\big(\sqrt{1-k}+\sqrt{1+k}\big)-3\sqrt{1-k}+3\sqrt{1+k}\big)-6\big(\sqrt{1-k}+\sqrt{1+k}\big)\big)E+\\ \big(36\big(\sqrt{1-k}+\sqrt{1+k}\big)+k\big(18\big(\sqrt{1-k}-\sqrt{1+k}\big)+k\big(k\big(k\big(\sqrt{1-k}+\sqrt{1+k}\big)-8\sqrt{1-k}+\\ 8\sqrt{1+k}\big)-23\big(\sqrt{1-k}+\sqrt{1+k}\big)\big)\big)\big)K\big)\Big)\Big/\left(\pi^4\big(k'+1\big)(K'(E-K)+E'K)\big)\right.,$$

若上述级数收敛。

证明. 对定理 5 中的式子关于椭圆模数逐项求导，即可证明这一点。

□

例 11. 令 $k=k_1$，可得

$$\frac{\sqrt{218+151\sqrt{2}}\Gamma^{10}\left(\frac{1}{4}\right)}{512\pi^{15/2}}-\frac{3\sqrt{26+17\sqrt{2}}\Gamma^{6}\left(\frac{1}{4}\right)}{32\pi^{11/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(2n+1)^3\operatorname{csch}^2\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right).$$

例 12. 令 $k=k_4$，可得

$$\frac{\sqrt{402+287\sqrt{2}+4\sqrt{20296+14358\sqrt{2}}}\Gamma^{10}\left(\frac{1}{4}\right)}{2048\pi^{15/2}}-\frac{3\sqrt{54+37\sqrt{2}+4\sqrt{352+249\sqrt{2}}}\Gamma^{6}\left(\frac{1}{4}\right)}{128\pi^{11/2}}$$

等于

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(2n+1)^3\operatorname{csch}^2((2n+1)\pi).$$

我们可以仿照上述证明来计算

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(2n+1)^s\operatorname{csch}^2\left(\frac{2n+1}{2}\frac{K'}{K}\pi\right)$$

对于奇数 s。

3 雅可比椭圆函数 nc函数的应用

本节介绍的关于含有双曲正割函数的求和的符号形式的结果，受到以下公式的启发

$$\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\pi^{3/2}}-\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sech}(\pi n)$$

这条公式出自拉马努金，并被 Wolfram MathWorld 的双曲正割词条特别誉为一条极其惊人的公式 [60]。一个涉及双曲正割、与我们的工作关系更为密切的拉马努金求和公式是拉马努金的公式（参见 [9]）

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{4m-1}\operatorname{sech}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)=0. \tag{34}$$

我们对（15）中恒等式的应用也受到以下著名拉马努金公式的启发 [11, §14]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{2\pi n}-1}=\frac{1}{24}-\frac{1}{8\pi}.$$

我们从以下傅里叶级数展开开始 [61, 第 511–512] 页:

$$\operatorname{nc}(u,k)=\frac{\pi}{2Kk'}\sec v-\frac{2\pi}{Kk'}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nq^{2n+1}}{1+q^{2n+1}}\cos\left((2n+1)v\right).$$

按照第 1.2 节所述步骤，我们得到

$$\operatorname{nc}(2wK,k)=\frac{\pi}{2k'K}\sec(\pi w)-\frac{2\pi}{k'K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{(2n+1)\frac{K'}{K}\pi}+1}\cos((2n+1)\pi w).$$

令 $w=0$，可以证明上述等式左边等于 1。由此可得以下结果的一种等价表述:

$$\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{1-k^2}K}{2\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{(2n+1)\frac{K'}{K}\pi}+1}. \tag{35}$$

Bagis 在 [3] 中给出了一个等价结果，即定理 6。对这个已知公式关于椭圆模数求导，我们可以得到恒等式

$$\frac{2k'K^2(K-E)}{\pi^2(K'(E-K)+E'K)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{2n+1}{2}\frac{K'}{K}\pi\right). \tag{36}$$

直接类比第 2.1 节中的内容，我们可以推广（36），从而求出

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^s\operatorname{sech}^2\left(\frac{2n+1}{2}\frac{K'}{K}\pi\right) \tag{37}$$

对于奇数 s。为简洁起见，我们不对此进行详细考察，并将依据（17）–（19）中的微分方程反复应用，推导（37）的显式组合公式这一工作留待另行开展。

我们已证明的（35）中的公式有一个直接应用：利用该公式，我们可以证明以下公式的一个更强版本

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{(2n+1)\pi}+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{sech}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)=\frac{1}{2} \tag{38}$$

在 [7]中标为推论 4.22。该结果在 [7]中借助欧拉多项式得到了证明。

定理 7. （38）中的 Berndt 恒等式的以下更强版本成立：

$$\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{sech}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right).$$

证明。利用（24）中 k_1 的值以及（25）中给出的 $K\left(k_1\right)$ 的值，由（35）中的恒等式可得

$$\frac{1}{4}-\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt{2}\pi^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{(2n+1)\pi}+1},$$

因此，结合（38）即可得到所需结果。 □

我们对 [7], 中推论 4.22 的加强，如定理 7 所示，并未见于以往受 [7], 影响的出版物中；这些出版物的研究领域包括数论 [2,21, 31, 34, 41, 42, 46, 47, 57, 65] 数理物理 [58], 高能物理 [29], 和核物理 [22]。数学和物理学中与 Berndt [7] 所揭示的双曲无穷和相关的诸多领域，激励着我们进一步发展如定理 7 所示的结果。由于 Berndt 在 (38) 中的公式在 [7], 中被列为推论，我们认为有必要将定理 7 的以下等价表述列为推论。

推论 1. q-digamma 求值

$$\psi_{e^\pi}\left(\frac{1-i}{2}\right)-\psi_{e^\pi}\left(\frac{1+i}{2}\right)=-i\pi-\frac{i\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\sqrt{2\pi}}$$

成立。

证明。这几乎可由式 (7) 中的定义立即得出，与定理 7 等价。 □

我们的许多结果，尤其是定理 7，与下述公式的形式相似

$$\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{sech}^2\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)=\frac{1}{\pi}$$

已记录于 [7]。与 [7], 中一样，我们指出，上述公式已由许多不同的作者证明 [33, 40, 44, 67]。

定理 8. 恒等式

$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{k'}\left(\sqrt{1-k}+\sqrt{1+k}\right)K}{2\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}{e^{(2n+1)\frac{K'}{K}\pi}+1}$$

在上述级数收敛时成立。

证明。将 $w=\frac{1}{4}$ 代入上述 nc函数$(2wK,k)$ 的级数展开式，可得 ${}^1\operatorname{cn}(\frac{k}{2},k)$ 的展开式如~~下：~~

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{1-k^2}K}\left(\frac{1}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}{e^{(2n+1)\frac{K'}{K}\pi}+1}\right).$$

根据式 (32) 中所示的半-K 恒等式，可得

$$\frac{\sqrt{1-k}+\sqrt{1+k}}{\sqrt{2}\sqrt{k'}}$$

具有相同的　　展开式，由此得到所需结果的一个等价形式。 □

例 13。符号形式

$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\pi^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}{e^{(2n+1)\pi}+1}$$

成立，并可结合定理 8 与式 (25) 中给出的椭圆奇异值来证明。这等价于 q-双伽马函数求值

$$-4\pi-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)=\psi_{e^{8\pi}}\left(\frac{1-i}{8}\right)+\psi_{e^{8\pi}}\left(\frac{3-i}{8}\right)-\psi_{e^{8\pi}}\left(\frac{5-i}{8}\right)-\psi_{e^{8\pi}}\left(\frac{7-i}{8}\right).$$

拉马努金关于.....的闭式

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{-4t-1}\operatorname{sech}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)\tag{39}$$

已有相关研究，如 [10], 所示，这些结果被视为拉马努金笔记中尤为重要的贡献。这进一步促使我们对拉马努金的双曲正割和进行推广，或研究与之相关的内容，如式（8）和（39）所示。

例 14. 符号形式

$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}+\sqrt{4+3\sqrt{2}}\right)}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\pi^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}{e^{2(2n+1)\pi}+1}$$

成立，并可结合定理 8 与式 (27) 中给出的椭圆奇异值加以证明。我们可以像之前那样，将其改写为一个 q-digamma 求值。

拉马努金对无穷双曲和的诸多求值，是 Xu 在 [63] 中开展研究的主要动机来源之一。特别是，拉马努金给出的下列求值

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^2\mathrm{sech}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)=\frac{\Gamma^6\left(\frac{1}{4}\right)}{16\sqrt{2}\pi^{9/2}}$$

and

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^2\mathrm{sech}^2\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)=\frac{\Gamma^8\left(\frac{1}{4}\right)}{192\pi^6}$$

被视为 Xu 在 [63] 中提出相关结果的主要动机来源之一。

通过对定理 8 关于椭圆模数逐项求导，我们可以证明该表达式

$$\left(K^2\sqrt{k'}\left(\left(k\left(\sqrt{1-k}-\sqrt{1+k}\right)+2\left(\sqrt{1-k}+\sqrt{1+k}\right)\right)K-2\left(\sqrt{1-k}+\sqrt{1+k}\right)E\right)\right)/\left(\pi^2(K'(E-K)+E'K)\right)$$

等于

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(2n+1)\mathrm{sech}^2\left(\frac{2n+1}{2}\frac{K'}{K}\pi\right)$$

如果上述级数收敛。直接类比第 2.3 节中的内容，我们可以仿照上述推导来求值

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(2n+1)^s\mathrm{sech}^2\left(\frac{2n+1}{2}\frac{K'}{K}\pi\right)$$

当 s为奇数时。

4 雅可比椭圆函数的幂

结合 (12) 和第 1.2 节中的方法，我们可以证明

$$-\frac{K^2\left(2EKk'+E^2+K^2\left(k^2(k'+1)-2k'-1\right)\right)}{4\pi^3(K'(E-K)+E'K)}$$

等于

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 \operatorname{csch}^2\left(\frac{2n\pi K'}{K}\right)$$

如果上述级数收敛。例如，这就说明

$$-\frac{1}{32\pi^2}-\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)}{128\pi^4}+\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\Gamma^8\left(\frac{1}{4}\right)}{2048\pi^6}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2\operatorname{csch}^2(2n\pi).$$

我们将把推广这一结果，以及研究如何将我们的方法与除式 (12) 之外涉及雅可比椭圆函数的傅里叶级数展开结合使用，留待另一个项目完成。

5 进一步考察

即使使用最先进的计算机代数系统 [6]，计算 (2)–(4) 中逆函数的过程通常也十分困难。例如，无法直接使用 Mathematica 的内置命令（如 `JacobiSN`、 `JacobiCN` 或 `JacobiDN` ），来计算通过 (2)–(4) 定义的“实际”雅可比椭圆函数（相对于 Mathematica 对不完全椭圆 F 积分的定义）

$$\int_0^{\phi}\frac{dt}{\sqrt{1-k\sin^2 t}}$$

其参数为 ϕ 和 k，这与 (1) 形成对比。这类实际计算问题促使人们开发新的高效方法，以级数展开的形式表示和应用本文所涉及的雅可比椭圆函数。

Berndt 在 [8] 中应用了拉马努金在（9）中的恒等式，证明了以下引人注目的闭式:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\cos\sqrt{x}+\cosh\sqrt{x}}=\frac{\pi}{4}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

如何利用我们与第 3 节中拉马努金公式（9）相关的求值，获得类似的结果？我们将此留待另一个项目。此外，对于采用第三-K 公式这类恒等式，而不是我们已经应用的半-K 公式，我们也将其留待另一个项目。

致谢

作者谨向 Alexey Kuznetsov 致以诚挚谢意，感谢他进行了许多有益的讨论。

参考文献

[1] Abramowitz, M., Stegun, I.A.：《数学函数手册：公式、图表与数学表格》。美国政府印刷局，华盛顿特区（1964）[2] Alkan, E.：表示非 U数超越数的级数。《国际数论杂志》11，869–892（2015）[3] Bagis, N.：与雅可比椭圆函数相关的级数求值。arXiv:1803.09445（2019）[4] Bagis, N.D., Glasser, M.L.：关于替代模基求值及逼近 $1/\pi$ 的公式的猜想。《数论杂志》 132，2353–2370 （ 2012 ）[5] Bagis, N.D., Glasser, M.L.：拉马努金型 $1/\pi$ 近似公式。《数论杂志》133，3453–3469（2013）[6] Batista, M.：Elfun18——用于计算实参数椭圆积分和雅可比椭圆函数的 MATLAB 函数集。SoftwareX 10，100245（2019）[7] Berndt, B.C.：拉马努金风格的解析艾森斯坦级数、θ函数与级数关系。《纯粹与应用数学杂志》303/304，332–365（1978）[8] Berndt, B.C：与拉马努金和椭圆函数相关的积分。Ramanujan J. 41，369–389（2016）[9] Berndt, B.C.：模变换及拉马努金若干公式的推广。《落基山数学杂志》7，147–189（1977）[10] Berndt, B.C.：拉马努金笔记。《数学杂志》51，147–164（1978）[11] Berndt, B.C.：拉马努金笔记，第二部分。Springer-Verlag，纽约（1989）[12] Berndt, B.C.：拉马努金笔记，第三部分。Springer-Verlag，纽约（1991）[13] Berndt, B.C., Venkatachaliengar, K.：关于戴德金η函数的变换公式。载于：Garvan, F.G.、Ismail, M.E.H.（编），《符号计算、数论、特殊函数、物理学与组合学》。数学进展，第2卷，第73–77页。Kluwer Academic，Dordrecht（2001）[14] Borwein, J.M., Borwein, P.B.：《π与算术几何平均》。Wiley，纽约（1987）[15] Borwein, J. M., Borwein, P.B.：拉马努金关于 $1/\pi$ 的有理与代数级数。《印度数学学会杂志》51，147–160（1987）[16] Borwein, J.M., Borwein, P.B., Glasser, M., McPhedran, R., Wan, J., Zucker, I.：《格点和：今昔》。剑桥大学出版社，剑桥（2013）

[17] Bourdier, J., Drukker, N., Felix, J.：来自自由费米子的 $\mathcal{N}=2$ Schur 指数。《高能物理学杂志》2016，文章编号：167（2016）[18] Bourdier, J., Drukker, N., Felix, J.：$\mathcal{N}=4$SYM 的精确 Schur 指数。《高能物理学杂志》2015，文章编号：210（2015）[19] Cauchy, A.：《全集》。第 II 辑，巴黎（1889）[20] Dattoli, G., Chiccoli, C., Lorenzutta, S., Maino, G., Richetta, M.：多变量广义贝塞尔函数与雅可比椭圆函数的生成函数。《数学物理学杂志》33，25–36（1992）[21] Dieter, U.：余切和：戴德金和的进一步推广。《数论杂志》18，289–305（1984）[22] Dowker, J.S., Kirsten, K.：球面上的椭圆函数与温度反演对称性。《核物理B辑》638，405–432（2002）[23] Drukker, N.：带波利亚科夫环的 $\mathcal{N}=4$ Schur 指数。《高能物理学杂志》2015，1–15（2015）[24]Duverney, D., Nishioka, K., Nishioka, K., Shiokawa, I.：Rogers–Ramanujan 连分数与斐波那契数倒数和的超越性。《日本学士院纪要A辑》73，140–142（1997）[25] Duverney, D., Shiokawa, I.：关于涉及斐波那契数和卢卡斯数的级数 I。载于：Ko- matsu, T.（编），《丢番图分析及相关领域》，第 62–76 页。美国物理联合会，纽约（2008）[26] Elsner, C., Shimomura, S., Shiokawa, I.：斐波那契数倒数和的代数关系。《算术学报》130，37–60（2007）[27] Elsner, C., Shimomura, S., Shiokawa, I.：斐波那契数中偶数项倒数和的代数关系。《数学科学杂志》180，650–671（2012）[28] Elsner, C., Shimomura, S., Shiokawa, I.：斐波那契数中奇数项倒数和的代数关系，Ramanujan J. 17，429–446（2008）[29] Ghilencea, D.M.：高阶导数算符作为一维场论轨形中的圈反项，《高能物理学杂志》2005，JHEP03（2005）[30] Gudermann, C.：《模函数与模积分理论》。G. Reimer，柏林，德国（1844）[31] Hu, S., Kim, D., Kim, M.-S.：关于带准周期欧拉函数的阿波斯托尔–戴德金和互反公式。《数论杂志》162，54–67（2016）

[32] C. G. J. Jacobi, 《椭圆函数新理论基础》，柯尼斯堡，1829[33] Kiyek, K., Schmidt, H.：椭圆函数领域若干特殊无穷级数的求值。Arch. Math. 18，438–443（1967）[34] Knopp, M.I.：Hecke 算子与戴德金和的一个恒等式。《数论杂志》12，2–9（1980）[35] Krishnamaghari, C.：若干定积分与级数。J. Indian Math. Soc. 12，14–31（1920）[36] Lagrange, J.：一个求和公式及其应用。Bull. Sci. Math. (2) 84，105–110（1960）[37] Lawden, D.F.：《椭圆函数及其应用》。施普林格出版社，纽约（1989）[38] Lekner, J.：两个紧邻导电球体之间电场增强的解析表达式。J. Electrostat. 68，299–304（2010）[39] Ling, C.-B.：双曲函数级数求和的推广。J. Math. Anal. Appl. 131，451–464（1988）[40] Ling, C.-B.：关于双曲函数级数的求和。《SIAM数学分析杂志》6，551–562（1975）[41] Liu, H., Zhang, W.：广义 Cochrane 和与 Cochrane–Hardy 和。《数论杂志》122，415–428（2007）[42] Meyer, J.L.：某些戴德金和整数值类比的性质。《算术学报》82，229–242（1997）[43] Muckenhoupt, B.：离散奇异变换的范数。Studia Math. 25，97–102（1964/65）[44] Nanjundiah, T. S.：拉马努金提出的若干求和公式及其推广。Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 34，215–228（1951）[45] Naylor, V., Horsley, S.G.：关于某些级数求和的注记。J. London Math. Soc. 6，218–219（1931）[46] Peng, W., Zhang, T.：涉及某个 Hardy 和与 Kloosterman 和的一些恒等式。《数论杂志》165，355–362（2016）[47] Pettet, M.R., Sitaramachandrarao, R.：Hardy 和的三项关系。《数论杂志》25，328–339（1987）

[48] Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., Marichev, O.I.：《积分与级数：第 I 卷：初等函数》。Gordon and Breach，纽约（1986）[49] Rainville, E.D.：《特殊函数》。The Macmillan Co.，纽约（1960）[50] S. Ramanujan，《模方程与对 π的近似》，Q. J. Math. 45 (1915), 350–372.[51] S. Ramanujan，《斯里尼瓦瑟·拉马努金文集》，剑桥大学出版社，剑桥（1927）[52] Sandham, H.F.：一些无穷级数。Proc. Amer. Math. Soc. 5, 430–436 (1954)[53] Sandham, H.F.：拉马努金提出的三个求和公式。Quart. J. Math. 1, 238–240 (1950)[54] Sayer, F.P.：某些含双曲函数的级数之和。Fibonacci Quart. 14, 215–223 (1976)[55] Shafer, R. E.：问题5063，附 A. E. Livingston 和 J. Raleigh 的解答。Amer. Math. Monthly 70, 1110–1111 (1963)[56] Siegl, P., ˇStampach, F.：复模数下雅可比椭圆函数的极值性质。J. Math. Anal. Appl. 442, 627–641 (2016)[57] Simsek, Y.：θ函数、Hardy和、Eisenstein级数与朗伯级数在 $\log\eta_{\mathrm{g}}$ 的变换公式中的关系$_{\mathrm{h}}(z)$。J. Number Theory 99, 338–360 (2003)[58] Simsek, Y.：与Dedekind型DC和及其应用相关的特殊函数。Russ. J. Math. Phys. 17, 495–508 (2010)[59] Vepˇstas, L.：《Plouffe的拉马努金恒等式》。Ramanujan J. 27, 387–408 (2012)[60]Weisstein, E.W. 双曲正割。摘自 MathWorld–Wolfram 网络资源。`https://mathworld.wolfram.com/HyperbolicSecant.html`[61] Wittaker, E. T., Watson, G. N.：《现代分析教程》。剑桥大学出版社，伦敦（1958）[62] Wittaker, E. T., Watson, G. N.：《现代分析》。剑桥大学出版社，伦敦（1927）[63] Xu, C.：涉及三角函数和双曲函数的无穷级数的一些求值。Results Math. 73, 文章编号：128 (2018)[64] Yakubovich, S.：与椭圆积分相关的奇特级数。Ramanujan J. 45, 797–815 (2018)

[65] Zhang, W.：一个类似于戴德金和的和及其均值公式。J. Number Theory 89, 1–13 (2001)[66] Zucker, I.J.：指数函数与双曲函数的一些无穷级数。《SIAM数学分析杂志》15, 406–413 (1984)[67] Zucker, I.J.：双曲函数级数的求和。《SIAM数学分析杂志》10, 192–206 (1979)

John M. Campbell 数学系 多
伦多都会大学
jmaxwellcampbell@gmail.com