非交换复环面的傅里叶–穆凯变换

NOBUKI OKUDA

Abstract. 设 X 为维数 g 的复环面，$\hat{X}$ 为其对偶环面。对于任意一个由绝对值为 1 的复数组成的 $g(g-1)/2$- 元组 λ，我们将非交换复环面 $\mathbf{X}_\lambda$ 定义为维数 g 的实环面上的一个代数层。我们证明，若 λ 的所有分量都是单位根，则 $\mathbf{X}_\lambda$ 上的相干层范畴是阿贝尔范畴，并且与 X 上由 λ确定的布劳尔群元素扭曲后的相干层范畴导出等价。

arXiv:2301.03745v1 [math.AG] 10 Jan 2023

1. Introduction

设 X 和 $\hat{X}$ 为光滑射影簇。一个积分函子

$$\Phi\colon D^b(X) \to D^b(\hat{X}) \tag{1.1}$$

若相干层导出范畴之间的等价被称为傅里叶–穆凯函子。傅里叶–穆凯函子 Φ 诱导出一个同构

$$\mathrm{HH}(\Phi)\colon \mathrm{HH}^\bullet(X) \to \mathrm{HH}^\bullet(\hat{X}) \tag{1.2}$$

的霍赫希尔德上同调。对于任意 $u \in \mathrm{HH}^2(X)$，Toda [Tod09] 构造了一个 $\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$-线性范畴$D^b(X,u)$，它是 X 沿着 u 的一阶变形，并给出了一个等价

$$\Phi^\dagger\colon D^b(X,u) \to D^b(\hat{X}, \mathrm{HH}(\Phi)(u)) \tag{1.3}$$

延拓 Φ。

以 Poincaŕe 线丛为积分核的积分函子 FM，是 Mukai [Muk81] 针对阿贝尔簇 X 及其对偶阿贝尔簇 $\hat{X}$给出的第一个傅里叶–穆凯函子实例。在霍赫希尔德–科斯坦特–罗森伯格同构下

$$\mathrm{HH}^2(X) \cong H^0(\wedge^2 T_X) \oplus H^1(T_X) \oplus H^2(\mathcal{O}_X), \tag{1.4}$$

诱导映射 HH(FM) 将 $H^0(\wedge^2 T_X)$ 映为 $H^2(\mathcal{O}_{\hat{X}})$。这表明，阿贝尔簇的非交换变形是对偶阿贝尔簇的 gerbe 变形的傅里叶–穆凯伙伴。

虽然 gerbe 变形通过扭曲层的概念已得到充分确立，但一般而言，非交换变形的定义要困难得多。在形式层面上，莫亚尔变形量子化给出了复环面的形式非交换变形，并且在 [BBBP07] 中证明了它们与形式 gerbe 变形之间存在导出等价。接下来的问题是，为非形式参数（甚至是在复流形上的一个族）构造非交换环面及导出等价。

Schwarz 在 [Sch01], 中首次尝试定义非交换复环面，提出了非交换环面上的复结构概念。非交换环面是无理旋转代数（例如参见 [Rie81], ），并按照 Connes [Con94] 的观点将其视为非交换空间。文献 [PS03] 研究了其上的全纯向量丛范畴。

在论文 [Blo10] 和预印本 [Blo], 中，Block 利用包含与拟凝聚层相对应对象的 DG 范畴，讨论了非交换复环面与对偶复环面的 gerbe 变形之间的傅里叶–穆凯函子。在 [Blo], 中，他还宣布将在一篇准备中的论文里讨论凝聚层。

现在我们来说明本文的结果。设 $X = T/\Gamma$ 是一个复环面，其中 $T := (\mathbb{C}^*)^g$，且 Γ 是 T 的一个离散子群，并与 $\mathbb{Z}^g$. 同构。对偶复环面 $\hat{X} := \mathrm{Pic}^0 X$ 可以自然地识别为 Γ/T，其中 $\Gamma := \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \cong (\mathbb{C}^*)^g$，且 $T := \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}^g$.。设$\lambda \in H^2(\hat{T}, U(1)) \cong U(1)^{g(g-1)/2}$是 $\hat{T}$的一个取值于$_1$的第二群上同调元素。

$U(1)$。我们构造一个以参数 λ. 为参数的 X 的非交换变形。当 λ 取值于单位根时，我们给出如下等价：以参数 λ 为参数的 X 的非交换变形上的相干层导出范畴，与具有相同参数 λ.的 X 的 gerbe 变形上的相干层导出范畴等价。

我们构造非交换复环面的方式不同于 [Sch01], [PS03] and[Blo] 中的构造。我们的方法可以视为对 [Soi09] 中量子解析环面的阿基米德类比进行拼接。为证明导出范畴之间的等价，我们采用了 [Sos12] 中发展起来的等变傅里叶–穆凯变换思想。

本文组织如下：在第 2 节中，我们讨论 q-Weyl 代数，将其作为玩具模型，以启发后文各节中的构造。在第 3 节中，我们回顾复环面的傅里叶–穆凯变换。在第 4 节中，我们通过变形实环面上的收敛洛朗级数环的层，定义非交换复环面。这可以视为 [Soi09] 中量子解析环面构造的阿基米德类比ˆ ˆ。在第 5 节中，我们讨论与取值于单位根的变形参数 λ 相关的环面的有限覆盖 $X \to Y$ and $Y \to X$ 所组成的一个对偶对。在第 6 节中，我们用一个有限代数层描述变形参数取值于单位根的非交换复环面。在第 7 节中，我们汇集复流形上扭曲层的基本定义。在第 8 节中，我们引入从带丛结构的复环面到单位根处的非交换复环面的傅里叶–穆凯变换，并陈述定理 8.1，这是本文的主要结果。在第 9 节中，我们回顾阿贝尔范畴和导出范畴上的有限群作用的基本定义和结果，并讨论由群余循环产生的扭曲。在第 10 节中，我们讨论构造中出现的范畴上的群作用。在第 11 节中，我们证明定理 8.1。

记号与约定。我们固定复数域 $\mathbb{C}$ 作为基域。除非另有说明，所有模（分别地，作用）均为右模（分别地，右作用）。相反，范畴上的所有群作用均为左作用。“非交换”一词与“不一定交换”同义。

对于环化空间 $\mathcal{X} = (Z, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$，我们将环化空间 $(Z, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}} := (\mathcal{O}_{\mathcal{X}})^{\mathrm{op}})$ 记作 $\mathcal{X}_{\mathrm{op}}$。$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-模范畴记作 Mod $\mathcal{X}$. 对于复阿贝尔李群A中的元素 a，我们将右平移映射 $A \to A, x \mapsto xa$ 记作 R_a. 对于两个或三个复流形Z_1, Z_2 或 Z_1, Z_2, Z_3，到第一（分别地，第二）个分量的投影 Z_1（分别地，Z_2）记作 p^{Z_1,Z_2} 或 p^{Z_1,Z_2,Z_3}（分别地，q^{Z_1,Z_2} 或 q^{Z_1,Z_2,Z_3}）。

致谢。作者谨向导师 Kazushi Ueda 致以深切谢意，感谢他给予的大量指导、宝贵意见和鼓励。作者还感谢 Masahiro Futaki 提出的许多有益问题，其中一个问题引出了公式 (6.9)。最后，作者衷心感谢父母在其一生中给予的各种支持。

2. q-Weyl algebras

$\mathcal{O}_X$-模范畴等价于 Γ-等变 $\mathcal{O}_T$-模范畴，而 Γ-等变 $\mathbb{C}[T]$-模范畴可视为它的一个玩具模型。后者可识别为交叉积代数 $\mathbb{C}[T] \rtimes \Gamma$. 上的模范畴

对于参数 $\lambda = (\lambda_{i,j})_{1 \le i < j \le g} \in (\mathbb{C}^*)^{g(g-1)/2}$，$q$-Weyl 代数是由 $\mathbb{C}[T]$ 定义的非交换变形

$$W_\lambda := \mathbb{C}\langle t_1^{\pm}, t_2^{\pm}, \dots, t_g^{\pm} \rangle / \left(t_i t_j - \lambda_{i,j} t_j t_i \right)_{1 \le i < j \le g}, \tag{2.1}$$

由此可得 $\mathbb{C}[T]$，若 $\lambda = 1 := (1, \dots, 1)$。

设 $Q = (q_{i,j})_{i,j=1}^{g}$ 是一个乘法周期矩阵，即满足 $\{\gamma_j := (q_{i,j})_{i=1}^{g}\}_{j=1}^{g}$ 是 Γ 的自由生成元的矩阵。群 Γ 通过以下方式作用于 q-Weyl 代数：

$$t_i \cdot \gamma_j := q_{i,j}^{-1} t_i, \tag{2.2}$$

当 $\lambda = 1$ 时，这归结为在 $\mathbb{C}[T]$ 上的自然作用。交叉积代数 $W_\lambda \rtimes \Gamma$ 同构于另一个 q-Weyl 代数

$$\mathcal{W}_{\lambda,Q,1} \coloneqq \mathbb{C}\langle t_1^{\pm}, t_2^{\pm}, \dots, t_g^{\pm}, \gamma_1^{\pm}, \gamma_2^{\pm}, \dots, \gamma_g^{\pm}\rangle \Big/ \left(\{t_i t_j - \lambda_{i,j} t_j t_i\}_{1\le i<j\le g}, \{t_i\gamma_j - q_{i,j}^{-1}\gamma_j t_i\}_{i,j=1}^{g}, \{[\gamma_i,\gamma_j]\}_{i,j=1}^{g}\right) \tag{2.3}$$

由 $2g$ 个元素生成。

描述 X 的非交换变形的参数 λ 可用于描述对偶环面 X 的丛模化变形：

定义 2.1。一个 λ-扭曲的 $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-模是一个对 $(\mathcal{M}, (\rho_{\hat{\gamma}})_{\hat{\gamma}\in\hat{T}})$，由一个 $\mathcal{O}_{\hat{\Gamma}}$-模 $\mathcal{M}$ 和一族态射 $(\rho_{\hat{\gamma}})_{\hat{\gamma}\in\hat{T}}$：$\rho_{\hat{\gamma}}: \mathcal{M} \to R_{\hat{\gamma}}^*\mathcal{M}$ 构成，并满足 $\rho_{\hat{\gamma}_j}\circ\rho_{\hat{\gamma}_i} = \lambda_{i,\,j}\rho_{\hat{\gamma}_i}\circ\rho_{\hat{\gamma}_j}$，对所有满足 $i<j$ 的 i、$j\in\{1,\dots,g\}$ 均成立。

作为 λ-扭曲的 $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-模的一个玩具模型，我们考虑 q-Weyl 代数上的模

$$\mathcal{W}_{1,Q,\lambda} \coloneqq \mathbb{C}\langle \hat{t}_1^{\pm}, \hat{t}_2^{\pm}, \dots, \hat{t}_g^{\pm}, \hat{\gamma}_1^{\pm}, \hat{\gamma}_2^{\pm}, \dots, \hat{\gamma}_g^{\pm}\rangle \Big/ \left(\{[\hat{t}_i,\hat{t}_j]\}_{i,j=1}^{g}, \{\hat{t}_i\hat{\gamma}_j - q_{j,i}^{-1}\hat{\gamma}_j\hat{t}_i\}_{i,j}, \{\hat{\gamma}_i\hat{\gamma}_j - \lambda_{i,j}\hat{\gamma}_j\hat{\gamma}_i\}_{1\le i<j\le g}\right), \tag{2.4}$$

其中包含正则函数环 $\mathbb{C}[\hat{\Gamma}] \coloneqq \mathbb{C}[\hat{t}_1^{\pm}, \hat{t}_2^{\pm}, \dots, \hat{t}_g^{\pm}]$。注意，在 (2.3) 和 (2.4) 中，$t_i$ 与 γ_i 的作用互换了。

变形后的 Poincaré 线丛的一个玩具模型（它应当给出变形傅里叶–穆凯变换的积分核）是如下的 $(\mathcal{W}_{1,Q,\lambda})^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{W}_{\lambda,Q,1}$-模 P_λ，满足

(1) $P_\lambda = \mathbb{C}[\hat{\Gamma}] \otimes_{\mathbb{C}} W_\lambda$ as a $\left(\mathbb{C}[\hat{\Gamma}]\right)^{\mathrm{op}} \otimes W_\lambda$-module,

(2) 对 i γ_i 的作用定义为 b

$$\left(\psi(\hat{t}_1,\hat{t}_2,\dots,\hat{t}_g)\otimes\phi(t_1,t_2,\dots,t_g)\right)\cdot\gamma_i = \psi(\hat{t}_1,\hat{t}_2,\dots,\hat{t}_g)\hat{t}_i^{-1}\otimes\phi(t_1q_{1,i}^{-1}, t_2q_{2,i}^{-1},\dots,t_gq_{g,i}^{-1}),$$

(3) $\hat{\gamma}_i$ 的作用定义为

$$\hat{\gamma}_i\cdot\left(\psi(\hat{t}_1,\hat{t}_2,\dots,\hat{t}_g)\otimes\phi(t_1,t_2,\dots,t_g)\right) = \psi(\hat{t}_1q_{i,1},\hat{t}_2q_{i,2},\dots,\hat{t}_gq_{i,g})\otimes t_i\phi(t_1,t_2,\dots,t_g).$$

注意，$\hat{\gamma}_i$ 的作用满足 $\hat{\gamma}_i\hat{\gamma}_j = \lambda_{i,j}\hat{\gamma}_j\hat{\gamma}_i$，因为 $t_it_j = \lambda_{i,j}t_jt_i$ 在 W_λ 中。

虽然 q-Weyl 代数只是玩具模型，而实际工作中必须使用解析函数（例如 θ 函数），而非正则函数，但它们为后续章节中的构造提供了直观认识。在这个玩具模型中，非交换变形与 gerbe 变形之间的对偶性清晰可见。另请注意，如果 λ 的所有分量都是单位根，那么 W_λ 在其中心上是有限的；该中心是 T 的某个有限商上的函数环。

3. Fourier–Mukai transforms

我们将 $\mathcal{O}_X$-模与 Γ-等变的 $\mathcal{O}_T$-模等同。元素 $\hat{x}\in\hat{\Gamma}$ 确定一个 Γ-等变的 $\mathcal{O}_T$-模 $\mathcal{L}_{\hat{x}}$，它是赋予了 Γ-作用的平凡 $\mathcal{O}_T$-模

$$\phi(x)\cdot\gamma = \phi(x\gamma^{-1})\hat{x}(\gamma)^{-1} \tag{3.1}$$

对于 $\gamma\in\Gamma.$，由于任意一个 $t\in T$ 都会给出一个同构

$$\mathcal{L}_{\hat{x}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\hat{x}t^{-1}}, \qquad \phi(x)\mapsto t(x)\phi(x) \tag{3.2}$$

Γ-等变的 $\mathcal{O}_T$-模，因此映射 $\hat{x}\mapsto\mathcal{L}_{\hat{x}}$ 下降为映射 $\hat{\Gamma}/\hat{T} \xrightarrow{\sim} \hat{X} \coloneqq \mathrm{Pic}^0 X$。由于存在这些同构，它是群同构

$$\mathcal{L}_{\hat{x}}\otimes\mathcal{L}_{\hat{x}'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\hat{x}\hat{x}'}, \qquad \phi(x)\otimes\psi(x)\mapsto\phi(x)\psi(x). \tag{3.3}$$

Poincaré 线丛 $\mathcal{P}$ 是 $\Gamma\times T_{\mathrm{op}}$-等变的 $\mathcal{O}_{T\times\hat{\Gamma}}$-模，定义为平凡的 $\mathcal{O}_{T\times\hat{\Gamma}}$-$\hat{}$ 模，并赋予左 T-作用

$$t\cdot\phi(x,\hat{x}) = t(x)\phi(x,\hat{x}t) \tag{3.4}$$

以及右 Γ-作用

$$\phi(x,\hat{x})\cdot\gamma=\phi(x\gamma^{-1},\hat{x})\hat{x}(\gamma)^{-1}. \tag{3.5}$$

令 $\overline{s}$ 为由下式给出的映射

$$\overline{s}\colon \hat{\Gamma}\times\hat{\Gamma}\times T\to\hat{\Gamma}\times T,\qquad (\hat{x}_1,\hat{x}_2,x)\mapsto(\hat{x}_1\hat{x}_2,x). \tag{3.6}$$

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 映射 $s\colon X\times X\times X\to X\times X$ 的定义类似。由于同构

$$\overline{m}\colon (p^{\hat{\Gamma},\hat{\Gamma},T})^*\mathcal{P}\otimes(q^{\hat{\Gamma},\hat{\Gamma},T})^*\mathcal{P}\to\overline{s}^*\mathcal{P},\qquad \phi\otimes\phi'\mapsto\phi\phi' \tag{3.7}$$

$\hat{}\,\hat{}$ $\mathcal{O}_{\hat{\Gamma}\times\hat{\Gamma}\times T}$-模之间的同构是 $T^{\mathrm{op}}\times T_{\mathrm{op}}\times\Gamma$-等变的，因此它定义了一个同构

$$m\colon (p^{\hat{X},\hat{X},X})^*\mathcal{P}\otimes(q^{\hat{X},\hat{X},X})^*\mathcal{P}\xrightarrow{\sim}s^*\mathcal{P} \tag{3.8}$$

os $\mathcal{O}_{\hat{}X\times\hat{}X\times X}$-模之间的同构，它限制为一个同构

$$m_{\hat{x}_1,\hat{x}_2}\colon \mathcal{L}_{\hat{x}_1}\otimes\mathcal{L}_{\hat{x}_2}\xrightarrow{\sim}\mathcal{L}_{\hat{x}_1\hat{x}_2} \tag{3.9}$$

$\mathcal{O}_X$-模在 $\{\hat{}x_1\}\times\{\hat{}x_2\}\times X$ 上的同构，其中 $\mathcal{L}_{\hat{x}}\simeq\mathcal{P}|_{X\times\{\hat{x}\}}$ 由定义给出。

傅里叶–穆克艾变换是一个积分函子，其积分核为 Poincar´e 线丛；

$$\mathrm{FM}_{\mathcal{P}}\colon D^b(\hat{X})\to D^b(X),\qquad \mathcal{M}\mapsto\mathbb{R}(p^{X,\hat{X}})_*((q^{X,\hat{X}})^*\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_{X\times\hat{X}}}\mathcal{P}). \tag{3.10}$$

$\hat{}$ 它将点 $\hat{}x\in X$ 的摩天大楼层 $\mathcal{O}_{\hat{x}}$ 映到线丛 $\mathcal{L}_{\hat{x}}$。

定理 3.1（[Muk81]）。傅里叶–穆克艾变换 $\mathrm{FM}_{\mathcal{P}}$ 是一个等价，其拟逆由积分函子 $\mathrm{FM}^{\mathcal{P}^{-1}[g]}$ 给出，其中 $\mathcal{P}^{-1}[g]$ 为积分核。

更准确地说，Mukai 为阿贝尔簇证明了这一定理。复环面的证明见 [BBBP07]。

4. Non-commutative deformations of complex tori

Set

$$\varpi\colon T\to|T|:=(\mathbb{R}^{>0})^g,\qquad (x_1,x_2,\dots,x_g)\mapsto(|x_1|,|x_2|,\dots,|x_g|). \tag{4.1}$$

对于开区间的乘积 $D=\prod_{i=1}^g(r_i,R_i)$，环 $\varpi_*\mathcal{O}_T(D)$由关于 g个变量的劳朗级数构成，其收敛半径为 (r_i,R_i)，其中 $1\le i\le g$。

定义 4.1。酉变形参数是 $Z^2(\hat{}T,U(1))$ 的一个元素，即满足以下条件的映射 $\lambda\colon\hat{}_T\times\hat{}T\to U(1)$

$$\lambda(t_2,t_3)\lambda(t_1t_2,t_3)^{-1}\lambda(t_1,t_2t_3)\lambda(t_1,t_2)^{-1}=1 \tag{4.2}$$

$\hat{}$ 对所有 t_1、t_2、$t_3\in T$。

给定酉变形参数 λ，$\varpi_*\mathcal{O}_T(D)$ 上的星乘积 $*_\lambda$ 定义为

$$\left(\sum_{t\in\hat{T}}a_tt\right)*_\lambda\left(\sum_{t\in\hat{T}}b_tt\right)=\sum_{t\in\hat{T}}\left(\sum_{t_1,t_2\in\hat{T},\,t_1t_2=t}\lambda(t_1,t_2)a_{t_1}b_{t_2}\right)t, \tag{4.3}$$

利用 (4.2) 可很容易看出其满足结合律。右侧的收敛性由下式推出

$$\left|\sum_{t_1,t_2\in\hat{T},\,t_1t_2=t}\lambda(t_1,t_2)a_{t_1}b_{t_2}\right|\le\sum_{t_1,t_2\in\hat{T},\,t_1t_2=t}|a_{t_1}||b_{t_2}| \tag{4.4}$$

and

$$\sum_{t\in\hat{T}}\left(\sum_{t_1,t_2\in\hat{T},t_1t_2=t}|a_{t_1}||b_{t_2}|\right)t=\left(\sum_{t\in\hat{T}}|a_t|t\right)\left(\sum_{t\in\hat{T}}|b_t|t\right), \tag{4.5}$$

这取决于 λ 的酉性。由此得到的定义在 $|T|$ 上的结合代数层记为 $\mathcal{O}_{\mathsf{T}_\lambda}$，它将 $|T|$ 变为非交换环化空间 $\mathsf{T}_\lambda := (|T|, \mathcal{O}_{\mathsf{T}_\lambda})$。

一个上链 $\alpha \in Z^1(\hat{T}, U(1))$ 界定 $\lambda, \lambda' \in Z^2(\hat{T}, U(1))$ 的映射 $\alpha : \hat{T} \to U(1)$，满足

$$\lambda'(t_1, t_2) = \lambda(t_1, t_2)\alpha(t_1)\alpha(t_2)\alpha(t_1 t_2)^{-1}. \tag{4.6}$$

它给出一个同构

$$\sum_{t \in \hat{T}} a_t t \mapsto \sum_{t \in \hat{T}} \alpha(t) a_t t \tag{4.7}$$

截面环的同构，这保证了结合代数层 $\mathcal{O}_{\mathsf{T}_\lambda}$ 的同构类仅取决于上同调类 $[\lambda] \in H^2(\hat{T}, U(1))$。

T 上的自然 T-作用在 $|T|$上诱导出一个 T-作用；该作用提升为环化空间 T_λ 上的 T-作用，使得对于$a \in T$，结合代数层的层态射 $\rho_a : \mathcal{O}_{\mathsf{T}_\lambda} \to (R_{\varpi(a)^{-1}})_* \mathcal{O}_{\mathsf{T}_\lambda}$ 由下式给出

$$\sum_{t \in \hat{T}} a_t t \mapsto \sum_{t \in \hat{T}} a_t t(a)^{-1} t. \tag{4.8}$$

$|T|$ 上的 Γ 作用是自由的，因为若 $1 \neq \gamma \in \Gamma$ 满足 $\varpi(\gamma) = 1$，就会与 T上 Γ作用的自由性或适当性相矛盾。

定义 4.2. 与复环面 $X = T/\Gamma$ 及酉变形参数 $\lambda \in Z^2(\hat{T}, U(1))$ 相关联的非交换复环面，是非交换环化空间 $\mathsf{X}_\lambda := \mathsf{T}_\lambda/\Gamma$.

回顾一下，环化空间 $\mathcal{X} = (X, \mathcal{O}_\mathcal{X})$ 上的 $\mathcal{O}_\mathcal{X}$-模层 $\mathcal{M}$ 称为凝聚的，如果

(1) $\mathcal{M}$ 是有限生成的，即对于任意点 $x \in X$，存在其开邻域 U 和满态射 $\mathcal{O}_\mathcal{X}^{\oplus m}|_U \to \mathcal{M}|_U \to 0$，其中某个 $m \in \mathbb{N}$，并且 (2) 对于任意开集 U 和任意 $m \in \mathbb{N}$，任意态射 $\mathcal{O}_\mathcal{X}^{\oplus m}|_U \to \mathcal{M}|_U$ 的核都是有限生成的。

由凝聚模组成的模范畴 Mod $\mathcal{X}$的全子范畴记为相干层 coh $\mathcal{X}$.

引理 4.3. 层 $\mathcal{O}_{\mathsf{T}_1}$ 是凝聚的。

证明。显然，$\mathcal{O}_{\mathsf{T}_1}$ 是有限生成的。对于 $|T|$的任意开子集 U，态射 $\alpha : \mathcal{O}^{\oplus m}\mathsf{T}_1\,|_U \to \mathcal{O}_{\mathsf{T}_1}|_U$ 等同于态射 $\tilde{\alpha} : \mathcal{O}_T^{\oplus m}|_{\varpi^{-1}(U)} \to \mathcal{O}_T|_{\varpi^{-1}(U)}$。对于任意 $x \in U$，令 $V \subset U$ 为 x 的一个开邻域，它是若干区间的乘积。于是 $\varpi^{-1}(V)$ 是 Stein，因此存在一个满态射 $\tilde{\beta}$，从 $\mathcal{O}_{\varpi^{-1}}^{\oplus m'}(V)$ 映到 $\tilde{\alpha}|_{\varpi^{-1}(V)}$ 的核，其中 m' 是某个整数。通过对 ϖ 的每个纤维应用 [Tay02, Corollary 11.5.4]，我们保证 $\tilde{\varpi_*}$ 正合（因此态射 $\beta := \varpi_* \beta$ 也是满态射）。这表明 $\ker \alpha$ 是有限生成的，引理 4.3 得证。□

$\lambda = 1$ 处的非交换复环面就是通常的复环面：

命题 4.4. 伴随 $\varpi^* \dashv \varpi_*$ 诱导出等价 $\mathrm{coh}\, T \simeq \mathrm{coh}\, \mathsf{T}_1$.

证明。冈相干定理表明，Mod T 中的对象是凝聚的，当且仅当它是有限表示的。同样，引理 4.3 表明，Mod T_1 中的对象是凝聚的，当且仅当它是有限表示的。

函子 ϖ^* 和 ϖ_* 在有限表示模的范畴上诱导出互为逆映射的函子，因为

(1) 函子 ϖ_* 是正合的（因此特别保留余核），(2) 函子 ϖ^* 保留余核，因为它是左伴随，且 (3) ϖ_* 和 ϖ^* 互换 $\mathcal{O}_T$ 与 $\mathcal{O}_{\mathsf{T}_1}$。

□

推论 4.5。伴随 $(\varpi_X)^* \dashv (\varpi_X)_*$ 诱导出等价 coh $X \simeq$ X 上的相干层，其中 $\varpi_X : X \to |X|$ 是由 ϖ. 诱导的映射

T相干层范畴 $\mathrm{coh}\, \mathcal{O}_{\mathsf{X}_\lambda}$ 是阿贝尔的，当且仅当下文的问题 4.6 有肯定答案 :

问题 4.6（非交换环面的冈一致性）。 $\mathcal{O}_{\mathsf{T}_\lambda}$ 是凝聚的吗?

另一个问题是将结果推广到非酉变形参数，这对于与一般 gerbe 变形的对偶性是必需的。

5. Deformation parameters at roots of unity

可以看出（例如，注意到 $\hat{}T$-模范畴与 $\mathbb{Z}[T] \cong \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm}, \dots, t_g^{\pm}]$-模范畴等价，$\hat{}$ 且平凡的 T-模 $\mathbb{Z}$ 具有与 $t_1 - 1, t_2 - 1, \dots, t_g - 1$相关的 Koszul 分解），带有平凡 $\hat{}T$-作用的阿贝尔群 A 作为系数时，上同调 $H^i(\hat{}T, A)$ 同构于 $\mathrm{Hom}(\wedge^i \hat{}T/(\wedge^i \hat{}T)_{\mathrm{tors}}, A) \cong A(\binom{g}{i})$（注意，$(\wedge^i \hat{}T)_{\mathrm{tors}}$ 由阶为 2 的挠元素 $a \wedge a \wedge t_1 \wedge \cdots \wedge t_{i-2} (a, t_1, \dots, t_{i-2} \in \hat{}T)$ 生成）。令 $\Lambda \in \mathrm{Hom}(\wedge^2 \hat{}T, U(1))$ 为与酉变形参数 $\lambda \in Z^2(\hat{}T, U(1))$ 的类 $[\lambda] \in H^2(\hat{}T, U(1))$ 对应的元素，并令

$$\hat{H} \coloneqq \left\{ t \in \hat{T} \;\middle|\; \Lambda(t \wedge t') = 1 \text{ for all } t' \in \hat{T} \right\}, \tag{5.1}$$

从而得到一个正合列

$$1 \to \hat{H} \to \hat{T} \to \hat{K} \to 1, \tag{5.2}$$

并且 $[\lambda] \in H^2(\hat{}T, U(1))$ 降到 $H^2(\hat{}K, U(1))$ 中的一个元素，该元素可由 $Z^2(\hat{}K, U(1))$ 中的一个双线性上链表示。

在本文余下部分中，除非另有说明，我们假设酉变形参数 $\lambda \in Z^2(\hat{}T, U(1))$ 属于某个正整数 N 所对应的 $Z^2(\hat{}T, \boldsymbol{\mu}_N)$，其中 $\boldsymbol{\mu}_N \coloneqq \left\{ \zeta \in U(1) \;\middle|\; \zeta^N = 1 \right\}$.。这意味着 $\hat{}K$ 是一个有限阿贝尔群，并且我们还将固定一个双线性映射

$$\lambda \colon \hat{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{K} \to \boldsymbol{\mu}_N \tag{5.3}$$

表示 $[\lambda]$.

$\hat{}$ 对偶群 $K \coloneqq \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C}^*)$ 可识别为映射 $T \to H$ 的核，该映射对偶于 $\hat{}$ 的包含 $H \to T$，从而得到一个正合列

$$1 \to K \to T \xrightarrow{\pi_T} H \to 1. \tag{5.4}$$

由于 $\Gamma \cap K$ 是平凡群，K 在 T 上的自由作用下降为 K 在 X 上的自由作用：$= T/\Gamma$，因此有一个正合列

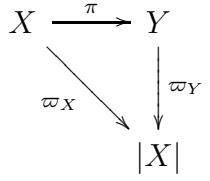
$$1 \to K \to X \xrightarrow{\pi} Y \to 1 \tag{5.5}$$

其中 Y 是一个复环面。我们还有一个正合列

$$1 \to \hat{K} \to \hat{Y} \xrightarrow{\hat{\pi}} \hat{X} \to 1 \tag{5.6}$$

由于 K 在同态 $\varpi \colon T \to |T|$ 下映到单位元，因此存在 $\varpi_Y \colon Y \to |X|$，使得交换图

(5.7)



交换。

6. Non-commutative deformations at roots of unity

我们有一个同构

$$\pi_*\mathcal{O}_X \cong \bigoplus_{\hat{k}\in\hat{K}} \mathcal{L}_{\hat{k}} \tag{6.1}$$

在 $\hat{Y} := \mathrm{Pic}^0 Y$ 上的 $\mathcal{O}_Y$-代数层。直和项 $\mathcal{L}_{\hat{k}}$ 在局部由单项式 $\hat{}\,\hat{}$ 函数 $t \in T$ 生成，它表示 $k.$。我们在 $\pi_*\mathcal{O}_X$ 上定义星乘积 $\star_\lambda$：

$$\star_\lambda \colon \bigoplus_{\hat{k}\in\hat{K}} \mathcal{L}_{\hat{k}} \times \bigoplus_{\hat{k}\in\hat{K}} \mathcal{L}_{\hat{k}} \to \bigoplus_{\hat{k}\in\hat{K}} \mathcal{L}_{\hat{k}} \tag{6.2}$$

$$((\phi_{\hat{k}})_{\hat{k}}, (\psi_{\hat{k}})_{\hat{k}}) \mapsto \left(\sum_{\hat{k}_1\hat{k}_2=\hat{k}} \lambda(\hat{k}_1,\hat{k}_2) m_{\hat{k}_1,\hat{k}_2}(\phi_{\hat{k}_1}\otimes\psi_{\hat{k}_2}) \right)_{\hat{k}}. \tag{6.3}$$

我们将由此得到的 $\mathcal{O}_Y$-代数层 $(\pi_*\mathcal{O}_X, \star_\lambda)$ 记作 $\mathcal{O}_{X_\lambda}$，并将环化空间 $(Y, \mathcal{O}_{X_\lambda})$ 记作 X_λ。

命题 6.1. 存在一个代数层的同构 $(\varpi_Y)_*\mathcal{O}_{X_\lambda} \cong \mathcal{O}_{\mathsf{X}_\lambda}$。

证明。直接计算可得

$$\left(\sum_{t_1\in\hat{T}} a_{t_1}t_1\right) *_\lambda \left(\sum_{t_2\in\hat{T}} b_{t_2}t_2\right) \tag{6.4}$$

$$= \left(\sum_{t\in\hat{T}/\hat{H}} \left(\sum_{t_1 \bmod \hat{H}=t} a_{t_1}t_1\right)\right) *_\lambda \left(\sum_{t'\in\hat{T}/\hat{H}} \left(\sum_{t_2 \bmod \hat{H}=t'} b_{t_2}t_2\right)\right) \tag{6.5}$$

$$= \sum_{t\in\hat{T}/\hat{H}} \left(\sum_{t'\in\hat{T}/\hat{H}} \left(\sum_{t_1 \bmod \hat{H}=t} \left(\sum_{t_2 \bmod \hat{H}=t'} \lambda(t_1,t_2) a_{t_1}b_{t_2}t_1t_2\right)\right)\right) \tag{6.6}$$

$$= \sum_{t\in\hat{T}/\hat{H}} \left(\sum_{t'\in\hat{T}/\hat{H}} \left(\sum_{t_1 \bmod \hat{H}=t} \left(\sum_{t_2 \bmod \hat{H}=t'} \lambda(t,t') a_{t_1}b_{t_2}t_1t_2\right)\right)\right) \tag{6.7}$$

$$= \sum_{t\in\hat{T}/\hat{H}} \left(\sum_{t'\in\hat{T}/\hat{H}} \lambda(t,t') m_{t,t'} \left(\sum_{t_1 \bmod \hat{H}=t} a_{t_1}t_1, \sum_{t_2 \bmod \hat{H}=t'} b_{t_2}t_2\right)\right) \tag{6.8}$$

与 $\star_\lambda$ 重合。 □

命题 定理 6.2. 伴随 $(\varpi_Y)^* \dashv (\varpi_Y)_*$ 诱导出一个等价 $\mathsf{coh}\, X_\lambda \simeq \mathsf{coh}\, \mathsf{X}_\lambda$.

证明。我们将 $\mathsf{Mod}\ X_\lambda$（分别为 $\mathsf{Mod}\,\mathsf{X}_\lambda$）中由凝聚的 $\mathcal{O}_Y$-模（分别为 $\mathcal{O}_{\mathsf{Y}_1}$-模）组成的全子范畴记为 $(\mathsf{coh}\ Y)^{K,\lambda}$（分别为 $(\mathsf{coh}\,\mathsf{Y}_1)^{K,\lambda}$）。根据定义，$\mathcal{O}_{X_\lambda}$ 是有限的 $\mathcal{O}_Y$-代数；由命题 6.1，$\mathcal{O}_{\mathsf{X}_\lambda}$ 是有限的 $\mathcal{O}_{\mathsf{Y}_1}$-代数。因此，范畴 $\mathsf{coh}\ X_\lambda$（分别为 $\mathsf{coh}\,\mathsf{X}_\lambda$）等价于 $(\mathsf{coh}\ Y)^{K,\lambda}$（分别为 $(\mathsf{coh}\,\mathsf{Y}_1)^{K,\lambda}$）。由推论 4.5 和命题 6.1 可知，$\hat{}\,\hat{}\mathcal{O}_{\mathsf{X}_\lambda} \in \mathsf{ob}(\mathsf{coh}\,\mathsf{Y}_1)$，且伴随 $(\varpi_Y)^* \dashv (\varpi_Y)_*$ 诱导出一个等价 $(\mathsf{coh}\ Y)^{K,\lambda} \simeq (\mathsf{coh}\mathsf{Y}_1)^{K,\lambda}$. □

特别地，$\mathcal{O}_{\mathsf{X}_\lambda}$ 是 X_λ 上的凝聚层，因此 $\mathsf{coh}\mathcal{O}_{\mathsf{X}_\lambda}$ 是一个阿贝尔范畴。

注 6.3. 根据 $\hat{K}$ 的定义，存在一个同构 $\lambda^\sharp \colon \hat{K} \to K$，使得 $\lambda(\hat{k}_1, \hat{k}_2) = \hat{k}_2(\lambda^\sharp(\hat{k}_1))$。若将 $\lambda^\sharp$ 的逆映射记为 $\lambda_\flat$，并定义 $\omega \colon K \otimes_{\mathbb{Z}} K \to U(1)$，使 $\omega(k_1,k_2) = \lambda(\lambda_\flat(k_1)\ \lambda_\flat(k_2))$，那么 $\mathcal{O}_{X_\lambda}$ 上的星乘积也可以描述为

$$\phi(x) \star_\lambda \psi(x) = \frac{1}{\sharp K} \sum_{k_1,k_2\in K} \omega(k_1,k_2)\phi(xk_1)\psi(xk_2). \tag{6.9}$$

X_λ 上的凝聚层由一个 $\mathcal{O}_Y$-模 $\mathcal{M}$ 以及一族态射 $\{m_{\hat{k}}\colon\ \mathcal{M}\otimes\mathcal{L}_{\hat{k}}\to\mathcal{M}\}_{\hat{k}\in\hat{K}}$ 组成，并满足交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}\otimes\mathcal{L}_{\hat{k}_1}\otimes\mathcal{L}_{\hat{k}_2} & \xrightarrow{m_{\hat{k}_1}\otimes\mathrm{id}} & \mathcal{M}\otimes\mathcal{L}_{\hat{k}_2} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \lambda(\hat{k}_1,\hat{k}_2)\,\mathrm{id}\otimes m_{\hat{k}_1\hat{k}_2}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle m_{\hat{k}_2}} \\ \mathcal{M}\otimes\mathcal{L}_{\hat{k}_1\hat{k}_2} & \xrightarrow{m_{\hat{k}_1\hat{k}_2}} & \mathcal{M} \end{array} \tag{6.10}$$

与之相容。对偶的 $\mathcal{O}_Y$-模 $\mathcal{M}^{-1}\coloneqq\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M},\mathcal{O}_Y)$ 配备 m_t 的转置后，在 X_λ^{op} 上给出一个凝聚层。

7. Twisted sheaves

设 M 是一个复流形，$\alpha\in H^2(M,\mathcal{O}_M^*)$ 是 $\mathcal{O}_M^*$ 的第二个 ´étale 上同调类。取一个 ´étale 覆盖 $\mathcal{U}=(U_i)_i$，以及 $\mathcal{U}$ 上 α 的一个代表元 $(\alpha_{i,\,j,\,k})$。我们将从 $U_i\times_M U_j$ 到第一个（分别是第二个）分量的投影记作 $I_{i,\,j}$（分别是 $J_{i,\,j}$）。

定义 7.1。M 上的一个 α-扭曲层是由一组 $(\mathcal{F}_i)_i$、$(\rho_{i,\,j})_{i,\,j}$ 的 $\mathcal{O}_{U_i}$-模 $\mathcal{F}_i$ 和同构 $\rho_{i,\,j}\colon I_{i,\,j}^*\mathcal{F}_i\to J_{i,\,j}^*\mathcal{F}_j$ 构成，并满足 $\rho_{i,\,k}^{-1}\circ\rho_{j,\,k}\circ\rho_{i,\,j}=\alpha_{i,\,j,\,k}\,\mathrm{id}$。若所有 $\mathcal{F}_i$ 都是凝聚的，则称 α-扭曲层为凝聚的。

α-扭曲层的范畴以及由 α-扭曲相干层组成的全子范畴，分别记为 $\mathrm{Mod}\ M^\alpha$ 和 $\mathrm{coh}\ M^\alpha$。注意，对于一个 $\mathcal{O}_M$-代数 $\mathcal{A}$ 及由此得到的环化空间 $\mathcal{X}\coloneqq(M,\mathcal{A})$，我们同样可以定义 α-扭曲层在 $\mathcal{X}$ 上的概念，以及范畴 $\mathrm{Mod}\ \mathcal{X}^\alpha$、$\mathrm{coh}\ \mathcal{X}^\alpha$。它们在等价意义下不依赖于 $\mathcal{U}$ 的选择以及 $(\alpha_{i,\,j,\,k})$ 的选择。存在张量积函子

$$\otimes\colon\ \mathrm{Mod}\,M^\alpha\times\mathrm{Mod}\,M^{\alpha'}\to\mathrm{Mod}\,M^{\alpha\alpha'}, \tag{7.1}$$

$$\big(((\mathcal{F}_i)_i,(\rho_{i,j})_{i,j}),((\mathcal{F}'_i)_i,(\rho'_{i,j})_{i,j})\big)\mapsto((\mathcal{F}_i\otimes\mathcal{F}'_i)_i,(\rho_{i,j}\otimes\rho'_{i,j})_{i,j}) \tag{7.2}$$

以及对偶函子

$$(-)^{-1}\colon\ \mathrm{Mod}\,M^\alpha\to\mathrm{Mod}\,M^{\alpha^{-1}}, \tag{7.3}$$

$$((\mathcal{F}_i)_i,(\rho_{i,j})_{i,j})\mapsto((\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{U_i}}(\mathcal{F}_i,\mathcal{O}_{U_i}))_i,((\rho_{i,j}^{-1})^*)_{i,j}). \tag{7.4}$$

如果 $\mathcal{U}$ 由一个 principal G-丛 P 在 M 上构成，其中离散群为 G，那么同构

$$P\times G^p\to P\times_M P\times_M\cdots\times_M P,\quad (y,g_1,\dots,g_p)\mapsto(y,yg_1,yg_1g_2,\dots,yg_1\cdots g_p) \tag{7.5}$$

诱导出从 Čech 复形 $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{O}_M^*)$ 到用于群上同调的标准复形 $C^\bullet(G,\mathcal{O}_P^*(P))$ 的同构。所得映射 $H^2(G,\mathcal{O}_P^*(P))\to H^2(M,\mathcal{O}_M^*)$ 与映射 $H^2(G,\mathbb{C}^*)\to H^2(G,\mathcal{O}_P^*(P))$ 的复合记为 $\iota_P\colon H^2(G,\mathbb{C}^*)\to H^2(M,\mathcal{O}_M^*)$。对于任意 $\lambda\in H^2(G,\mathbb{C}^*)$，$\iota_P(\lambda)$-扭曲层将简称为 λ-扭曲层。如果 G 是有限阿贝尔群，则 $\iota_P(\lambda)$ 是一个挠元，因为有限阿贝尔群的任意群上同调都是挠的。换言之，$\iota_P(\lambda)$ 是上同调布劳尔群 $\mathrm{Br}(M)$ 中的一个元素：$=H^2(M,\mathcal{O}_M^*)_{\mathrm{tors}}$。一个 λ-扭曲层由一个 $\mathcal{O}_P$-模 $\mathcal{F}$ 以及 $\mathcal{F}$ 的 λ-扭曲 G-线性化构成，即由一族 $(\rho_g)_{g\in G}$ 态射 $\rho_g\colon\mathcal{F}\to R_g^*\mathcal{F}$ 构成，并满足 $R_{g_1}^*\rho_{g_2}\circ\rho_{g_1}=\lambda(g_1,g_2)\rho_{g_1g_2}$。

λ 扭曲层 $(\mathcal{F},(\rho_g)_{g\in G})$ 也称为 λ 扭曲的 G-等变 $\mathcal{O}_P$-模；当 $\lambda=1$ 时，它退化为 G-等变 $\mathcal{O}_P$-模（而这又等价于一个 $\mathcal{O}_M$-模）。

8. Deformed Fourier–Mukai transforms

ˆ令 $\mathcal{Q}$ 为 $Y\times Y$. 上的 Poincar´é 线丛。对于复流形 Z，结合代数层 $(p^{Y,Z})^*\mathcal{O}_{X_\lambda}$（分别地，$(p^{Y,Z})^*\mathcal{O}_{X_\lambda}^{\mathrm{op}}$）记作 $\mathcal{O}_{X_\lambda\times Z}$（分别地，$\mathcal{O}_{X_\lambda^{\mathrm{op}}\times Z}$），相应的环化空间记作 $X_\lambda\times Z$（分别地，$X_\lambda^{\mathrm{op}}\times Z$）。符号 $Y\times\hat{}X^\lambda$（分别地，$X_\lambda\times\hat{}X^\lambda$、$X_\lambda^{\mathrm{op}}\times\hat{}X^\lambda$）表示 $(Y\times\hat{}X)^{1\times\lambda}$（分别地，$(X_\lambda\times\hat{}X)^{1\times\lambda}$、$(X_\lambda^{\mathrm{op}}\times\hat{}X)^{1\times\lambda}$）。[8]

变形庞加莱 ar´e 线丛 $\mathcal{P}_\lambda$ 是 coh $X_\lambda \times \hat{} X^{\lambda^{-1}}$ 中的一个对象，定义为 $\mathcal{O}_{Y\times\hat{}Y}$-模

$$\bigoplus_{\hat{k}\in\hat{K}} \mathcal{Q}\otimes (p^{Y,\hat{Y}})^*\mathcal{L}_{\hat{k}} \cong \bigoplus_{\hat{k}\in\hat{K}} R^*_{\hat{k}}\mathcal{Q} \tag{8.1}$$

$\hat{}$赋予 $\mathcal{O}_{X_\lambda\times\hat{}Y} \cong \bigoplus_{\hat{}k\in\hat{}K}(p^{Y,Y})^*\mathcal{L}_{\hat{k}}$-作用

$$\bigoplus_{\hat{k}\in\hat{K}} \mathcal{Q}\otimes (p^{Y,\hat{Y}})^*\mathcal{L}_{\hat{k}} \times \bigoplus_{\hat{k}\in\hat{K}} (p^{Y,\hat{Y}})^*\mathcal{L}_{\hat{k}} \to \bigoplus_{\hat{k}\in\hat{K}} \mathcal{Q}\otimes (p^{Y,\hat{Y}})^*\mathcal{L}_{\hat{k}} \tag{8.2}$$

$$((\psi_{\hat{k}}\otimes\phi_{\hat{k}})_{\hat{k}}, (\phi'_{\hat{k}})_{\hat{k}}) \mapsto \left(\sum_{\hat{k}_1,\hat{k}_2\in\hat{K},\, \hat{k}_1\hat{k}_2=\hat{k}} \psi_{\hat{k}_1}\otimes(\phi_{\hat{k}_1}\star_\lambda \phi'_{\hat{k}_2}) \right)_{\hat{k}}, \tag{8.3}$$

以及 λ^{-1}-扭曲的 $\hat{}K$-作用（即 λ-扭曲的左 $\hat{}K$-作用）

$$\rho_{\hat{k}}\colon \bigoplus_{\hat{k}'\in\hat{K}} R^*_{\hat{k}'}\mathcal{Q} \to R^*_{\hat{k}^{-1}} \bigoplus_{\hat{k}'\in\hat{K}} R^*_{\hat{k}'}\mathcal{Q} \tag{8.4}$$

$$(\phi_{\hat{k}'})_{\hat{k}'} \mapsto (\lambda(\hat{k},\hat{k}'\hat{k}^{-1})\phi_{\hat{k}'\hat{k}^{-1}})_{\hat{k}'}. \tag{8.5}$$

变形傅里叶–穆凯变换

$$\mathrm{FM}_\lambda\colon D^b(\hat{X}^\lambda) \to D^b(X_\lambda) \tag{8.6}$$

是以变形庞加莱´线丛为积分核的积分函子，即拉回的复合

$$(q^{Y,\hat{Y}})^*\colon D^b(\hat{X}^\lambda) \to D^b(Y\times\hat{X}^\lambda), \tag{8.7}$$

张量积

$$(-)\otimes\mathcal{P}_\lambda\colon D^b(Y\times\hat{X}^\lambda) \to D^b(X_\lambda\times\hat{X}), \tag{8.8}$$

以及推前

$$\mathbb{R}(p^{Y,\hat{X}})_*\colon D^b(X_\lambda\times\hat{X}) \to D^b(X_\lambda). \tag{8.9}$$

其右伴随是积分函子 FM_λ^{-1}，带有 g 位移的

$$\mathcal{P}_\lambda^{-1} := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{Y\times\hat{Y}}}(\mathcal{P}_\lambda, \mathcal{O}_{Y\times\hat{Y}}) \in \mathrm{ob}(\mathrm{coh}\, X_\lambda^{\mathrm{op}}\times\hat{X}^\lambda) \tag{8.10}$$

作为核，因为

- 推前 $\mathbb{R}(q^{Y,Y})_*$ 是拉回 $(q^{Y,Y})^*$的右伴随，
- 张量积 $\mathcal{P}_\lambda^{-1}\otimes(-)$ 是张量积 $(-)\otimes\mathcal{P}_\lambda$，并且
- 拉回 $(p^{Y,X})^*[g]$经 g 位移后，是推前 $\mathbb{R}(p^{Y,X})_*$的右伴随，因为$D^b(X_\lambda)$ 是维数为 g 的卡拉比–丘流形，而 $D^b(X_\lambda\times\hat{}X)$ 是维数为 $2g$ 的卡拉比–丘流形（将在第 10 节证明）。

下面的定理 8.1 是本文的主要结果:

定理 8.1. 变形傅里叶–穆凯变换 FM_λ 是导出范畴之间的等价。

注 8.2. 令 $\mathcal{O}_{\mathsf{T}_\lambda\times\hat{\Gamma}}$ 为层结合代数 $(\varpi\times\mathrm{id})_*\mathcal{O}_{T\times\hat{\Gamma}}$，其非交换的 $\hat{}$ 乘积由类似于 (4.3) 的公式定义，但 a_t 和 b_t 是 Γ上的函数。对于任意 $\lambda\in H^2(\hat{}T, U(1))$（不一定是单位根），自然可以预期 coh $\hat{}X^\lambda$与 coh X_λ导出等价。尽管后者尚不知是否为阿贝尔范畴，我们可以将变形庞加莱线丛 P_λ 定义为 Mod $\left(\mathsf{X}_\lambda\times\hat{}X^{\lambda^{-1}}\right)$ 中的一个对象，即一个 $\mathcal{O}_{\mathsf{T}_\lambda\times\hat{\Gamma}}$-模，配备一个 $\hat{}\lambda$-扭曲的左 T-作用和一个右 Γ-作用。

P_λ 由自由的秩为 1 的 λ-扭曲左 $\mathcal{O}_{\mathsf{T}_\lambda\times\hat{\Gamma}}$-模定义，并赋予其结构 $\hat{T}$作用

$$\hat{\gamma}\cdot\phi(x,\hat{x}) = \hat{\gamma}(x)\ast_\lambda\phi(x,\hat{x}\hat{\gamma}) \tag{8.11}$$

以及右侧的 Γ作用

$$\phi(x,\hat{x})\cdot\gamma=\phi(x\gamma^{-1},\hat{x})*_\lambda\hat{x}(\gamma)^{-1}. \tag{8.12}$$

9. Finite group actions on abelian and derived categories

考察 DG-范畴上的群作用与导出范畴上的群作用及等变傅里叶-穆凯变换之间的关系是很自然的。不过，DG-范畴上的群作用所需的凝聚数据，比阿贝尔范畴上的群作用所需的数据更为复杂。因此，我们将着重讨论阿贝尔范畴上的群作用，以及它们在导出范畴上诱导的作用。

有限群 G 在范畴 $\mathcal{C}$ 上的弱作用，是一族 $(g_*)_{g\in G}$ 自等价 $g_*\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}$，使得对于任意 $g_1,g_2\in G$，函子 $(g_1)_*\circ(g_2)_*$ 同构于 $(g_1g_2)_*$。作用是配备了相容性数据的弱作用，即一族 $(c_{g_1,\,g_2})_{g_1,\,g_2\in G}$ 函子 $c_{g_1,\,g_2}(g_1)_*\circ(g_2)_*\xrightarrow{\sim}(g_1g_2)_*$ 的同构，使得交换图

$$\begin{array}{ccc}(g_1)_*\circ(g_2)_*\circ(g_3)_* & \xrightarrow{c_{g_1,g_2}} & (g_1g_2)_*\circ(g_3)_*\\ \downarrow{\scriptstyle c_{g_2,g_3}} & & \downarrow{\scriptstyle c_{g_1g_2,g_3}}\\ (g_1)_*\circ(g_2g_3)_* & \xrightarrow{c_{g_1,g_2g_3}} & (g_1g_2g_3)_*\end{array} \tag{9.1}$$

对任意 $g_1,g_2,g_3\in G$ 均交换（例如参见 [Del97]）。若相容性数据均为恒等映射，则该作用是严格的。

设 $\mathcal{C}$ 是一个带有有限群 G作用的范畴。以下定义引自 [Sos12]:

定义 9.1（[Sos12，定义 3.1]）。 $A\in\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ 的线性化是由同构 $\rho_g\colon A\xrightarrow{\sim}g_*A$ 组成的族 $(\rho_g)_{g\in G}$，满足交换图

$$\begin{array}{ccc}A & \xrightarrow{\rho_{g_1}} & (g_1)_*A\\ & {\scriptstyle\rho_{g_1g_2}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle c_{g_1,g_2}\circ(g_1)_*(\rho_{g_2})}\\ & & (g_1g_2)_*A\end{array} \tag{9.2}$$

对任意 $g_1,g_2\in G$ 均交换。等变对象是带有线性化的对象。从 $(A,(\rho_g)_{g\in G})$ 到 $(A',(\rho'_g)_{g\in G})$ 的等变对象的态射是一个态射 $\phi\colon A\to A'$，使得交换图交换

$$\begin{array}{ccc}A & \xrightarrow{\phi} & A'\\ {\scriptstyle\rho_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho'_g}\\ g_*A & \xrightarrow{g_*\phi} & g_*A'\end{array} \tag{9.3}$$

交换。

G在 $\mathcal{C}$ 中的等变对象范畴记作 $\mathcal{C}^G$。本文余下部分除非另有说明，我们均假设 $\mathcal{C}$ 是一个 $\mathbb{C}$-线性范畴，且弱作用由$\mathbb{C}$-线性函子组成。

命题 9.2（[Sos12，命题 3.2]）。如果 $\mathcal{C}$ 是阿贝尔的，那么 $\mathcal{C}^G$也是。

我们将上述构造推广到扭曲群作用。设 ϕ 是 G 的一个取值于 $\mathbb{C}^*$ 的二上循环。

定义 9.3. $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ 的一个 ϕ-扭曲线性化是由同构 $\rho_g\colon A \xrightarrow{\sim} g_*A$ 组成的族 $(\rho_g)_{g\in G}$，使得交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\rho_{g_1}} & (g_1)_*A \\ & \searrow^{\phi(g_1,g_2)\rho_{g_1g_2}} & \downarrow{\scriptstyle c_{g_1,g_2}\circ(g_1)_*(\rho_{g_2})} \\ & & (g_1g_2)_*A \end{array} \tag{9.4}$$

对任意 g_1、$g_2 \in G$，该式均成立。ϕ-扭曲等变对象之间的态射定义与 $\mathcal{C}^G$ 中相同。

$A \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ 的 ϕ-扭曲线性化，等价于带有相容性数据 $(\phi(g_1,g_2)^{-1}c_{g_1,g_2})_{g_1,g_2\in G}$ 的 A 上 G-作用 $\{\rho_g\}_{g\in G}$ 的线性化。ϕ- 扭曲等变对象的范畴记为 $\mathcal{C}^{G,\phi}$. ϕ 上的余循环条件确保了以下等式

$$\rho_{g_3}\circ\rho_{g_2}\circ\rho_{g_1} = \rho_{g_3}\circ(\phi(g_1,g_2)\rho_{g_1g_2}) = \phi(g_1,g_2)\phi(g_1g_2,g_3)\rho_{g_1g_2g_3} \tag{9.5}$$

and

$$\rho_{g_3}\circ\rho_{g_2}\circ\rho_{g_1} = (\phi(g_2,g_3)\rho_{g_2g_3})\circ\rho_{g_1} = \phi(g_2,g_3)\phi(g_1,g_2g_3)\rho_{g_1g_2g_3}, \tag{9.6}$$

其中我们省略了 $(g_1)_*$ 等等。若一对余循环 ϕ 和 ϕ' 相差一个由 $\alpha \in C^1(G,\mathbb{C}^*)$ 的余边界，则存在一个等价 $\mathcal{C}^{G,\phi} \to \mathcal{C}^{G,\phi'}$，将 $(A,(\rho_g)_{g\in G})$ 送到 $(A,(\alpha(g)\rho_g)_{g\in G})$。关于低次群上同调与（弱） G-作用之间关系的说明见 [BO20]。

下面的推论 9.4 是将命题 9.2 应用于配备相容性数据 $(\phi(g_1,g_2)^{-1}c_{g_1,g_2})_{g_1,g_2\in G}$ 的 G-作用得到的：

推论 9.4. 若 $\mathcal{C}$ 是阿贝尔的，则 $\mathcal{C}^{G,\phi}$ 也是阿贝尔的。

通过自由-遗忘伴随

$$\mathrm{Free} \dashv \mathrm{Forget} \tag{9.7}$$

在

$$\mathrm{Free}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{G,\phi}, \qquad A \mapsto \left(\bigoplus_{g'\in G}(g')_*A,\ \left(\rho_g := \sum_{g'\in G}\phi(g,g')\,(\mathrm{id}\colon (gg')_*A \to g_*(g')_*A)\right)_{g\in G}\right) \tag{9.8}$$

and

$$\mathrm{Forget}\colon \mathcal{C}^{G,\phi} \to \mathcal{C}, \qquad (A,(\rho_g)_{g\in G}) \mapsto A \tag{9.9}$$

作用于对偶范畴，并利用等价 $(\mathcal{C}^{G,\phi})^{\mathrm{op}} \simeq (\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{G,\phi^{-1}}$，可得到一个伴随

$$\mathrm{Forget} \dashv \mathrm{Free}\,. \tag{9.10}$$

对于任意的 $(A,(\rho_g)_{g\in G})$、$(A',(\rho'_g)_{g\in G}) \in \mathcal{C}^{G,\phi}$，空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A')$ 都带有 G 的自然线性作用，使得交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\chi} & A' \\ {\scriptstyle\rho_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho'_g} \\ g_*A & \xrightarrow{g_*(\chi\cdot g)} & g_*A' \end{array} \tag{9.11}$$

成立，因为

$$\chi \cdot g_1 \cdot g_2 = ((g_{1*})^{-1}(\rho'_{g_1} \circ \chi \circ \rho_{g_1}^{-1})) \cdot g_2 \tag{9.12}$$

$$= (g_{2*})^{-1}(\rho'_{g_2} \circ ((g_{1*})^{-1}(\rho'_{g_1} \circ \chi \circ \rho_{g_1}^{-1})) \circ \rho_{g_2}^{-1})) \tag{9.13}$$

$$= (g_{2*})^{-1}(g_{1*})^{-1}(g_{1*}\rho'_{g_2} \circ (\rho'_{g_1} \circ \chi \circ \rho_{g_1}^{-1}) \circ g_{1*}\rho_{g_2}^{-1}) \tag{9.14}$$

$$= ((g_1 g_2)_*)^{-1}((\phi(g_1, g_2)\rho'_{g_1 g_2}) \circ \chi \circ (\phi(g_1, g_2)\rho_{g_1 g_2})^{-1}) \tag{9.15}$$

$$= \chi \cdot g_1 g_2. \tag{9.16}$$

根据定义可知

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^G}((A, (\rho_g)_{g\in G}), (A', (\rho'_g)_{g\in G})) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')^G. \tag{9.17}$$

若函子 $\Phi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ between categories with G-actions 配备了一族函子自然同构 $(a_g)_{g\in G}$ $a_g\colon \Phi \circ g_* \xrightarrow{\sim} g_* \circ \Phi$，并且交换图

$$\begin{array}{ccccc} \Phi \circ (g_1)_* \circ (g_2)_* & \xrightarrow{a_{g_1}} & (g_1)_* \circ \Phi \circ (g_2)_* & \xrightarrow{a_{g_2}} & (g_1)_* \circ (g_2)_* \circ \Phi \\ \downarrow{\scriptstyle c_{g_1,g_2}} & & & \searrow{\scriptstyle c_{g_1,g_2}} & \\ \Phi \circ (g_1 g_2)_* & \xrightarrow{a_{g_1 g_2}} & & & (g_1 g_2)_* \circ \Phi \end{array} \tag{9.18}$$

可交换。G-等变函子 $\Phi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 诱导出函子 $\Phi^{G,\phi}\colon \mathcal{C}^{G,\Phi} \to \mathcal{C}'^{G,\phi}$，它将对象 $(A, (\rho_g)_{g\in G})$ 映为 $(\Phi(A), (a_g \circ \Phi(\rho_g))_{g\in G})$，并将态射 $f\colon (A,(\rho_g)_{g\in G}) \to (A', (\rho'_g)_{g\in G})$ 映为$\Phi(f)\colon \Phi(A) \to \Phi(A')$。不难证明，$\Phi^{G,\phi}$将 G-等变对象映为 G-等变对象。

命题 9.5. 如果 Φ 是右（分别为左）正合的，那么 $\Phi^{G,\phi}$也是如此。

证明。由于 Free 和 Forget 互为左伴随和右伴随，因此它们都是正合的，所以，正合列 $A \to B \to C$ 在 $\mathcal{C}^{G,\phi}$ 中是正合的，当且仅当 Forget(A) $\to$ Forget(B) $\to$ Forget(C)在 $\mathcal{C}$中是正合的。□

现在我们讨论 $\mathcal{C}^{G,\phi}$的导出范畴。

命题 9.6. 对象 $(I, (\rho_g)_{g\in G}) \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}^{G,\phi})$ 是内射的，当且仅当 $I \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$也是内射的。范畴 $\mathcal{C}^{G,\phi}$ 有足够多的内射对象，当且仅当 $\mathcal{C}$也是如此。

证明。如果 I 是内射的，那么函子

$$A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{G,\phi}}(A, (I, (\rho_g))) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Forget}(A), I)^G \tag{9.19}$$

是正合的 t，因为遗忘是正合的，I 是内射的，并且取 G-不变部分是正合的 .

反过来，如果$(I, (\rho_g))$是内射的，那么函子

$$A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, I) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{G,\phi}}(\mathrm{Free}(A), (I, (\rho_g))) \tag{9.20}$$

是正合的。

设$(A,(\rho_g)_g)$是 $\mathcal{C}^{G,\phi}$中的一个对象。如果 $\mathcal{C}$ 有足够多的内射对象，那么到一个内射对象 $I \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$中的单态射 $A \to I$ 给出到Free I中的单态射 $A \to \mathrm{Free}\, I$，后者在$\mathcal{C}^{G,\phi}$中是内射的。

反过来，如果 $\mathcal{C}^{G,\phi}$ 有足够多的内射对象，那么对于任意 $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$，到一个内射 $I \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}^{G,\phi})$中的单态射Free $A \to I$给出到一个内射Forget I中的单态射 $A \to \mathrm{Forget}\, I$。□

假设 $\mathcal{C}$ 有足够多的内射对象。对于一对对象 $A, B \in \mathrm{ob}(D^+(\mathcal{C}^{G,\phi}))$，空间Hom(Forget($A$), Forget($B$))带有自然的 G-作用，使得

$$\mathrm{Hom}(A, B) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Forget}(A), \mathrm{Forget}(B))^G. \tag{9.21}$$

命题 9.7. 如果 $D^b(\mathcal{C})$ 是维数为 n 的卡拉比–丘，那么 $D^b(\mathcal{C}^{G,\phi}$ 也是如此。).

证明。存在一个自然同构

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{C})}(A,B)\cong \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{C})}(B,A[n])^* \tag{9.22}$$

对于 $A,B\in \mathrm{ob}(D^b(\mathcal{C}^G,\phi))$，由于 $D^b(\mathcal{C})$ 是维数为 n 的卡拉比–丘流形。由自然性可知它是 G-等变的，因此在 G-不变部分上诱导出一个同构。这意味着根据 (9.21)， $D^b(\mathcal{C}^G,\phi)$ 也是维数为 n 的卡拉比–丘流形。□

一个 G-等变左正合函子 $\Phi\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ 诱导出函子 $\mathbb{R}\Phi\colon D^+(\mathcal{C})\to D^+(\mathcal{C}')$ 和 ${}_{\mathbb{R}}\Phi^{G,\phi}\colon D^+(\mathcal{C}^G,\phi)\to D^+(\mathcal{C}'^G,\phi)$。若 $\mathbb{R}\Phi$ 是全忠实的，那么根据 (9.21)， $\mathbb{R}\Phi^{G,\phi}$ 也是全忠实的。

10. Group actions on coherent sheaves

有限群 G 对复流形 Z 的作用在相干层 $\mathrm{coh}\,Z$ 上诱导出一个严格的 G-作用 $(R_g^*)_{g\in G}$。对于 $\hat{}Y$ 上的 $\hat{}K$-作用，可得 $(\mathrm{coh}\,\hat{}Y)^{\hat{K},\lambda}\simeq \mathrm{coh}\,\hat{}X^{\lambda}$。

相干层范畴上的有限群作用的另一个例子，来自有限阿贝尔群 G 到复流形 Z 的皮卡群 $\mathrm{Pic}^0 Z$ 的一个相容单射；也就是说，一族线丛 $\{\mathcal{L}_g\}_{g\in G}$ 以及一族同构 $(m_{g_1,\,g_2})_{g_1,\,g_2\in G}$ $m_{g_1,\,g_2}\colon \mathcal{L}_{g_1}\otimes\mathcal{L}_{g_2}\xrightarrow{\sim}\mathcal{L}_{g_1g_2}$，使得以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{g_1}\otimes\mathcal{L}_{g_2}\otimes\mathcal{L}_{g_3} & \xrightarrow{m_{g_1,g_2}\otimes\mathrm{id}} & \mathcal{L}_{g_1g_2}\otimes\mathcal{L}_{g_3} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes m_{g_2,g_3}} & & \downarrow{\scriptstyle m_{g_1g_2,g_3}} \\ \mathcal{L}_{g_1}\otimes\mathcal{L}_{g_2g_3} & \xrightarrow{m_{g_1,g_2g_3}} & \mathcal{L}_{g_1g_2g_3} \end{array} \tag{10.1}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{g_1}\otimes\mathcal{L}_{g_2} & \xrightarrow{m_{g_1,g_2}} & \mathcal{L}_{g_1g_2} \\ \downarrow & \nearrow{\scriptstyle m_{g_2,g_1}} & \\ \mathcal{L}_{g_2}\otimes\mathcal{L}_{g_1} & & \end{array} \tag{10.2}$$

交换，从而在相干层 $\mathrm{coh}\,Z.$ 上诱导出一个 G-作用 $\big((-)\otimes\mathcal{L}_g^{-1}\big)_{g\in G}$。这里，(10.2) 中的竖直箭头来自 $\mathrm{coh}\,Z.$ 中的典范对称幺半结构。若 Z 紧致且连通，则对任意线丛 $\mathcal{L}$，都有 $\mathrm{Aut}\,\mathcal{L}=\mathbb{C}^*$；而相容性数据 $(m_{g_1,\,g_2})_{g_1,\,g_2\in G}$ 的一个例子来自于选择一族线性同构 $\varphi\colon (\mathcal{L}_g)_z\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}$，$_{g\in G}$，它们将 $\mathcal{L}_g$ 在任意选定并固定的基点 $z\in Z$ 处的纤维 $(\mathcal{L}_g)_z$ 映到复直线。

ϕ-扭曲的 G-线性化 $(\rho_g)_{\,g\in G}$ 的 $\mathcal{M}$ 等价于一族 $(m_g)_{\,g\in G}$ 态射

$$m_g=(g_*)^{-1}\rho_g\colon \mathcal{M}\otimes\mathcal{L}_g\to\mathcal{M} \tag{10.3}$$

使得交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}\otimes\mathcal{L}_{g_1}\otimes\mathcal{L}_{g_2} & \xrightarrow{m_{g_1}} & \mathcal{M}\otimes\mathcal{L}_{g_2} \\ & {\scriptstyle \phi(g_1,g_2)m_{g_1g_2}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle m_{g_2}} \\ & & \mathcal{M} \end{array} \tag{10.4}$$

交换。范畴 (相干层 $Z)^{G,\phi}$ 等价于相干层 $\mathcal{A}_\phi$，其中 $\mathcal{A}_\phi$ 是一个 $\mathcal{O}_Z$ 代数层，它由配备了如下乘法的 $\mathcal{O}_Z$ 模 $\bigoplus_{g\in G}\mathcal{L}_g$ 得到：$\sum_{g_1,\,g_2\in G}\phi(g_1,g_2)m_{g_1,\,g_2}$.如果 $\phi=1$, $\mathcal{A}_\phi$，则由 (10.2) 的交换性可知它是交换的。特别地，相干层 X_λ 等价于 (相干层 $Y)_{\hat{}K,\lambda}$. 由命题 9.7， $D^b(X_\lambda)$是维数为 g 的卡拉比–丘，而 $D^b(X_\lambda\times\hat{}X)$是维数为 $2g$的卡拉比–丘；证明 FM_λ^{-1} 是 FM_λ的右伴随时需要用到这一点。

11. Proof of Theorem 8.1

函子 FM_λ 和 $\mathrm{FM}_\mathcal{Q}$ 是以下函子的右导出函子

$$\mathrm{FM}^{\mathrm{ab}}_\lambda\colon \operatorname{coh}\hat{X}^\lambda \to \operatorname{coh} X_\lambda \tag{11.1}$$

$$\mathcal{M} \mapsto (p^{Y,\hat{X}})_*((q^{Y,\hat{Y}})^*\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{Y\times\hat{Y}}} \mathcal{P}_\lambda) \tag{11.2}$$

and

$$\mathrm{FM}^{\mathrm{ab}}_\mathcal{Q}\colon \operatorname{coh}\hat{Y} \to \operatorname{coh} Y \tag{11.3}$$

$$\mathcal{M} \mapsto (p^{Y,\hat{Y}})_*((q^{Y,\hat{Y}})^*\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{Y\times\hat{Y}}} \mathcal{Q}) \tag{11.4}$$

阿贝尔范畴的。

由于

$$\mathrm{FM}^{\mathrm{ab}}_\mathcal{Q}(R^*_{\hat{y}}\mathcal{M}) = (p^{Y,\hat{Y}})_*((q^{Y,\hat{Y}})^*R^*_{\hat{y}}\mathcal{M} \otimes \mathcal{Q}) \tag{11.5}$$

$$\cong (p^{Y,\hat{Y}})_*R^*_{(1,\hat{y}^{-1})}((q^{Y,\hat{Y}})^*R^*_{\hat{y}}\mathcal{M} \otimes \mathcal{Q}) \tag{11.6}$$

$$\cong (p^{Y,\hat{Y}})_*((q^{Y,\hat{Y}})^*\mathcal{M} \otimes R^*_{(1,\hat{y}^{-1})}\mathcal{Q}) \tag{11.7}$$

$$\cong (p^{Y,\hat{Y}})_*((q^{Y,\hat{Y}})^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{Q} \otimes (p^{Y,\hat{Y}})^*\mathcal{L}^{-1}_{\hat{y}}) \tag{11.8}$$

$$\cong (p^{Y,\hat{Y}})_*((q^{Y,\hat{Y}})^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{Q}) \otimes \mathcal{L}^{-1}_{\hat{y}} \tag{11.9}$$

$$= \mathrm{FM}^{\mathrm{ab}}_\mathcal{Q}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{L}^{-1}_{\hat{y}}, \tag{11.10}$$

对于任意 $\hat{y} \in \hat{K}$ 和 $\mathcal{M} \in \mathrm{ob}$(相干层 $\hat{Y}$)，$\mathrm{FM}^{\mathrm{ab}}_\mathcal{Q}$ 与弱 $\hat{K}$-作用可交换。在此情形下，交换图（9.18）的交换性可通过简单的图表追逐得出。这使 $\mathrm{FM}^{\mathrm{ab}}_\mathcal{Q}$ 成为一个 $\hat{K}$-等变函子，并诱导出一个函子

$$(\mathrm{FM}^{\mathrm{ab}}_\mathcal{Q})^{\hat{K},\lambda}\colon \operatorname{coh}\hat{X}^\lambda \to \operatorname{coh} X_\lambda. \tag{11.11}$$

引理 11.1。函子 $(\mathrm{FM}^{\mathrm{ab}}_\mathcal{Q})^{\hat{K},\lambda}$ 与 $\mathrm{FM}^{\mathrm{ab}}_\lambda$ 同构

证明。交换图左侧和右侧的方块

$$\begin{array}{ccccccc}
(\operatorname{coh}\hat{Y})^{\hat{K},\lambda} & \xrightarrow{((q^{Y,\hat{Y}})^*)^{\hat{K},\lambda}} & (\operatorname{coh}(Y\times\hat{Y}))^{\hat{K},\lambda} & \xrightarrow{(\pi_*(-\otimes\mathcal{Q}))^{\hat{K},\lambda}} & (\operatorname{coh}(Y\times\hat{X}))^{\hat{K},\lambda} & \xrightarrow{((p^{Y,\hat{X}})_*)^{\hat{K},\lambda}} & (\operatorname{coh} Y)^{\hat{K},\lambda} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\operatorname{coh}\hat{X}^\lambda & \xrightarrow{(q^{Y,\hat{Y}})^*} & \operatorname{coh}(Y\times\hat{X}^\lambda) & \xrightarrow{-\otimes\mathcal{P}_\lambda} & \operatorname{coh}(X_\lambda\times\hat{X}) & \xrightarrow{(p^{Y,\hat{X}})_*} & \operatorname{coh}\hat{X}^\lambda
\end{array}$$

根据定义可交换，而自然同构

$$\oplus_{\hat{y}'\in\hat{K}}\rho^{-1}_{\hat{y}'} \otimes \mathrm{id}\colon \bigoplus_{\hat{y}'\in\hat{K}} R^*_{(1,\hat{y}')}(\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_{Y\times\hat{Y}}}\mathcal{Q}) \to \bigoplus_{\hat{y}'\in\hat{K}} \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_{Y\times\hat{Y}}} R^*_{(1,\hat{y}')}\mathcal{Q}, \tag{11.12}$$

其 $\hat{K}$-等变性可通过直接计算验证，从而得到中间方块的交换性。□

因此，$\mathbb{R}(\mathrm{FM}^{\mathrm{ab}}_\mathcal{Q})^{\hat{K},\lambda}$ 且 FM_λ 同构。因此，正如第 9 节末尾所述，FM_λ 是全忠实的。类似地，FM_λ的右伴随 FM^{-1}_λ，其核由式 (8.10) 的 g 平移给出，也全忠实，定理 8.1 得证。

References

[BBBP07] O. Ben-Bassat、J. Block 和 T. Pantev，《非交换环面与傅里叶–穆凯对偶》，Compos. Math. 143 (2007)，第 2 期，423–475。MR 2309993 1, 4[Blo] Jonathan Block，《非交换几何中模范畴的对偶与等价 II：全纯非交换环面的穆凯对偶》，arXiv:math/0604296。1, 2[Blo10] ———，《非交换几何中模范畴的对偶与等价》，《纪念 Raoul Bott 数学遗产》，CRM Proc. Lecture Notes，第 50 卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2010 年，第 311–339 页。MR 2648899 1[BO20] Thorsten Beckmann 和 Georg Oberdieck，《关于等变导出范畴》，arxiv:2006.13626v2，2020 年。11[Con94] Alain Connes，《非交换几何》，Academic Press, Inc.，加利福尼亚州圣迭戈，1994 年。MR 1303779 1[Del97] P. Deligne，《辫群在范畴上的作用》，Invent. Math. 128 (1997)，第 1 期，159–175。MR 1437497 10 ˆ[Muk81] Shigeru Mukai，《 $D(X)$ 与 $D(X)$ 之间的对偶及其在皮卡簇层上的应用》，Nagoya Math. J. 81 (1981)，153–175。MR 607081 1, 4[PS03] A. Polishchuk 和 A. Schwarz，《非交换二维环面上的全纯向量丛范畴》，Comm. Math. Phys. 236 (2003)，第 1 期，135–159。MR 1977884 1, 2[Rie81] Marc A. Rieffel，《与无理旋转相关的 C^*-代数》，Pacific J. Math. 93 (1981)，第 2 期，415–429。MR 623572 1[Sch01] Albert Schwarz，《非交换环面上的 θ函数》，Lett. Math. Phys. 58 (2001)，第 1 期，81–90。MR 1865115 1, 2[Soi09] Y. Soibelman，《非阿基米德域上的非交换解析空间》，《同调镜像对称》，Lecture Notes in Phys.，第 757 卷，Springer，柏林，2009 年，第 221–247 页。MR 2596639 2[Sos12] Pawel Sosna，《关于有限群作用的三角范畴的线性化》，Math. Res. Lett. 19 (2012)，第 5 期，1007–1020。MR 3039826 2, 10[Tay02] Joseph L. Taylor，《若干复变量：与代数几何和李群的联系》，Graduate Studies in Mathematics，第 46 卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2002 年。MR 1900941 5[Tod09] Yukinobu Toda，《变形与傅里叶–穆凯变换》，J. Differential Geom. 81 (2009)，第 1 期，197–224。MR 2477894 1

Graduate School of Mathematical Sciences、 The University of Tokyo、 3-8-1 Komaba、 Meguro-ku、Tokyo、 153-8914、 Japan.电子邮箱地址：hiokuc8h18@gmail.com