arXiv:2301.03739v1 [math.CO] 10 Jan 2023

自关系上的 Dowker 复形与过滤

Dominic Desjardins Côté

2023年1月11日

摘要

给定 $X \times Y$ 上的一个关系，我们可以构造两个称为 Dowker 复形的抽象单纯复形。这些单纯复形的几何实现是同伦等价的。我们证明，若两个关系共轭，则它们的 Dowker 复形同伦等价。自关系 X 对应一个有向图，我们利用 Dowker 复形研究其性质。我们证明，若两个关系移位等价，则在关系的某个幂下，它们的 Dowker 复形同伦等价。最后，我们基于关系不同幂对应的 Dowker 复形定义一种新的过滤。

关键词：Dowker 复形、关系、过滤、图论、移位等价

1 引言

我们可以使用多值映射来研究动力系统 [17]。其思路是将 Conley 指标 [7]用于上半连续多值映射。在实际应用中，研究一个动力系统可能很困难。我们可以使用一个看似符合数据的模型，但找到这样的模型也可能颇具挑战。另一种方法是离散化连续空间，并使用多值映射来近似底层动力系统 [8] [30]。还有一种方法是使用组合结构。举几个例子，我们可以使用 Forman 提出的组合向量场 [13] [18] [9]。此外，Mrozek 提出了一种推广，称为组合多向量场 [23] [25]。最后，还有人提出使用分配格，在有限数据上计算吸引子 [19] [20] [21]。

多值映射可能会受到限制。在 [18]，中，作者将其推广为部分多值映射。但部分多值映射等价于关系。 [26] 通过使用有限集上的 Scymczak 范畴取得了一些进展，其中对象是集合，态射是关系。Szymczak 范畴 [29] 揭示了指标对和指标映射 [7] 的本质，而它们正是 Conley 指标理论的核心。因此，本文的一个研究动机是继续发展关系理论，并将其用于研究具有有限数据的动力系统。

我们的主要研究对象是一个关系，它是两个集合 X and$Y$ 的笛卡尔积的子集。我们可以在一个关系上定义两个不同的抽象单纯复形。对于第一个单纯复形，我们固定一个值 $y \in Y$。对于 X 中所有与 y 有关系的元素，它们将共同张成一个

单形。对于第二个单纯复形，我们交换两者的角色。我们固定一个值 $x \in X$。对于 Y 中所有与 x 有关系的元素，它们将共同张成一个单形。它们称为 Dowker 复形 [10]。一个重要的结果是 Dowker 定理。它指出，这些 Dowker 复形的几何实现是同伦等价的。Dowker 定理在应用中非常有用。举几个例子，我们可以用 Dowker 复形研究信号覆盖 [14]、查找程序与文件之间关系中的错误 [1]、研究信息隐私 [12]，以及用于社会研究 [3]。对于最后一个例子，这种方法称为 Q分析，由 Atkins[2] 开发。Q分析的核心思想是研究 Dowker 复形的 q-连通性和 q-隧道。我们的定义主要受以下两篇文章启发： [24] 和 [26]。

本文有许多贡献。首先，共轭关系的道克复形同伦等价。若两个关系以滞后量 l移位等价，则它们在某个幂次上的道克复形同伦等价。我们可以根据有限自关系在不同幂次下的道克复形，为关系定义一种过滤。此外，这种过滤可以在有限时间内计算出来。我们还可以通过关系所诱导的图的连通分支，计算足够高幂次下的零阶同调。

本文结构如下。第 2 节回顾有限关系、图、单纯复形、Dowker 复形以及著名的 Dowker 定理的一些概念和定义。第 3 节定义右态射和左态射。若两个关系之间存在右态射或左态射，则其中一个道克复形包含于另一个道克复形。此外，我们证明，若两个关系之间存在共轭，则它们的道克复形同伦等价。第 4 节将右态射和左态射的概念推广到多值右态射和多值左态射。我们证明了定义过滤所需的两个重要性质：一个关系某个幂次的道克复形包含于该关系更高幂次的道克复形中。对于某些有限关系，在某个幂次 j之后，该关系所有幂次高于 j 的道克复形都相同。我们称之为道克复形的稳定化。我们证明，移位等价的关系在某个幂次上的道克复形同伦等价。第 5 节中，在满足某些简单条件时，我们可以利用第 4 节中的两个性质，为关系不同幂次下的道克复形定义一种过滤。我们可以对这些过滤使用持久同调，以提取道克复形的拓扑特征。若一个关系无环，则该关系所关联的图在某个幂次之前的连通分支数等于零阶同调的维数。这一结论可以推广到简单关系类。对于强连通关系，我们也有类似的结果。

2 预备知识

2.1 有限关系

设 X和 Y为有限集。我们将 $X \times Y$的子集定义为一个关系。令 $(x, y) \in R \subset X \times Y$，我们记作 xRy 或 $y \in R(x)$。我们如下定义关系的复合。令 $R_1 \subset X \times Y$和 $R_2 \subset Y \times Z$。

$$R_2 \circ R_1 := \{(x,z) \in R_2 \circ R_1 \mid \exists y \text{ such that } xR_1y \text{ and } yR_2z\}. \tag{1}$$

我们通过交换一个关系中的集合来定义逆关系。

$$R^{-1} := \{(y,x) \in Y \times X \mid y \in R(x)\} \tag{2}$$

如果一个关系是 $X \times X$ 的子集，那么我们称它是 X 上的自关系。我们将自关系的幂定义如下:

$$R^n := \begin{cases} R \circ R^{n-1} & n > 0 \\ Id_X & n = 0 \\ R^{-1} \circ R^{n+1} & n < 0 \end{cases}$$

关系 $R \subset X \times Y$ 的定义域和像为:

$$\text{Dom } R := \{x \in X \mid \exists y \text{ such that } (x,y) \in R\} \tag{3}$$
$$\text{Im } R := \{y \in Y \mid \exists x \text{ such that } (x,y) \in R\}. \tag{4}$$

我们可以将关系视为部分多值映射。如果 Dom $R = X$，那么我们称该关系为多值映射。若对于所有 x_1, $x_2 \in X$, $R(x_1) = R(x_2)$ 都有 $x_1 = x_2$，则该关系是单射。若 Im $R = Y$，则该关系是满射。此外，映射 $f: X \to Y$ 诱导出一个关系，其中 $(x, f(x)) \in R$。没有歧义时，我们可以将映射和关系复合起来，得到一个新的关系。

定义 2.1. 设 R 是 X 上的自关系。设 j 是满足以下条件的最小正整数:

$$R^j = R^{j+p} \text{ for some } p > 0.$$

我们称 j 为指标，称最小的 $p > 0$ 为周期。若 $j = 1$，则 R 是周期的。数对 (j,p) 是 R 的最终周期，其指标为 j，周期为 p。

换句话说，周期 p 最终将成为 R的一个周期。

我们有时使用取值于 $\{0,1\}$ 的矩阵来表示关系。设 $R \subset X \times Y$为一个关系，其中 $card(X) = m$ 且 $card(Y) = n$。矩阵 $M_{m\times n}$ 在 $M_{i,\ j}$ 处的值为 1，否则值为 0。它可以称为关系矩阵、布尔关系矩阵、二元关系矩阵、二元布尔矩阵、(0，1)-布尔矩阵和 (0，1)-矩阵。关于布尔矩阵理论的更多信息，请参阅著作 [22]。

如果存在一个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 xR^nx，我们就称自关系 R 在 X 上于 x 处有一个圈。当 $n = 1$时，我们称 R 在 x处为不动点。如果某个关系对于所有周期为 $n > 1$的 x，在 x 处均无圈，则该关系是无环的。圈是一个序列 x_1, x_2, ..., x_n，满足 $x_1 = x_n$且 x_iRx_{i+1}。如果任意两个圈要么不相交，要么相等，则自关系 R 在 X 上是简单的。

2.2 图

在本小节中，我们回顾图的定义和一些记号。

定义 2.2. 有向图 G 是一个有序对 (E, V)，其中 V 是顶点集 V，而 E 是边集 $V \times V$ 的子集。

关系也可以看作有向图。如果 R 是 X 上的自关系，那么 X 是顶点集，边集为 $E = R$。该图中，从顶点 A 到顶点 B 至多有一条有向边，并且我们也允许顶点上有自环。我们将自关系 R 所诱导的图记为 G_R 。

设 x，$y \in V$。如果存在一列边 e_1，e_2，……，$e_n \in E$，使得不沿着边的方向也能从 x 到达 y ，则称存在一条 $(x$，$y)$-路径。我们可以在 G 的顶点上定义一个等价关系。如果两个顶点 x 和 y 之间存在路径，那么 x 和 y 属于同一个等价类。对于图 G，我们称连通分支的数量为路径关系的等价类数量。如果只有一个连通分支，则称 G 是连通的。

如果一个 $(x$，$y)$-路径的边序列沿着图中边的方向前进，那么我们称它为 $(x$，$y)$-游走。我们也可以利用顶点之间的游走定义等价关系。如果存在一条从 x 到 y 的游走，且存在一条从 y 到 x 的游走，那么 x 和 y 属于同一个等价类。这些等价类就是强连通分支。对于图 G，我们称强连通分支的数量为游走关系的等价类数量。如果图 G 只有一个强连通分支，我们就称它是强连通的。

2.3 单纯复形与道克复形

在本小节中，我们将讨论单纯复形、道克复形和道克定理。关于单纯复形的更多信息，建议阅读 [27]。本文不介绍过滤和持久同调，但可参考 [11]。

抽象单纯复形是一个集合 K，它包含有限非空集合；例如，如果 $A \in K$，那么 A 的所有子集也都属于 K。为举例说明，我们使用几何单形。几何 n-单形是由几何独立的顶点集合 $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\} \in \mathbb{R}^N$ 张成的凸包。也就是说，它是由 $x \in \mathbb{R}^N$ 组成的集合，例如 $x = \sum_{i=0}^{n} t_i x_i$ 和 $1 = \sum_{i=0}^{n} t_i$ ，其中对于所有 i，都有 $t_i \geq 0$ 。我们用 $[v_0, v_1, \ldots, v_n]$ 表示一个 n-单形，它是由顶点 v_0，v_1、……、v_n 张成的单形。由 $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ 的子集张成的任意单形都称为面，记作符号 $\leq$。对于所有 $\sigma \in K$，若 $\tau \leq \sigma$，则 $\tau \in K$；若 $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \tau$，则 τ 要么是空集，要么 τ 是 σ_1 的面，且 σ_2。如果 L 是 K 的子复形，我们就称 $L \leq K$ 。如果一个单纯复形的同调与一点等价，则称它为可缩。给定一个抽象单纯复形 K，我们可以定义一个几何单纯复形，并将 K 的几何实现称为 $|K|$ 。我们称零维单形为顶点，一维单形为边。单形 σ 的闭包是该单形所有面的集合。我们将其记作 $cl(\sigma)$。我们还需要一个与单纯复形相关的定义。它将在一些证明中派上用场。

定义 2.3。 如果对于任意两个顶点 x 和 y，都存在一列边 $e_1, e_2, \ldots, e_n$，使得对于所有$i = 1$、2、.....、$n-1$，均有 $x \in e_1$，$y \in e_n$和 $cl(e_i) \cap cl(e_{i+1}) \neq \emptyset$，则称单纯复形 K 是边连通的。

当且仅当该单纯复形是边连通时，它是连通的；而当且仅当 H_0 的维数为 1 [16]时，它是边连通的。

现在我们来说明如何从关系构造抽象单纯复形，这些复形称为 Dowker 复形。设 $R \subset X \times Y$ 是一个关系， X， Y是两个有限集。从一个关系构造 Dowker 复形有两种方法。

定义 2.4。 设 $R \subset X \times Y$ 是一个有限关系， K_R 是其 *Dowker* 复形。单形$[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in K_R$ 当且仅当 $\exists y \in Y$，使得对所有 $i = 1$，都有 $x_i R y$，2，.....， n。

我们可以进行类似的构造。

定义 2.5。 设 $R \subset X \times Y$ 是一个有限关系， L_R 是其 *Dowker* 复形。单形$[y_1, y_2, \ldots, y_m] \in L_R$ 当且仅当 $\exists x \in X$，使得对所有 $i = 1$，都有 $x R y_i$，2，.....， n。

我们记作 $[x_1, x_2, \ldots x_n] = \sigma_y \in K_R$当且仅当对所有 $i = 1$，2，.. .， n都有 $x_i R y$。我们用 y作为 σ_y 的指标，以表示 σ_y 的所有顶点都在 $R^{-1}(y)$中。对于 $\sigma_x \in L_R$，我们也使用相同的记法，但顶点在 $R(x)$中。

通过使用矩阵表示法，我们可以利用行和列构造单形。列对应 K_R，行对应 L_R。

例 2.6。 设 $R \subset X \times Y$是一个有限关系。

$$R := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

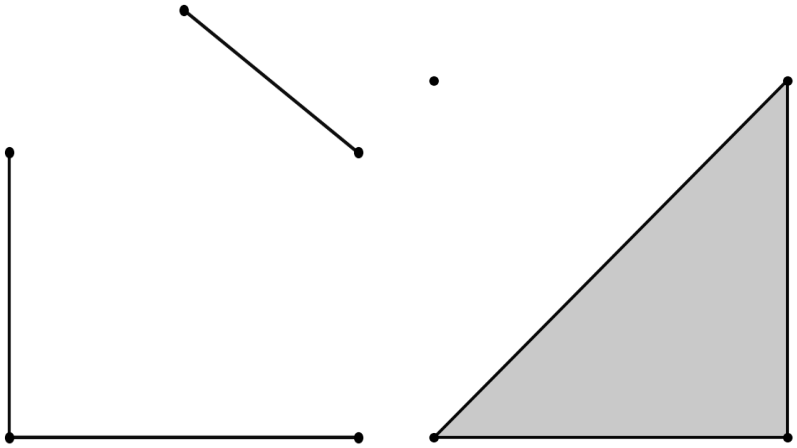
第一列给出单形 $[x_1, x_3, x_4]$，其维数为2。第三列和第四列给出单形 $[x_2]$，其维数为0。第二列和第五列不会添加新的单形。我们得到单纯复形 $K_R := \{[x_1, x_3, x_4], [x_2]\}$。

第一行向 L_R 添加一个1-单形 $[y_1, y_5]$ 。第二行给出一个1-单形 $[y_3, y_4]$。最后一行添加一个1-单形 $[y_1, y_5]$。由此得到单纯复形 $L_R = \{[y_1, y_5], [y_3, y_4], [y_1, y_2]\}$。

我们得到 $|K_R|$和 $|L_R|$有两个连通分支，且没有更高维的圈。

下一个定理将与 $|K_R|$ 和 $|L_R|$之间的同伦联系起来。

定理 2.7（Dowker 定理）。 设 $R \subset X \times Y$ 是一个关系， K_R 和 L_R 是与之对应的 *Dowker* 复形。那么，多面体 $|K_R|$ 和 $|L_R|$ 同伦等价。



(a) 的几何实现
道克复形 K_R。

(b) 的几何实现
道克复形 L_R。

图1：这是例 2.6 中道克复形的几何实现。它们同伦等价。

1952年，Dowker [10] 证明了 K_R 和 L_R 具有同构的同调群。1995年，Björner [4] 证明了 $|K_R|$ 和 $|L_R|$ 同伦等价，这也是文献中更常见的表述。近年来，Dowker 复形在拓扑数据分析领域重新受到关注。我们可以用它们对加权网络 [6]进行过滤。在我们的情形中，过滤方式会有所不同，并基于自关系的不同幂。

3 左态射与右态射

我们先从图同态的定义开始，接着定义关系之间的左态射和右态射。

定义 3.1. 设 R 是 X 上的一个自关系， R' 是 Y上的一个自关系。映射 $f\colon X \to Y$是图同态，当且仅当满足以下条件：

$$For\ every\ x_1, x_2 \in X\ \ such\ as\ x_1 R x_2 \implies f(x_1) R' f(x_2).$$

如果 f 是双射，且其逆映射也是图同态，那么 f 就是图同构。

我们得到，图同态保留了来自第一个关系的道克复形中的某些信息。

引理 3.2. 设 $f\colon X \to Y$ 是 R 与 R'之间的图同态。若 f 是单射，则存在映射 $p\colon K_R \hookrightarrow K_{R'}$。

证明。考虑一个 n-单形 $[x_0, x_1, \ldots, x_n] \in K_R$。那么，存在 $\alpha \in X$，使得对所有 $i = 0, 1, 2, \ldots n$，都有 $x_i R \alpha$。我们知道 f是一个图同态。这意味着，对所有 $i = 0, 1, 2, \ldots, n$，都有 $f(x_i) R' f(\alpha)$。事实上，f 是单射，这意味着 $[f(x_0)\ f(x_1) \ldots,\ f(x_n)]$也是 n中的一个单形。因此，我们可以构造映射 $p\colon K_R \hookrightarrow K_{R'}$，将单形 $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$映射到$[f(x_0)\ f(x_1) \ldots,\ f(x_n)]$。根据前面的论证，$p$定义良好且为单射。

□

如果两个关系之间存在图同构，那么它们的 Dowker 复形保持不变。这是因为图同构只是对图的顶点重新标记。

命题 3.3. 设 R_1 是 X 上的一个自关系，R_2 是 Y 上的一个自关系。若存在 R_1 与 R_2 之间的图同构 f，那么除顶点标签外，它们的 *Dowker* 复形相同。

证明。图同态 f 和 f^{-1} 是单射。根据引理 3.2，存在两个单射映射 $p : K_R \hookrightarrow K_{R'}$ 和 $p' : K_{R'} \hookrightarrow K_R$。因此，除顶点标签外，$K_R$ 和 $K_{R'}$ 相同。

用类似的论证，我们可以证明 L_R 和 $L_{R'}$ 也成立。 □

图同态很有用，但它们可能会彻底改变 Dowker 复形。因此，我们定义了左态射，它改变一条边的源；以及右态射，它改变一条边的目标。如此一来，经过右态射或左态射后，只有其中一个 Dowker 复形会发生变化。

定义 3.4。右态射 $f\colon (X, Y, R) \to (X, Z, R')$ 是一个映射 $f\colon Y \to Z$，满足对每个 $x \in X$ 和 $y \in Y$：

$$xRy \implies xR'f(y).$$

我们得到这个简单的引理，它对后续证明非常有用。

引理 3.5。若存在右态射 $f\colon (X, Y, R) \to (X, Z, R')$，则 $K_R \leq K_{R'}$。若 f 是双射，则等式成立。

证明。设 $f\colon (X, Y, R) \to (X, Z, R')$ 是一个右态射，且 $[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in K_R$。这意味着存在一个 $y \in Y$，使得对所有 $i = 1, 2, \ldots, n$，都有 $x_i R y$。由此可得，对所有 i，$x_i R' f(y)$。最后，我们有 $[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in K_{R'}$。

现在，假设 f是双射。令 $[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in K_{R'}$。那么，存在一个 $z \in Z$，使得对所有 $i = 1$、2、...、n，都有 $x_i R' z$。我们有 $f^{-1}(z) \in Y$，并且 f^{-1}是良定义的，因为 f是双射。于是，对所有 $i = 1$、2、...、n，都有 $x_i R f^{-1}(z)$。由此得到 $[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in K_R$。 □

右态射的概念源自文章 [24]。作者只考虑了右态射。不过，在我们的情形中，我们也关注如何修改关系笛卡尔积中的第一个集合。

定义 3.6。左态射 $g:(X,Z,R)\to(Y,Z,R')$ 是一个映射 $g\colon X\to Y$，满足对每个$x\in X$ 和 $z\in Z$：

$$xRz \implies g(x)R'z.$$

我们有 一个关于左态射的类似引理，正如关于右态射的引理 3.5 m.

引理 3.7。 如果存在一个左态射 $g:(X,Z,R)\to(Y,Z,R)$，那么 $L_R\le L_{R'}$。当 g 是双射时，我们得到等式。

根据右态射和左态射的定义，我们可以很容易地证明，如果两个关系共轭，那么它们的 Dowker 复形同伦等价。在给出证明之前，我们先回顾关系之间共轭的定义。

定义 3.8。 设 R_1 是 X 上的一个自关系， R_2 是 Y上的一个自关系。如果存在一个双射 $\varphi\colon X\to Y$ 使得 $\varphi\circ R_1=R_2\circ\varphi$，则称 R_1 和R_2 共轭。

推论 3.9。 设 R 是 X 上的一个自关系， R' 是 Y 上的一个自关系，且它们通过双射 $\varphi\colon X\to Y$ 共轭。那么， $|K_R|$、 $|L_R|$、 $|L_{R'}|$ 和 $|K_{R'}|$ 同伦等价。

证明。 映射 φ 是双射。这意味着，根据引理 3.5， $K_R=K_{\varphi\circ R}$ ；根据引理 3.7， $L_{R'}=L_{R'\circ\varphi}$ 。

根据 Dowker 定理，我们得到 $|K_R|$ 与$|L_{R'}|$同伦等价，因为 $K_{\varphi\circ R}$ =$K_{R'\circ\varphi\circ}$

□

在 [28], 中，作者决定将右态射和左态射合并。设 $R\subset X\times Y$和 $R'\subset X'\times Y'$为关系， f: $X\to X'$ 和 $g\colon Y\to Y'$ 为两个映射。若对于所有满足 xR_1y 的 $x\in X,y\in Y$ ，都有 $f(x)$ $R_2g(y)$，则一对 (f,g) 是关系 R_1 与 R_2 之间的态射。在 [28], 中，作者展示了道克复形和（余）层表示具有良好的函子性。在我们的情形中，这并无用处，因为我们只需要右态射或左态射。不过，我们可以将它们视为一对 (id_X,f)，其中 f是右态射，而 id_X是 X上的恒等函数。

4 M多右态射与多左态 m

我们希望研究多值映射。我们将左态射和右态射推广为多左态射和多右态射。

定义 4.1。 多右态射 $F:(X,Y,R)\multimap(X,Z,R')$ 是一个多值映射 $F\colon Y\multimap Z$ ，满足对所有 $x\in X$, $y\in Y$：

$$xRy \implies xR'a \ for\ all\ a\in F(y).$$

我们也得到了与之前相同的引理。

引理 4.2. 设 $R \subset X \times Y$和 $R' \subset X \times Z$ 是关系。若存在一个多右态射$F : (X, Y, R) \multimap (X, Z, R')$，则 $K_R \leq K_{R'}$。若 F是双射的多值映射，则等号成立。

证明。 证明与引理 3.5 相同。 □

定义 4.3. 多左态射 $G : (X, Z, R) \multimap (Y, Z, R')$ 是一个多值映射 $G : X \to Y$，使得对所有 $x \in X, z \in Z$:

$$xRz \implies aR'z \text{ for all } a \in G(x).$$

引理 4.4. 设 $R \subset X \times Z$和 $R' \subset Y \times Z$ 是关系。若存在一个多左态射$G : (X, Z, R) \multimap (Y, Z, R')$，则 $L_R \leq L_{R'}$。若 G是双射的多值映射，则等号成立。

我们将多右态射记为 mr-态射，将多左态射记为 ml-态射。

注释 4.5. 提醒一下，如果关系 $S \subset X \times Y$满足 定义域 $S = X$，那么 S 是良定义的多值映射。此外，对于任意关系 $R \subset Z \times X$，我们有 $S : (Z, X, R) \multimap (Z, Y, S \circ R)$是良定义的 *mr*-态射。对于 *ml*-态射，结论也成立。

下一个推论将有助于定义我们的过滤。

推论 4.6. 设 R 是 X上的一个自关系。若 定义域 $R = X$，则 $K_{R^n} \leq K_{R^{n+1}}$。若 像 $R = X$，则 $L_{R^n} \leq L_{R^{n+1}}$。

证明. Dom $R = X$ 意味着 R是一个多值映射。此外， $R : (X, X, R^n) \multimap (X, X, R^{n+1})$ 是良定义的 mr-态射。根据引理 3.5，我们有 $K_{R^n} \leq K_{R^{n+1}}$。

同理，Im $R = X$ 意味着 R^{-1} 是一个多值映射。我们有， $R^{-1} : (X, X, R^n) \multimap (X, X, R^{n+1})$ 是良定义的 ml-态射。根据引理 3.7，我们有 $L_{R^n} \leq L_{R^{n+1}}$。

□

注释 4.7. 前一个推论中的假设定义域 $R = X$ 很重要。我们用一个例子来说明这一点。若 R 是 X上的一个自关系，则可由如下矩阵定义：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

于是，对于 $n > 2$，我们得到 $K_R = \{[x_2, x_3], [x_2], [x_3]\}$、 $K_{R^2} = \{[x_3]\}$ 和 $K_{R^n} = \emptyset$。

对于所有 $n \in \mathbb{N}_{>0}$，我们都没有 $K_{R^n} \subset K_{R^{n+1}}$。如果矩阵是幂零的，那么对于某个 $n \in \mathbb{N}_{>0}$，K_{R^n} 是一个空集。

利用推论 4.6，我们可以证明，一个关系的 Dowker 复形会在某个幂 n 处稳定。

推论4.8. 设 R 是 X 上一个具有最终周期 (j, p) 的有限自关系。若 定义域 $R = X$，则有 $K_{R^j} = K_{R^{j+i}}$，其中 $i \in \mathbb{N}$。若 像 $R = X$，则 $L_{R^j} = L_{R^{j+i}}$，其中 $i \in \mathbb{N}$。

证明. 由推论 4.6 可得以下序列:

$$K_{R^j} \leq K_{R^{j+1}} \leq \ldots \leq K_{R^{j+p-1}} \leq K_{R^{j+p}}. \tag{7}$$

但 p 是 R 的周期，因此 $R^j = R^{j+p}$ 意味着 $K_{R^j} = K_{R^{j+p}}$。由 (7)，我们得到 $K_{R^j} = K_{R^{j+i}}$，其中 $i \in \mathbb{N}$。对于 $L_{R^j} = L_{R^{j+i}}$，也可以用类似的方法证明 $i \in \mathbb{N}$。 □

我们回顾两个关系之间移位等价的定义，并说明关系移位等价这一假设意味着：对于每个关系，在某个幂次下，它们的道克复形同伦等价。

定义 4.9. 设 R_1 是 X 上的有限自关系， R_2 是 Y 上的有限自关系。若存在两个关系 $S \subset X \times Y$ 和 $T \subset Y \times X$，使得: 则称 R_1 和 R_2 具有滞后 l 的移位等价。

$$R_1 \circ T = T \circ R_2 \quad S \circ R_1 = R_2 \circ S$$
$$T \circ S = R_1^l \quad S \circ T = R_2^l$$

如果 $l = 1$，我们就称其为强移位等价。

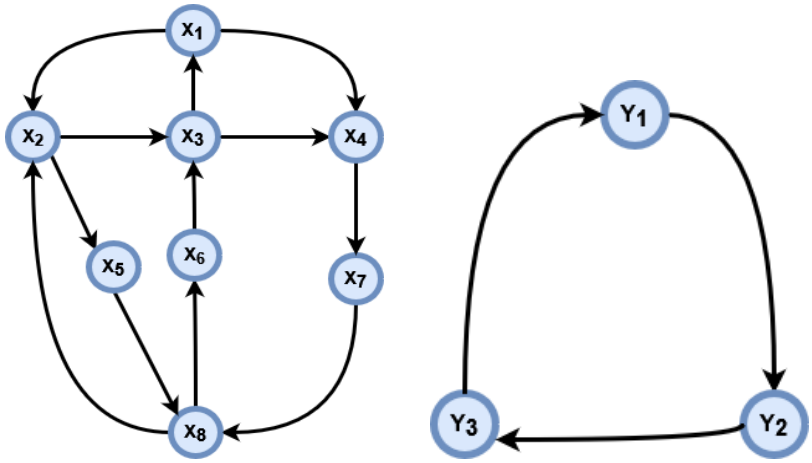
推论 4.10. 设 R_1 是 X 上的有限自关系，且满足 定义域 $R_1 = X$ =像 R_1；设 R_2 是 Y 上的有限自关系，且满足 定义域 $R_2 = Y$ = 像 R_2。设 (j_p, p) 是 R_1 的一个最终周期，且 (j_q, q)是 R_2的一个最终周期。不失一般性，我们假设 $j_p \geq j_q$。若 R_1 和 R_2 以滞后量 l移位等价，则 $|K_{R_1^{j_p}}|$、$|K_{R_2^{j_q}}|$、$|L_{R_1^{j_p}}|$ 和 $|L_{R_2^{j_q}}|$ 同伦等价。

证明. 若 $R_1 \circ T = T \circ R_2$，则对于 $n \in \mathbb{N}$， $R_1^n \circ T = T \circ R_2^n$ 也成立。此外，我们有 Dom $S = X$和 Dom $T = Y$，因为 Dom $R_1 = X$、Dom $R_2 = Y$、 $T \circ S = R_1^l$ 和 $S \circ T = R_2^l$。因此， S 和 R 是定义良好的多值映射。

我们要证明 $K_{R_1^{j_p}} = K_{S \circ R_1^{j_p}}$ 和 $L_{R_2^{j_q}} = L_{R_2^{j_q} \circ S}$。我们将使用 T 和 S 作为 mr-态射，其中 R_1，以及使用 ml-态射，其中 R_2。

我们有 $S\colon (X, X, R_1^{j_p}) \multimap (X, Y, S \circ R_1^{j_p})$，以及 $T\colon (X, Y, S \circ R_1^{j_p}) \multimap (X, X, T \circ S \circ R_1^{j_p})$，它们都是定义良好的 mr-态射。我们有 $T \circ S = R_1^l$。这意味着 $T \circ S \circ R_1^{j_p} = R_1^{l+j_p}$。由此得到 $K_{R_1^{j_p}} \leq K_{S \circ R_1^{j_p}} \leq K_{T \circ S \circ R_1^{j_p}} = K_{R_1^{l+j_p}}$。 R_1 的最终周期为 (j_p, p)。这意味着$K_{R_1^{j_p}} = K_{R_1^{j_p+l}}$。由此得到 $K_{R_1^{j_p}} = K_{S \circ R_1^{j_p}}$。

我们可以看到， $S\colon (Y, Y, R_2^{j_p}) \multimap (X, Y, R_2^{j_p} \circ S)$ 和 $T\colon (X, Y, R_2^{j_p} \circ S) \multimap (Y, Y, R_2^{j_p} \circ S \circ T)$ 是良定义的 ml- 态射。我们有 $S \circ T = R_2^l$。这意味着 $R_2^{j_p} \circ S \circ T = R_2^{j_p+l}$。我们



(a) 图 $G_{R_1\circ}$ (b) 图 $G_{R_2\circ}$

图 2：这些是例 4.11 中的图。

得到 $L_{R_2^{jp}} \leq L_{R_2^{jp}\circ S} \leq L_{R_2^{jp}\circ S\circ T} = L_{R_2^{jp+l}}$。我们有 $L_{R_2^{jq}} = L_{R_2^{jp+l}}$，因为 $j_p \geq j_q$。我们得到 $L_{R_2^{jp}} = L_{R_2^{jp}\circ S}$。

最后，我们有 $K_{R_1^{jp}} = K_{S\circ R_1^{jp}} = K_{R_2^{jp}\circ S}$ 和 $L_{R_2^{jp}} = L_{R_2^{jp}\circ S} = L_{S\circ R_1^{jp}}$。根据 Dowker 定理，我们得到 $|K_{R_1^{jp}}|$、$|K_{R_2^{jq}}|$、$|L_{R_1^{jp}}|$ 和 $|L_{R_2^{jq}}|$ 同伦等价。

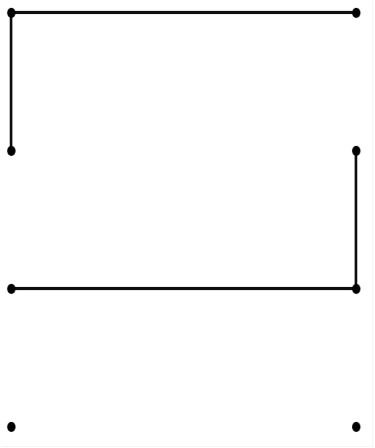
□

例 4.11。设 X 是一个含有 8 个点的有限集，Y 是一个含有 3 个点的有限集。设 R_1 是 X 上的一个自关系，R_2 是 X 上的一个自关系，它们由图 *2* 中的图定义。R_1 的最终周期为 $(3,3)$，而 R_2 的最终周期为 $(1,3)$。从图 *3(a)*、*(b)* 和 *(d)* 中可以看出，这些 *Dowker* 复形并不同伦等价。但是，在图 *3(c)* 和 *(d)* 中，关系的三次幂对应的 *Dowker* 复形同伦等价。

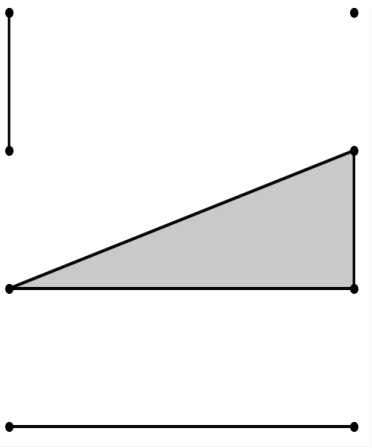
有一个来自 [15] 的有趣命题，可用于强连通关系。我们提醒读者，不可约布尔矩阵是一种强连通关系，而 J是一个所有元素都等于 1 的方阵。

命题4.12 ([15] 中的命题4.3）。每个迹为正的不可约布尔矩阵都与 J强移位等价。

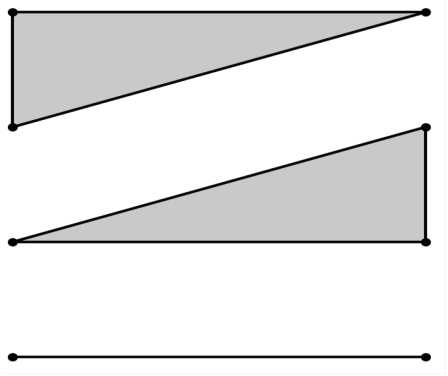
我们可以轻松计算 J的 Dowker 复形。它是一个（$n-1$）-单形，其中 n 是 J 的行数，这对两个 Dowker 复形都成立。最后我们得到：如果迹严格为正，那么幂足够高时，强连通自关系的 Dowker 复形是可缩的。



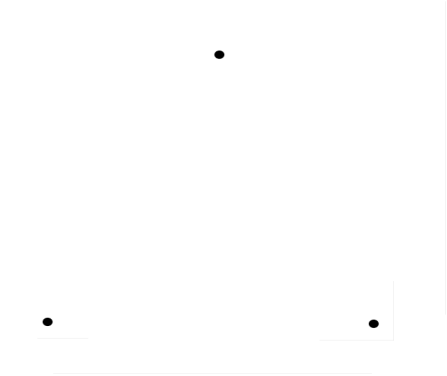
(a) $|K_{R_1}|$的道克复形。



(b) $|L_{R_1}|$的道克复形。



(c) $|K_{R^3_1}|$ 和的 Dowker 复形 $|L_{R^3_1}|$。



(d) Dowker 复形 $|K_{R_2}|$, $|L_{R_2}|$, $|K_{R^3_2}|$和 $|L_{R^3_2}|$。

图 3：这些是例 4.11 中不同的 Dowker 复形 .

5 道克复形的过滤

在本节中，我们假设 R 是 X 上的有限自关系。根据推论 4.6，如果 Dom $R = X$，那么对所有 $i \geq 0$，我们都有 $K_{R^i} \leq K_{R^{i+1}}$。我们有一个包含关系，因此得到如下过滤：

$$K_R \hookrightarrow K_{R^2} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow K_{R^i} \hookrightarrow K_{R^{i+1}} \hookrightarrow \ldots \tag{8}$$

以相 同的方式，对于 Im $R = X$，我们有 $L_{R^i} \leq L_{R^{i+1}}$。由此得到另一个过滤：

$$L_R \hookrightarrow L_{R^2} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow L_{R^i} \hookrightarrow L_{R^{i+1}} \hookrightarrow \ldots \tag{9}$$

根据推论4.8，道克复形在某个幂处稳定。这意味着我们可以在有限时间内计算过滤 (8) 和 (9)。对于我们的过滤，我们从 $i = 1$ 开始，但也可以从 $i = 0$ 开始。我们有 $R^0 = id_X$ 和 $R : (X, X, id_X) \multimap (X, X, R)$ 是一个定义良好的 mr-态射，如果 Dom $R = X$。那么，过滤 (8) 变为：

$$K_{id_X} = K_{R^0} \hookrightarrow K_R \hookrightarrow K_{R^2} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow K_{R^i} \hookrightarrow K_{R^{i+1}} \hookrightarrow \ldots \tag{10}$$

对过滤（9）应用类似的论证，我们得到：

$$L_{id_X} = L_{R^0} \hookrightarrow L_R \hookrightarrow L_{R^2} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow L_{R^i} \hookrightarrow L_{R^{i+1}} \hookrightarrow \ldots \tag{11}$$

K_{id_X} 和 L_{id_x} 的同调是 $n = card$个（X）点的同调。在某些情况下，我们可能希望从 $i = 0$ 或 $i = 1$开始过滤。

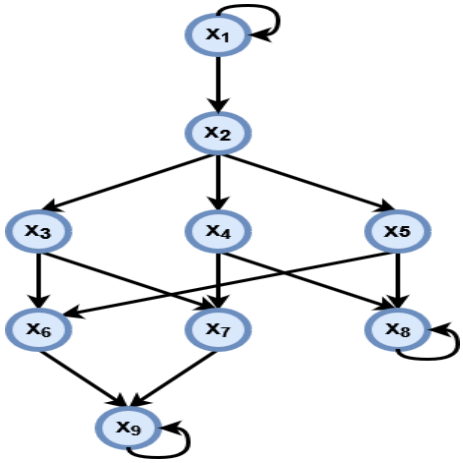
提醒一下，根据 Dowker 定理，对于所有$i \in \mathbb{N}$， $|K_{R^i}|$ 和 $|L_{R^i}|$ 都是同伦等价的。过滤（8）和（9）得到相同的条形码表示。

例5.1。 设 R_1 是 X 上的一个自关系，由图*4(a)*中的图给出。 R_1 有*9*个节点且无环。最终周期为(3,1)。我们得到图*4(b)*中的条形码。其中有一个 H_1 的生成元，其区间为 $[1, 2]$ ； 此外，还有3 个 H_0 的生成元很快消亡，以及1 个 H_0 的生成元存续至无穷远。

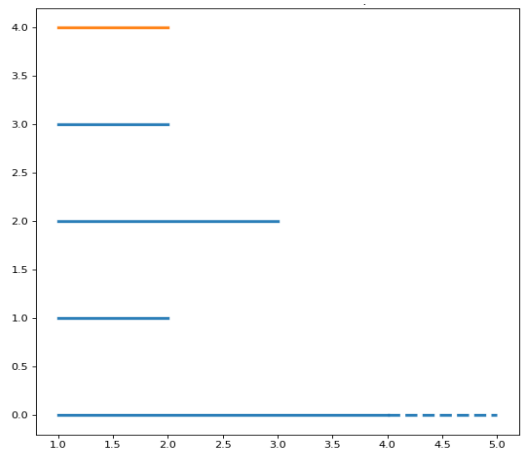
例5.2. 设 R_2 是由图*4(c)*中的图给出的 X 上的自关系。 R_2 有*10*个节点，且是简单的。最终周期为(3, 4)。我们得到图*4(d)*中的条形码。其中有4 个在时间2 消失的 H_0 生成元，以及2 个持续到无穷远的其他生成元。

对于接下来的结果，我们计算不同类型关系的 Dowker 复形的零阶同调。

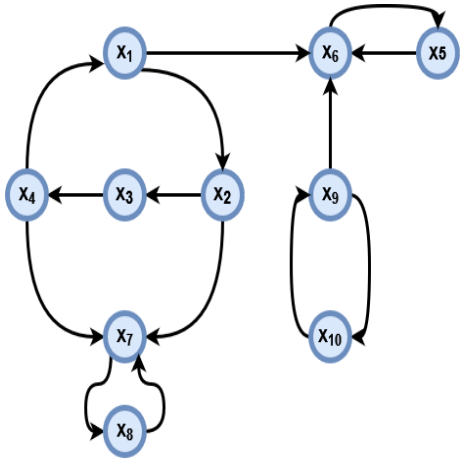
如果 R 是一个有限无环自关系，那么它具有最终周期 $p = 1$ 和 $j \in \mathbb{N}_{>0}$ ，例如$R^j = R^i$ 对所有 $i \geq j$都成立。因此我们将此关系 R^j 记为 R^∞，因为当$i \to \infty$时，它会收敛到一个关系。

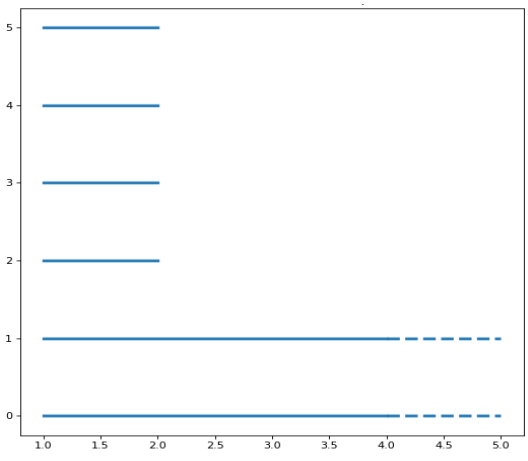


(a) 例5.1中的无环关系图。



(b) 例5.1中关系对应的条形码。我们使用满足 $K_{R_1^i}$的过滤。橙色的第一条线段是 H_1 中的一个生成元，另外四条蓝色线段是 H_0中的生成元。





(c) 例5.2中具有多个圈的关系图。(d) 例5.2中该关系对应的条形码。我们使用带有 $K_{R_2^i}$的滤过。蓝色的六条条形码是 H_0中的生成元。

图4：在这些图中，左侧是图，右侧是示例5.1和5.2所对应的条形码图。条形码中的虚线表示其延伸至无穷远。

定义5.3。 如果不存在满足 $x \neq y$ 和 $xR^{\infty}y$ 的 $y \in X$，我们称 $x \in X$ 是自关系 R 的极小元。我们将集合记为 $U_x := \{y \in X \mid yR^{\infty}x\}$。

如果不存在满足 $x \neq y$ 和 $yR^{\infty}x$ 的 $y \in X$，我们就称 $x \in X$ 是自关系 R 的极大元。我们将集合 $D_x := \{y \in X \mid xR^{\infty}y\}$ 记为。

无环关系的极大元和极小元很重要，因为它们决定了 $K_{R^{\infty}}$ 和 $L_{R^{\infty}}$ 的极大单形。

引理 5.4. 设 R 是 X 上的有限无环自关系，且 定义域 $R = X$。那么， $K_{R^{\infty}}$ 的极大单形由 R^{∞} 的极小元给出。

证明。 由 Dom $R = X$ 可知 Dom $R^{\infty} = X$。于是，对所有 $x \in X$，都存在 $z \in X$，使得 $xR^{\infty}z$，且 z 是一个极小元。设 $\sigma_y = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in K_{R^{\infty}}$ 是任意一个单形。存在一个 $y \in X$，使得对所有 $i = 1$、2、.....、n，都有 $x_iR^{\infty}y$。根据第一个论证，存在一个极小元 $z \in X$，使得 $yR^{\infty}z$。因此，我们有 $x_iR^{\infty}yR^{\infty}z$。于是， $\sigma_y \subset \sigma_z$。 □

如果 Im $R = X$，我们可以通过取 R^{∞} 的极大元，得到关于 $L_{R^{\infty}}$ 的类似结果。

定理 5.5. 设 R 是定义域为 $R = X$ 的 X 上的无环有限自关系。

$$number\ of\ connected\ components\ of\ G_R = \dim H_0(K_{R^{\infty}}) = \dim H_0(L_{R^{\infty}}) \tag{12}$$

证明. 首先，根据 Dowker 定理，我们有 $\dim H_0(K_{R^{\infty}}) = \dim H_0(L_{R^{\infty}})$。假设 G_R 是连通的，并证明 $\dim H_0(K_{R^{\infty}}) = 1$。更确切地说，我们证明 $K_{R^{\infty}}$ 是边连通的。由 Dom $R = X$ 可知，对所有 $x \in X$，都有 $[x] \in K_{R^{\infty}}$。

设 $x, x' \in X$。存在 $y_1 \in X$，它是一个极小元，使得 $xR^{\infty}y_1$ 且 $y_1R^{\infty}y_1$。这意味着 $e_1 = [x, y_1] \in K_{R^{\infty}}$。我们还知道，存在 $y_n \in X$，它是一个极小元，使得 $x'R^{\infty}y_n$ 且$y_nR^{\infty}y_n$。这意味着 $e_n = [x', y_n] \in K_{R^{\infty}}$。

由于 G_R 是连通的，因此存在一条有限长度的（y_1， y_n）路径。我们将这个序列记作y_1， z_1，z_2， z_3， $\ldots$， z_m， y_n。不失一般性，我们取最短路径。存在一个 i，使得$z_i \in U_{y_1}$ 且$z_{i+1} \notin U_{y_1}$。首先，我们有$e_2 = [y_1, z_i] \in K_{R^{\infty}}$ 和 z_iRz_{i+1}。存在一个 $y_2 \neq y_1$ 极小元，使得 $z_{i+1}R^{\infty}y_2$。这意味着 $z_iR^{\infty}y_2$，且我们有边 $e_3 = [z_i, y_2] \in K_{R^{\infty}}$。我们可以对（$y_2$， y_n）路径重复这一过程，直到得到一列连接顶点 $[x]$ 和 $[x']$的边。由此可得， $K_{R^{\infty}}$ 是边连通的。

现在假设 G_R 不连通。令 H 为 G_R的一个连通分支。那么，对于所有$x \in H$ 以及所有 $y \notin H$，我们有 $x \notin R(y)$ 和 $y \notin R(x)$。这意味着每个连通分支都为 $H_0(K_{R^{\infty}})$ 提供一个生成元。

我们可以构造一个映射 $j : cc(G_R) \to H_0(K_{R^{\infty}})$，将 G_R 的连通分支映射到 $H_0(K_{R^{\infty}})$ 的生成元。根据前面的论证，我们可以使此映射 j 单射。对于 $H_0(K_{R^{\infty}})$ 中的任意生成元 g，存在一个 $x \in X$，使得 g 与 $[x]$ 同调等价，因为定义域 $R = X$。这意味着存在一个 $H \in cc(G_R)$，使得 $x \in H$。由此可得，映射 j 是双射，且等式（12）成立。

□

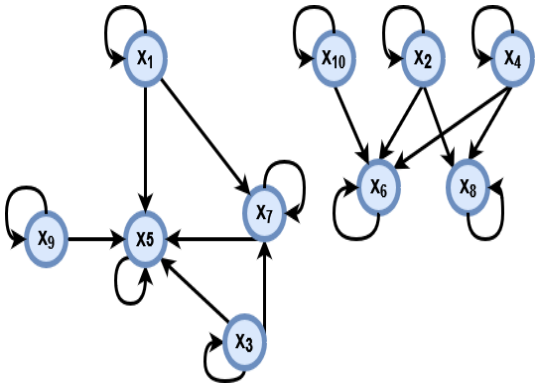


图5：例5.2中的 R_2^4 的图。 $G_{R_2^4}$ 有2个连通分支。

对于简单关系，我们也可以给出类似的证明。

定理5.6。 设 R 是定义在 X 上的有限简单自关系，且定义域 $R = X$ 和(j, p) 是一个最终周期。假设 G_R 是连通的。存在一个 $r \in \mathbb{N}$ ，使得:

$$\dim H_0(K_{R^j}) = \dim H_0(L_{R^j}) = \ number\ of\ connected\ components\ of\ G_{R^r}. \tag{13}$$

证明。 我们可以取足够大的 q ，使得 R^q 无环，因为 R 是一个简单关系。我们选择一个 $i \in \mathbb{N}$ ，例如 $iq > j$。固定 $r = iq$。我们还有 R^r 也是无环的。根据推论4.8，我们有$K_{R^j} = K_{R^r}$。根据定理 5.5，我们知道 dim $H_0(K_{R^j}) = R^r$的连通分支数。

□

如果 G_R 有多个连通分支，我们对 G_R 的每个连通分支应用此定理，论证过程与定理5.5的证明类似。根据前面的结果，如果 Dom $R \neq X$ 而 Im $R = X$，我们可以用 L_{R^j}重新进行证明。另一种方法是使用 R^{-1}，因为 Dom $R^{-1} = X$。

注5.7。 在例*5.2*中，它是一个简单关系。我们有 R_2^4 是无环的。 R_2^4 的图见图*5*。它有两个连通分支，且图*4(b)*中的条形码有2 条延伸至无穷远。这是定理*5.6*所预期的结果。

我们在推论 4.10 和命题4.12中已经证明，若 $tr(R) > 0$，则强连通的自关系 R 与矩阵 J移位等价。但我们希望得到适用于任意强连通关系的结果。不过，首先我们需要一些定义以及其他论文中的一些结果。令 $gcd(a, b)$为 a 和 b的最大公约数。我们定义:

$$q = gcd(n_1, n_2, n_3, \ldots) \tag{14}$$

其中， n_i 是一个圈的长度， $i \in \mathbb{I}$ 是 R中所有不同圈的集合。

我们得到如下命题:

命题5.8 ([26]中的命题6.12)。 设 R 是 X 上的一个强连通自关系，(j, p) 是由式（*14*）定义的最终周期和 q 。我们有 $q|j$。

我们为强连通自关系 R 定义一个新的等价关系 $\sim_q$。如果每个 (x,y)-游走的长度模 q 等于 0，则称$x \sim_q y$。这是一个等价关系。

命题 5.9（[26]中的命题 6.16）。设 R 是 X上的强连通自关系。令 q按式（*14*）定义。则，$\sim_q$ 是 X 上的等价关系，且恰有 q 个不同的等价类。

在展示最终结果之前，我们还需要一个引理。

引理 5.10（[26]中的引理 6.25）。设 R 是 X 上的强连通自关系，且 $(j,\ p)$是一个最终周期。那么，

$$x \sim_q x' \implies R^j(x) = R^j(x'). \tag{15}$$

我们将证明，对于具有最终周期（$j,\ p$）的强连通自关系，$\sim_q$ 的等价类数量等于 $\dim(H_0(K_{R^j}))$。

定理 5.11。设 R 是 X 上的有限自关系，具有最终周期（$j,\ p$），R 是强连通的，q 按式（*14*）定义。则有：

$$number\ of\ [x]_{\sim_q} = q = \dim(H_0(K_{R^j})) = \dim(H_0(L_{R^j})). \tag{16}$$

证明。我们证明，对于任意 $x,\ y \in X$，若 $x \sim_q y$，则 x 和 y 边连通；若 $x \not\sim_q y$，则 x 和 y 不边连通。

首先，我们假设 $x \sim_q y$。根据引理 5.10，我们有 $R^j(x) = R^j(y) \neq \emptyset$。存在一个 $z \in R^j(x)$。这意味着 $[x,z]$ 和 $[y,z]$ 属于 K_{R^j}。因此，同一个等价类中的每个顶点都是边连通的。

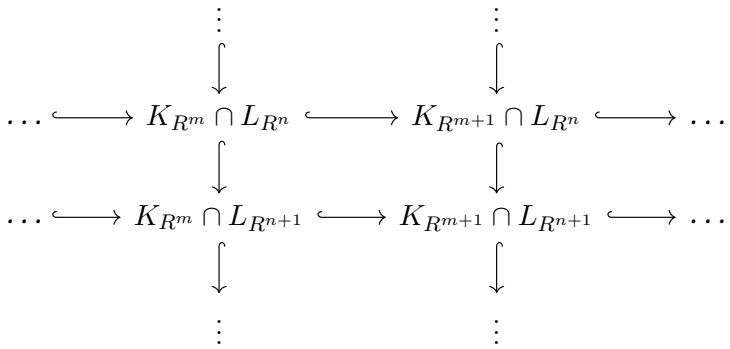
现在，我们假设 $x \not\sim_q y$。存在一条长度为 n、模 q 的 (x,y)-游走，其中 $n \neq 0$。我们来证明 $R^j(x) \cap R^j(y) = \emptyset$。假设存在一个 $z \in R^j(x) \cap R^j(y)$。这意味着存在一条长度为 j 的 (x,z)-游走，以及一条长度为 j 的 (y,z)-游走。但是，根据命题5.8，$q|j$。这意味着 $x \sim_q z$ 和 $y \sim_q z$。但是，$\sim_q$ 是一个等价关系。由此得到 $x \sim_q y$，这与假设矛盾。由此得到，$x \not\sim_q y$ 意味着 $R^j(x) \cap R^j(y) = \emptyset$。由此可知，如果 $x \sim_q y$，那么它们边连通。但是，如果 $x \not\sim_q y$，那么它们不边连通。共有 q 个不同的等价类。证明完毕。 □

对于 R 是任意关系的情况，要找到它的同调 H_0 更加困难。此外，对于更高维的同调群，也很难判断会发生什么。这两种情况都需要进一步研究。

现在，我们回到前面定义的过滤。还有两种其他类型的过滤可供使用。如果 R 是 X 上满足 $\mathrm{Dom}\ R = X = \mathrm{Im}\ R$ 的自关系，那么我们可以同时使用这两种过滤。但两者得到的条形码相同。这是因为，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，对于任意自关系，$|K_{R^i}|$ 都与 $|L_{R^i}|$ 同伦等价。我们可能需要提出其他类型的过滤。我们建议另外两种类型的过滤。

交替使用它们来构造一种之字形过滤 [5] with K_{R^i} and L_{R^i} 会很有意思。这可能取决于关系。还需要进一步研究。

我们将介绍一种有趣的双过滤，其中包含 K_{R^m} and L_{R^n}。我们有：如果 $K_{R_m} \subset K_{R_{m+1}}$and $L_{R^n} \subset L_{R^{n+1}}$，那么对于所有 $m, n \in \mathbb{N}$，都有 $K_{R^m} \cap L_{R^n} \subset K_{R^{m+1}} \cap L_{R^n}$ and $K_{R^m} \cap L_{R^n} \subset K_{R^m} \cap L_{R^{n+1}}$。我们得到这种双过滤：



双过滤的计算也是有限的。因为关系 R 是有限的，且 Dom $R = X =$ Im R。我们得到一个最终周期 $(j,\ p)$。在双过滤中，最多需要计算 j^2 个不同的单纯复形。

有人可能会问，为什么考虑交集是个好主意。让我们更详细地解释一下。设 R 是定义在 X 上的自关系，其 Dom 为 $R = X =$，Im 为 R，且 $m,\ n \in \mathbb{N}$。设 $\sigma \in K_{R^m} \cap L_{R^n}$，其中 $\sigma = [x_1, x_2, \ldots, x_d]$。那么，存在 $x_\omega \in X$ 使得 $x_i R^m x_\omega$，并且存在 $x_\alpha \in X$ 使得对于所有 i，都有 $x_\alpha R^n x_i$。另一种理解方式是，对于每个 $x_i \in \sigma$，都存在一条长度为 $m+n$、经过 x_i 的 $(x_\omega,\ x_\alpha)$-游走。我们可以将这条 $(x_\omega,\ x_\alpha)$-游走细分为一条长度为m 的 $(x_\omega,\ x_i)$-游走，以及一条长度为 n 的 $(x_i,\ x_\alpha)$-游走。因此，仅凭 $K_{R^m} \cap L_{R^n}$ 中存在一个单形 σ，σ 的每个顶点都存在一条游走：它们具有相同的起点和终点，长度相同，且经过该顶点。当 m 趋于无穷、n 趋于无穷或两者都趋于无穷时，研究这些 Dowker 复形将会很有意思。

6 结论

总之，我们使用 Dowker 复形研究了自关系的一些性质。首先，我们定义了右态射和左态射。我们还将其推广到多值映射的情形，称为多右态射和多左态射。R_1 与 R_2 之间存在右态射或多右态射，意味着 K_{R_1} 包含于 K_{R_2}。类似地，R_1 与 R_2 之间存在左态射或多左态射，意味着 L_{R_1} 包含于 L_{R_2}。我们证明了，两个关系共轭意味着它们的 Dowker 复形同伦等价。我们还证明了，如果两个关系移位等价，那么它们的 Dowker 复形在关系的某个幂次下同伦等价。我们关注的是一种等价于某类有向图的自关系。我们得到了两个很好的性质。如果 R 是有限的且 Dom $R = X =$ Im R，那么对于所有 $i \in \mathbb{N}$，都有 $K_{R^i} \leq K_{R^{i+1}}$ 和 $L_{R^i} \leq L_{R^{i+1}}$。此外，存在一个 $j \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $i \in \mathbb{N}$，都有 $K_{R^j} = K_{R^{i+j}}$ 和 $L_{R^j} = L_{R^{i+j}}$。基于这两个性质，我们定义了两个带有 $K_{R^i} \hookrightarrow K_{R^{i+1}}$ 和 $L_{R^i} \hookrightarrow L_{R^{i+1}}$的过滤。此外，该过滤会在某个有限时间结束。最后，我们证明了关于某些类型的自关系在某个幂次下的零阶同调的一些结果。我们还提出了交集过滤和之字形过滤。

我们为使用 Dowker 复形研究有向图奠定了一些基础。此外，我们认为，这可能是研究由 Dowker 复形的有向图定义的有限数据的动力学的有用工具。设 R 是一个具有最终周期（j， p）的自关系。当 j 趋于无穷时， K_{R^j} 中存在单形，这给出了正向不变集。当 j 趋于无穷时， L_R^j 中存在单形，这给出了反向不变集。不过，借助 Dowker 复形的稳定化，我们可以在有限时间内计算它。最后，如果我们想研究 R的不变集，它由 $K_{R^j} \cap L_{R^j}$ 中存在单形来刻画； $K_{R^j} \cap L_{R^j}$ 是正向不变集与反向不变集的交集。但这还需要进一步研究。我们的思路是利用 Dowker 复形的结构来编码有限数据的动力学。

参考文献

[1] K. Ambrose、S. Huntsman、M. Robinson 和 M. Yutin。拓扑微分测试。$CoRR$, abs/2003.00976，2020年。[2] R. Atkin。《人类事务中的数学结构》。伦敦，海涅曼出版社，1974年。[3] R. Atkin。Q分析：软科学的一种硬语言。《未来》，海涅曼出版社，10(6)，1978年。[4] A. Björner。拓扑方法。《组合数学手册》，2:1819–1872，1995年。[5] G. Carlsson 和 V. de Silva。之字形持久性。《计算数学基础》，10，2010年。[6] S. Chowdhurry 和 F. Mémoli。函子性道克尔定理与非对称网络的持久同调。《应用与计算拓扑学杂志》，2:115–175，2018年。[7] C. Conley。孤立不变集与莫尔斯指标。美国数学会，1978年。[8] S. Day、O. Junge 和 K. Mischaikow。用于全局分析无限维离散动力系统的严格数值方法。《*SIAM*应用动力系统杂志》，3(2):117–160，2004年。[9] D. Desjardins Côté。从有限向量场数据到 Forman 意义下的组合动力系统。$arXiv$，2021年。[10] C. Dowker。关系的同调群。《数学年刊》，第84–95页，1952年。[11] H. Edelsbrunner 和 J. L. Harer。《计算拓扑学：导论》。美国数学会，2010年。[12] M. Erdmann。隐私拓扑学：用于推断与混淆的格结构和信息气泡。$arXiv$，2017年。[13] R. Forman。组合向量场与动力系统。《数学杂志》，228:629–681，1998年。[14] R. Ghrist、D. Lipsky、J. Derenick 和 A. Speranzon。基于拓扑地标的导航与制图。https://www2.math.upenn.edu/~ghrist/preprints/landmarkvisibility. pdf。2012年。[15] K. Hang Kim 和 F. W. Roush。布尔半环上的强移位等价。《遍历理论与动力系统》，6:81–97，1986年。[16] T. Kaczynski、K. Mischaikow 和 M. Mrozek。计算同调。施普林格，2004年。[17] T. Kaczynski 和 M. Mrozek。离散多值动力系统的 Conley 指标。《*Topology Appl.*，65:83–96，1995年。[18] T. Kaczynski、M. Mrozek 和 T. Wanner。建立组合向量场动力学与经典向量场动力学之间的形式联系。《计算动力学杂志》，3(1):17–50，2016年。[19] W. D. Kalies、K. Mischaukow 和 R. C.A.M Vandervorst。吸引子的格结构 I。《计算动力学杂志》，1(2):307–338，2014年。

[20] W. D. Kalies、K. Mischaukow 和 R. C.A.M Vandervorst。吸引子的格结构 II。计算数学基础，16:1151–1191，2016年。[21] W. D. Kalies、K. Mischaukow 和 R. C.A.M Vandervorst。吸引子的格结构 III。《动力系统与微分方程杂志》，34:1729–1768，2022年。[22] K. H. Kim。布尔矩阵理论与应用，第70卷（纯粹与应用数学专著和教科书丛书）。纽约：Dekker，1982年。[23] M. Lipiński、J. Kubica、M. Mrozek 和 T. Wanner。有限拓扑空间上广义组合多向量场的 Conley-Morse-Forman 理论。*arXiv:1911.12698 [math.DS]*,第1–44页，2020年。[24] G. Minian Elias。关系的几何。*Order*，27:213–224，2010年。[25] M. Mrozek、R. Srzednicki、Thorpe J. 和 Th. Wanner。组合动力学与经典动力学：复现。《非线性科学与数值模拟通讯》，108(106226):1–30，2022年。[26] Marian Mrozek 和 Mateusz Przybylski。有限集合与有限关系范畴上的 Szymczak 函子。*arXiv*，2022年。[27] J. R. Munkres。《代数拓扑学基础》。Addison-Weslay，剑桥，1984年。[28] M. Robinson。关系的余层表示与道克复形。《应用与计算拓扑学杂志》，6:27–63，2022年。[29] A. Szymczak。离散动力系统的 Conley 指标。*Topology Appl.*，66:215–240，1995年。[30] A. Szymczak。指标对：从动力学到组合学再返回。博士论文，佐治亚理工学院，1999年。