arXiv:2301.03750v2 [math-ph] 4 Dec 2024

塞尔伯格型与多岑科–法捷耶夫型积分的奇点

ETHAN SUSSMAN

摘要。我们讨论以塞尔伯格积分为模型的某些超几何积分的亚纯延拓，其中包括 BPZ 二维共形场论极小模型的三点函数和四点函数，如 Felder & Silvotti 以及 Dotsenko & Fateev 所述（即“库仑气体形式”）。我们通过对被积函数奇点的几何分析来实现这一点。对于被积函数具有对称性的情形（如塞尔伯格积分本身），以及更一般地，我们称之为“DF 对称”的情形，我们证明，若干表观奇点是可去的；这是通过这些方法构造极小模型所必需的。

目录

1. 引言 1
2. 结合子 11
3. 亚纯延拓 27
4. 去除奇点 42
附录 A. $N = 2$ 情形 50
附录 B. $[0,1]^N$ 上的显式坐标 54
参考文献 57

1. 引言

Let

$$\triangle_N = \{(x_1, \dots, x_N) \in [0,1]^N : x_1 \le \cdots \le x_N\} \tag{1.1}$$

表示标准的 N单纯形，我们将其视为 $\mathbb{C}^N$的一个子集。本文研究塞尔伯格式 积分，即形如以下形式的定积分

$$S_N[F](\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \int_{\triangle_N} F(x_1, \dots, x_N) \prod_{j=1}^{N} x_j^{\alpha_j} (1 - x_j)^{\beta_j} \prod_{1 \le j < k \le N} (x_k - x_j)^{2\gamma_{j,k}} \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N, \tag{1.2}$$

对于 $N \in \mathbb{N}^+$, $F \in C^\infty(\triangle_N)$，以及 $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_j\}_{j=1}^N, \boldsymbol{\beta} = \{\beta_j\}_{j=1}^N, \boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_{j,k} = \gamma_{k,j}\}_{1 \le j < k \le N} \subset \mathbb{C}$，使得上述被积函数在 $\triangle_N$ 上绝对可积。这种形式的积分与数学物理的诸多领域相关 [FW08]。然而，我们往往需要考虑指数$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$，此时上述积分并不绝对收敛，因此需要进行亚纯延拓。在某些应用中，只需了解该延拓在一般指数处的行为。而在另一些应用中，例如下文将讨论的二维共形场论极小模型的构造，则必须考虑特定取值，如 $\gamma_{j,k} = -1$。遗憾的是，针对这些特定取值，先前的相关研究尚不足以解决问题。

日期：2023年12月22日（已发表版本），2023年1月8日（预印本）。2020 数学主题分类。主要分类 32A20；次要分类 33C60、33C90、81T40。

我们将带指标的复数集合（及其元组）视为列向量。例如，我们将 $\boldsymbol{\gamma}$ 视为 $\mathbb{C}^{N(N-1)/2}$ 的一个元素，并且

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{N(N-1)/2} \tag{1.3}$$

与 $\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}$ 中的一个元素相对应。本文其余部分也将进行类似的识别，不再另行说明。令

$$\Omega_N = \Big\{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in \mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2} : \prod_{j=1}^{N} x_j^{\alpha_j}(1-x_j)^{\beta_j} \prod_{1\leq j<k\leq N} (x_k-x_j)^{2\gamma_{j,k}} \in L^1(\triangle_N)\Big\} \tag{1.4}$$

表示 $\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}$ 中由满足以下条件的$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in \mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}$构成的（非空）开子集：方程 (1.2) 中的被积函数在 $\triangle_N$ 上绝对可积。我们先将 $S_N[F]$ 定义为函数 $S_N[F]\colon \Omega_N \to \mathbb{C}$。可以验证——见 §2——令

$$\begin{aligned}
\alpha_{j,*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) &= \sum_{j_0=1}^{j} \alpha_{j_0} + 2 \sum_{\substack{j_0,k\in\{1,\dots,N\}\\ 1\leq j_0<k\leq j}} \gamma_{j_0,k},\\
\beta_{j,*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) &= \sum_{j_0=N-j+1}^{N} \beta_{j_0} + 2 \sum_{\substack{j_0,k\in\{1,\dots,N\}\\ N-j+1\leq j_0<k\leq N}} \gamma_{j_0,k}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

对每个 $j \in \{1,\dots,N\}$，并令

$$\gamma_{j,k,*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = 2 \sum_{\substack{j_0,k_0\in\{1,\dots,N\}\\ j\leq j_0<k_0\leq k}} \gamma_{j_0,k_0} \tag{1.6}$$

对每一对 $j,k \in \{1,\dots,N\}$ 满足 $j<k$ 时，

$$\Omega_N = \Big[\bigcap_{j=1}^{N}\{\Re\alpha_{j,*} > -j\}\Big] \cap \Big[\bigcap_{j=1}^{N}\{\Re\beta_{j,*} > -j\}\Big] \cap \Big[\bigcap_{1\leq j<k\leq N}\{\Re\gamma_{j,k,*} > -(k-j)\}\Big]. \tag{1.7}$$

因此，$\Omega_{\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}}^{N}$ $\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{\gamma}$ $\in$非空、开且为凸集（特别是连通的），并且包含所有满足 ,,各分量的实部充分大的 (,,)。 $\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{\gamma}$

为简化上面的公式，令 $\gamma_{0,\ k,\ *} = \alpha_{k,\ *}$ 和 $\gamma_{N+1-j,\ N+1,\ *} = \beta_{j,\ *}$。那么

$$\Omega_N = \bigcap_{0\leq j<k\leq N+1} \{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in \mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2} : \Re\gamma_{j,k,*} > -(k-j)\}. \tag{1.8}$$

我们的首要目标是证明 $S_N[F]$ 可以解析延拓到一个子集

$$\dot{\Omega}_N \subseteq \mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2} \tag{1.9}$$

该子集在 $\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}$ 中具有全测度。

为了精确描述 $\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}\setminus \dot{\Omega}_N$ 处奇点的结构，我们引入一些术语。令 $\mathtt{T}(N)$ 表示由连续子集$\mathcal{I} \subsetneq \{0,\dots,N+1\}$ 构成的极大族 $\mathtt{I}$，使得

- $2 \leq |\mathcal{I}| \leq N+1$ 对所有$\mathcal{I} \in \mathtt{I}$ 均成立，并且
- 若$\mathcal{I},\ \mathcal{I}' \in \mathtt{I}$ 满足$\mathcal{I}\cap\mathcal{I}' \neq \varnothing$，则$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}'$或$\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$。

“$\mathtt{T}$”既可以表示“满二叉树”中的“树”，也可以表示 *Tamari* 格 [Tam62][Gey94]，，而 $\mathtt{T}(N)$ 中的元素可以理解为：将最大数量的不冗余括号添加到一串 $N+2$ 相同字符中的有效方式。这样的方式共有 $\#\mathtt{T}(N) = C_{N+1}$ 种，其中 C_{N+1} 是第 $(N+1)$个卡特兰数。对每个 $\mathcal{I} \in \mathtt{I}$，我们关联面

$$\mathrm{f}_{\mathcal{I}} = \{(x_1,\dots,x_N) \in \triangle_N : x_j = x_k \text{ for all } j,k \in \mathcal{I}\} \tag{1.10}$$

属于 $\triangle_N$，其中 $x_0 = 0$ 且 $x_{N+1} = 1$。令 $o_{\mathcal{I}} \in \mathbb{N}$ 表示 F 在 $\mathfrak{f}_{\mathcal{I}}$ 处的消失阶。（因此，$o_{\mathcal{I}} = 0$，除非 F 在 $\mathfrak{f}_{\mathcal{I}}$ 处恒等于零。）

定理 1.1. 存在与 $\mathtt{I} \in \mathtt{T}(N)$ 相关联的整函数 $S_{N;\mathrm{reg},\mathtt{I}}[F]\colon \mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2} \to \mathbb{C}$，使得

$$S_N[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{\mathtt{I}\in\mathtt{T}(N)} S_{N;\mathrm{reg},\mathtt{I}}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \prod_{\mathcal{I}\in\mathtt{I}} \Gamma(o_{\mathcal{I}} + |\mathcal{I}| - 1 + \gamma_{\min\mathcal{I},\max\mathcal{I},*}) \tag{1.11}$$

对于所有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in \Omega_N$，均成立。 ■

这里，$\Gamma\colon \mathbb{C}\backslash\{-n\colon n\in\mathbb{N}\} \to \mathbb{C}$ 是伽马函数。作为该定理的推论，存在一个整函数 $S_{N;\mathrm{reg}}[F]\colon \mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2} \to \mathbb{C}$，使得

$$S_N[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = S_{N;\mathrm{reg}}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \prod_{0\le j<k\le N+1} \Gamma(k-j+\gamma_{j,k,*}) \tag{1.12}$$

对于所有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in \Omega_N$，均成立。

推论 1.1.1. 函数 $S_N[F]\colon \Omega_N \to \mathbb{C}$ 可解析延拓为定义在区域上的函数 $S_N[F]\colon \dot\Omega_N \to \mathbb{C}$

$$\dot\Omega_N = \mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}} \Big\backslash \Big[\Big(\bigcup_{j=1}^{N} \{\alpha_{j,*} \in \mathbb{Z}^{\le -j-\delta_j}\} \Big) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{N} \{\beta_{j,*} \in \mathbb{Z}^{\le -j-\ _j}\} \Big) \cup \Big(\bigcup_{1\le j<k\le N} \{\gamma_{j,k,*} \in \mathbb{Z}^{\le -(k-j)-d_{j,k}}\} \Big) \Big], \tag{1.13}$$

其中 $\mathbb{Z}^{\le n} = \{m \in \mathbb{Z}\colon\ m \le n\}$、$\delta_j = \delta_j[F] = o_{\{0,\dots,j\}}$、$\ _j = \ _j[F] = o_{\{N-j+1,\dots,N+1\}}$ 和 $d_{j,\ k} = d_{j,\ k}[F] = o_{\{j,\dots,k\}}$。■□

集合 $\dot\Omega_N$ 包含 $\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}$ 中位于某个局部有限的仿射超平面排列之外的所有元素。

考虑 $F \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_N]$。令 $[F]_{d_1,\ \dots,\ d_N}$ 表示 F 中 $x_1^{d_1}\cdots x_N^{d_N}$ 的系数，并令 $\mathrm{refl}\colon (x_1,\ \dots,\ x_N) \mapsto (1-x_1,\ \dots,\ 1-x_N)$，则有

$$\delta_j[F] = \text{最小值}\{d_1+\cdots+d_j\colon\ [F]_{d_1,\ \dots,\ d_j,\ d_{j+1},\ \dots,\ d_N} \ne 0 \text{对某些}\ d_{j+1},\ \dots,\ d_N \in \mathbb{N}\},\ _j[F] = \tag{1.14}$$

$$\text{最小值}\{d_N+\cdots+d_{N+1-j}\colon\ [F\circ\mathrm{refl}]_{d_1,\ \dots,\ d_{N-j},\ d_{N+1-j},\ \dots,\ d_N} \ne 0 \text{对某些}\ d_1,\ \dots\ , d_{N-j} \in \mathbb{N}\}. \tag{1.15}$$

例子。最简单的情况是当 $N=1$ 和 $F=1$ 恒等成立时，此时积分由下式给出

$$S_1(\alpha,\beta,\gamma) = B(\alpha+1,\beta+1) = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(2+\alpha+\beta)}, \tag{1.16}$$

最初通过定积分定义于 $\boldsymbol{R}\alpha,\boldsymbol{R}\beta > -1$，随后利用上文右侧的公式（或其他方法）作亚纯延拓。这就是欧拉的 β-函数。一种亚纯延拓方法涉及 Pochhammer路径（又称 Pochhammer双重回路）

$$b^{-1}a^{-1}ba \in \pi_1(\mathbb{C}\backslash\{0,1\}), \tag{1.17}$$

其中 a,b 是 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{0,1\})$ 的生成元，分别对应于绕 0,1 各一圈（例如逆时针）的回路。

于是，$b^{-1}a^{-1}ba$ 可以提升为覆盖空间 $\mathcal{M}$ 中的闭合围道 p，该覆盖空间对应于 $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ 的换位子群。然后，适当地选择 p 的基点，

$$B(\alpha+1,\beta+1) = \frac{1}{1-e^{-2\pi i\alpha}} \frac{1}{1-e^{-2\pi i\beta}} \int_p x^\alpha (1-x)^\beta \,\mathrm{d}x, \tag{1.18}$$

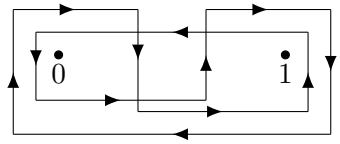


图 1. 在 $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ 中的 Pochhammer路径，视同伦等价。

此处我们现在将 $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$ 视为$\mathcal{M}$上的解析函数。上述定理表明，存在整函数$S_{1;\mathrm{reg},(\bullet\bullet)\bullet}$, $S_{1;\mathrm{reg},\bullet(\bullet\bullet)}$ 使得

$$B(\alpha+1,\beta+1)=\Gamma(1+\alpha)S_{1;\mathrm{reg},(\bullet\bullet)\bullet}(\alpha,\beta)+\Gamma(1+\beta)S_{1;\mathrm{reg},\bullet(\bullet\bullet)}(\alpha,\beta). \tag{1.19}$$

从公式 $B(\alpha+1,\beta+1)=\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)/\Gamma(2+\alpha+\beta)$ 中并不容易看出这种分解。 ■

例子。 现在考虑 $N=2$ 和 $F=1$ 的情形。可以计算得出，此时塞尔伯格型积分为

$$S_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=\frac{\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\beta_2)\Gamma(2+2\gamma_{1,2}+\alpha_1+\alpha_2)\Gamma(1+2\gamma_{1,2})}{\Gamma(2+\alpha_1+2\gamma_{1,2})\Gamma(3+\alpha_1+\alpha_2+\beta_2+2\gamma_{1,2})}{}_3F_2(a,b;1), \tag{1.20}$$

其中 $a=(a_1,a_2,a_3)=(1+\alpha_1,-\beta_1,2+2\gamma_{1,2}+\alpha_1+\alpha_2)$，且 $b=(b_1,b_2)=(2+\alpha_1+2\gamma_{1,2},3+\alpha_1+\alpha_2+\beta_2+2\gamma_{1,2})$，其中 ${}_pF_q$ 表示广义超几何函数。对于 $N=2$，上述定理可写为

$$\begin{aligned}S_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})&=\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(2+\alpha_1+\alpha_2+2\gamma_{1,2})S_{2;\mathrm{reg},((\bullet\bullet)\bullet)\bullet}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})+\\ &\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\beta_2)S_{2;\mathrm{reg},(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})+\Gamma(1+\beta_2)\Gamma(2+\beta_1+\beta_2+2\gamma_{1,2})S_{2;\mathrm{reg},\bullet(\bullet(\bullet\bullet))}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\\ &+\Gamma(1+2\gamma_{1,2})\Gamma(2+\beta_1+\beta_2+2\gamma_{1,2})S_{2;\mathrm{reg},\bullet((\bullet\bullet)\bullet)}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\\ &+\Gamma(1+2\gamma_{1,2})\Gamma(2+\alpha_1+\alpha_2+2\gamma_{1,2})S_{2;\mathrm{reg},(\bullet(\bullet\bullet))\bullet}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}),\end{aligned} \tag{1.21}$$

但再一次，这种分解并不能从精确的方程（1.20）中一目了然。附录中对这个例子有更深入的探讨。 ■

下面的证明比 [KT86a, §5][KT86b],Aomoto [Aom87], 等人的扭曲同调构造更为朴素 [TV03][War09], ，因为它基于 [Var95, Chp.10] 中所述的方法。这涉及对塞尔伯格（类 Selberg）被积函数奇点的几何分析。关键观察是，若将 N-单纯形吹起为 N 维结合多面体 [Sta63][MSS02, §1.6][Pos09] （见图 2、图 6），那么塞尔伯格被积函数——它在 $\triangle_N$ 上并非多重齐次——就会在解消上变为一步多重齐次（又称“经典”）。详情见第2节。这一观察以本质上等价的形式（尽管术语不同）早已见于 [KT86a][KT86b][MY03], ，不过那里并未出现“结合多面体”一词。物理学文献中也出现过密切相关的观察 [Miz17][CKW18][CMT19][Miz20]。

上述定理的证明中如何应用多重齐次性，见 §3。塞尔伯格被积函数在结合多面体上的提升具有经典性，因此我们可以将问题化简为本质上由一维情形构成的乘积。结合多面体的面与方程（1.5）、方程（1.6）中定义的量一一对应。在 2 中，图 $N=3$描绘了 α_j 的情形。量 $*$、β_j、$*$、γ_j、k、$*$ 是塞尔伯格被积函数在相应面处的阶。每个 $\mathtt{I}\in\mathtt{T}(N)$ 都与结合多面体的一个极小面对应，而 $\mathcal{I}\in\mathtt{I}$ 则与包含该面的各个面对应。因此，方程（1.11）中的每一项都有几何解释。

在保持一般性的前提下，该定理无法进一步加强。事实上，定理的证明表明，若 $F>0$ 在$\triangle_N$ 上处处成立（包括边界），那么

$$S_{N;\mathrm{reg}}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\neq 0 \tag{1.22}$$

对于任意满足以下两者的 $(\boldsymbol{\alpha}、\boldsymbol{\beta}、\boldsymbol{\gamma})\in\mathbb{R}^{2N+N(N-1)/2}$

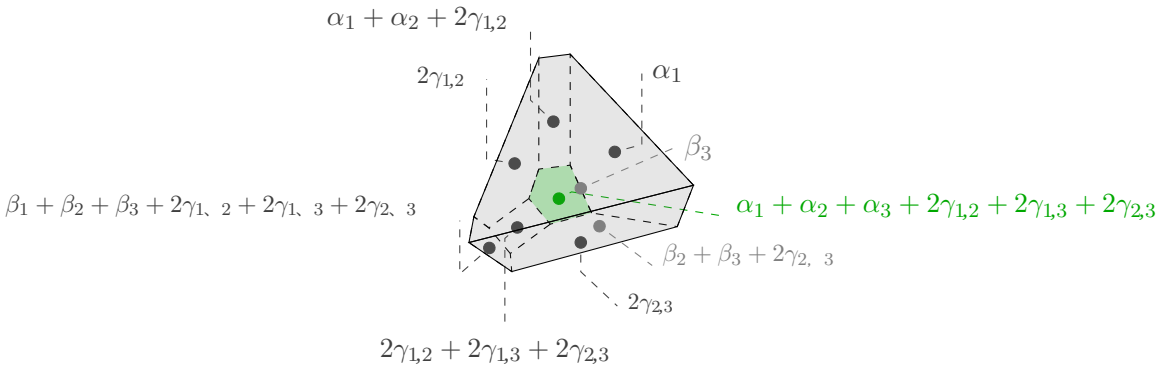


图 2. 三维结合多面体，其各面标注了方程 (1.5)、方程 (1.6) 中对应的函数。$C_4 = 14$ 顶点与 14 个元素 $\mathrm{T}(3)$相对应。

- $\gamma_{j,k,*} \in \mathbb{Z}^{\leq -(k-j)}$ 恰好对一对 $j, k \in \{0, \ldots, N+1\}$ 成立，其中 $j < k$,
- $\gamma_{j,k,*} > -(k-j)$ 对所有其他 j, k 成立

成立，因为对于这样的 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$，量 $S_{N;\mathrm{reg}}[F](\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ 正比于结合多面体对应面的正被积函数收敛积分。因此，$S_N[F]\colon \Omega_N \to \mathbb{C}$不能解析延拓到方程 (1.13) 所列超平面的任何严格较小集合的补集上。

不过，对于所需的应用，我们并不需要一般性最强的结果。特别重要的是 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$各自为“常数”的情形，也就是说，对于某些 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$,

- $\alpha_i = \alpha$ 且对所有 $i \in \{1, \ldots, N\}$, $\beta_i = \beta$
- $\gamma_{j,k} = \gamma$ 对所有 $j, k \in \{1, \ldots, N\}$ 均成立，其中 $j < k$。

在这种情况下，我们只需写作

$$S_N[F](\alpha, \beta, \gamma) = \int_{\triangle_N} F(x_1, \ldots, x_N) \prod_{j=1}^{N} x_j^{\alpha} (1-x_j)^{\beta} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_k - x_j)^{2\gamma} \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N. \tag{1.23}$$

现在我们考虑 $F \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]^{\mathfrak{S}_N}$，即 对称 多项式 F。当然，这种情形包括塞尔伯格最初的例子，其中 $F = 1$，以及 BPZ 极小模型中 $(1, s)$- 和$(r,1)$-初级场及其后裔的三点系数。此外，它还包括 Aomoto [Aom87],Kadell [Kad97; Kad93], 及其他人 [Alb+11]所研究的某些塞尔伯格型积分。这类积分的计算在 [KT86a]中被列为一个开放问题。

下文将介绍一种更一般的“DF 对称”塞尔伯格型积分概念，其中也包括其他三点系数。作为引言性讨论，我们将聚焦于——本身已颇为有趣的——对称情形。

T积分方程 (1.23) 最初定义在子集 $U_N[F] \subset \mathbb{C}^3_{\alpha,\beta,\gamma}$上 by

$$U_N[F] = \Big\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 : \Re j(\alpha + (j-1)\gamma) > -1 - \delta_j[F] \text{ and}$$
$$\Re j(\beta + (j-1)\gamma) > -1 - \ _j[F] \text{ for all } j \in \{1, \ldots, N\}, \text{ and } \Re\gamma > -\frac{1}{N-1}\Big\}, \tag{1.24}$$

其中包含

$$U_N = U_N[1] = \Big\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 : \min\{\Re\alpha, \Re\beta\} + \min\{0, (N-1)\gamma\} > -1 \text{ and } \Re\gamma > -\frac{1}{N-1}\Big\}. \tag{1.25}$$

上述定理的一个直接推论是，函数 $S_N[F]\colon U_N[F]\to\mathbb{C}$ 由 方程 (1.23) 定义，并允许解析延拓至 $S_N[F](\alpha,\beta,\gamma)$ $U_N[F]\to\mathbb{C}$ 到由以下条件给出的区域 $U_N[F]\supsetneq U_N[F]$:

$$\dot{U}_N[F]=\mathbb{C}^3_{\alpha,\beta,\gamma}\Big\backslash\Big[\Big(\bigcup_{j=1}^{N}\{j(\alpha+(j-1)\gamma)\in\mathbb{Z}^{\leq -j-\delta_j}\}\Big)\cup\Big(\bigcup_{j=1}^{N}\{j(\beta+(j-1)\gamma)\in\mathbb{Z}^{\leq -j-\ j}\}\Big)\cup\Big(\bigcup_{j=1}^{N-1}\{j(j+1)\gamma\in\mathbb{Z}^{-j}\}\Big)\Big].\quad(1.26)$$

例子。 考虑 $F=1$，即塞尔伯格积分。在这种情况下，塞尔伯格在 [Sel44] 中证明$S_N(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ $=S_N[1](\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ 由下式给出

$$S_N(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1}{N!}\prod_{j=1}^{N}\frac{\Gamma(1+\alpha+(j-1)\gamma)\Gamma(1+\beta+(j-1)\gamma)\Gamma(1+j\gamma)}{\Gamma(2+\alpha+\beta+(N+j-2)\gamma)\Gamma(1+\gamma)}.\quad(1.27)$$

参见 [FW08]，了解这一结果的历史回顾。 ■

塞尔伯格积分的例子表明，在对称情形下，方程 (1.26) 并非解析域的最大范围。令

$$\deg_j[F]=\max\{d_1+\cdots+d_j:[F]_{d_1,\ldots,d_j,d_{j+1},\ldots,d_N}\neq 0\text{ for some }d_{j+1},\ldots,d_N\in\mathbb{N}\}.\quad(1.28)$$

(由于 F 是对称的，$\deg_j[F]=\deg_j[F\circ\mathrm{refl}]$。) 那么：

定理 1.2。 对于任意 $F\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_N]^{\mathfrak{S}_N}$，存在一个整函数 $S_{N;\mathrm{Reg}}[F]\colon\ \mathbb{C}^3_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}\to\mathbb{C}$使得

$$S_N[F](\alpha,\beta,\gamma)=\Big[\prod_{j=1}^{N}\frac{\Gamma(1+\bar{\delta}_j+\alpha+(j-1)\gamma)\Gamma(1+\bar{}_j+\beta+(j-1)\gamma)\Gamma(1+j\gamma)}{\Gamma(2+\bar{d}_j+\alpha+\beta+(N+j-2)\gamma)\Gamma(1+\gamma)}\Big]\times S_{N;\mathrm{Reg}}[F](\alpha,\ \beta,\ \gamma)\quad(1.29)$$

对于所有$(\alpha,\beta,\gamma)\in U_N$，其中 $\bar{\delta}_j=\lceil j^{-1}\delta_j[F]\rceil$、 $\bar{}_j=\lceil j^{-1}\ _j[F]\rceil$和 $\bar{d}_j=\lfloor(N-j+1)^{-1}$度$_j[F]\rfloor$ 对每个 $j\in\{1,\ldots,N\}$均成立。■

因此， $S_N[F](\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ 可解析延拓为 $S_N[F](\alpha,\ \beta,\ \gamma)\colon U_N[F]\to\mathbb{C}$至由下式定义的区域。 $U_N[F]\supsetneq U_N[F]$

$$\mathring{U}_N[F]=\mathbb{C}^3_{\alpha,\beta,\gamma}\Big\backslash\Big[\Big(\bigcup_{j=1}^{N}\{\alpha+\bar{\delta}_j+(j-1)\gamma\in\mathbb{Z}^{\leq -1}\}\Big)\cup\Big(\bigcup_{j=1}^{N}\{\beta+\bar{}_j+(j-1)\gamma\in\mathbb{Z}^{\leq -1}\}\Big)\cup\Big(\bigcup_{j=1}^{N-1}\{(j+1)\gamma\in\mathbb{Z}^{\leq -1},\gamma\notin\mathbb{Z}\}\Big)\Big].\quad(1.30)$$

注意，方程 (1.30) 允许 $\gamma=-1$。

对于原始塞尔伯格积分，定理1.2 精确描述了原始积分的亚纯延拓的奇点和零点，而 $S_{N;\mathrm{Reg}}=S_{N;\mathrm{Reg}}[1]$ 只是常数。函数 $S_2[F]$ 和 $S_{2;\mathrm{Reg}}[F]$ 将在 §A中探讨。

上述定理的证明由几个步骤组成：

(1) 首先要做的是仅在 γ 中移除 $S_N[F](\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ 的虚假奇点（例如，在同时具有两类屏蔽电荷的库仑气体形式中就需要这样做）。

基本思路是运用以下关系——其启发式形式见于[DF85a，附录 A]——该关系联系了 $S_N[F](\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma})$ 的对称化与“DF 类”积分

$$I_N[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = \int_{\square_N} \Big[\prod_{j=1}^{N} x_j^{\alpha_j}(1-x_j)^{\beta_j}\Big] \times \Big[\prod_{1\le j<k\le N} (x_k - x_j + i0)^{2\gamma_{j,k}}\Big] F\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N, \quad (1.31)$$

其中 $\square_N = [0,1]^N$。我们可以通过类似于证明定理 $I_N[F]$ 时所用的方法进行解析延拓1.1。与 $S_N[F](\boldsymbol{\alpha}、\boldsymbol{\beta}、\boldsymbol{\gamma})$不同，这种延拓没有与常数 γ超平面相关的奇点。延拓$S_N[F](\alpha、\beta、\gamma)$ 在常数 γ超平面上真正的奇点，体现在它与延拓 $I_N[F](\alpha、\beta、\gamma)$的关系中。

(2) 第二步通过一些借助 Aomoto 证明的恒等式，消除远离两个或更多非预期奇点轨迹的其他非预期奇点 [Aom87]，适用于 $F=1$ 情形（以及 [DF85a，附录 A]，，其严谨程度仅达到物理学家的水平）。在计算原始塞尔伯格积分时如何使用这些恒等式，文中作了概述，见 [FW08]。在 $S_N[F]$ deg $F>1$ 情形下，似乎无法以类似方式计算，因此我们能做的最好就是陈述其奇点。

单纯形 $\triangle_N \subset \mathbb{R}^N$ 可以看作是

$$(\mathbb{C}\backslash\{0,1\})^N = (\mathbb{C}P^1\backslash\{0,1,\infty\})^N \quad (1.32)$$

通过嵌入 $\mathbb{R}\hookrightarrow\mathbb{C}\hookrightarrow\mathbb{C}P^1$，而证明这一步的粗略思路是，将上面的积分与把 $\triangle_N$ 替换为 $L^{\boxtimes N}\triangle_N$（其中 L 是保持 $\mathbb{C}P^1\backslash\{0,1,\infty\}$不变的六个线性分式变换之一）所得的结果联系起来。这六个变换中只有三个本质不同，其中一个只是恒等变换，因此没有意义。其余两个积分各自都有亚纯延拓，且具有不同的明显奇点。利用命题 4.2，可以将这些函数相互联系起来，并借此消除大多数并非同时出现在这三个函数中的表观奇点。有些奇点存在于这些积分之间的关系中，无法消除。

完成这一步后，最后一步是应用 Hartogs 定理消除剩余的可去奇点；这些奇点现在位于 $\mathbb{C}^3$ 的一个余维二子簇上。

这一论证在 §4.1中展开。更相关的版本见 [DF85a]（以及所需的附加步骤）§4.2。

我们将 $I_N[F]$ 称为“类 DF”积分，因为类似的积分虽然只是在相当形式化的层面上，曾出现在 [DF85a]中。类似的构造见 [Fel89]。

令 $\Sigma\mathtt{T}(N)$ 表示由有序对 $(x_0,\ S)$ 和非空子集 $S\subseteq\{1,\ \ldots\ldots,\ N\}$ 组成的极大集合，其中有序对的元素分别取自 $\{0,\ 1\}$ 和这些子集，并满足：给定 $(,\ S),\ (x_0,\ Q)\in\mathtt{I}$，则 $S\subseteq Q$ 或 $Q\subseteq S$。

定理 1.3。 存在与$\mathtt{I}\in\Sigma\mathtt{T}(N)$ 相关联的整函数 $I_{N;\mathrm{reg},\ \mathtt{I}}[F]:\ \mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}_{\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}}\to\mathbb{C}$，使得

$$I_N[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{\mathtt{I}\in\Sigma\mathtt{T}(N)} \Big[\prod_{(1,S)\in\mathtt{I}} \Gamma\Big(|S| + \sum_{j\in S}\beta_j + 2\sum_{j,k\in S,j<k}\gamma_{j,k}\Big)\Big] \times \Big[\prod_{(0,S)\in\mathtt{I}} \Gamma\Big(|S| + \sum_{j\in S}\alpha_j + 2\sum_{j,k\in S,j<k}\gamma_{j,k}\Big)\Big] I_{N;\mathrm{reg},\mathtt{I}}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \quad (1.33)$$

对于所有使左侧成为良定义积分的$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$。 ■

特别是， I_N $[F](\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma})$ 可解析延拓为 $I_N[F](\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma})$，定义在一个开稠密集上 t

$$\dot{V}_N = \mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}} \Big\backslash \Big[\Big(\bigcup_{S\subseteq\{1,\dots,N\}} \{\alpha_{S,*} \in \mathbb{Z}^{\leq -|S|}\} \Big) \cup \Big(\bigcup_{S\subseteq\{1,\dots,N\}} \{\beta_{S,*} \in \mathbb{Z}^{\leq -|S|}\} \Big) \Big]. \tag{1.34}$$

1.1. **关于库仑气体形式的一些评论。** 在此，我们讨论库仑气体形式（又称“自由场实现”“Feigin–Fuchs 表示”等）在二维共形场论中的一项具体应用 [DF84][DF85a][DF85b][FS89][PFM97，第 9][FW08]。Dotsenko–Fateev 将这种方法用于构造别拉文–波利亚科夫–扎莫洛奇科夫（BPZ）的“极小模型” [BPZ84]，这一直备受关注，但其数学基础似乎至今仍未得到完全严谨的奠定。文献 [FS89][FS92]中对极小模型的 $(1,\ s)$- 和 $(r,\ 1)$-初级场及其后裔的三点系数所作的构造相当严谨，但如何以同样令人满意的严谨程度处理其余初级场，仍是一个开放问题。在我们看来，问题在于对塞尔伯格型积分的亚纯延拓处理不足；而原始文献对这部分的处理相当形式化。

问题在于，Dotsenko & Fateev (DF) 将其中一些 γ取为 -1 ——例如参见 [DF85a，附录 A][FS92，第 27][FW08，§2] ——于是上述被积函数，例如对于 $F = 1$，在积分区域上便不再可积。因此， [DF85a，附录 A] 中的积分只是形式上的。Dotsenko & Fateev 建议通过对被积函数的指数作亚纯延拓来赋予这些积分以意义，但他们既未证明存在合适的亚纯延拓，也未充分讨论延拓的奇点，因而无法证明其推导合理。在此，我们构造了一个合适的延拓，并详细分析了它的奇点。

之所以必须将其中一些 γ 取为 -1 ，是因为对于固定的中心荷，筛选算符中使用两类顶点算子 $V_{\alpha_\pm}$ 。两类算子对于得到 BPZ 方程的所有解都是必不可少的。相关的顶点算子具有共形权重 $h_\pm = 1$。若中心荷为 c，这两种屏蔽电荷的共形权重可用 $\alpha_\pm$ 表示为

$$h_\pm = \alpha_\pm^2 - 2\alpha_\pm\alpha_0, \tag{1.35}$$

根据 [PFM97，第 9.2 节中的约定。1], 其中 $c = 1 - 24\alpha_0^2$，因此由韦达定理可得 $\alpha_-\alpha_+ = -1$。涉及这些屏蔽电荷的关联函数是 Dotsenko–Fateev 积分，其中$\gamma_{j,\ k} = \alpha_-\alpha_+ = -1$，这可由顶点算子的对易性质推出。进一步说明见 [PFM97，第9]节。

Kanie–Tsuchiya 的一种构造 [KT86a][KT86b], 后来由 Mimachi–Yoshida 重新发现 [MY04; MY03][Yos03], 给出了某种亚纯延拓的存在性，该延拓对指数的几乎所有取值都有定义。这个延拓对我们的目的而言并不完全充分：它存在一些可去奇点，尽管这些奇点是可去的，但要实际证明其可去性并非易事。特别是，Kanie–Tsuchiya 的构造在 $\gamma = -1$ 处有一个表面上的孤立奇点（见 [KT86b，第 5 节，定理 5]上文），此外，在可能参数构成的空间中还有少数其他棘手的仿射超平面。此处亚纯延拓的一项优点是，它没有这些棘手的表面奇点，因此适用于物理学文献中讨论的情形。

关于 Dotsenko–Fateev 型积分分析的大多数严谨研究——例如，参见[FK15a][FK15b][FK15c][FK15d][LV19]近期的一些研究——都聚焦于每个插入点至多进行一次屏蔽荷屏蔽的屏蔽多点关联函数。这类积分与 $N = 1$ 情形 $S_N(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$有关。关于 $N > 1$ 情形的研究则不多。此外，尽管已有相当多的工作研究与超平面配置相关的一般超几何积分——这方面的文献浩如烟海，因此我们仅列举[Var95][AK11] ——但似乎无法从当前文献中的结果推导出下文具体而明确的结果。

注意，$\Omega_N = \Omega_N[1]$按方程 (1.13) 中的定义，并不包含$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$，其中$\gamma_{j,k} = -1$ 且 $|j-k| = 1$，因此定理1.1 不足以构造 BPZ 极小模型。这正是证明上述更强定理的动机之一。

该 $\Gamma(2 + d_j + \alpha + \beta + (N + j - 2)\gamma)$ 项出现在方程 (1.29) 的分母中，这意味着$\mathring{S}_N[F](\alpha, \beta, \gamma) = 0$对所有

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathring{U}_N[F] \cap \{\alpha + \beta + (N + j - 2)\gamma \in \mathbb{Z}^{\leq -2-\bar{d}_j} \text{ for some } j \in \{1, \dots, N\}\}. \tag{1.36}$$

构造 BPZ 极小模型的三点系数时，这是阻止 $(0, s)$-初级场（模型中不包含这些场）与模型中包含的初级场发生融合的一种机制。用 BPZ 的术语来说，这就是算子代数的截断，这一点最初是基于OPE结合律的约束论证的——参见 [BPZ84，§6][PFM97，第 7.3 章。2]。

为了将其全面应用于 [DF84；DF85a]，，我们使用以下“DF 对称”多项式的定义。给定 $\lambda \in \mathbb{C}$和 $\mathsf{S} \subseteq \{1, \dots, N\}$，令 $\mathrm{DFSym}(N, \mathsf{S}, \lambda)$ 表示满足以下条件的 $F \in \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_N, x_N^{-1}]$ 集合：

- 给出任意满足 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ 的 $\sigma : \mathsf{S} \to \mathsf{S}$，即属于与 S关联的杨子群，
$$F = F \circ \sigma \tag{1.37}$$
其中我们将 σ 视为映射 $\mathbb{C}^N \ni \{x_i\}_{i=1}^N \to \{x_{\sigma(i)}{}_{i=1}^N \in \mathbb{C}^N$，并且
- 对任意 $j \in \mathsf{S}$和 $k \in \{1, \dots, N\} \backslash \mathsf{S}$,
$$\lambda\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} F\Big)\Big|_{x_j = x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(F\Big|_{x_j = x_k}\Big) \in \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1} \dots, \hat{x}_j, \hat{x}_j^{-1} \dots, x_N]. \tag{1.38}$$

特别地，$\mathrm{DFSym}(N, \{1, \dots, N\}\ \lambda) = \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_N, x_N^{-1}]^{\mathfrak{S}_N}$，因此从这个意义上说，DF对称性是普通对称性的一种推广。在对称情形下，我们禁止使用 Laurent 多项式 F 并不失一般性，因为如果 F是 Laurent 多项式，我们可以在多项式和塞尔伯格被积函数的其余部分之间重新分配因子 $x_1 \cdots x_N$。不过，在此允许一般的 Laurent 多项式很有用。

对于每个 λ和 S，$\mathrm{DFSym}(N, \mathsf{S}, \lambda)$ 都是 $\mathbb{C}[x_1, x_1^{-1} \dots, x_N, x_N^{-1}]$的一个（含幺） $\mathbb{C}$-子代数。它是非平凡的。如果 S是 $\{1, \dots, N\}$的真子集，那么

$$\begin{aligned} \lambda_- \sum_{j \in \mathsf{S}} x_j + \lambda_+ \sum_{k \in \{1,\dots,N\} \backslash \mathsf{S}} x_k &\in \mathrm{DFSym}(N, \mathsf{S}, \lambda), \\ \lambda_- \sum_{j \in \mathsf{S}} \frac{1}{x_j} + \lambda_+ \sum_{k \in \{1,\dots,N\} \backslash \mathsf{S}} \frac{1}{x_k} &\in \mathrm{DFSym}(N, \mathsf{S}, \lambda) \end{aligned} \tag{1.39}$$

是由 $\lambda_-^{-1}(\lambda_- + \lambda_+) = \lambda$定义的 λ_+的一个非零元素，因此 $\mathrm{DFSym}(N, \mathsf{S}, \lambda)$ 包含所有次数的多项式。

构造 DF 对称 Laurent 多项式的关键方法如下：

例子。对于任意 $M \in \mathbb{N}^+$和矩阵值多项式 $\varphi, \psi \in x\mathbb{C}^{M \times M}[x]$，若 φ 的系数为严格上三角，则 ψ 的系数为严格下三角。假设所有 A彼此可交换，且所有 B彼此可交换。（我们不假设 A与 B可交换。）那么，

$$\exp\Big(\lambda_- \sum_{j \in \mathsf{S}} \psi(x_j^{-1}) + \lambda_+ \sum_{k \in \{1,\dots,N\} \backslash \mathsf{S}} \psi(x_k^{-1})\Big) \exp\Big(\lambda_- \sum_{j \in \mathsf{S}} \varphi(x_j) + \lambda_+ \sum_{k \in \{1,\dots,N\} \backslash \mathsf{S}} \varphi(x_k)\Big) \tag{1.40}$$

属于 $\mathrm{DFSym}(N, \mathsf{S}, \lambda)$，其中 $\lambda = \lambda_-^{-1}(\lambda_- + \lambda_+)$。Dotsenko 和 Fateev 用于积分并定义极小模型三点系数的顶点算子，除去作为塞尔伯格被积函数一部分的某些标量因子外，都具有这种形式。在这个例子中，φ 的系数是在某个 Fock 空间上的湮灭操作，而 ψ 的系数是产生算子，所有算子

都截断到 Fock 空间的某个有限维子空间上。方程 (1.40) 中的产生算子全部位于湮灭算子的左侧，这就是正规序。

参见 [DF84][KT86b][KT86a][Fel89][PFM97]，第 9]章。 ■

对于一个 集合 $\mathtt{S} \subseteq \{1, \dots, N\}$ 以及 $\alpha_\pm, \beta_\pm, \gamma_\pm, \gamma_0 \in \mathbb{C}$，令 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{DF0},\mathtt{S}}, \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{DF0},\mathtt{S}} \in \mathbb{C}^N$ 由下式给出

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \begin{cases} \alpha_+ & (j \in \mathtt{S}), \\ \alpha_- & (j \notin \mathtt{S}), \end{cases} \\ \beta_j &= \begin{cases} \beta_+ & (j \in \mathtt{S}), \\ \beta_- & (j \notin \mathtt{S}), \end{cases} \end{aligned} \tag{1.41}$$

并令 $\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{DF0},\mathtt{S}} \in \mathbb{C}^{N(N-1)/2}$ 由下式给出

$$\gamma_{j,k} = \begin{cases} \gamma_+ & (j,k \in \mathtt{S}), \\ \gamma_0 & (j \in \mathtt{S}, k \notin \mathtt{S} \text{ or vice versa}), \\ \gamma_- & (j,k \notin \mathtt{S}). \end{cases} \tag{1.42}$$

Let

$$\dot{W}_N^{\mathrm{DF0},\mathtt{S}}[F] = \{(\alpha_-, \alpha_+, \beta_-, \beta_+, \gamma_-, \gamma_0, \gamma_+) \in \mathbb{C}^7 : (\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{DF0},\mathtt{S}}, \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{DF0},\mathtt{S}}, \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{DF0},\mathtt{S}}) \in \dot{V}_N[F]\}, \tag{1.43}$$

其中 $\dot{V}_N[F]$ 由方程 (1.34)定义。对于 $(\alpha_-, \alpha_+, \beta_-, \beta_+, \gamma_-, \gamma_0, \gamma_+) \in \dot{W}_{\mathrm{DF}_N^{\,0\,\mathtt{S}}}[F]$，定义

$$\dot{I}_N^{\mathrm{DF0},\mathtt{S}}[F](\alpha_-, \alpha_+, \beta_-, \beta_+, \gamma_-, \gamma_0, \gamma_+) = \dot{I}_N[F](\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{DF0},\mathtt{S}}, \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{DF0},\mathtt{S}}, \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{DF0},\mathtt{S}}). \tag{1.44}$$

现在令 $\dot{W}_{\mathrm{DF}_N^{\,\mathtt{S}}}[F]$ 表示满足 $\gamma_+ \neq 0$，且令

$$\gamma_- = \gamma_+^{-1}, \quad \alpha_- = -\gamma_- \alpha_+, \quad \beta_- = -\gamma_- \beta_+ \tag{1.45}$$

——参见 [DF85a]，方程 A.2]——此时 $(\alpha_-, \alpha_+, \beta_-, \beta_+, \gamma_-, -1, \gamma_+) \in \dot{W}_{\mathrm{DF}_N^{\,0\,\mathtt{S}}}[F]$。这是 $\mathbb{C}^3$ 的一个开稠密子集。令

$$\dot{I}_N^{\mathrm{DF},\mathtt{S}}[F](\alpha_+, \beta_+, \gamma_+) = \dot{I}_N^{\mathrm{DF0},\mathtt{S}}[F](-\gamma_+^{-1}\alpha_+, \alpha_+, -\gamma_+^{-1}\beta_+, \beta_+, \gamma_+^{-1}, -1, \gamma_+). \tag{1.46}$$

对于 $(\alpha_+, \beta_+, \gamma_+) \in \dot{W}_{\mathrm{DF}_N^{\,\mathtt{S}}}[F]$。令 $N_+ = |\mathtt{S}|$ 且 $N_- = N - N_+$。

定理 1.4。 取 $\gamma_+ \in \mathbb{C}|\{0, 1\}$ 和 $\mathtt{S} \subseteq \{1, \dots, N\}$。假设

$$F \in \mathrm{DFSym}(N, \mathtt{S}, \gamma_+^{-1}(1 - \gamma_+)). \tag{1.47}$$

那么，存在一个整函数 $I^{\mathrm{DF},\mathtt{S}}_{N;\mathrm{Reg}}[F](\alpha_+, \beta_+, \gamma_+) : \mathbb{C}^2_{\alpha_+,\beta_+} \to \mathbb{C}$，使得

$$\begin{aligned} \dot{I}_N^{\mathrm{DF},\mathtt{S}}[F](\alpha_+, \beta_+, \gamma_+) = \Big[\prod_{\pm} \prod_{j=1}^{N_\pm} \frac{\sin(\pi(\alpha_\pm + \beta_\pm + (N_\pm + j - 2)\gamma_\pm))}{\sin(\pi(\alpha_\pm + (j-1)\gamma_\pm)) \sin(\pi(\beta_\pm + (j-1)\gamma_\pm))}\Big] \\ \times I^{\mathrm{DF},\mathtt{S}}_{N;\mathrm{Reg}}[F](\alpha_+, \beta_+, \gamma_+) \end{aligned} \tag{1.48}$$

当 α_-、β_-、γ_- 通过方程 (1.45) α_+、β_+、γ_+ 相关，且 左侧定义良好。 ■

如果需要，可以用带有适当整数平移的 Γ-函数替换正弦函数。

例子。 当 $F=1$时，Dotsenko 和 Fateev 在 [DF85a，式 A.8、A.35][1] 中声称，上述积分为

$$I_N^{\mathrm{DF,S}}[1](\alpha_+,\beta_+,\gamma_+) \propto \gamma_\mp^{2N_-N_+}\Big[\prod_{j=1}^{N_\pm} e^{-i\pi(j-1)\gamma_\pm}\frac{\Gamma(j\gamma_\pm)\sin(\pi j\gamma_\pm)}{\Gamma(\gamma_\pm)\sin(\pi\gamma_\pm)}\Big]$$
$$\times\Big[\prod_{j=1}^{N_\mp} e^{-i\pi(j-1)\gamma_\mp}\frac{\Gamma(j\gamma_\mp-N_\pm)\sin(\pi j\gamma_\mp)}{\Gamma(\gamma_\mp)\sin(\pi\gamma_\mp)}\Big]\Big[\prod_{j=1}^{N_\pm}\frac{\Gamma(1+\alpha_\pm+(j-1)\gamma_\pm)\Gamma(1+\beta_\pm+(j-1)\gamma_\pm)}{\Gamma(2-2N_\mp+\alpha_\pm+\beta_\pm+(N_\pm-2+j)\gamma_\pm)}\Big]$$
$$\times\Big[\prod_{j=1}^{N_\mp}\frac{\Gamma(1+\alpha_\mp+(j-1)\gamma_\mp-N_\pm)\Gamma(1+\beta_\mp+(j-1)\gamma_\mp-N_\pm)}{\Gamma(2-N_\pm+\alpha_\mp+\beta_\mp+(N_\mp-2+j)\gamma_\mp)}\Big] \tag{1.49}$$

对于每一种符号选择。 ■

2. 结合子

我们使用术语‘mwc’来表示 带角流形 ，其含义取自 Melrose——例如 [Mel][HMM97],这些流形具有 C^∞-结构。粗略地说，带角流形在局部微分同胚于 $[0,\infty)^N$的一个开邻域，并且还要求边界超曲面是嵌入的。本节中，我们定义将用于消解塞尔伯格型和 Dotsenko–Fateev 型被积函数奇点的带角流形：

- 在 §2.1 中，我们定义结合子 $K_{\ell,m,n}$，用于对塞尔伯格型积分作亚纯延拓；并且
- 在 §2.2 中，我们定义带角流形 $A_{\ell,m,n}$，用于对类 DF 积分作亚纯延拓。

由于 $K_{0,N,0}$ 是通常的 N 维结合子，我们也将下文定义的带角流形称为结合子，因此得名本节标题。若 M是一个带角流形，我们用 $\mathcal{F}(M)$ 表示 M的面集，其中面 仅指边界超曲面。我们用“面”指余维更高的边界分支。

值得比较一下 Melrose 对带角流形的定义与多面体的定义。带角流形局部是一个多面体，但反过来并不成立，因为 M 局部微分同胚于 $[0,\infty)^N$ 的相对开邻域这一基本要求意味着，每个面 $\mathrm{f}\subsetneq M$ 都是至多 N 个面的交。虽然（闭）球体、四面体、立方体和十二面体都是带角流形，但八面体和二十面体不是。§3 中的论证要求，结合子$A_{\ell,m,n}$ 和 $K_{\ell,m,n}$ 不只是多面体，而必须是带角流形。原因在于，由于 $[0,\infty)^N$ 是半闭区间的乘积，任意带角流形局部都微分同胚于若干开区间或半闭区间的乘积。§3中利用了这一乘积结构。相比之下，在八面体的顶点附近，八面体无论如何都不能视为一维带边界流形的乘积。

总而言之，本文所使用的“mwc”概念，在我们的分析中所起的作用类似于 [Var95第10节中的“一般位置的多面体”7], ，但这两个概念并不等价。就本文而言，我们认为使用带角流形的语言更加自然（在技术上也更简单，因为这样无需使用多面体实现）。

下面我们将记录这些带角流形的完整 C^∞结构。如果有必要，我们也可以记录 C^ω结构（即实解析结构），但由于这需要在一定程度上超出现有关于带角流形的文献范围，而且本文其余部分并不需要如此精确的层次，因此我们将把自身限制在光滑范畴中。

若 f 是 M 的一个面，则吹起 $[M;\mathrm{f}]$ 是一个带角流形，且吹降映射

$$\mathrm{bd}:[M;\mathrm{f}]\to M \tag{2.1}$$

[1]在 [DF85a的方程 A 中似乎有几处笔误35]。方程（1.49）已修正了这些问题。我们对方程（1.49）的前几种情形进行了数值检验，以确认这些修正确实无误。

是光滑的。为方便起见，我们可以将内部 $[M;\mathsf{f}]^\circ$ 与 $M_\circ$ 等同。（若 F 是 M 的一个余维 ≤ 1 面，则我们可以将 $[M;\mathsf{F}]$ 与 M 本身等同。）自然地，若 f 的余维为 ≥ 2，则

$$\mathcal{F}([M;\mathsf{f}]) = \{[\mathsf{F};\mathsf{f}\cap\mathsf{F}] : \mathsf{F}\in\mathcal{F}(M)\}\cup\{\mathsf{ff}\}, \tag{2.2}$$

其中，$\mathsf{ff} = \mathsf{bd}^{-1}(\mathsf{f})$ 是膨胀的前面。于是，给定面 $\mathsf{F}\in\mathcal{F}(M)$ 的边界定义函数（bdfs）$x_{\mathsf{F}}\in C^\infty(M;\mathbb{R}^+)$，我们可以为 $[M$ 的各个面选取边界定义函数 $x_{[\mathsf{F};\mathsf{f}\cap\mathsf{F}]}$，$x_{\mathsf{ff}}$；$\mathsf{f}]$，使得对于每个 $\mathsf{F}\in\mathcal{F}(M)$，

$$x_{\mathsf{F}}\circ\mathrm{bd} = \begin{cases} x_{[\mathsf{F};\mathsf{f}\cap\mathsf{F}]}x_{\mathsf{ff}} & (\mathsf{f}\subseteq\mathsf{F}),\\ x_{[\mathsf{F};\mathsf{f}\cap\mathsf{F}]} & (\text{otherwise}).\end{cases} \tag{2.3}$$

（我们将 $[M;\mathsf{f}]$ 上的多重齐次函数——特别是光滑函数——与其在内部的限制等同，因此下文可以省略“$\circ\mathsf{bd}$。”）具体而言，除了在 $\mathsf{f}\not\subseteq\mathsf{F}$ 时定义 $x_{[\mathsf{F};\mathsf{f}\cap\mathsf{F}]} = x_{\mathsf{F}}$ 之外，我们还可以取

$$x_{\mathsf{ff}} = \sum_{\mathsf{F}\in\mathcal{F}(M),\mathsf{f}\subseteq\mathsf{F}} x_{\mathsf{F}}, \tag{2.4}$$

而且，如果 $\mathsf{f}\subseteq\mathsf{F}$，那么

$$x_{[\mathsf{F};\mathsf{f}\cap\mathsf{F}]} = x_{\mathsf{F}}\Big(\sum_{\mathsf{F}\in\mathcal{F}(M),\mathsf{f}\subseteq\mathsf{F}} x_{\mathsf{F}}\Big)^{-1}. \tag{2.5}$$

这可由关于膨胀 $[0,\infty)^N$ 的一个类似结果推出。注意，由于 M 是带角流形，而不只是多面体，如果 $\mathsf{F}_1,\dots,\mathsf{F}_d\in\mathcal{F}(M)$ 是满足 $\cap_\delta\mathsf{F}_\delta\neq\varnothing$ 的不同面，那么 $\cap_\delta\mathsf{F}_\delta$ 的连通分支是 d 余维的 M 面。（二维透镜是一个带角流形的例子，它有两个交不连通的面。）

若 U 是带角流形的开子集，则 U 本身也可视为带角流形。我们称函数 $x\in C^\infty(U;[0,\infty))$ 是 $\mathsf{F}\in\mathcal{F}(M)$ 中 $\mathsf{F}\cap U$ 的边界定义函数（bdf），前提是它是 U 中面 $\mathsf{F}\cap U\neq\varnothing$ 的边界定义函数；此时 F 自动是 U 的一个面。令 $\mathbb{R}_t = \mathbb{R}_t\cup\{-\infty,+\infty\}$表示 $\mathbb{R}$ 的“径向”紧化。这是一个带边流形（C^∞-），其中 $1/t$ 是 $\{\infty\}$ 在 $\{t>0\}$ 中的边界定义函数，而 $-1/t$ 是 $\{-\infty\}$ 在 $\{t<0\}$中的边界定义函数。

2.1. **结合子 $K_{\ell,m,n}$.** 现在我们为 $K_{\ell,m,n}$ 定义带角流形 $\ell,m,n\in\mathbb{N}$，其中各项并非全为零。下面的爆破过程是对 [KT86a] 中所述过程的推广。我们从集合开始

$$\triangle_{\ell,m,n} = \{(x_1,\dots,x_N)\in\overline{\mathbb{R}}^N : x_1\leq\cdots\leq x_\ell\leq 0 \\ \leq x_{\ell+1}\leq\cdots\leq x_{\ell+m}\leq 1\leq x_{\ell+m+1}\leq\cdots\leq x_N\}, \tag{2.6}$$

其中 $N=\ell+m+n$。这是 $\mathbb{R}^N$ 的一个紧致带角子流形。自然地，

$$\triangle_{\ell,m,n}\cong\triangle_{\ell,0,0}\times\triangle_{0,m,0}\times\triangle_{0,0,n}. \tag{2.7}$$

此外，$\triangle_{\ell,\,0,\,0}\cong\triangle_\ell$、$\triangle_{0,\,m,\,0}\cong\triangle_m$，以及$\triangle_{0,\,0,\,n}\cong\triangle_n$。

例如，在 $N=2$ 的情形下，共有六种情况：$\triangle_{2,0,0}$,$\triangle_{0,2,0}$,$\triangle_{0,0,2}$，它们都与三角形$\triangle_2$,微分同胚；以及$\triangle_{1,1,0}$,$\triangle_{1,0,1}$,$\triangle_{0,1,1}$，它们都与正方形 $\square_2$ 微分同胚。

如果 ℓ，$n=0$，此时 $m=N$，那么$\triangle_{\ell,\,m,\,n}$就是标准的 N-单纯形$\triangle_N$。

若一个子集$\mathcal{I}\subseteq\mathbb{Z}/(N+3)\mathbb{Z}$由某个 $k\in\mathbb{Z}/(N+3)\mathbb{Z}$ 和 $\kappa\in\mathbb{N}$ 构成，形式为$\{k \bmod (N+3),\cdots k+\kappa \bmod (N+3)\mathbb{Z}\}$，则称其为连续的。（因此，空集不视为连续的。）

我们用 $\mathbb{Z}/(N+3)\mathbb{Z}$ 的连续子集的（无序）划分 $\mathtt{I}$ 来标记 $\triangle_{\ell,m,n}$ 的面（任意余维，包括零维），其中 $0,\ell+1,\ell+m+2\in\mathbb{Z}/(N+3)\mathbb{Z}$ 中任意两个元素都不会同时出现在

同一个元素 $\mathcal{I} \in \mathtt{I}$ 中。具体来说，

$$\mathrm{f}_{0,\mathtt{I}} = \left\{ (x_1, \dots, x_N) \in \triangle_{\ell,m,n} : \left(\mathcal{I} \in \mathtt{I} \Rightarrow \begin{cases} j \in \mathcal{I} \Rightarrow t_j = \pm\infty & (0 \in \mathcal{I}) \\ j,k \in \mathcal{I} \Rightarrow t_j = t_k & (0 \notin \mathcal{I}) \end{cases} \right) \right\}, \tag{2.8}$$

其中

- $t_j = x_j$对于 $j = 1, \dots\dots, \ell$,
- $t_{\ell+1} = 0$,
- $t_{\ell+1+j} = x_{\ell+j}$对于 $j = 1, \dots, m$,
- $t_{\ell+m+2} = 1$, 并且
- $t_{\ell+m+2+j} = x_{\ell+m+j}$对于 $j = 1, \dots, n$。

$\mathrm{f}_{0,\mathtt{I}}$ 的维数为

$$\dim \mathrm{f}_{0,\mathtt{I}} = |\mathtt{I}| - 3. \tag{2.9}$$

为简化记号，若 $\mathtt{I}_0 \subseteq \mathtt{I}$ 是 $\mathtt{I}$ 去掉单元素集合后，则定义$\mathrm{f}_{\mathtt{I}_0} = \mathrm{f}_{0,\mathtt{I}}$。因此，$\mathrm{f}_{\varnothing}$ 表示$\triangle_{\ell}$的“内部”$m,\ n$，而$\triangle_{\ell,\ m,\ n}$ 的面具有如下形式：$\mathrm{f}_{\{\mathcal{I}\}}$ 当$\mathcal{I}$ 为一对连续的元素时。换言之，方程（2.9）

$$\operatorname{codim} \mathrm{f}_{\mathtt{I}} = \sum_{\mathcal{I} \in \mathtt{I}} (|\mathcal{I}| - 1). \tag{2.10}$$

作为 $\mathrm{f}_{\{\mathcal{I}\}}$ 的边界定义函数，对于 $\mathcal{I} = \{k \bmod \mathbb{Z}/(N+3)\mathbb{Z}, k+1 \bmod \mathbb{Z}/(N+3)\}$ 在 $k \in \{1, \dots, N+1\}$时，我们可以取

$$x_{\mathrm{f}_{\{\mathcal{I}\}}} = t_{k+1} - t_k. \tag{2.11}$$

对于 $\mathrm{F}_{\{0,1\}}$ 的其余两种情况（仅当 $\ell \geq 1$ 时存在）和 $\mathrm{f}_{\{N+2,N+3\}}$（仅当 $n \geq 1$ 时存在），我们可以取 $x_{\mathrm{f}_{\{0,1\}}} = -1/x_1$ 和 $x_{\mathrm{f}_{\{N+2,N+3\}}} = 1/x_N$。

令 $\mathrm{F}_{\ell,m,n} = \mathrm{F}_{\ell,m,n}(\triangle)$ 表示 $\triangle_{\ell,m,n}$ 的面 $\mathrm{f}_{\mathtt{I}}$ 集合，其中满足 $\mathtt{I} = \{\mathtt{I}\}$，且 $\mathtt{I} \subset \mathbb{Z}/(N+3)\mathbb{Z}$ 是大小为 $|\mathtt{I}| \geq 2$ 的连续子集，不同时包含 0、$\ell+1$、$\ell+m+2$ 中的任意两个。换言之，$\mathrm{F}_{\ell,m,n}$ 是面 $\mathrm{f}_{\mathtt{I}}$ 的集合；对于 $\mathtt{I}$，它们将 $\mathbb{Z}/(N+3)\mathbb{Z}$ 划分为一个长度至少为二的单个区间（不同时包含 0、$\ell+1$、$\ell+m+2$ 中的任意两个）以及若干个在记号中省略的单元素集合。

对于每个 $d \in \{0, \dots, N\}$，令 $\mathcal{F}_{\ell,m,n;d}$ 表示 $\mathcal{F}_{\ell,m,n}$ 中维数为 d 的元素集合。于是，带角流形 $K_{\ell,m,n}$ 定义为以下迭代爆破

$$K_{\ell,m,n} = [\triangle_{\ell,m,n}; \mathcal{F}_{\ell,m,n,0}; \cdots; \mathcal{F}_{\ell,m,n,N}] = [\cdots [\triangle_{\ell,m,n}; \mathcal{F}_{\ell,m,n;0}] \cdots; \mathcal{F}_{\ell,m,n;N}]. \tag{2.12}$$

也就是说，我们首先 爆破集合 $\mathcal{F}_{\ell,m,n;0}$ 中的元素（该集合可能为空，即当 ℓ, m, n 均非零时），然后从高余维到低余维，迭代爆破 $\mathcal{F}_{\ell,m,n;d}$ 中各面的提升（即内部提升的闭包）。

我们应检查爆破方程（2.12）是否定义良好。具体而言，这意味着对于每个d，在爆破$\mathcal{F}_{\ell,m,n;d}$ 中各元素的提升的步骤里，各次爆破彼此可交换。这可以通过一个略显繁琐的归纳论证来证明，这里仅作概述。

当要爆破提升后的$\mathcal{F}_{\ell,m,n;d}$中的面 $\mathrm{f} \neq \mathrm{f}'$ 时，它们的交（若非空）要么是一个点（记作$K_{0,0,0}$），要么是一个结合多面体$K_{\ell_\cap,m_\cap,n_\cap}$（后续爆破不会改变它），其维数为 $< N$，且其邻域与以下对象微分同胚

$$[0,1)_t^{N-d} \times K_{\ell_\cap,m_\cap,n_\cap} \times [0,1)_{t'}^{N-d}, \tag{2.13}$$

其中，f 对应于 $\{t = 0\}$，而 f' 对应于 $\{t' = 0\}$；上述乘积中这两个面的吹起可以交换次序，其结果自然微分同胚于

$$[[0,1)_t^{N-d}, \{0\}] \times K_{\ell_\cap,m_\cap,n_\cap} \times [[0,1)_{t'}^{N-d}; \{0\}]. \tag{2.14}$$

为了证明所声称的分解，即方程 (2.13)，首先值得注意的是 $\mathrm{f} \cap \mathrm{f}' = \varnothing$。如果 $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ 满足 $|\mathcal{I}| = N - d + 1 = |\mathcal{I}'|$ 并且 $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}' \neq \varnothing$，那么相应的面

$$\mathrm{f} = \mathrm{cl}_{[\triangle_{\ell,m,n}; \mathcal{F}_{\ell,m,n,0}; \cdots; \mathcal{F}_{\ell,m,n,d-1}]} \mathrm{f}^{\circ}_{\{\mathcal{I}\}} \tag{2.15}$$

$$\mathrm{f}' = \mathrm{cl}_{[\triangle_{\ell,m,n}; \mathcal{F}_{\ell,m,n,0}; \cdots; \mathcal{F}_{\ell,m,n,d-1}]} \mathrm{f}^{\circ}_{\{\mathcal{I}'\}} \tag{2.16}$$

属于 $[\triangle_{\ell,\,m,\,n};\ \mathcal{F}_{\ell,\,m,\,n,\,0};\ \cdots;\ \mathcal{F}_{\ell,\,m,\,n,\,d-1}]$ 满足 $\mathrm{f} \cap \mathrm{f}' = \varnothing$。事实上，$\mathcal{I} \cap \mathcal{I}' \neq \varnothing$ 意味着 S

$$\mathrm{f}_{\{\mathcal{I}\}} \cap \mathrm{f}_{\{\mathcal{I}'\}} = \mathrm{f}_{\{\mathcal{I} \cup \mathcal{I}'\}} \in \mathcal{F}_{\ell,m,n}(\triangle), \tag{2.17}$$

并且，由于这在构造的较早阶段已被爆破，f 和 f' 不可能相交。

因此，如果要爆破的两个面 f，f' 有非空交，那么它们必定是 $\mathrm{f}_{\{\mathcal{I}\}}$ 和 $\mathrm{f}_{\{\mathcal{I}'\}}$ 在满足 $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}' = \varnothing$ 的 $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ 下的提升。交 $\mathrm{f} \cap \mathrm{f}'$ 位于 $\mathrm{f}_{\{\mathcal{I}\}} \cap \mathrm{f}_{\{\mathcal{I}'\}} = \mathrm{f}_{\{\mathcal{I},\mathcal{I}'\}}$ 的原像中。$\triangle_{\ell,\,m,\,n}$ 的这个面具有 $\triangle_{\ell_\cap,\,m_\cap,\,n_\cap}$ 的形式，其中 $\ell_\cap + m_\cap + n_\cap = 2d - N \geq 0$。如归纳所示，进行目前为止的爆破后，这个面的提升为 $K_{\ell_\cap,\,m_\cap,\,n_\cap}$，不过这对于证明该构造是良定义的并非关键。由于其维数为 $2d - N$，我们这个部分爆破流形中该面的一个邻域自动具有以下形式

$$L = [0,1)^{2N-2d} \times K_{\ell_\cap, m_\cap, n_\cap}, \tag{2.18}$$

因此，只需检查 f，f' 以预期的方式包含在其中即可。包含 $(0,\ \cdots,\ 0) \times K_{\ell_\cap,\,m_\cap,\,n_\cap}$ 的 d 维面 L 都具有如下形式 $[0,\infty)^{N-d} \times K_{\ell_\cap,\,m_\cap,\,n_\cap}$ 其中的一个 $\binom{2N-2d}{N-d}$ 除子为 $[0,\infty)^{N-d} \subseteq [0,\infty)^{2N-2d}$。因此，我们可以分解

$$[0,1)^{2N-2d} = [0,1)^{\#}_t \times [0,1)^{\#'}_{t'} \times [0,\infty)^{\delta}_{t''}, \tag{2.19}$$

对于某个 $\delta \in \mathbb{N}$，使得 f 对应于 $\{t = t'' = 0\}$，而 f' 对应于 $\{t' = t'' = 0\}$。但是，如果 $\delta \neq 0$，那么 $\mathrm{f} \cap \mathrm{f}'$ 就太大了，因此 $\delta = 0$。所以，由于 f，f' 二者的维数都是 d，必然有 $\# = \#' = N - d$。我们的概述到此完成。

现在我们讨论 $K_{\ell,m,n}$ 的组合结构。$\triangle_{\ell,m,n}$ 的所有面都属于 $\mathrm{F}_{\ell,m,n;N-1}$，因此 $K_{\ell,m,n}$ 的每个面都是我们某次吹起的前面。所以，$K_{\ell,m,n}$ 的各个面与 $\mathrm{F}_{\ell,m,n}$ 的元素双射，进而与上文的 I 双射。这样的子集由其端点 $j, k \in \mathbb{Z}/(N+3)\mathbb{Z}$ 唯一确定，因为 $\mathbb{Z}/(N+3)\mathbb{Z}$ 中只有两个连续子集与 I 具有相同的端点，即 I 本身和 $\mathrm{I}^{\complement} \cup \{j,k\}$，而后者包含 $0, \ell+1, \ell+m+2$ 中的两个元素。令 $\mathrm{J}_{\ell,m,n}$ 表示以此方式得到的无序对 $\{j,k\}$ 的集合。对于 $\{j,k\} \in \mathrm{J}_{\ell,m,n}$，令 $\mathrm{I}(j,k) = \mathrm{I}(k,j)$ 表示 $\mathbb{Z}/(N+3)\mathbb{Z}$ 中以这些元素为端点且至多包含 $0, \ell+1, \ell+m+2$ 中一个元素的唯一连续子集。对于这样的 j, k，令 $\mathrm{F}_{j,k} = \mathrm{F}_{k,j}$ 表示 $K_{\ell,m,n}$ 中对应的面，并令 $x_{\mathrm{F}_{j,k}} = x_{\mathrm{F}_{k,j}}$ 表示该面的一个边界定义函数，它按照本节引言中的方式归纳构造。（注意，这些边界定义函数可能取决于对 $\mathrm{F}_{\ell,m,n;d}$ 中各元素进行吹起的具体顺序。）

$2^{-1}N(N+3)$ 个面位于 $K_{\ell,\,m,\,n}$。

例子。考虑 $N = 2$ 的情形。那么，除本质等价外，需要考虑的情形为 K_1,1,0 和 K_0,2,0。这些情形见图3。带角流形 K_1,1,0 与 A_1,1,0 相同；在第2.2节中，我们介绍了用于标记 $A_{\ell,m,n}$ 的面的记号，该记号与用于标记 $K_{\ell,m,n}$ 的记号一同显示在图4中。我们还引入了一种用于标记 $K_{\ell,m,n}$ 的面的额外记号，通过以下约定在下标中标示 I：

- 元素 0，$\ell+1$，$\ell+m+2 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ 用一个“$\circ$”表示；若 0 不包含在 $\mathcal{I}$ 中，则省略 0。
- $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ 的其他元素用一个“$\bullet$”表示。
- 除 0 以外，$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ 的元素按顺序表示。若要表示 0，则将其列在首位或末位。

$\mathcal{I}$ 中的元素都用括号括起来。 ■

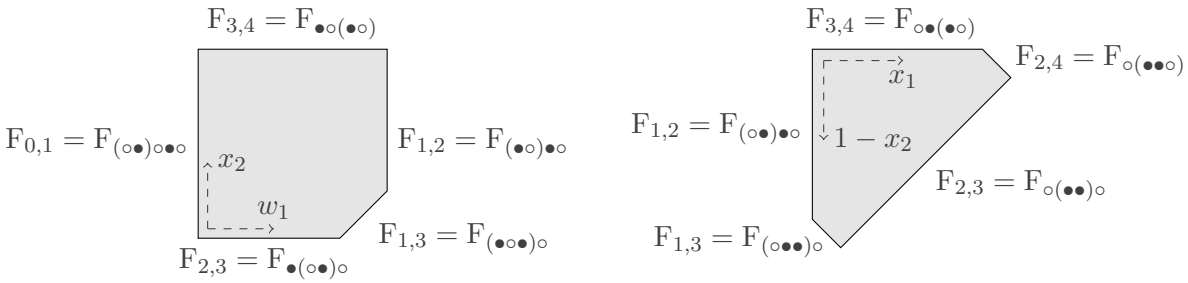


图3. 结合子 $K_{1,1,0}$ （左）和$K_{0,2,0}$ （右），按照爆破过程大致实现为多面体。第一幅图中，水平轴大致表示 $w_1 = 1/(1 - x_1)$，向右递增。第二幅图中，水平轴大致表示 x_1。两幅图中的垂直轴均大致表示 x_2。

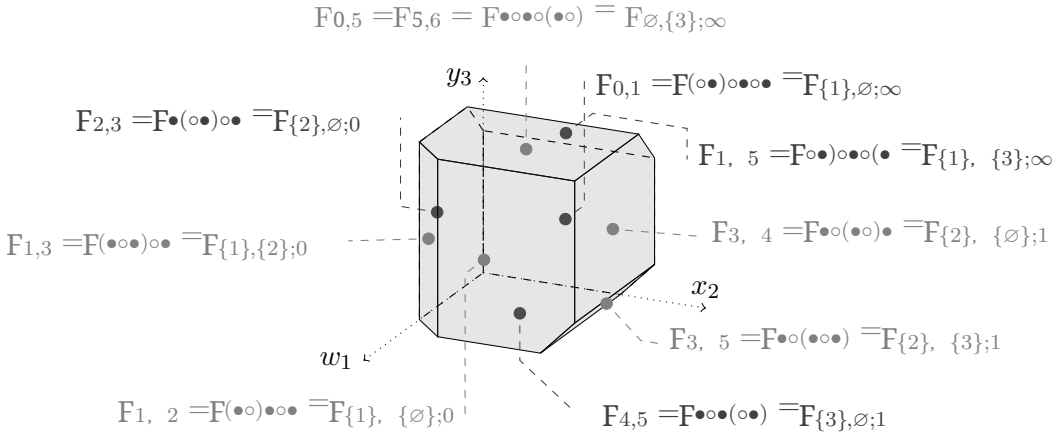


图4。带标记面、根据爆破过程大致实现为多面体的带角流形 $K_{1,1,1}$。这里 $w_1 = 1/(1 - x_1)$ 和 $y_3 = (x_3 - 1)/x_3$。视线中的面为 $F_{1,2} = F_{(\bullet\circ)\bullet\circ\bullet}$、$F_{1,3} = F_{(\bullet\circ\bullet)\circ\bullet}$、$F_{3,4} = F_{\bullet\circ(\bullet\circ)\bullet}$、$F_{3,5} = F_{\bullet\circ(\bullet\circ\bullet)}$，以及 $F_{0,5} = F_{\bullet\circ\bullet\circ(\bullet\circ)}$。

例子。 考虑这种情况 $N = 3$。那么，在本质等价下，需要考虑的情况有$K_{1,\,1,\,1}$， $K_{1,\,2,\,0}$，以及 $K_{0,\,3,\,0}$。这些情况见图 4 、图 5 、图 6。带角流形 $K_{1,\,1,\,1}$ 与 $A_{1,\,1,\,1}$ 相同。

我们修改了前一个例子中的“•”记号，并用它为图中的面标记，同时保留了本节其余部分所使用的记号。例如，在考虑K_0,3,0时，“◦ (• • •) ◦ ”表示 {2, 3, 4} $\subset \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$。在考虑 K_1,2,0时，“◦ (• ◦ •)• ◦ ”表示 {1, 2, 3}。在考虑 K_1,1,1时，“•) • ◦ (• ◦ ”表示 {0, 1, 5}。■

$K_{\ell,\,m,\,n}$ 满足以下“泛性质：”

- 对于任意并非全为空的子集 $S \subseteq \{1, \dots, \ell\}$、 $Q \subseteq \{\ell+1, \dots, \ell+m\}$、 $R \subseteq \{\ell+m+1, \dots, N\}$，令 forg : $\triangle_{\ell,m,n} \to \triangle_{|S|,|Q|,|R|}$ 表示遗忘变量 $x_j$for $j \notin S \cup Q \cup R$的遗忘映射。则，forg 提升为一个光滑 b-映射 [Mel]

$$\overline{\text{forg}} : K_{\ell,m,n} \to K_{|S|,|Q|,|R|}. \tag{2.20}$$

对于 $K_{|S|,|Q|,|R|}$ 的任意面 F，$\text{forg}^* x_F$ 在 $\overline{\text{forg}}$(F) 中的每个面处都一阶消失。这可以通过对[1]爆破次数进行归纳来证明。

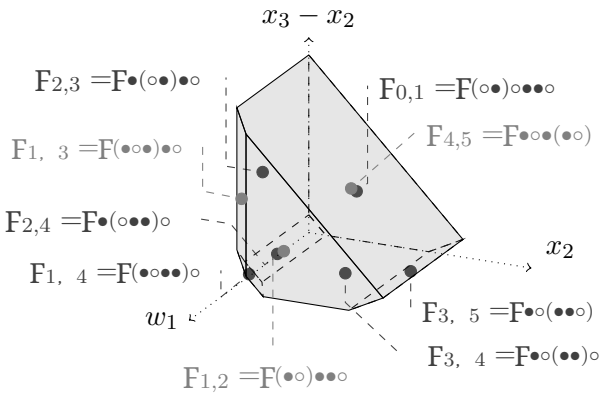


图 5. 带有带标记的面的 $\mathrm{mwc} K_{1,2,0}$，按照爆破过程大致实现为一个多面体。如上所述，$w_1 = 1/(1 - x_1)$。视线上的面为 $\mathrm{F}_{1,2} = F_{(\bullet\circ)\bullet\bullet\circ}$、$\mathrm{F}_{1,3} = \mathrm{F}_{(\bullet\circ\bullet)\bullet\circ}$ 和 $\mathrm{F}_{4,5} = \mathrm{F}_{\bullet\circ\bullet(\bullet\circ)}$。

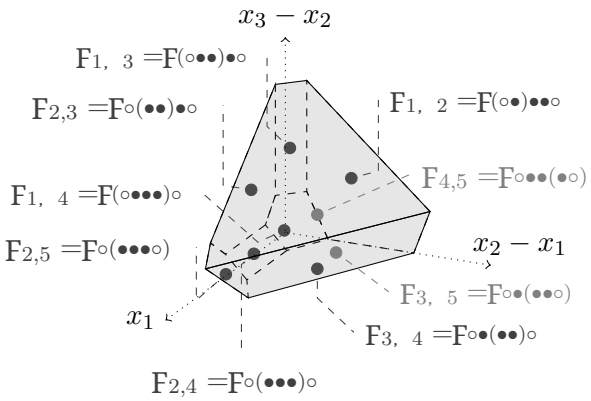


图 6. 带角流形 $K_{0,3,0}$，带有标记面的多面体，其实现大致遵循吹起过程。视线范围内的面为 $\mathrm{F}_{4,5} = \mathrm{F}_{\circ\bullet\bullet(\bullet\circ)}$ 和 $\mathrm{F}_{3,5} = \mathrm{F}_{\circ\bullet(\bullet\bullet\circ)}$。参见[KT86a，图 5。2]，其中展示了完整的爆破过程。

命题 2.1。 假设 $\mu \in C^\infty(\triangle_{\ell,m,n}; \Omega\triangle_{\ell,m,n})$ 是 $\triangle_{\ell,m,n}$ 上的严格正光滑密度。那么，μ 到 $K_{\ell,m,n}$ 的提升具有如下形式

$$\Big[\prod_{\{j,k\}\in\mathcal{J}_{\ell,m,n}} x_{\mathrm{F}_{j,k}}^{|j-k|-1}\Big]\overline{\mu} \tag{2.21}$$

对于严格正的 $\mu \in C^\infty(K_{\ell,m,n}; \Omega K_{\ell,m,n})$。这里，对于 $j, k \in \mathbb{Z}/(N+3)\mathbb{Z}$，我们使用记号 $|j-k| = \min\{|j_0 - k_0|, |k_0 - j_0| : j_0, k_0 \in \mathbb{Z} : j_0 \equiv j \bmod (N+3)\ k_0 \equiv k \bmod (N+3)\}$。■

在乘积中，每个无序对只计一次。

证明。 我们回顾以下引理：

- 假设 M 是一个带角流形，且 $\mu \in C^\infty(M; \Omega M)$ 是 M 上的严格正光滑密度。那么，如果 f 是 M 的一个余维为 $d \in \mathbb{N}^+$ 的面，则将 μ 提升到 $[M; \mathrm{f}]$ 后，其形式为 $x^{d-1}{}_{\mathrm{f}}\nu$，并且是 $[M; \mathrm{f}]$ 上的严格正光滑密度。

在局部坐标下，这可由在 $[0,\infty)^N$ 中膨胀一个面的情形推出。在这种情况下，我们可以使用柱坐标（也就是说，如果要膨胀的面是角，则使用球坐标）。结论由柱坐标下勒贝格测度的形式得出。

注意到 $|j-k|$ 是 $\mathrm{F}_{j,k}$ 的余维后，该命题即可通过对引理作归纳应用得到。□

命题 2.2. $\mathbb{R}^N$ 上的勒贝格测度在 $\triangle^\circ_{\ell,m,n}$ 上定义了一个严格正光滑密度，其形式为

$$\Big[\prod_{j=1}^{\ell}(1-x_j)^2\Big]\Big[\prod_{j=\ell+m+1}^{N} x_j^2\Big]\mu \tag{2.22}$$

对于 $\mu \in C^\infty(\triangle_{\ell,m,n}; \Omega\triangle_{\ell,m,n})$，$\triangle_{\ell,m,n}$ 上的严格正光滑密度。 ■

证明。 1-形式 $\mathrm{d}x_j \in \Omega^1 \triangle^{\circ}_{\ell,\,m,\,n}$ 确实定义了 $\triangle_{\ell,\,m,\,n}$ 上的可延拓1-形式，如果$j \in \{\ell+1,\,\cdots \ell+m\}$，且该延拓处处不为零。对于

- $\mathrm{d}w_j = (1-x_j)^{-2}\,\mathrm{d}x_j$ for $w_j = 1/(1-x_j)$ if $j \in \{1,\dots,\ell\}$ and
- $\mathrm{d}y_j = x_j^{-2}\,\mathrm{d}x_j$ for $y_j = (x_j-1)/x_j$ if $j \in \{\ell+m+1,\cdots,N\}$,

由于 $\triangle_{\ell,\,m,\,n}$是 $\mathbb{R}^N$ 的一个子流形。因此，方程 μ （2.22) 中的被积函数可取为 $|\mathrm{d}w_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}w_\ell \wedge \mathrm{d}x_{\ell+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{\ell+m} \wedge \mathrm{d}y_{\ell+m+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_N|$，它属于 $C^\infty(\triangle_{\ell,\,m,\,n}; \Omega\triangle_{\ell,\,m,\,n})$，并且严格为正。□

现在记录将构成塞尔伯格被积函数的因子 x_i，$1-x_i$ 和 $x_j - x_k$ 提升到$K_{\ell,\,m,\,n}$ 的结果。先来看前两种情况:

- 若 $i \in \{1,\,\dots,\,\ell\}$，则

$$-x_i \in \Big[\prod_{j=\ell+m+3}^{N+3}\prod_{k=i}^{\ell} x_{\mathrm{F}_{j,k}}^{-1}\Big]\Big[\prod_{j=1}^{i}\prod_{k=\ell+1}^{\ell+m+1} x_{\mathrm{F}_{j,k}}\Big]C^\infty(K_{\ell,m,n};\mathbb{R}^+), \tag{2.23}$$

$$1-x_i \in \Big[\prod_{j=\ell+m+3}^{N+3}\prod_{k=i}^{\ell} x_{\mathrm{F}_{j,k}}^{-1}\Big]C^\infty(K_{\ell,m,n};\mathbb{R}^+). \tag{2.24}$$

- 若 $i \in \{\ell+1,\,\dots,\,\ell+m\}$，则

$$x_i \in \Big[\prod_{j=1}^{\ell+1}\prod_{k=i+1}^{\ell+m+1} x_{\mathrm{F}_{j,k}}\Big]C^\infty(K_{\ell,m,n};\mathbb{R}^+), \tag{2.25}$$

$$1-x_i \in \Big[\prod_{j=\ell+2}^{i+1}\prod_{k=\ell+m+2}^{N+2} x_{\mathrm{F}_{j,k}}\Big]C^\infty(K_{\ell,m,n};\mathbb{R}^+). \tag{2.26}$$

- 若 $i \in \{\ell+m+1,\,\dots,\,N\}$，则

$$x_i \in \Big[\prod_{j=\ell+m+3}^{i+2}\prod_{k=0}^{\ell} x_{\mathrm{F}_{j,k}}^{-1}\Big]C^\infty(K_{\ell,m,n};\mathbb{R}^+), \tag{2.27}$$

$$-(1-x_i) \in \Big[\prod_{j=\ell+m+3}^{i+2}\prod_{k=0}^{\ell} x_{\mathrm{F}_{j,k}}^{-1}\Big]\Big[\prod_{j=\ell+2}^{\ell+m+2}\prod_{k=i+2}^{N+2} x_{\mathrm{F}_{j,k}}\Big]C^\infty(K_{\ell,m,n};\mathbb{R}^+). \tag{2.28}$$

如果 $N=1$，那么这些都很容易证明。利用结合子的泛性质， $N \geq 2$ 情形可由 $N=1$ 情形推出。

类似地，详细推导 $K_{0,\,2,\,0}$ 的情形并应用泛性质，可得，对于 $k > j$:

- 如果 $j,\ k \in \{\ell+1,\,\dots,\,\ell+m\}$，那么

$$x_k - x_j \in \Big[\prod_{j_0=1}^{\ell+1}\prod_{k_0=k+1}^{\ell+m+1} x_{\mathrm{F}_{j_0,k_0}}\Big]\Big[\prod_{j_0=\ell+2}^{j+1}\prod_{k_0=k+1}^{N+2} x_{\mathrm{F}_{j_0,k_0}}\Big]C^\infty(K_{\ell,m,n};\mathbb{R}^+). \tag{2.29}$$

事实上，在 ℓ，$n=0$和 $m=2$的情形下，这意味着 $x_2 - x_1 \in x_{\mathrm{F}_{1,\,3}} x_{\mathrm{F}_{2,\,3}} x_{\mathrm{F}_{2,\,4}} C^\infty(K_{0,\,2,\,0};\ \mathbb{R}^+)$。确实，如果我们先对 $\mathrm{F}_{1,3}$ 进行膨胀，再对 $\mathrm{F}_{2,4}$进行膨胀，从而构造 $K_{0,\,2,\,0}$，就得到

$$x_{\mathrm{F}_{1,3}} = x_2, \qquad x_{\mathrm{F}_{2,3}} = \frac{x_2 - x_1}{2x_2 - x_2^2 - x_1}, \qquad x_{\mathrm{F}_{2,4}} = \frac{2x_2 - x_2^2 - x_1}{x_2}, \tag{2.30}$$

因此我们恰好得到 $x_{\mathrm{F}_{1,3}} x_{\mathrm{F}_{2,3}} x_{\mathrm{F}_{2,4}} = x_2 - x_1$。另一方面，如果我们反转爆破的顺序，那么我们得到

$$x_{\mathrm{F}_{1,3}} = \frac{x_2 - x_1^2}{1 - x_1}, \qquad x_{\mathrm{F}_{2,3,0}} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1^2}, \qquad x_{\mathrm{F}_{2,4}} = 1 - x_1, \tag{2.31}$$

因此我们仍然得到 $x_{\mathrm{F}_{1,3}}x_{\mathrm{F}_{2,3}}x_{\mathrm{F}_{2,4}} = x_2 - x_1$。

由此，我们可以推导出以下结论。

- 若 $j,k \in \{1,\dots,\ell\}$，那么，根据 $w_i = -x_i/(1-x_i)$，$(x_k - x_j) = (1-w_j)^{-1}(1-w_k)^{-1}(w_j - w_k)$，因此，

$$x_k - x_j \in \Big[\prod_{j_0=j}^{\ell}\prod_{k_0=\ell+m+3}^{N+3} x_{\mathrm{F}_{j_0,k_0}}^{-1}\Big]\Big[\prod_{j_0=1}^{j}\prod_{k_0=k}^{\ell+m+1} x_{\mathrm{F}_{j_0,k_0}}\Big]C^\infty(K_{\ell,m,n};\mathbb{R}^+). \tag{2.32}$$

- 若 $j,k \in \{\ell+m+1,\dots,N\}$，那么，根据 $y_i = 1/x_i$，$(x_k - x_j) = y_j^{-1}y_k^{-1}(y_j - y_k)$，因此

$$x_k - x_j \in \Big[\prod_{j_0=\ell+2}^{j+2}\prod_{k_0=k+2}^{N+2} x_{\mathrm{F}_{j_0,k_0}}\Big]\Big[\prod_{j_0=\ell+m+3}^{k+2}\prod_{k_0=0}^{\ell} x_{\mathrm{F}_{j_0,k_0}}^{-1}\Big]C^\infty(K_{\ell,m,n};\mathbb{R}^+). \tag{2.33}$$

接下来的三个结论分别由 $K_{1,1,0}$,$K_{1,0,1}$，以及 $K_{0,1,1}$ 情形推出。我们以 $K_{1,1,0}$ 情形为例说明，其余情形类似。

- 若 $j \in \{1,\dots,\ell\}$ 且 $k \in \{\ell+1,\dots,\ell+m\}$，那么 $(x_k - x_j) = (1-w_j)^{-1}(w_j + x_k - x_k w_j)$，因此

$$x_k - x_j \in \Big[\prod_{j_0=j}^{\ell}\prod_{k_0=\ell+m+3}^{N+3} x_{\mathrm{F}_{j_0,k_0}}^{-1}\Big]\Big[\prod_{j_0=1}^{j}\prod_{k_0=k+1}^{\ell+m+1} x_{\mathrm{F}_{j_0,k_0}}\Big]C^\infty(K_{\ell,m,n};\mathbb{R}^+). \tag{2.34}$$

在 $\ell, m = 1$, $n = 0$ 的情形下，这表示 $(x_2 - x_1) \in x_{\mathrm{F}_{1,5}}^{-1}x_{\mathrm{F}_{1,3}}C^\infty(K_{1,1,0};\mathbb{R}^+)$。事实上，$\mathrm{F}_{1,3}$ 在 $K_{1,1,0}$ 上的边界定义函数 $x_{\mathrm{F}_{1,3}}$ 定义为

$$x_{\mathrm{F}_{1,3}} = (1-w_1) + x_2 = -\frac{x_1}{1-x_1} + x_2, \tag{2.35}$$

以及 $x_{\mathrm{F}_{1,5}} = x_{\mathrm{F}_{0,1}} = w_1 = 1/(1-x_1)$。因此，

$$x_{\mathrm{F}_{1,5}}^{-1}x_{\mathrm{F}_{1,3}} = x_2 - x_1 - x_1x_2. \tag{2.36}$$

因此，上述假定的 $C^\infty(K_{1,1,0};\mathbb{R}^+)$ 项就是 $(x_2 - x_1)(x_2 - x_1 - x_1x_2)^{-1} = (1 - x_2x_1/(x_2 - x_1))^{-1}$。证明它在 $K_{1,1,0}$ 上光滑（且为正）的一种方法（除了检查一组局部坐标图之外）是利用恒等式

$$-\frac{x_2x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_{\mathrm{F}_{1,2}}x_{\mathrm{F}_{1,3}}x_{\mathrm{F}_{2,3}}}{x_{\mathrm{F}_{1,2}} + x_{\mathrm{F}_{2,3}}x_{\mathrm{F}_{0,1}}}. \tag{2.37}$$

这些面 $\mathrm{F}_{0,1}$,$\mathrm{F}_{2,3}$ 与 $\mathrm{F}_{1,2}$（见图 3），因此方程（2.37）右侧的分母不为零，所以该商确实是光滑的。

同样:

- 若 $j \in \{\ell+1,\dots,\ell+m\}$ 且 $k \in \{\ell+m+1,\dots,N\}$，则 $(x_k - x_j) = y_k^{-1}(1 - x_jy_k)$，所以

$$x_k - x_j \in \Big[\prod_{j_0=\ell+2}^{j+1}\prod_{k_0=k+2}^{N+2} x_{\mathrm{F}_{j_0,k_0}}\Big]\Big[\prod_{j_0=0}^{\ell}\prod_{k_0=\ell+m+3}^{k+2} x_{\mathrm{F}_{j_0,k_0}}^{-1}\Big]C^\infty(K_{\ell,m,n};\mathbb{R}^+). \tag{2.38}$$

- 如果 $j \in \{1,\dots,\ell\}$ 且 $k \in \{\ell+m+1,\dots,N\}$，则 $(x_k - x_j) = y_k^{-1}(1-w_j)^{-1}(1 - w_j + w_jy_k)$，so

$$x_k - x_j \in \Big[\prod_{j_0=j}^{\ell}\prod_{k_0=k+3}^{N+3} x_{\mathrm{F}_{j_0,k_0}}^{-1}\Big]\Big[\prod_{j_0=0}^{\ell}\prod_{k_0=\ell+m+3}^{k+2} x_{\mathrm{F}_{j_0,k_0}}^{-1}\Big]C^\infty(K_{\ell,m,n};\mathbb{R}^+). \tag{2.39}$$

我们为每个面 $\mathrm{F}_\bullet \in \mathcal{F}(K_{\ell,m,n})$ 关联一个仿射泛函

$$\rho_\bullet : \mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2} \ni (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \mapsto \rho_\bullet(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in \mathbb{C}. \tag{2.40}$$

假设我们给定一些 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^N$ 以及 $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_{j,k} = \gamma_{k,j}\}_{1\le j<k\le N} \in \mathbb{C}^{N(N-1)/2}$。如果其中一个 (I) $j,k \in \{1,\dots,\ell\}$ (II) $j,k \in \{\ell+2,\dots,\ell+m+1\}$,

(III) $j,k\in\{\ell+m+3,\dots,N+2\}$

成立，那么令 k 表示$\{j,k\}$中较大的那个，

$$\rho_{j,k}=k-j+2\sum_{j'\le j_0<k_0\le k'}\gamma_{j_0,k_0},\tag{2.41}$$

其中，对于每个 $i\in\{j,k\}$，若 $i\in\{1,\dots,\ell\}$，则 $i'=i$；若 $i\in\{\ell+2,\dots,\ell+m+1\}$，则 $i'=i-1$；若 $i\in\{\ell+m+3,\dots,N+2\}$，则 $i'=i-2$。其他情形如下：

- 若 $j\in\{1,\dots,\ell+1\}$ 且 $k\in\{\ell+1,\dots,\ell+m+1\}$ 且 $j\neq k$，则

$$\rho_{j,k}=k-j-1+\sum_{i=j}^{\ell}\alpha_i+\sum_{i=\ell+2}^{k}\alpha_{i-1}+2\sum_{j\le j_0<k_0\le k-1}\gamma_{j_0,k_0}.\tag{2.42}$$

- 若 $j\in\{\ell+2,\dots,\ell+m+2\}$ 且 $k\in\{\ell+m+2,\dots,N+2\}$ 且 $j\neq k$，则

$$\rho_{j,k}=k-j-1+\sum_{i=j}^{\ell+m+1}\beta_{i-1}+\sum_{i=\ell+m+3}^{k}\beta_{i-2}+2\sum_{j-1\le j_0<k_0\le k-2}\gamma_{j_0,k_0}.\tag{2.43}$$

- 若 $j\in\{0,\dots,\ell\}$ 和 $k\in\{\ell+m+3,\dots,N+3\}$ 中至少有一个条件 $j\neq 0,k\neq N+3$ 成立，则

$$\begin{aligned}\rho_{j,k}=k-j-N-4&-\sum_{i=1}^{j}\alpha_i-\sum_{i=1}^{j}\beta_i-\sum_{i=k}^{N+2}\alpha_{i-2}-\sum_{i=k}^{N+2}\beta_{i-2}-2\sum_{j'=1}^{j}\sum_{i=1,i\neq j'}^{N}\gamma_{i,j'}\\&-2\sum_{k'=k-2}^{N}\sum_{i=1,i\neq k'-2}^{N}\gamma_{i,k'}+2\sum_{1\le j'<k'\le j}\gamma_{j',k'}+2\sum_{k-2\le j'<k'\le N}\gamma_{j',k'}+2\sum_{j'=1}^{j}\sum_{k'=k-2}^{N}\gamma_{j',k'}.\end{aligned}\tag{2.44}$$

命题 2.3. 给定任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{C}^N$ 和 $\boldsymbol{\gamma}=\{\gamma_{j,k}=\gamma_{k,j}\}_{1\le j<k\le N}\in\mathbb{C}^{N(N-1)/2}$，塞尔伯格型被积函数

$$\prod_{i=1}^{N}|x_i|^{\alpha_i}|1-x_i|^{\beta_i}\prod_{1\le j<k\le N}(x_k-x_j)^{2\gamma_{j,k}}|\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N|\in C^\infty(\triangle^\circ_{\ell,m,n};\Omega\triangle^\circ_{\ell,m,n})\tag{2.45}$$

提升为，经由 吹降映射 $\mathrm{bd}:K_{\ell,m,n}\to\triangle_{\ell,m,n}$，成为如下形式的可延拓密度

$$\Big[\prod_{\{j,k\}\in\mathcal{J}_{\ell,m,n}}x_{\mathrm{F}_{j,k}}^{\rho_{j,k}}\Big]\mu_{\ell,m,n}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}),\tag{2.46}$$

其中某个严格正光滑密度为 $\mu_{\ell,m,n}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\in C^\infty(K_{\ell,m,n};\Omega K_{\ell,m,n})$，完全取决于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$。■

证明。每个 $\rho_{j,k}$ 都是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$的仿射函数，因此只需检验 $2N+N(N-1)/2+1$ 种情形：其中一种情形是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$三者均为零；另外 $2N+N(N-1)/2$ 种情形中，三元组 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$ 遍历 $\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}$ 的一组基。记

$$\rho_{j,k}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=\rho_{j,k}^{(0)}+\rho_{j,k}^{(1)}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}),\tag{2.47}$$

其中 $\rho_{j,k}^{(0)}=\rho_{j,k}(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$ 以及 $\rho_{j,k}^{(1)}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=\rho_{j,k}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})-\rho_{j,k}^{(0)}$ 是 $\rho_{j,k}$ 的线性部分。因此，我们想要证明，提升到 $K_{\ell,m,n}$ 后，

$$|\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N|\in\Big[\prod_{\{j,k\}\in\mathcal{J}_{\ell,m,n}}x_{\mathrm{F}_{j,k}}^{\rho_{j,k}^{(0)}}\Big]C^\infty(K_{\ell,m,n};\Omega K_{\ell,m,n}),\tag{2.48}$$

$$\prod_{i=1}^{N}|x_i|^{\alpha_i}|1-x_i|^{\beta_i}\prod_{1\le j<k\le N}(x_k-x_j)^{2\gamma_{j,k}}\in\Big[\prod_{\{j,k\}\in\mathcal{J}_{\ell,m,n}}x_{\mathrm{F}_{j,k}}^{\rho_{j,k}^{(1)}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}\Big]C^\infty(K_{\ell,m,n};\mathbb{R}^+),\tag{2.49}$$

只需在 $\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}$ 的一组基上检验方程 (2.49)。

- 方程（2.48）只是对命题 2.2的重述。
- 对于 $\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}$ 的一组基，我们考察满足条件的 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$：除一个分量外，$\alpha_1$、……、$\alpha_N$、$\beta_1$、……、$\beta_N$、$\gamma_1$,2, $\cdots$ $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 的所有分量均为 0，并将那个分量设为 1。稍作代数运算后，便可由方程 (2.23) 至方程 (2.39) 得出结果。

□

令 $\mathtt{T}(\ell,\ m,\ n)$ 表示由连续子集组成的极大族 $\mathtt{I}\mathcal{I}\subsetneq\mathbb{Z}/(N+3)\mathbb{Z}$，使得

- $2\leq|\mathcal{I}|\leq N+1$ 对所有 $\mathcal{I}\in\mathtt{I}$,
- $0,\ \ell+1,\ \ell+m+2$ 中任意两个都不同时属于同一个 $\mathcal{I}\in\mathtt{I}$，并且
- 若 $\mathcal{I},\mathcal{I}'\in\mathtt{I}$ 满足 $\mathcal{I}\cap\mathcal{I}'\neq\varnothing$，则要么 $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{I}'$，要么 $\mathcal{I}'\subseteq\mathcal{I}$。

$\mathtt{T}(\ell,m,n)$ 的元素可理解为：有效地添加括号，将 $\mathbb{Z}/(N+3)\mathbb{Z}$ 中的元素组合在一起，同时不把 $0,\ell+1,\ell+m+2$ 中的任何元素组合在一起。$K_{\ell,m,n}$ 的极小面与 $\mathtt{T}(\ell,m,n)$ 的元素存在双射对应，其中

$$\mathrm{f}_{\mathtt{I}}=\bigcap_{\mathcal{I}(j,k)\in\mathtt{I}}\mathrm{F}_{j,k} \tag{2.50}$$

与 $\mathtt{I}$ 对应的面。

2.2. **结合子** $A_{\ell,m,n}$。现在我们定义带角流形 $A_{\ell,m,n}$，其中 $\ell,m,n\in\mathbb{N}$ 不全为零。我们从 $N=\ell+m+n$超立方体 $\square_N=[0,1]^N$ 开始。用 $(t_1,\dots,t_N)$ 对 $\square_N$ 参数化后，该超立方体可识别为

$$[-\infty,0]^{\ell}_{x_1,\dots,x_\ell}\times[0,1]^{m}_{x_{\ell+1},\dots,x_{\ell+m}}\times[1,\infty]^{n}_{x_{\ell+m+1},\dots,x_N} \tag{2.51}$$

通过坐标变换 $t_i=1/(1-x_i)$，其中 $x_i\in[-\infty,0]$ 和 $i\in\{1,\dots,\ell\}$ 以及 $t_i=(x_i-1)/x_i$，其中 $x_i\in[1,\infty]$ 和 $i\in\{\ell+m+1,\dots,N\}$。

$\square_N$的面用六元组（$S,\ Q,\ S',\ Q',\ S'',\ Q''$）标记，这些六元组由（可能为空的）子集 $S,\ Q\subseteq\{1,\dots,\ell\}$、$S',\ Q'\subseteq\{\ell+1,\dots,\ell+m\}$和 $S'',\ Q''\subseteq\{\ell+m+1,\dots,N\}$ 组成，且满足$S\cap Q=S'\cap Q'=S''\cap Q''=\varnothing$。令

$$\mathrm{F}_{S,Q,S',Q',S'',Q''}=\left\{(t_1,\dots,t_N)\in\square_N:\ \begin{array}{c}j\in S\cup S'\cup S''\Rightarrow t_j=0\\ j\in Q\cup Q'\cup Q''\Rightarrow t_j=1\end{array}\right\}. \tag{2.52}$$

例如，$\square_N=\mathrm{F}_{\varnothing,\ \varnothing,\ \varnothing,\ \varnothing,\ \varnothing,\ \varnothing}$。

现在令 $\mathcal{F}_{\ell,m,n}=\mathcal{F}_{\ell,m,n}(\square)$ 表示由以下条件定义的面族：

$$\mathcal{F}_{\ell,m,n}=(\{\mathrm{F}_{S,\varnothing,\varnothing,\varnothing,\varnothing,Q''}\}_{S,Q''}\cup\{\mathrm{F}_{\varnothing,Q,S',\varnothing,\varnothing,\varnothing}\}_{Q,S'}\cup\{\mathrm{F}_{\varnothing,\varnothing,\varnothing,Q',S'',\varnothing}\}_{Q',S''})\backslash\{\square_N\} \tag{2.53}$$

其中 $S,S',S'Q,Q',Q''$ 遍历上述所有子集。对于每个 $d\in\{0,\dots,N-1\}$，令 $\mathcal{F}_{\ell,m,n;d}$表示 $\mathcal{F}_{\ell,m,n}$ 中维数为 d 的元素集合。于是，$A_{\ell,m,n}$ 由以下迭代爆破定义：

$$A_{\ell,m,n}=[\square_N;\mathcal{F}_{\ell,m,n}]=[\square_N;\mathcal{F}_{\ell,m,n;0};\cdots;\mathcal{F}_{\ell,m,n;N-1}]. \tag{2.54}$$

与上一节一样，我们应当检查：对于每个 $d=1,\dots,N$，在已经针对 $d_0<d$ 吹起$\mathcal{F}_{\ell,m,n;d_0}$ 之后，所有 $\mathrm{F}\in\mathcal{F}_{\ell,m,n;d}$的内部提升的闭包的爆破彼此可交换。理解这一点的一种方法是将其拆分

$$\square_N=\bigcup_{S,S',S''}\square_{\ell,m,n}(S,S',S''), \tag{2.55}$$

其中，S遍历$\{1,\dots,\ell\}$的所有子集，S'遍历$\{\ell+1,\dots,\ell+m\}$的所有子集，S''遍历$\{\ell+m+1,\dots,N\}$ 的所有子集，并且

$$\square_{\ell,m,n}(S,S',S'')=\left\{(t_1,\dots,t_N)\in\square_N:\ \begin{array}{c}i\in S\cup S'\cup S''\Rightarrow t_i\in[0,2/3)\\ i\notin S\cup S'\cup S''\Rightarrow t_i\in(1/3,1]\end{array}\right\}. \tag{2.56}$$

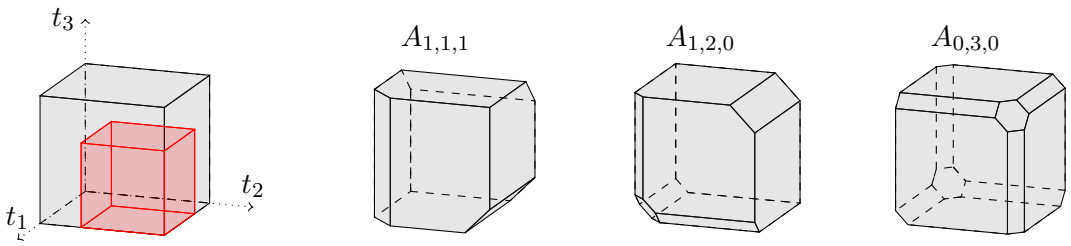


图 7. 三维立方体 $\square_3$ 及其三次爆破 $A_{1,1,1} = K_{1,1,1}$，$A_{1,2,0}$，$A_{0,3,0}$。$\square_{\ell,m,n}(S, S', S'')$ 是对应于 $\square_3$ 的八个顶点的八个子立方体。其中一个立方体以红色表示。

一旦我们确认对$\mathcal{F}_{\ell,m,n;0}, \cdots, \mathcal{F}_{\ell,m,n;d-1}$进行膨胀是可行的，那么

$$[\square_N; \mathcal{F}_{\ell,m,n;0}; \cdots; \mathcal{F}_{\ell,m,n;d-1}] = \bigcup_{S,S',S''} [\square_{\ell,m,n}(S, S', S''); \mathcal{F}_{\ell,m,n;0}; \cdots; \mathcal{F}_{\ell,m,n;d-1}] \tag{2.57}$$

自然地，若右侧有定义，则左侧也有定义。因此，只需验证爆破 $[\square_{\ell,m,n}(S, S', S''); \mathcal{F}_{\ell,m,n;0}; \cdots; \mathcal{F}_{\ell,m,n;d}]$ 均有定义。为此，令

$$\square_{\ell,m,n}(S, S', S'') = \left(\left[0, \frac{2}{3}\right)^{S}_{\{t_i\}_{i\in S}} \times \left(\frac{1}{3}, 1\right]^{(S'')^{\complement}}_{\{t_i\}_{i\in (S'')^{\complement}}}\right) \times \left(\left[0, \frac{2}{3}\right)^{S'}_{\{t_i\}_{i\in S'}} \times \left(\frac{1}{3}, 1\right]^{S^{\complement}}_{\{t_i\}_{i\in S^{\complement}}}\right)$$
$$\times \left(\left[0, \frac{2}{3}\right)^{S''}_{\{t_i\}_{i\in S''}} \times \left(\frac{1}{3}, 1\right]^{(S')^{\complement}}_{\{t_i\}_{i\in (S')^{\complement}}}\right) \tag{2.58}$$

并注意，爆破的做法就是在三个因子上分别进行全边界（tb）爆破[HMM97] 。（注意，这不同于对这些因子的乘积进行全边界爆破。）这里，

- $S^{\complement} = \{1, \ldots, \ell\} \backslash S$,
- $(S')^{\complement} = \{\ell + 1, \ldots, \ell + m\} \backslash S'$,
- and $(S'')^{\complement} = \{\ell + m + 1, \ldots, N\} \backslash S''$.

因此，

$$A_{\ell,m,n} = \bigcup_{S,S',S''} \Big[\left(\left[0, \frac{2}{3}\right)^{S} \times \left(\frac{1}{3}, 1\right]^{(S'')^{\complement}}\right)_{\mathrm{tb}} \times \left(\left[0, \frac{2}{3}\right)^{S'} \times \left(\frac{1}{3}, 1\right]^{S^{\complement}}\right)_{\mathrm{tb}} \times \left(\left[0, \frac{2}{3}\right)^{S''} \times \left(\frac{1}{3}, 1\right]^{(S')^{\complement}}\right)_{\mathrm{tb}} \Big]. \tag{2.59}$$

$A_{\ell,\ m,\ n}$ 的面与$\mathcal{F}_{\ell,\ m,\ n}$的元素构成双射。我们按如下方式标记$A_{\ell,\ m,\ n}$ 的面：

- 对于 $S \subseteq \{1, \ldots, \ell\}$ 和 $Q \subseteq \{\ell + m + 1, \ldots, N\}$，与 $\mathrm{F}_{S,\ \varnothing,\ \varnothing,\ \varnothing,\ \varnothing,\ Q}$ 对应的面标记为 $\mathrm{F}_{S,\ Q;\ \infty} = \mathrm{F}_{Q,\ S;\ \infty}$,
- 对于 $Q \subseteq \{1, \ldots, \ell\}$ 和 $S \subseteq \{\ell + 1, \ldots, \ell + m\}$，与 $\mathrm{F}_{\varnothing,\ Q,\ S,\ \varnothing,\ \varnothing,\ \varnothing}$ 对应的面标记为 $\mathrm{F}_{S,\ Q;\ 0} = \mathrm{F}_{Q,\ S;\ 0}$</style}，以及
- 对于 $S \subseteq \{\ell+m+1, \ldots, N\}$和 $Q \subseteq \{\ell+1, \ldots, \ell+m\}$，与 $\mathrm{F}_{\varnothing,\ \varnothing,\ \varnothing,\ Q,\ S,\ \varnothing}$对应的面标记为 $\mathrm{F}_{S,\ Q;\ 1} = \mathrm{F}_{Q,\ S}$;1</style}。

此处， S， Q 不能同时为空。

对于任意不全为空的子集 $S \subseteq \{1, \ldots, \ell\}$，$Q \subseteq \{\ell + 1, \ldots, \ell + m\}$，$R \subseteq \{\ell + m + 1, \ldots, N\}$，令 $\mathrm{forg} : \square_{\ell,m,n} \to \square_{|S|,|Q|,|R|}$ 表示遗忘坐标 x_i 的遗忘映射

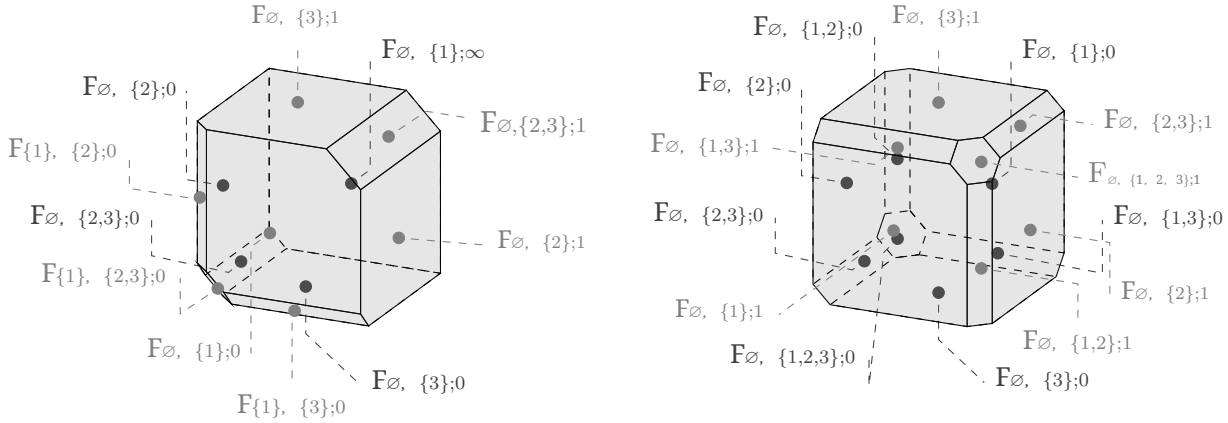


图 8. $A_{1,\ 2,\ 0}$ 的十一条面，以及 $A_{0,\ 3,\ 0}$的十四条面。

$i \notin S \cup Q \cup R$，那么 forg 可提升为一个光滑 b-映射

$$\overline{\mathsf{forg}} : A_{\ell,m,n} \to A_{|S|,|Q|,|R|}, \tag{2.60}$$

并且，对于 $A_{|S|,\ |Q|,\ |R|}$ 的任意一个面 F，拉回 $\mathsf{forg}^* \overline{x_{\mathrm{F}}}$ 在每个满足以下条件的面 F_0 处都以一阶消失

$$F_0 \subseteq \overline{\mathsf{forg}}^{-1}(\mathrm{F}). \tag{2.61}$$

这就是，$m,\ n$ 的“泛性质”。根据方程 (2.59) 中的分解，它可由乘积的全边界爆破所具有的相应泛性质推出，而后者本质上由命题B.2给出。

命题 2.4。假设 μ 是 $\square_{\ell,\ m,\ n}$ 上的严格正光滑密度。那么，μ 在 $A_{\ell,\ m,\ n}$ 上的提升具有如下形式

$$\Big[\prod_{\substack{S\subseteq\{1,\dots,\ell\}\\ Q\subseteq\{\ell+m+1,\dots,N\}}} x_{\mathrm{F}_{S,Q;\infty}}^{|S\cup Q|-1}\Big]\Big[\prod_{\substack{S\subseteq\{1,\dots,\ell\}\\ Q\subseteq\{\ell+1,\dots,\ell+m\}}} x_{\mathrm{F}_{S,Q;0}}^{|S\cup Q|-1}\Big]\Big[\prod_{\substack{S\subseteq\{\ell+1,\dots,\ell+m\}\\ Q\subseteq\{\ell+m+1,\dots,N\}}} x_{\mathrm{F}_{S,Q;1}}^{|S\cup Q|-1}\Big]\overline{\mu} \tag{2.62}$$

对于严格正光滑密度 $\mu \in C^\infty(A_{\ell,\ m,\ \overline{n}};\ \Omega A_{\ell,\ m,\ n})$ 于 $A_{\ell,\ m,\ n}$ 上。 ■

为方便记号，对每个 $x_0 \in \{0,\ 1,\ \infty\}$，我们设定 $x_{\mathrm{F}_{\varnothing,\ \varnothing;x_0}} = 1$.

证明。接下 来的结论可通过对吹起次数归纳得到，与命题 2.1 的证明相同 . □

命题 2.5。 $\mathbb{R}^N$ 上的勒贝格测度在 $\square^\circ_{\ell,\ m,\ n}$ 上定义了严格正光滑密度，其形式为

$$\Big[\prod_{j=1}^{\ell}(1-x_j)^2\Big]\Big[\prod_{j=\ell+m+1}^{N} x_j^2\Big]\mu \tag{2.63}$$

对于某个定义在 $\square_{\ell,m,n}$ 上的严格正光滑密度 $\mu \in C^\infty(\square_{\ell,m,n};\ \Omega\square_{\ell,m,n})$. ■

证明。 由与命题 2.2 中相同的计算可得。 □

命题 2.6。 对于每一对不同的 $i,j \in \{1,\dots,N\}$，满足以下条件之一： $i,j \in \{1,\dots,\ell\}$,$i,j \in \{\ell+1,\dots,\ell+m\}$；或 $i,j \in \{\ell+m+1,\dots,N\}$，集合 $H_{j,k} =$ 闭包$_{A_{\ell,m,n}}\{p \in \square^\circ_{\ell,m,n} :\ x_j = x_k\}$ 是 $A_{\ell,m,n}$ 的 p-子流形。 ■

参见 [MS08，§1。2]，了解“p-子流形”的定义。

证明。考虑邻域 $\mathrm{bd}^{-1}(\square_{\ell,m,n}(S,S',S''))\subseteq A_{\ell,m,n}$。如果 j,k 中一个位于 $S\cup S'\cup S''$ 中而另一个不在其中，那么 $H_{j,k}$ 与 $\mathrm{bd}^{-1}(\square_{\ell,m,n}(S,S',S''))$ 的交是一个与边界不相交的子流形，因此是一个 p-子流形。因此，只需考虑 $j,k\in S\cup S'\cup S''$ 的情形（两者均不在 $S\cup S'\cup S''$ 中的情形类似）。为简化记号，我们只考虑 $j,k\in S'$ 的情形。于是，

$$H_{j,k}\cap \mathrm{bd}^{-1}(\square_{\ell,m,n}(S,S',S''))=$$
$$\Big(\Big[0,\frac{2}{3}\Big)^{S}\times\Big(\frac{1}{3},1\Big]^{(S'')^{\complement}}\Big)_{\mathrm{tb}}\times\Big(\tilde{H}_{j,k}\cap\Big(\Big[0,\frac{2}{3}\Big)^{S'}\times\Big(\frac{1}{3},1\Big]^{S^{\complement}}\Big)_{\mathrm{tb}}\Big)\times\Big(\Big[0,\frac{2}{3}\Big)^{S''}\times\Big(\frac{1}{3},1\Big]^{(S')^{\complement}}\Big)_{\mathrm{tb}},\quad(2.64)$$

其中 $\tilde{H}_{j,k}$ 是 $\{x_j=x_k\}$ 在 $([0,2/3)^{S'}\times(1/3,1]^{S^{\complement}})_{\mathrm{tb}}$ 中的闭包，它是一个 p-子流形 [MS08]（这也可由命题 B.1 得出）。因此，$H_{j,k}\cap\mathrm{bd}^{-1}(\square_{\ell,m,n}(S,S',S''))$ 是 $\mathrm{bd}^{-1}(\square_{\ell,m,n}(S,S',S''))$ 的一个 p-子流形。由于邻域 $\mathrm{bd}^{-1}(\square_{\ell,m,n}(S,S',S''))$ 覆盖 $A_{\ell,m,n}$，结论得证。□

这一结果在图9中展示。

现在我们记录将 x_i 和 $1-x_i$ 提升到 $A_{\ell,\ m,\ n}$ 的结果；这些结果可由泛性质推出。

- 若 $i\in\{1,\dots,\ell\}$，则

$$-x_i\in\Big[\prod_{\substack{i\in Q\subseteq\{1,\dots,\ell\}\\ S\subseteq\{\ell+m+1,\dots,N\}}}x_{\mathrm{F}_{S,Q;\infty}}^{-1}\Big]\Big[\prod_{\substack{i\in S\subseteq\{1,\dots,\ell\}\\ Q\subseteq\{\ell+1,\dots,\ell+m\}}}x_{\mathrm{F}_{S,Q;0}}\Big]C^{\infty}(A_{\ell,m,n};\mathbb{R}^{+}),\quad(2.65)$$

$$(1-x_i)\in\Big[\prod_{\substack{i\in Q\subseteq\{1,\dots,\ell\}\\ S\subseteq\{\ell+m+1,\dots,N\}}}x_{\mathrm{F}_{S,Q;\infty}}^{-1}\Big]C^{\infty}(A_{\ell,m,n};\mathbb{R}^{+}).\quad(2.66)$$

- 若 $i\in\{\ell+1,\dots,\ell+m\}$，则

$$x_i\in\Big[\prod_{\substack{S\subseteq\{1,\dots,\ell\}\\ i\in Q\subseteq\{\ell+1,\dots,\ell+m\}}}x_{\mathrm{F}_{S,Q;0}}\Big]C^{\infty}(A_{\ell,m,n};\mathbb{R}^{+}),\quad(2.67)$$

$$(1-x_i)\in\Big[\prod_{\substack{i\in S\subseteq\{\ell+1,\dots,\ell+m\}\\ Q\subseteq\{\ell+m+1,\dots,N\}}}x_{\mathrm{F}_{S,Q;1}}\Big]C^{\infty}(A_{\ell,m,n};\mathbb{R}^{+}).\quad(2.68)$$

- 若 $i\in\{\ell+m+1,\dots,N\}$，则

$$x_i\in\Big[\prod_{\substack{i\in S\subseteq\{\ell+m+1,\dots,N\}\\ Q\subseteq\{1,\dots,\ell\}}}x_{\mathrm{F}_{S,Q;\infty}}^{-1}\Big]C^{\infty}(A_{\ell,m,n};\mathbb{R}^{+}),\quad(2.69)$$

$$-(1-x_i)\in\Big[\prod_{\substack{S\subseteq\{\ell+1,\dots,\ell+m\}\\ i\in Q\subseteq\{\ell+m+1,\dots,N\}}}x_{\mathrm{F}_{S,Q;1}}\Big]\Big[\prod_{\substack{i\in S\subseteq\{\ell+m+1,\dots,N\}\\ Q\subseteq\{1,\dots,\ell\}}}x_{\mathrm{F}_{S,Q;\infty}}^{-1}\Big]C^{\infty}(A_{\ell,m,n};\mathbb{R}^{+}).\quad(2.70)$$

设 $\mathrm{I}_1=\{1,\dots,\ell\}$, $\mathrm{I}_2=\{\ell+1,\dots,\ell+m\}$ 和 $\mathrm{I}_3=\{\ell+m+1,\dots,N\}$。对于 $j,k\in\mathrm{I}_\bullet$，若它们对应相同的 $\bullet\in\{1,2,3\}$，则令 $y_{j,k}$ 表示 $H_{j,k}$ 的一个定义函数，并选择其符号，使其与 x_j-x_k 的符号相同。于是，对于所有互不相同的 $j,k\in\{1,\dots,N\}$，

$$(x_j-x_k)\in Y_{j,k}X_{j,k}C^{\infty}(A_{\ell,m,n};\mathbb{R}^{+}),\quad(2.71)$$

其中 $X_{j,\ k} = X_{k,\ j}$ 由下式给出

$$X_{j,k} = \begin{cases} \Big[\prod_{\substack{S\subseteq\mathcal{I}_3\\ j\in Q\subseteq\mathcal{I}_1 \text{ or } k\in Q\subseteq\mathcal{I}_1}} x_{\mathrm{F}_{S,Q;\infty}}^{-1}\Big]\Big[\prod_{\substack{j,k\in S\subseteq\mathcal{I}_1\\ Q\subseteq\mathcal{I}_2}} x_{\mathrm{F}_{S,Q;0}}\Big] & (j,k\in\mathcal{I}_1),\\ \Big[\prod_{\substack{S\subseteq\mathcal{I}_1\\ j,k\in Q\subseteq\mathcal{I}_2}} x_{\mathrm{F}_{S,Q;0}}\Big]\Big[\prod_{\substack{j,k\in S\subseteq\mathcal{I}_2\\ Q\subseteq\mathcal{I}_3}} x_{\mathrm{F}_{S,Q;1}}\Big] & (j,k\in\mathcal{I}_2),\\ \Big[\prod_{\substack{S\subseteq\mathcal{I}_2\\ j,k\in Q\subseteq\mathcal{I}_3}} x_{\mathrm{F}_{S,Q;1}}\Big]\Big[\prod_{\substack{j\in S\subseteq\mathcal{I}_3 \text{ or } k\in S\subseteq\mathcal{I}_3\\ Q\subseteq\mathcal{I}_1}} x_{\mathrm{F}_{S,Q;\infty}}^{-1}\Big] & (j,k\in\mathcal{I}_3),\\ \Big[\prod_{\substack{j\in S\subseteq\mathcal{I}_1\\ Q\subseteq\mathcal{I}_3}} x_{\mathrm{F}_{S,Q;\infty}}^{-1}\Big]\Big[\prod_{\substack{j\in S\subseteq\mathcal{I}_1\\ k\in Q\subseteq\mathcal{I}_2}} x_{\mathrm{F}_{S,Q;0}}\Big] & (j\in\mathcal{I}_1,k\in\mathcal{I}_2),\\ \Big[\prod_{\substack{S\subseteq\mathcal{I}_1\\ k\in Q\subseteq\mathcal{I}_3}} x_{\mathrm{F}_{S,Q;\infty}}^{-1}\Big]\Big[\prod_{\substack{j\in S\subseteq\mathcal{I}_2\\ k\in Q\subseteq\mathcal{I}_3}} x_{\mathrm{F}_{S,Q;1}}\Big] & (j\in\mathcal{I}_2,k\in\mathcal{I}_3),\\ \Big[\prod_{\substack{S\subseteq\mathcal{I}_1,Q\subseteq\mathcal{I}_3\\ \{j,k\}\cap S\cup Q\neq\varnothing}} x_{\mathrm{F}_{S,Q;\infty}}^{-1}\Big] & (j\in\mathcal{I}_3,k\in\mathcal{I}_1), \end{cases} \tag{2.72}$$

and $Y_{j,\ k} = y_{j,\ k}$ 若对于某个 $\bullet\in\{1、2、3\}$，有 $j,\ k\in\mathcal{I}_\bullet$，而 $Y_{j,\ k} = \pm 1$ 否则 e.

我们为每个面 $\mathrm{F}_\bullet\in\mathcal{F}(A_{\ell,\ m,\ n})$ 关联一个仿射泛函

$$\varrho_\bullet : \mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}\ni(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\mapsto\varrho_{\mathrm{F}_\bullet}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\in\mathbb{C}. \tag{2.73}$$

设给定某个 $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}\in\mathbb{C}^N$ 和 $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_{j,\ k} = \gamma_{k,\ j}\}_{1\leq j<k\leq N}\in\mathbb{C}^{N(N-1)/2}$。那么，$\varrho_\bullet(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma})$ 定义如下：

- 对于 $S\subseteq\{1、\ldots、\ \ell\}$ 以及 $Q\subseteq\{\ell+1、\ldots、\ \ell+m\}$，

$$\varrho_{S,Q;0} = |S| + |Q| - 1 + \sum_{j\in S\cup Q}\alpha_j + 2\sum_{\substack{j,k\in S\cup Q\\ j>k}}\gamma_{j,k}. \tag{2.74}$$

- For $S\subseteq\{\ell+1,\ldots,\ell+m\}$ and $Q\subseteq\{\ell+m+1,\ldots,N\}$,

$$\varrho_{S,Q;1} = |S| + |Q| - 1 + \sum_{j\in S\cup Q}\beta_j + 2\sum_{\substack{j,k\in S\cup Q\\ j>k}}\gamma_{j,k}. \tag{2.75}$$

- 对于 $S\subseteq\{\ell+m+1、\ldots、\ N\}$ 以及 $Q\subseteq\{1、\ldots、\ \ell\}$，

$$\varrho_{S,Q;\infty} = -|S| - |Q| - 1 - \sum_{j\in S\cup Q}\alpha_j - \sum_{j\in S\cup Q}\beta_j - 2\sum_{\substack{j>k\\ j\in S\cup Q \text{ or } k\in S\cup Q}}\gamma_{j,k}. \tag{2.76}$$

然后，令 $\Delta\subset\square_{\ell,m,n}$ 由 $\Delta = \cup_{\bullet=1}^3\cup_{j\neq k,j,k\in\mathcal{I}_\bullet}\{x_j = x_k\}$定义：

命题 2.7。 给定任意 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{C}^N$ 和 $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_{j,k} = \gamma_{k,j}\}_{1\leq j<k\leq N}\in\mathbb{C}^{N(N-1)/2}$,

$$\prod_{i=1}^N|x_i|^{\alpha_i}|1-x_i|^{\beta_i}\prod_{1\leq j<k\leq N}(x_k-x_j+i0)^{2\gamma_{j,k}}|\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N|\in C^\infty(\square^\circ_{\ell,m,n}\backslash\Delta;\mathbb{C}\otimes\Omega(\square^\circ_{\ell,m,n}\backslash\Delta)) \tag{2.77}$$

通过吹降映射 $\mathrm{bd}: A_{\ell,m,n}\to\square_{\ell,m,n}$提升为

$$\Big[\prod_{\substack{S\subseteq\{1,\ldots,\ell\}\\ Q\subseteq\{\ell+1,\ldots,\ell+m\}}} x_{\mathrm{F}_{S,Q;0}}^{\varrho_{S,Q;0}}\Big]\Big[\prod_{\substack{S\subseteq\{\ell+1,\ldots,\ell+m\}\\ Q\subseteq\{\ell+m+1,\ldots,N\}}} x_{\mathrm{F}_{S,Q;1}}^{\varrho_{S,Q;1}}\Big]\Big[\prod_{\substack{S\subseteq\{\ell+m+1,\ldots,N\}\\ Q\subseteq\{1,\ldots,\ell\}}} x_{\mathrm{F}_{S,Q;\infty}}^{\varrho_{S,Q;\infty}}\Big]\Big[\prod_{1\leq j<k\leq\ell}(y_{k,j}+i0)^{2\gamma_{j,k}}\Big]$$
$$\times\Big[\prod_{\ell+1\leq j<k\leq\ell+m}(y_{k,j}+i0)^{2\gamma_{j,k}}\Big]\Big[\prod_{\ell+m+1\leq j<k\leq N}(y_{k,j}+i0)^{2\gamma_{j,k}}\Big]\mu_{\ell,m,n} \tag{2.78}$$

对于某个严格正光滑密度 $\mu_{\ell,m,n}\in C^\infty(A_{\ell,m,n};\Omega A_{\ell,m,n})$ 在 $A_{\ell,m,n}$ 上，其完全取决于 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$。■

证明。 由前面的计算以及命题 2.5可得 . □

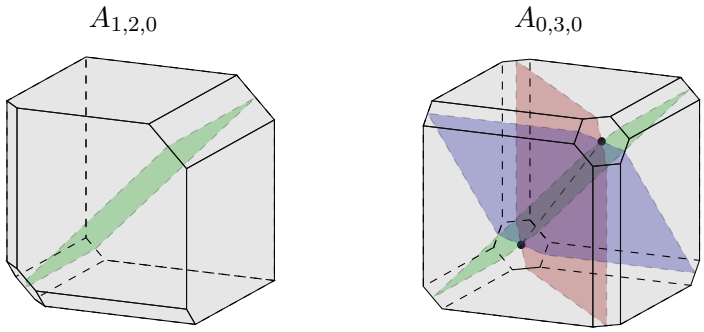


图 9。集合 $H_{j,k}\in\mathsf{P}$ 位于 $A_{1,2,0}$ 和 $A_{0,3,0}$ 中。图中展示了 $H_{1,2}$, $H_{1,3}$ 和 $H_{2,3}$，其中坐标轴的定向与图 7 相同。在 $A_{0,3,0}$ 中，交 $H_{1,2}\cap H_{1,3}\cap H_{2,3}$ 用一条额外的虚线标出。

若 M 是可定向流形带角，我们称由余维均为一的内部 p-子流形构成的集合$\mathcal{P}$ 为一致可定向的，如果我们能够为每个子流形选取一个定向，使得对于任意 $p\in M$，该子集

$$\sum_{P\in\mathcal{P},p\in P} {}^{++}N_p^*P\subset T_p^*M \tag{2.79}$$

不包含零，其中 ${}^{++}N^*P\subset{}^{+}N^*P\subset T^*M$ 是诱导的正向定向余法丛（不含零截面），而 T^*M 是 M 的可延拓余切丛。无论是否满足这一条件，都不取决于 M 的定向选择。选择定义函数$\{y_P\}_{P\in\mathcal{P}}\subset C^\infty(M;\mathbb{R})$，使其对应于 $P\in\mathcal{P}$，从而

$$\mathrm{d}y_P(p)\in{}^{+}N_p^*P \tag{2.80}$$

对于每个 $p\in P$，我们称 $\{y_P\}_{P\in\mathcal{P}}$为方向一致的定义函数。

例子。在 $\square^\circ_{0,3,0}=(0,1)^3$,中，考虑 $\mathcal{P}=\{H^\circ_{1,2},H^\circ_{2,3},H^\circ_{3,1}\}$。函数 x_2-x_1、x_3-x_2、x_1-x_3并非 方向一致的定义函数，因为

$$0=\mathrm{d}(x_2-x_1)+\mathrm{d}(x_3-x_2)+\mathrm{d}(x_1-x_3), \tag{2.81}$$

但 x_2-x_1、x_3-x_2 和 x_3-x_1 是。 ■

Let

$$\mathcal{P}=\{H_{j,k}\}_{j,k\in\mathcal{I}_1,j\neq k}\cup\{H_{j,k}\}_{j,k\in\mathcal{I}_2,j\neq k}\cup\{H_{j,k}\}_{j,k\in\mathcal{I}_3,j\neq k}. \tag{2.82}$$

命题 2.8。 由方程(2.82) 定义的集合 P 是可定向的，而 $\{y_{k,j}\}_{j<k}$ 是一组方向一致的定义函数。■

证明。 我们将证明，对于任意 $p\in A_{\ell,m,n}$ 以及 $\{\lambda_{j,k}\}_{p\in H_{j,k}\in\mathcal{P}}\in[0,\infty)$，若 1-形式

$$\sum_{H_{j,k}\in\mathcal{P}\ \text{s.t.}\ p\in H_{j,k}}\lambda_{j,k}\mathrm{d}y_{k,j}\in\Omega^1(A_{\ell,m,n}) \tag{2.83}$$

在 p 处为零，则对所有满足 $p\in H_j$ 的 $H_{j,k}\in\mathcal{P}$，都有 $\lambda_{j,k}=0$。换言之，我们要证明：若 P 是 $\{1,\dots,N\}$ 的任意一个由非空子集 $S\subset\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,\mathcal{I}_3$, 构成的划分，那么对于任意不全为零的 $\{\lambda_{j,k}\}_{j,k\in S\in\mathsf{P},j<k}\subset\mathbb{R}^{\geq0}$，

$$\sum_{\substack{j,k\in S\in\mathsf{P}\\ j<k}}\lambda_{j,k}\,\mathrm{d}y_{k,j} \tag{2.84}$$

在 $\cap_{j,\ k\in S\in \mathsf{P},\ j<k} H_{j,\ k}$ 上不为零。若 P 只由单元素集合构成，则结论显然成立，因此只需考虑 P 中至少有一个成员的基数为 >1 的情形。

这对于 $p \in \square^\circ_{\ell,\ m,\ n}$ 显然成立，因为在 $\square^\circ_{\ell,\ m,\ n} \cap H_{j,\ k}$ 上，$\mathrm{d}y_{k,\ j} \propto \mathrm{d}x_k - \mathrm{d}x_j$ 的比例系数为正。事实上，根据上述结果，

$$x_k - x_j = f_{j,k} y_{k,j} \tag{2.85}$$

存在某个 $f_{j,\ k} \in C^\infty(A_{\ell,\ m,\ n}; \mathbb{R}^{\geq 0})$，它在内部处处非零，因此

$$\mathrm{d}y_{k,j} = f_{j,k}^{-1}(\mathrm{d}x_k - \mathrm{d}x_j) - f_{j,k}^{-1} y_{k,j}\, \mathrm{d}f_{j,k} \tag{2.86}$$

在 $\square^\circ_{\ell,\ m,\ n}$ 中，它等于在 $H_{j,\ k} \cap \square^\circ_{\ell,\ m,\ n}$ 上的 $f_{j\,k,}^{-1}(\mathrm{d}x_k - \mathrm{d}x_j)$，如所述。对于 $p \in \partial A_{\ell,\ m,\ n}$，此论证不适用，因为 $f_{j,\ k}$ 可能在此处消失。

利用齐次性论证可以证明，对于任意 $p \in \partial A_{\ell,\ m,\ n}$，都存在一个管状邻域 $T\colon U \to U_0$，它是 F_0 中 p 的某个邻域 $U_0 \subset F_0$ 的管状邻域，其中 F_0 是包含 p 的最小面，并且此邻域与各个 $P \in \mathcal{P}$ 的交 $U \cap P$ 都是垂直子集，即具有某个 $B \subset U_0$ 对应的 $T^{-1}(B)$ 形式。这意味着，如果上述 1-形式在 p 处为零，那么它在该管状邻域位于 p 上的纤维上也为零，因此在 $\square^\circ_{\ell,\ m,\ n} \cap (\bigcap_{H_{j,\ k} \ni p} H_{j,\ k})$ 上某处也为零。

□

我们用一个例子说明前面的论证。考虑 ℓ、m、n 中只有 m 非零的情形，并考虑 $p \in \cap_{H_j、\ k \in \mathsf{P}} H_{j、\ k}$。集合 $\cap_{H_j、\ k \in \mathsf{P}} H_{j、\ k} \subset A_{0、\ N},\mathbf{0}$（即“小对角线”）是一个 p-子流形，它的位置远离构造 $A_{0、\ N},\mathbf{0}$ 时所涉及的所有爆破，只有最初的两次例外。在这个 p-子流形附近，$A_{0、\ N},\mathbf{0}$ 与 $[\square_{0,N,0}, \{\mathbf{0}\}, \{\mathbf{1}\}]$，规范地微分同胚，后者是对 N 维立方体两个相对顶点进行膨胀的结果。我们考虑膨胀

$$\{\mathbf{0}\} = \mathrm{F}_{\varnothing,\varnothing,\{1,\ldots,N\},\varnothing,\varnothing,\varnothing,} \tag{2.87}$$

附近的情形，而相对顶点附近的情形类似。在该次膨胀的前面的内部，我们可以用 $\varrho = x_1$ 作为边界定义函数，并用 $\hat{}x_j = x_j/x_1$ 作为 $j = 2, \ldots, N$ 的坐标，以参数化该面本身。用这些坐标表示，

$$\cap_{H_{j,k} \in \mathcal{P}} H_{j,k} = \{\hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_N = 1\} \tag{2.88}$$

在局部情形下，对于 $1 \leq j < k \leq N$，我们可以将 $y_{k,j} = \tilde{y}_{k,j} C^\infty(A_{0,N,0}; \mathbb{R}^+)$ 写成对于 $\tilde{y}_{k,j}$ 局部由 $\tilde{y}_{k,j} = \varrho^{-1}(x_k - x_j) = \hat{}x_k - \hat{}x_j$ 给出，其中 $\hat{}x_1 = 1$。这满足

$$\mathrm{d}\tilde{y}_{k,j} = \begin{cases} \mathrm{d}\hat{x}_k & (j = 1), \\ \mathrm{d}\hat{x}_k - \mathrm{d}\hat{x}_j & (j \neq 1). \end{cases} \tag{2.89}$$

因此，如果 $\lambda_{k,j} \geq 0$，那么对于所有 k, j，有 $\sum_{1 \leq j < k \leq N} \lambda_{j,k} \mathrm{d}\tilde{y}_{k,j} = 0 \Rightarrow \lambda_{j,k} = 0$。由于 $y_{k,j}$ 与 $\tilde{y}_{k,\ j}$ 相差一个（光滑的）正因子，所以 $y_{k,j}$ 在 $\cap_{H_{j,k} \in \mathcal{P}} H_{j,k}$ 上也具有相同的性质。

利用命题 B.1 （采用分解方程（2.59））可以给出一个更直接的论证。具体而言，利用方程（2.59），结论可由 $[0,1)^N_{\mathrm{tb}}$ 的相应结果推出。给定任意 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$，考虑命题 $\varrho、\ \hat{}x_{\sigma(2)}、\ \cdots、\ \hat{}x_{\sigma(N)}$ 中定义的坐标 B.1，当 C^∞-图册中的 σ 遍历所有排列时，这些坐标给出了一个 p-图册。在这些坐标系中，相关的 p-子流形在局部为

$$H_{j,k} = \{\hat{x}_{j+1} \cdots \hat{x}_k = 1\} \subset [0,1)^N_{\mathrm{tb}}, \tag{2.90}$$

因此，具有定义函数 $y_{k,\ j} = -1 + \hat{}x_{j+1} \ldots \hat{}x_k$。这满足

$$\mathrm{d}y_{k,j} = \sum_{i=j+1}^{k} \frac{\mathrm{d}\hat{x}_i}{\hat{x}_i} \tag{2.91}$$

在 $H_{j,\ k}$。由方程右侧定义的 1-形式 $\omega_{j,\ k}=\sum_{i=j+1}^{k}\hat{}\,x_i^{-1}\mathrm{d}\hat{}\,x_i$（2.91）满足

$$\{\lambda_{j,k}\}_{1\le j<k\le N \text{ and } j,k\in S\in \mathtt{P}}\subset[0,\infty) \text{ and } \sum_{1\le j<k\le N \text{ and } j,k\in S\in\mathtt{P}}\lambda_{j,k}\omega_{j,k}=0 \\ \Rightarrow \lambda_{j,k}=0 \text{ for all } j<k \text{ in } S\in\mathtt{P}, \quad (2.92)$$

由此可得该结果。

令 $\Sigma\mathtt{T}(\ell,\ m,\ n)$ 表示由有序对 $(x_0,\ S)$ 构成的极大族集合 $\mathtt{I}$，其中 $x_0\in\{0,\ 1,\ \infty\}$ 且非空 $S\subseteq\{1,\ \ldots\ldots,\ N\}$，满足

- 若 $(x_0,\ S),\ (x_0,\ Q)\in\mathtt{I}$，则 $S\subseteq Q$ 或 $Q\subseteq S$，
- $$(x_0,S)\in\mathtt{I}\Rightarrow\begin{cases}S\cap\mathcal{I}_3=\varnothing & (x_0=0),\\ S\cap\mathcal{I}_1=\varnothing & (x_0=1),\\ S\cap\mathcal{I}_2=\varnothing & (x_0=\infty).\end{cases} \quad (2.93)$$

极小面 $A_{\ell,\ m,\ n}$ 的极小面与 $\Sigma\mathtt{T}(\ell,\ m,\ n)$ 的元素构成双射对应，其中

$$\mathrm{f}_{\mathtt{I}}=\bigcap_{(x_0,\mathcal{S})\in\mathtt{I},\ S\cup Q\subseteq\mathcal{S}}\mathrm{F}_{S,Q;x_0} \quad (2.94)$$

与 $\mathtt{I}$ 对应的面。

3. 亚纯延拓

现在我们转而讨论塞尔伯格型积分向可能指数空间的稠密开子集上的解析延拓。正如引言中所述，本节的结果对于一般的塞尔伯格型积分显然是尖锐的，但对于例如对称塞尔伯格式积分而言，则仅是初步结果。尽管如此，我们在此证明的结果将有助于稍后建立尖锐结果。为了讨论对称情形和 DF 对称情形，考虑比方程 (1.2) 更一般一些的积分。令 $\ell,\ m,\ n\in\mathbb{N}$ 满足 $\ell+m+n=N\in\mathbb{N}^+$。固定一个有限集合 $\mathcal{D}$，其中包含带索引集合

$$\{d_{\mathrm{F}}\}_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(K_{\ell,m,n})}\subseteq\mathbb{R}. \quad (3.1)$$

定义

$$S_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=\int_{\triangle_{\ell,m,n}}\Big[\prod_{i=1}^{N}|x_i|^{\alpha_i}|1-x_i|^{\beta_i}\Big]\Big[\prod_{1\le j<k\le N}(x_k-x_j)^{2\gamma_{j,k}}\Big]F\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N, \quad (3.2)$$

对于 $(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma})\in\Omega_{\ell,\ m,\ n}[\mathcal{D}]$,，其中

- $\Omega_{\ell,m,n}[\mathcal{D}]$ denotes the set of $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\in\mathbb{C}^N_{\boldsymbol{\alpha}}\times\mathbb{C}^N_{\boldsymbol{\beta}}\times\mathbb{C}^{N(N-1)/2}_{\boldsymbol{\gamma}}$ such that

$$\Big[\prod_{i=1}^{N}|x_i|^{\alpha_i}|1-x_i|^{\beta_i}\Big]\Big[\prod_{1\le j<k\le N}(x_k-x_j)^{2\gamma_{j,k}}\Big]\Big[\prod_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(K_{\ell,m,n})}x_{\mathrm{F}}^{d_{\mathrm{F}}}\Big]\in L^1(\triangle_{\ell,m,n},\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N) \quad (3.3)$$

对于所有 $\{d_{\mathrm{F}}\}_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(K_{\ell,m,n})}\in\mathcal{D}$，以及

- F 具有以下形式

$$F=\sum_{\{d_{\mathrm{F}}\}_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(K_{\ell,m,n})}}\Big[\prod_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(K_{\ell,m,n})}x_{\mathrm{F}}^{d_{\mathrm{F}}}\Big]F_{\{d_{\mathrm{F}}\}_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(K_{\ell,m,n})}} \quad (3.4)$$

对某个 $F_{\{d_{\mathrm{F}}\}_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(K_{\ell,m,n})}}\in C^{\infty}(K_{\ell,\ m,\ n})$。

我们将这类 F 集合记作 $\mathcal{A}^{\mathcal{D}}(K_{\ell,\ m,\ n})$。根据2.6式中 $\triangle_{\ell,\ m,\ n}$的定义，被积函数在此处非零，因此方程（3.2）中的绝对值相当于选择一个分支。

注意，$\Omega_{\ell,\ m,\ n}[\mathcal{D}]$ 是 $\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}$的一个非空、开且连通的子集。在$N=1$的情况下，我们将 $\Omega_{\ell,\ m,\ n}[\mathcal{D}]$ 视为$\mathbb{C}^2_{\alpha,\ \beta}$的子集。

我们用 $\Omega[F]$ 表示任意满足 $F \in \mathcal{A}^{\mathcal{D}}(K_{\ell,\ m,\ n})$ 的$\mathcal{D}$ 所对应的 $\Omega_{\ell,\ m,\ n}[\mathcal{D}]$ 。令

$$\Omega_{\ell,m,n} = \Omega_{\ell,m,n}[\{\{0\}_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(K_{\ell,m,n})}\}]. \tag{3.5}$$

若 $\varphi \in C^\infty(\triangle_{\ell,m,n})$，则我们可以将 φ 视为 $C^\infty(K_{\ell,m,n})$ 的一个元素，因此 $S_{\ell,m,n}[\varphi]\colon \Omega_{\ell,m,n} \to \mathbb{C}$是良定义的，并且 $\Omega_{\ell,m,n}[\varphi] \supseteq \Omega_{\ell,m,n}$。若 $f \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_N]$，则 $f\varphi$的提升也是 $K_{\ell,m,n}$ 上的经典符号（若 $\ell,n=0$，它是光滑的；否则则不一定），因此

$$S_{\ell,m,n}[f\varphi] : \Omega_{\ell,m,n}[f] \to \mathbb{C} \tag{3.6}$$

是良定义的，只是现在我们可能有 $\Omega_{\ell,\ m,\ n}[f\varphi] \not\subseteq \Omega_{\ell,\ m,\ n}$，若 $\ell \neq 0$ 或 $n \neq 0$。

在 $\ell,n=0$ 和 $m=N$ 的特殊情形下，我们使用缩写 $\Omega_{0,N,0} = \Omega_N$、$\Omega_{0,N,0}[\bullet] = \Omega_N[\bullet]$，以及

$$S_{0,N,0}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = S_N[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}), \tag{3.7}$$

这与我们先前的记号一致。

与引言中一样，当 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 为常数时，我们分别用“α”代替“$\boldsymbol{\alpha}$”、“β”代替“$\boldsymbol{\beta}$”，以及“γ”代替“$\boldsymbol{\gamma}$”。令$U_{\ell,m,n}[\bullet]$ 表示满足以下条件的 $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{C}^3$ 的集合：当 $\boldsymbol{\alpha}=\alpha$、$\boldsymbol{\beta}=\beta$ 和 $\boldsymbol{\gamma}=\gamma$ 时，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in \Omega_{\ell,m,n}[\bullet]$ 成立。

本文其余部分将沿用类似的缩写。

除上述一般的塞尔伯格型积分外，我们还有以下一般的 Dotsenko–Fateev 型积分：

$$I_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = \int_{\square_{\ell,m,n}} \Big[\prod_{i=1}^{N} |x_i|^{\alpha_i}|1-x_i|^{\beta_i}\Big]\Big[\prod_{1\le j<k\le N}(x_k-x_j+i0)^{2\gamma_{j,k}}\Big] F\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N \tag{3.8}$$

对于 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in V_{\ell,m,n}[\mathcal{D}]$, 其中 $\mathcal{D}$ 表示由带索引集合组成的有限集合$\{d_{\mathrm{F}}\}_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(A_{\ell,m,n})} \subseteq \mathbb{C}$ ，

- $V_{\ell,m,n}[\mathcal{D}]$ 表示满足以下条件的 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in \mathbb{C}^{2N+N_{(N-1)/2}}$ 集合：方程 (3.8) 中的被积函数属于 $L^1(\square_{\ell,m,n},\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N)$；也就是说，该集合由满足以下条件的 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$ 组成：

$$\Big[\prod_{i=1}^{N} |x_i|^{\alpha_i}|1-x_i|^{\beta_i}\Big]\Big[\prod_{1\le j<k\le N}|x_k-x_j|^{2\gamma_{j,k}}\Big]\Big[\prod_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(K_{\ell,m,n})} x_{\mathrm{F}}^{d_{\mathrm{F}}}\Big] \in L^1(\square_{\ell,m,n},\ \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N) \tag{3.9}$$

对所有 $\{d_{\mathrm{F}}\}_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(A_{\ell,m,n})} \in \mathcal{D}$，并且

- F 对于 $F_{\{d_{\mathrm{F}}\}_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(A_{\ell,m,n})}} \in C^\infty(A_{\ell,m,n})$，其形式为方程 (3.4)。

在方程 (3.8) 中，$x^\gamma = e^{\pi i\gamma}e^{\gamma\log|x|}$如果 $x<0$且 $x^\gamma = e^{\gamma\log x}$如果 $x>0$。我们采用了适用于 Dotsenko–Fateev 类积分的缩写，其与用于 Selberg 类积分的缩写类似。

令 $W_{\ell,m,n}[\bullet]$ 表示满足以下条件的 $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{C}^3$ 集合：当 $\boldsymbol{\alpha}=\alpha,\boldsymbol{\beta}=\beta$ 和 $\boldsymbol{\gamma}=\gamma$ 时，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in V_{\ell,m,n}[\bullet]$ 成立。令 $W\mathrm{DF}_{\ell,\ m,\ n}^{0}[F]$ 表示满足 $(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{DF}0},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{DF}0},\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{DF}0}) \in V_{\ell,m,n}[F]$ 的 $(\alpha_-,\alpha_+,\beta_-,\beta_+,\gamma_-,\gamma_0,\gamma_+) \in \mathbb{C}^7$ 集合。令

$$I^{\mathrm{DF}0;\mathrm{s}}_{\ell,m,n}[F](\alpha_-,\alpha_+,\beta_-,\beta_+,\gamma_-,\gamma_0,\gamma_+) = I_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{DF}0},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{DF}0},\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{DF}0}). \tag{3.10}$$

本节分为许多简短的小节。扩展所采用的一般解析框架将在 §3.1 中讨论，而塞尔伯格型积分的具体应用见 §3.2。我们证明一系列恒等式，建立 $I_{\ell,\ m,\ n}$、$I_{\ell,\ n,\ m}$、$I_{n,\ \ell,\ m}$、.....之间的联系，详见 §3.3。作为讨论 DF 对称情形下奇点消除的准备，我们将在 §3.4 讨论 Dotsenko–Fateev 提出的一种替代正则化过程。该方法适用于某些不太理想的参数范围（特别是允许 $\gamma_0=-1$，但要求 α_-、α_+、β_-、β_+的实部不能过于负）。值得指出的是，这种正则化技术可以与

§3.1 中的方法结合使用，从而在无需处理诸如 $(y\pm i0)^\lambda$ 在 λ中的分布乘积解析性这一技术问题的情况下，证明主要定理。由于这种做法不像 §3.1中的证明那样具有纯粹的解析风格，因此我们在此不采用这种方法。§$I_{\ell、\,m、\,n}$ 与 §$S_{\ell、\,m、\,n}$ 中的塞尔伯格型积分有关，详见 §3.5。奇点消除所用的一个关键引理见 §3.6。该引理推广了 Aomoto 证明的一个结果 [Aom87] ，Dotsenko–Fateev 曾对其作过启发式讨论 [DF85a]。为求完整，也便于后文使用，我们在 §3.7记录 §3.2 中关于 Dotsenko–Fateev 积分的结果在对称情形和 DF 对称情形下的形式。

令 $\mathfrak{S}_{\ell,\,m,\,n}=\mathfrak{S}_\ell\times\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n$，将其视为 $\mathfrak{S}_N$ 的子群，该子群保持 $\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,\mathcal{I}_3$ 中的每一个不变；其中$\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,\mathcal{I}_3$与上一节中的定义相同，也称为与划分 $\{1,\,\ldots\ldots,\,n\}=\mathcal{I}_1\sqcup\mathcal{I}_2\sqcup\mathcal{I}_3$相关联的杨子群。给定一个置换 $\sigma\in\mathfrak{S}_{\ell,\,m,\,n}$，令

$$I_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^\sigma=\int_{\square_{\ell,m,n}}\Big[\prod_{i=1}^N|x_i|^{\alpha_i}|1-x_i|^{\beta_i}\Big]\Big[\prod_{1\le j<k\le N}(x_{\sigma(k)}-x_{\sigma(j)}+i0)^{2\gamma_{\sigma(j),\sigma(k)}}\Big]F\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N,\tag{3.11}$$

定义在 $(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma})\in V_{\ell,\,m,\,n}[F]$ 上。若定义 $\boldsymbol{\alpha}^\sigma$，$\boldsymbol{\beta}^\sigma$，$\boldsymbol{\gamma}^\sigma$ 为 $\alpha_j^\sigma=\alpha_{\sigma(j)}$、$\beta_j^\sigma=\beta_{\sigma(j)}$ 和 $\gamma_{j,\,k}^\sigma=\gamma_{\sigma(j),\,\sigma(k)}$，并且

$$F^\sigma(y_1,\ldots,y_N)=F(y_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,y_{\sigma^{-1}(N)}),\tag{3.12}$$

则 $I_{\ell,\,m,\,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma})^\sigma=I_{\ell,\,m,\,n}[F^\sigma](\boldsymbol{\alpha}^\sigma,\ \boldsymbol{\beta}^\sigma,\ \boldsymbol{\gamma}^\sigma)$。这一关系在下文中非常有用。更一般地，对于任意 $\sigma\in\mathfrak{S}_N$，令

$$I_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^\sigma=I_{\ell,m,n}[F^\sigma](\boldsymbol{\alpha}^\sigma,\boldsymbol{\beta}^\sigma,\boldsymbol{\gamma}^\sigma)\tag{3.13}$$

$$S_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^\sigma=S_{\ell,m,n}[F^\sigma](\boldsymbol{\alpha}^\sigma,\boldsymbol{\beta}^\sigma,\boldsymbol{\gamma}^\sigma),\tag{3.14}$$

在前一种情形下，对 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\in V_{\ell,m,n}[F]$ 定义；或者

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\ \in\Omega_{\ell,m,n}[F]^\sigma=\{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\ \in\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}\colon(\boldsymbol{\alpha}^\sigma,\boldsymbol{\beta}^\sigma,\boldsymbol{\gamma}^\sigma)\ \in\Omega_{\ell,m,n}[F^\sigma]\}\tag{3.15}$$

在后一种情形下。对于下文中 $\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}$ 的其他子集，以及 $S_{\ell,m,n}[F]$ 和 $I_{\ell,m,n}[F]$ 的亚纯延拓，我们也将使用类似的记号。

3.1. 一些一般性说明。 令 $N\in\mathbb{N}$ 任意。对于弗雷歇空间 $\mathcal{X}$，令 $\mathscr{O}(\mathbb{C}^N;\mathcal{X})$ 表示定义在 $\mathbb{C}^N$ 上的整 $\mathcal{X}$ 值函数所构成的弗雷歇空间，其拓扑由紧子集上一致收敛来确定，并且是相对于 $\mathcal{X}$ 上的每个弗雷歇半范数度量的；对于 $\mathcal{X}$ 为 LF 空间的情形，定义也类似。令 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 上紧支撑分布所构成的局部凸拓扑向量空间。根据施瓦茨表示定理，

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)=\cup_{m\in\mathbb{R}}H_{\mathrm{c}}^{m,s}(\mathbb{R}^N),\tag{3.16}$$

其中，$H_c^m(\mathbb{R}^N)$ 是 $H^m(\mathbb{R}^N)$ 的紧支集元素集合。

设 $N\in\mathbb{N}^+$, $k\in\{0,\ldots,N\}$，且 $\kappa\in\mathbb{N}$。对于任意

$$\psi\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^k_{t_1,\cdots,t_k};\mathcal{E}'(\mathbb{R}^{N-k}_{t_{k+1},\cdots,t_N}))=\bigcup_{m,s\in\mathbb{R}}C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^k_{t_1,\cdots,t_k};H^{m,s}_{\mathrm{sc,c}}(\mathbb{R}^{N-k}))\tag{3.17}$$

令，对于 $\boldsymbol{\rho}=(\rho_1,\ldots,\rho_k)$,

$$I_{N,k,\kappa}[\psi](\boldsymbol{\rho})=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty t_1^{\rho_1}\cdots t_k^{\rho_k}\langle 1,\psi(t_1,\ldots,t_k,-)\rangle\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k,\tag{3.18}$$

我们将其简记为

$$I_{N,k,\kappa}[\psi](\boldsymbol{\rho})=\int_{\mathbb{R}_k^N}t_1^{\rho_1}\cdots t_k^{\rho_k}\psi(t)\,\mathrm{d}^Nt.\tag{3.19}$$

这里，$\mathbb{R}_k^N=[0,\infty)^k_{t_1,\ \cdots\ t_k}\times\mathbb{R}^{n-k}_{t_{k+1},\ \cdots\ t_N}$，以及$I_{N,\ k,\ \kappa}[\psi](\boldsymbol{\rho})$ 最初定义于$\boldsymbol{R}\rho_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{R}\rho_k>-1$，在这些参数下，方程（3.18）右侧是一个良定义积分。

设 $H^{m,\mathrm{sc}^s_c}(\mathbb{R}^N)$ 表示 $H^{m,\mathrm{sc}^s}(\mathbb{R}^N) = \langle r\rangle^{-s}H^m(\mathbb{R}^N)$ 中紧支集元素的集合。设

$$\mathscr{O}(\mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^\kappa; C_c^\infty(\mathbb{R}^k_{t_1,\cdots,t_k}; \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{N-k}_{t_{k+1},\cdots,t_N}))) = \bigcap_\Omega \bigcup_{m,s\in\mathbb{R}} \mathscr{O}(\Omega; C_c^\infty(\mathbb{R}^k_{t_1,\cdots,t_k}; H^{m,s}_{\mathrm{sc,c}}(\mathbb{R}^{N-k}))), \tag{3.20}$$

赋予最强拓扑，使包含映射

$$\bigcap_\Omega \mathscr{O}(\Omega; C_c^\infty(\mathbb{R}^k_{t_1,\cdots,t_k}; H^{m,s}_{\mathrm{sc,c}}(\mathbb{R}^{N-k}))) \hookrightarrow \mathscr{O}(\mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^\kappa; C_c^\infty(\mathbb{R}^k_{t_1,\cdots,t_k}; \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{N-k}_{t_{k+1},\cdots,t_N}))) \tag{3.21}$$

均为连续映射，其中左侧是一个LF空间。这里，Ω 在 $\mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^\kappa$的有界区域中变化。我们将 $\mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^\kappa$ 上的函数与其在子区域上的限制视为相同。换言之，由方程 (3.20)定义的空间中的元素，局部上是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^k_{t_1,\cdots t_k}; H^{m,\mathrm{sc}^s_c}(\mathbb{R}^{N-k}))$中元素的一个解析族，其中某些 $m,s\in\mathbb{R}$ 可以依赖于Ω。

命题 3.1. 假设对于每个 $\boldsymbol{\rho}\in\mathbb{C}^k$ 和 $\boldsymbol{\delta}\in\mathbb{C}^\kappa$，我们给定某个 $\psi(-;\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta})$ 如方程(3.17)所示，且完全依赖于 $\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta}$，其含义是映射

$$\mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^\kappa \ni (\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta}) \mapsto \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k; \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{N-k})) \tag{3.22}$$

是整函数，即属于 $\mathscr{O}(\mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^\kappa; C_c^\infty(\mathbb{R}^k_{t_1,\cdots t_k}; \boldsymbol{E}'(\mathbb{R}^{N-k}_{t_{k+1},\cdots t_N})))$。定义

$$I_{N,k,\kappa}[\psi](\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta}) = I_{N,k,\kappa}[\psi(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta})](\boldsymbol{\rho}). \tag{3.23}$$

那么，由下式定义的函数 $J_{N,\,k,\,\kappa}[\psi]$

$$I_{N,k,\kappa}[\psi](\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta}) = \Big[\prod_{j=1}^k \Gamma(\rho_j+1)\Big] J_{N,k,\kappa}[\psi](\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta}) \tag{3.24}$$

可延拓为 $\mathbb{C}^k_{\boldsymbol{\rho}}\times\mathbb{C}^\kappa_{\boldsymbol{\delta}}$ 上的整函数。此外，函数

$$J_{N,\,k,\,\kappa}[\psi]: \mathscr{O}(\mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^\kappa; C_c^\infty(\mathbb{R}^k_{t_1,\ldots,t_k}; \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{N-k}_{t_{k+1},\ldots,t_N}))) \ni \psi \mapsto J_{N,k,\kappa}[\psi] \in \mathscr{O}(\mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^\kappa \tag{3.25}$$

是连续的。 ■

参见 [GS64][Var95，引理 10.7。9]。

证明。 $k=0$ 情形本质上是不言自明的。

现在我们对 k 作归纳。令 $k\geq 1$，并假设我们已证明较小 k 时结论成立。将 ψ 在 $t_1=0$ 附近展开为泰勒级数，存在

$$\psi^{(j)} \in \mathscr{O}\left(\mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^\kappa; C_c^\infty(\mathbb{R}^{k-1}_{t_2,\ldots,t_k}; \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{N-k}_{t_{k+1},\ldots,t_N}))\right) \tag{3.26}$$

$$E^{(j)} \in \mathscr{O}\left(\mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^\kappa; C^\infty(\mathbb{R}_{t_1}; C_c^\infty(\mathbb{R}^{k-1}_{t_2,\ldots,t_k}; \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{N-k}_{t_{k+1},\ldots,t_N})))\right), \tag{3.27}$$

可将其视为光滑函数（或广义函数） t_1，……， t_N，并且关于参数 $\boldsymbol{\rho}\in\mathbb{C}^k$ 和 $\boldsymbol{\delta}\in\mathbb{C}^\kappa$ 解析，使得

$$\psi(t_1,\cdots,t_N;\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta}) = \sum_{j=0}^J t_1^j\psi^{(j)}(t_2,\cdots,t_N;\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta}) + t_1^{J+1}E^{(J+1)}(t_1,\cdots,t_N;\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta}) \tag{3.28}$$

对所有 $J\in\mathbb{N}$。令 $K\subset\mathbb{C}^{k+\kappa}$ 为任意非空紧集。存在某个 $T>0$，使得 $\operatorname{supp}\psi(-;\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta})\subseteq\{-T\leq t_1\leq T\}$ 对所有 $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta})\in K$均成立。于是，若 $R\rho_1,\cdots,R\rho_k>-1$ 且 $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta})\in K$，

$$I_{N,k,\kappa}[\psi](\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta}) = \sum_{j=0}^J \frac{I_{N-1,k-1,\kappa}[\psi^{(j)}](\hat{\boldsymbol{\rho}},\boldsymbol{\delta})}{\rho_1+j+1} T^{\rho_1+j+1} + \int_0^T t_1^{\rho_1+J+1} I_{N-1,k-1}[E^{(J+1)}(t_1,-)](\hat{\boldsymbol{\rho}},\boldsymbol{\delta})\,\mathrm{d}t_1, \tag{3.29}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\rho}} = (\rho_2, \cdots \rho_k)$。现在我们定义 $J_{N,\,k,\,\kappa}[\psi](\boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{\delta})$：$\{R\rho_1 > -2 - J\} \times \mathbb{C}^{\kappa}_{\boldsymbol{\delta}} \to \mathbb{C}$ 为

$$J_{N,k,\kappa}[\psi](\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta}) = \frac{1}{\Gamma(\rho_1+1)} \sum_{j=0}^{J} \frac{J_{N-1,k-1,\kappa}[\psi^{(j)}](\hat{\boldsymbol{\rho}},\boldsymbol{\delta})}{\rho_1+j+1} T^{\rho_1+j+1} + \frac{1}{\Gamma(\rho_1+1)} \int_0^T t_1^{\rho_1+J+1} J_{N-1,k-1}[E^{(J+1)}(t_1,-)](\hat{\boldsymbol{\rho}},\boldsymbol{\delta})\,\mathrm{d}t_1. \quad (3.30)$$

根据构造，当 $\mathrm{R}\rho_1$、⋯、$\mathrm{R}\rho_k > -1$ 时，方程 (3.24) 成立。根据归纳假设中的连续性条件，对于每个单独的 $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta}) \in \{\mathrm{R}\rho_1 > -2 - J\} \times \mathbb{C}^{\kappa}$，方程 (3.29) 中的积分都是定义良好的博赫纳积分。此外，方程 (3.30) 右侧关于 $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta}) \in \{\mathrm{R}\rho_1 > -1 - J\} \times \mathbb{C}^{\kappa}$ 解析地依赖。根据归纳假设，第一行中的和（乘以 $\Gamma(\rho_1+1)^{-1}$）也具有这一性质，因为由 $1/(\rho_1+j+1)$ 的因子产生的简单极点与 $\Gamma(\rho_1+1)$ 的因子产生的简单极点相互抵消。因此，为了证明方程 (3.30) 右侧整体在此区域内关于 $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta})$ 解析地依赖，我们只需证明

$$\int_0^T t_1^{\rho_1+J+1} J_{N-1,k-1}[E^{(J+1)}(t_1,-)](\hat{\boldsymbol{\rho}},\boldsymbol{\delta})\,\mathrm{d}t_1. \quad (3.31)$$

对积分号下求导进行论证后，这是一个关于 C^1 的函数 $(R\rho_1, I\rho_1) \in \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, u > -1 - J\}$，且满足柯西–黎曼方程，因此可知，方程 (3.31) 中的积分作为 $\rho_1 \in \{R\rho_1 > -1 - J\}$ 的函数是解析的，其中 $\hat{\boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{C}^{k-1}$ 和 $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{C}^{\kappa}$ 固定。添加 $\hat{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{\delta}$ 依赖关系并不会改变论证。

因此，方程 (3.29) 给出了 $I_{N,k,\kappa}$ 的解析延拓；我们可以对所有$J \in \mathbb{N}$取并集，各个部分延拓因解析性而彼此一致。连续性条件可由方程 (3.30) 和归纳假设直接看出。□

因此，$I_{N,k,\kappa}[\psi]$ 存在解析延拓 $I_{N,k,\kappa}[\psi] : \Omega \to \mathbb{C}$ 至集合 $\Omega = (\mathbb{C}^k_{\boldsymbol{\rho}} \backslash \bigcup_{j\in\{1,\dots,k\}} \{\rho_j \in \mathbb{Z}^{\leq -1}\}) \times \mathbb{C}^{\kappa}_{\boldsymbol{\delta}}$，且映射

$$\dot{I}_{N,k,\kappa}[-] : \mathscr{O}(\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{\kappa}; C^{\infty}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^k_{t_1,\dots,t_k}; \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{N-k}_{t_{k+1},\dots,t_N}))) \ni \psi \mapsto \dot{I}_{N,k,\kappa}[\psi] \in \mathscr{O}(\Omega) \quad (3.32)$$

是连续的。

若$\mathcal{P}$ 是带角流形 M 上一组具有一致定向的余维一内部 p-子流形，那么，令 x_{F} 为面 $\mathrm{F} \in \mathcal{F}(M)$ 的边界定义函数，则对于任意 $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{C}^{\mathcal{P}}$ 和 $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{C}^{\mathcal{F}(M)}$，乘积

$$\omega(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta}) = \prod_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(M)} x_{\mathrm{F}}^{\rho_{\mathrm{F}}} \prod_{P\in\mathcal{P}} (y_P + i0)^{\delta_P} : \dot{C}^{\infty}_{\mathrm{c}}(M; \Omega M) \ni \mu \mapsto \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_M \prod_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(M)} \prod_{P\in\mathcal{P}} x_{\mathrm{F}}^{\rho_{\mathrm{F}}} (y_P + i\varepsilon)^{\delta_P} \mu \quad (3.33)$$

是 M 上定义良好的经典分布，其中 $\{y_P\}_{P\in\mathcal{P}}$ 是具有一致定向的定义函数。（这里，$C^{\infty}_{\mathrm{c}}(M; \Omega M)$ 是 M 上在每个边界超曲面处均为施瓦茨型的紧支撑光滑密度集合。）也就是说，ω 是 M 上的可延拓分布，并且对于足够小的 $\epsilon > 0$，它定义了 $C^{\infty}([0,\epsilon)x_{\mathrm{F}}$；对每个面 F，均有 $\mathrm{D}'(\mathrm{F})$。我们将方程 (3.33) 右侧记为 $\int_M \omega(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta})\mu$。更一般地，若 $\mu \in C^{\infty}_{\mathrm{c}}(M; \Omega M)$，则

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_M \prod_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(M)} \prod_{P\in\mathcal{P}} x_{\mathrm{F}}^{\rho_{\mathrm{F}}} (y_P + i\varepsilon)^{\delta_P} \mu = \int_M \omega(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta})\mu \quad (3.34)$$

当且仅当对所有 $\mathrm{F} \in \mathcal{F}(M)$，$\rho_{\mathrm{F}} > -1$ 存在。

设 $\varkappa \in \mathbb{N}$。假设给定了某个整族

$$\mu : \mathbb{C}^{\mathcal{F}(M)} \times \mathbb{C}^{\mathcal{P}} \times \mathbb{C}^{\varkappa} \to C^{\infty}_{\mathrm{c}}(M; \Omega M) \quad (3.35)$$

定义在 M 上的紧支撑光滑密度 $\mu(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda}) \in C^{\infty}_{\mathrm{c}}(M; \Omega M)$。考虑函数

$$I[M,\mu](\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda}) : \{(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{C}^{\mathcal{F}(M)} \times \mathbb{C}^{\mathcal{P}} \times \mathbb{C}^{\varkappa} : \rho_{\mathrm{F}} > -1 \text{ for all } \mathrm{F} \in \mathcal{F}(M)\} \to \mathbb{C} \quad (3.36)$$

定义为

$$I[M,\mu](\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda}) = \int_M \omega(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta})\mu(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda}). \tag{3.37}$$

命题 3.2. 假设对于某个 $N_0 \in \mathbb{N}^+$，给定一个仿射映射 $L = (L_1, L_2, L_3) : \mathbb{C}^{N_0}_{\boldsymbol{\varrho}} \to \mathbb{C}^{\mathcal{F}(M)}_{\boldsymbol{\rho}} \times \mathbb{C}^{\mathcal{P}}_{\boldsymbol{\delta}} \times \mathbb{C}^{\varkappa}_{\boldsymbol{\lambda}}$，使得对于每个 $\mathrm{F} \in \mathcal{F}(M)$，仿射泛函

$$(L\bullet)_{\mathrm{F}} : \mathbb{C}^{N_0} \ni \boldsymbol{\varrho} \mapsto (L_1\boldsymbol{\varrho})_{\mathrm{F}} \in \mathbb{C} \tag{3.38}$$

不是常数。于是，存在与 M 的极小面f 相关联的整函数 $I_{\mathrm{reg,f}}[M,\mu](L\bullet) : \mathbb{C}^{N_0}_{\boldsymbol{\varrho}} \to \mathbb{C}$，使得

$$I[M,\mu](L\boldsymbol{\varrho}) = \sum_{\mathrm{f}} \Big[\prod_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(M),\mathrm{F}\supseteq\mathrm{f}} \Gamma(1+(L\varrho)_{\mathrm{F}}) \Big] I_{\mathrm{reg,f}}[M,\mu](L\boldsymbol{\varrho}) \tag{3.39}$$

对于所有 $\boldsymbol{\varrho} \in \mathbb{C}^{N_0}$ 使得左侧由方程 (3.37) 定义的情形。 ■

证明。 在 M 上取一个从属于坐标图系的单位分解3.1 并在局部应用命题。 □

然后，令 $\mathcal{L} = \{(L\bullet)_{\mathrm{F}} : \mathrm{F} \in \mathcal{F}(M)\}$，

$$\Big[\prod_{\Lambda\in\mathcal{L}} \frac{1}{\Gamma(1+\Lambda(\boldsymbol{\varrho}))^{\#_\Lambda}} \Big] I[M,\mu](L\boldsymbol{\varrho}) \tag{3.40}$$

可延拓为整函数 $\mathbb{C}^{N_0}_{\boldsymbol{\varrho}} \to \mathbb{C}$，其中 $\#_\Lambda \in \mathbb{N}^+$ 是满足以下条件的面集 $S \subseteq \mathcal{F}(M)$ 的最大大小：$\cap_{\mathrm{F}\in S} \mathrm{F} \neq \varnothing$，且对所有 $\mathrm{F} \in S$ 均有 $(L\bullet)_{\mathrm{F}} = \Lambda$。事实上，这由上面的命题得出，因为对每个面 f，

$$\Big[\prod_{\Lambda\in\mathcal{L}} \frac{1}{\Gamma(1+\Lambda(\boldsymbol{\varrho}))^{\#_\Lambda}} \Big] \prod_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(M),\mathrm{F}\supseteq\mathrm{f}} \Gamma(1+(L\boldsymbol{\varrho})_{\mathrm{F}}) \tag{3.41}$$

是整函数。

3.2. **对一般塞尔伯格型和类 DF 积分的专门化。**现在，我们将上一节的结果应用于积分方程 (3.2) 和方程 (3.8) 这一具体情形。固定 ℓ，m，$n \in \mathbb{N}$使其满足 $\ell + m + n = N$，$N \in \mathbb{N}^+$。

3.2.1. 塞尔伯格情形。固定 $F \in \mathsf{A}^{\mathcal{D}}(K_{\ell,m,n})$。令 $\rho_{j,k} = \rho_{j,k}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$ 由方程 (2.41)、方程 (2.42)、方程 (2.43) 和方程 (2.44) 定义。回顾第2.1节中给出的 $\mathtt{T}(\ell,m,n)$ 的定义：

命题 3.3. 存在整函数

$$S_{\ell,m,n;\mathrm{reg},\mathtt{I},\{d_{\mathrm{F}}\}_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(K_{\ell,m,n})}}[F] : \mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}} \to \mathbb{C}, \tag{3.42}$$

与极小面有序对 f 相关，这些有序对属于 $K_{\ell,\ m,\ n}$ 以及权重集合 $\{d_{\mathrm{F}}\}_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(\ell,m,n)} \in \mathcal{D}$，使得

$$S_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{\mathtt{I}\in\mathtt{T}(\ell,m,n)} \sum_{\{d_{\mathrm{F}}\}_{\mathrm{F}}\in\mathcal{F}(K_{\ell,m,n})\in\mathcal{D}} \Big[\prod_{\mathcal{I}(j,k)\in\mathtt{I}} \Gamma(1+\rho_{j,k}+d_{\mathrm{F}_{j,k}}) \Big] \times S_{\ell,m,n;\mathrm{reg},\mathtt{I},\{d_{\mathrm{F}}\}_{\mathrm{F}}\in\mathcal{F}(K_{\ell,m,n})}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \tag{3.43}$$

对于所有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in \Omega_{\ell,\ m,\ n}[D]$。 ■

证明。 这是命题 2.3和命题 3.2的一个推论，利用了以下事实：$K_{\ell,\ m,\ n}$的极小面与以下各项的元素一一对应：$\mathtt{T}(\ell,\ m,\ n)$，通过方程 (2.50)。 □

因此，存在一个解析延拓 $S_{\ell,\,m,\,n}[F]:\Omega_{\ell,\,m,\,n}[\mathcal{D}]\to\mathbb{C}$，它是 $S_{\ell,\,m,\,n}[F]:\Omega_{\ell,\,m,\,n}[\mathcal{D}]\to\mathbb{C}$ 的解析延拓，其中

$$\dot\Omega_{\ell,m,n}[\mathcal{D}]=\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}}\Big\backslash\Big[\bigcup_{\{d_{\mathrm{F}}\}_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(K_{\ell,m,n})}\in\mathcal{D}}\Big(\bigcup_{\{j,k\}\in\mathcal{J}_{\ell,m,n}}\{\rho_{j,k}+d_{\mathrm{F}_{j,k}}\in\mathbb{Z}^{\leq-1}\}\Big)\Big].\tag{3.44}$$

这是一个全测度的开连通子集；具体而言，它是 $\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}$中一族局部有限的复（仿射）超平面的补集。当 $m=N$时，这与方程 (1.13) 一致。

作为前一个命题的推论，存在一个整函数

$$S_{\ell,m,n;\mathrm{reg}}[F]:\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}}\to\mathbb{C}\tag{3.45}$$

使得

$$S_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=\Big[\prod_{\{j,k\}\in\mathcal{J}_{\ell,m,n}}\Gamma(1+\rho_{j,k}+d^{\min}_{\mathrm{F}_{j,k}})\Big]S_{\ell,m,n;\mathrm{reg}}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\tag{3.46}$$

holds 对所有 $(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma})\in\Omega_{\ell,\,m,\,n}[\mathcal{D}]$, 其中 $d^{\min}_{\mathrm{F}}=\min\{d_{\mathrm{F}}:\{d_{\mathrm{F}_0}\}_{\mathrm{F}_0\in\mathcal{F}(K_{\ell,\,m,\,n})}\in\mathcal{D}\}$。

上述命题中 $m=N$ 成立的情形给出了定理 1.1。事实上，若 $F\in C^\infty(\triangle_N)$，则 F提升为 $C^\infty(K_{0,\,N,\,0})$ 中的一个元素，而 F 在 $\triangle_N$相关面处的消失阶蕴含其在$K_{0,\,N,\,0}$对应提升处具有相同的消失阶。

3.2.2. *Dotsenko–Fateev* 情形。固定 $F\in\mathcal{A}^{\mathcal{D}}(A_{\ell,\,m,\,n})$，其中 $\mathcal{D}$ 现在是 $A_{\ell、\,m、\,n}$各个面的阶的集合。回忆一下 § $\Sigma\mathtt{T}(\ell,\ m,\ n)$ 中给出的定义，见 §2.2：

命题 3.4。存在整函数

$$I_{\ell,m,n;\mathrm{reg},\mathtt{I},\{d_{\mathrm{F}}\}_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(A_{\ell,m,n})}}[F]:\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}}\to\mathbb{C}\tag{3.47}$$

与 $\mathtt{I}\in\Sigma\mathtt{T}(\ell,m,n)$ 相关，使得

$$I_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=\sum_{\mathtt{I}\in\Sigma\mathtt{T}(\ell,m,n)}\sum_{\{d_{\mathrm{F}}\}_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(A_{\ell,m,n})}\in\mathcal{D}}\Big(\Big[\prod_{(x_0,\mathcal{S})\in\mathtt{I}}\Gamma(1+\varrho_{S,Q;x_0}+d_{\mathrm{F}_{S,Q;x_0}})\Big]$$
$$\times I_{\ell,m,n;\mathrm{reg},\mathtt{I}\{d_{\mathrm{F}}\}_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(A_{\ell,m,n})}}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\Big)\tag{3.48}$$

对于所有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\in V_{\ell,\,m,\,n}[\boldsymbol{D}],$，其中我们将 $I_1\cap S$、$I_2\cap S$ 和 $I_3\cap S$ 分别简写为 S 或 Q，视情况而定。■

证明。由命题 2.7和命题 3.2 得出。□

因此，$I_{\ell,\,m,\,n}[F]:V_{\ell,\,m,\,n}[\mathcal{D}]\to\mathbb{C}$可解析延拓为$I_{\ell,\,m,\,n}[F]:V_{\ell,\,m,\,n}[\mathcal{D}]\to\mathbb{C}$，其中

$$\dot V_{\ell,m,n}[\mathcal{D}]=\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}}\Big\backslash\bigcup_{\{d_{\mathrm{F}}\}_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(A_{\ell,m,n})}}\bigcup_{x_0\in\{0,1,\infty\}}\bigcup_{S,Q}\{\varrho_{S,Q;x_0}+d_{\mathrm{F}_{S,Q;x_0}}\in\mathbb{Z}^{\leq-1}\}.\tag{3.49}$$

注意，$V_{\ell,m,n}[F]\supseteq\cap_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\ell,m,n}}\Omega_{\ell,m,n}[F]^\sigma$，因为每个泛函 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\mapsto\varrho_{S,Q;x_0}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$都具有如下形式：$\rho_{j,k}(\boldsymbol{\alpha}^\sigma,\boldsymbol{\beta}^\sigma,\boldsymbol{\gamma}^\sigma)$，其中某个$\sigma\in\mathfrak{S}_{\ell,m,n}$ 和$\{j,k\}\in\mathrm{J}_{\ell,m,n}$。

作为前一个命题的推论，存在一个函数

$$I_{\ell,m,n;\mathrm{reg}}[F]:\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}}\to\mathbb{C}\tag{3.50}$$

使得，对于所有的 $(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma})\in V_{\ell,\,m,\,n}[\mathcal{D}]$,

$$I_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=\Big[\prod_{x_0\in\{0,1,\infty\}}\prod_{S,Q}\Gamma(1+\varrho_{S,Q;x_0}+d^{\min}_{\mathrm{F}_{S,Q;x_0}})\Big]I_{\ell,m,n;\mathrm{reg}}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}),\tag{3.51}$$

其中 S, Q取遍$\mathcal{I}_1=\{1、\ldots\ldots、\ell\}$、$\mathcal{I}_2=\{\ell+1、\ldots\ldots、\ell+m\}$和$\mathcal{I}_3=\{\ell+m+1、\ldots\ldots、N\}$的子集，具体取决于 x_0。

上述 $m=N$ 命题的情形就是定理 1.3。

3.3. 一个简单的恒等式。 对于每个置换 σ of $\{0,1,\infty\}$。令

$$(\ell',m',n')=\begin{cases}(\ell,m,n) & (\sigma=1),\\ (n,m,\ell) & (\sigma=(0\ 1)),\\ (\ell,n,m) & (\sigma=(0\ \infty)),\\ (m,\ell,n) & (\sigma=(1\ \infty)),\\ (n,\ell,m) & (\sigma=(0\ 1\ \infty)),\\ (m,n,\ell) & (\sigma=(1\ 0\ \infty)).\end{cases} \tag{3.52}$$

换言之，若用$\{0,1,\infty\}$标记三角形的顶点，并相应地标记各边——也就是说，“ℓ”标记 0 与 ∞ 之间的边，“m” 标记 0 与 1 之间的边，“n” 标记 1 与 ∞ 之间的边 —— 那么 (ℓ',m',n') 是将 σ 作用于该三角形并读出新的标记后，由 (ℓ,m,n) 得到的置换。

令 $\mathsf{T}_\sigma:\mathbb{C}P^{\ 1}\to\mathbb{C}P^1$ 表示在$\{0,1,\infty\}$ 上由 σ 作用的唯一自同构。这些是

$$\mathsf{T}_1(z)=z,\quad \mathsf{T}_{(0\ 1)}(z)=1-z,\quad \mathsf{T}_{(0\ \infty)}(z)=\frac{1}{z},\quad \mathsf{T}_{(1\ \infty)}(z)=-\frac{z}{1-z}, \tag{3.53}$$

$$\mathsf{T}_{(0\ 1\ \infty)}(z)=\frac{1}{1-z},\qquad \mathsf{T}_{(0\ \infty\ 1)}(z)=\frac{z-1}{z}. \tag{3.54}$$

令 $\sigma^{\mathrm{param}}:\ \mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}\to\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}$ 表示该仿射映射

$$\sigma^{\mathrm{param}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=\begin{cases}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) & (\sigma=1),\\ (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}) & (\sigma=(0\ 1)),\\ (-2-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{\gamma}_\lrcorner\mathbf{1},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) & (\sigma=(0\ \infty)),\\ (\boldsymbol{\alpha},-2-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{\gamma}_\lrcorner\mathbf{1},\boldsymbol{\gamma}) & (\sigma=(1\ \infty)),\\ (-2-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{\gamma}_\lrcorner\mathbf{1},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}) & (\sigma=(0\ 1\ \infty)),\\ (\boldsymbol{\beta},-2-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{\gamma}_\lrcorner\mathbf{1},\boldsymbol{\gamma}) & (\sigma=(1\ 0\ \infty)),\end{cases} \tag{3.55}$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}_\lrcorner\mathbf{1}\in\mathbb{C}^N$ 的第 j 个分量为 $\sum_{k\neq j}\gamma_{j,\ k}$。令 $\mathsf{rev}\in\mathfrak{S}_{\ell',\ m',\ n'}$ 表示分别将集合 $\{1,\ldots,\ell'\}$、$\{\ell'+1,\ldots,\ell'+m'\}$ 和$\{\ell'+m'+1,\ldots,N\}$ 中元素顺序反转的置换。令 $|\sigma|$ 表示 σ 的阶。

命题 3.5. 如果 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\in V_{\ell,m,n}$，那么 $\sigma^{\mathrm{param}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\in V_{\ell',m',n'}$；如果 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\in\Omega_{\ell,m,n}$，那么 $\sigma^{\mathrm{param}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\in\dot{\Omega}^{\mathrm{rev}^{|\sigma|}}_{\ell'\ m'}$，$,n'$，并且

$$\begin{aligned}\dot{I}_{\ell,m,n}[1](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})&=\dot{I}_{\ell',m',n'}[1](\sigma^{\mathrm{param}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}))^{\mathrm{rev}^{|\sigma|}},\\ \dot{S}_{\ell,m,n}[1](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})&=\dot{S}_{\ell',m',n'}[1](\sigma^{\mathrm{param}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}))^{\mathrm{rev}^{|\sigma|}}\end{aligned} \tag{3.56}$$

对于所有$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\in\Omega_{\ell,\ m,\ n}$。 ■

证明。 可以逐例验证

$$\{\varrho_{S,\ Q;\bullet}\circ\sigma^{\mathrm{param}}:\ \bullet\in\{0,\ 1,\ \infty\}\ S,\ Q\text{ 如上}\}=\{\varrho_{S,\ Q;\bullet}:\ \bullet\in\{0,\ 1,\ \infty\}\ S,\ Q\text{ 如上}\}, \tag{3.57}$$

其中，左侧的（S,Q）遍历 $\{1,\ldots,\ell'\}$、$\{\ell'+1,\ldots,\ell'+m'\}$ 和 $\{\ell'+m'+1,\ldots,N\}$ 的适当子集的有序对；右侧的（S,Q）则根据 $\bullet$，遍历 $\{1,\ldots,\ell\}$、$\{\ell+1,\ldots,\ell+m\}$ 和 $\{\ell+m+1,\ldots,N\}$ 的适当子集的有序对。从方程 (3.57) 可以看出，

$$\dot{V}_{\ell,m,n}=(\sigma^{\mathrm{param}})^{-1}(\dot{V}_{\ell',m',n'}). \tag{3.58}$$

$\dot{\Omega}_{\ell,m,n}$ 的情形类似，但更复杂。

方程（3.56）可通过变量替换$x = \mathsf{T}_{\sigma^{-1}}(y)$证明其对 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in \Omega_{\ell,m,n}$ 成立。完整结果可通过解析延拓得到。□

3.4. 一种不尽理想的替代方法。对于 $\mathtt{I} \in \{(-\infty,0],[0,1],[1,\infty)\}$ 和 $r>0$，令 $\Gamma_{\mathtt{I},\pm,r}\colon (0,1) \to \mathbb{C}$定义如下：

$$\Gamma_{[0,1],\pm,r}(t) = \begin{cases} t \pm irt & (t \in (0,1/3)), \\ t \pm ir/3 & (t \in [1/3,2/3]), \\ t \pm ir/3 \mp ir(t-2/3) & (t \in (2/3,1)), \end{cases} \tag{3.59}$$

$\Gamma_{[1,\infty),\pm,r}(t) = \Gamma_{[0,1],\mp,r}(1-t)^{-1}$，以及 $\Gamma_{(-\infty,0],\pm,r}(t) = 1 - \Gamma_{[1,\infty),\mp,r}(1-t)$。注意，这些积分路径的像在上述变换 T_σ 作用下彼此置换。

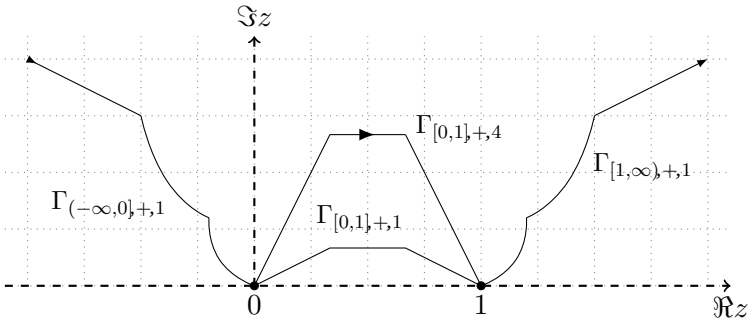


图 10. 积分路径 $\Gamma_{(-\infty,0],+,1}$, $\Gamma_{[0,1],+,1}$, $\Gamma_{[0,1],+,4}$, $\Gamma_{[1,\infty),+,1}$. 参见 [DF85a，图 16]。（就我们的目的而言，Dotsenko & Fateev 绘制的积分路径趋近$\pm\infty$ 时虚部太小。这就是为什么我们的 $\Gamma_{\mathtt{I},\pm,r}$ 对于 $\mathtt{I} \neq [0,1]$看起来不同。

假设 $F \in \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_N, x_N^{-1}]$。对于任意具有非空内部的紧集 $\mathbf{K} \Subset \mathbb{C}$，令$O = O[F,\mathbf{K}]$ 表示该集合。它依赖于 $\ell,m,n \in \mathbb{N}$，不过我们在记号上省略这种依赖；该集合由满足以下条件的 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \in \mathbb{C}^{2N}$ 组成：

$$\int_{\Gamma_{(-\infty,0],+,0}} \cdots \int_{\Gamma_{(-\infty,0],+,\ell-1}} \Big[\int_{\Gamma_{[0,1],+,0}} \cdots \int_{\Gamma_{[0,1],+,m-1}} \Big[\int_{\Gamma_{[1,\infty),+,0}} \cdots \int_{\Gamma_{[1,\infty),+,n-1}}$$
$$\Big(\prod_{j=1}^{N} z_j^{\alpha_j} (1-z_j)^{\beta_j} \Big) \prod_{1 \le j < k \le N} (z_k - z_j)^{2\gamma_{j,k}} F_0 \, \mathrm{d}z_N \cdots \mathrm{d}z_{\ell+m+1} \Big] \mathrm{d}z_{\ell+m} \cdots \mathrm{d}z_{\ell+1} \Big] \mathrm{d}z_\ell \cdots \mathrm{d}z_1 \tag{3.60}$$

当对所有 $j,\ k \in \{1、\ldots\ldots、N\}$ 以及每个 F 中的单项式 F_0，均有 $\gamma_{j,\,k} \in \mathbf{K}$ 且 $j<k$ 时，这是一个绝对收敛的勒贝格积分。在上述积分的定义中，我们将被积函数定义为不会遇到分支切割。对于这样的 $(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma})$，

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in \dot{V}_{\ell,m,n}[F], \tag{3.61}$$

且方程（3.60）中的积分等于 $I_{\ell,\ m,\ n}(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma})[F]$，前提是我们适当地选择分支。通过验证上述定义的积分关于其参数解析依赖，且当 $(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}) \in V_{\ell,\ m,\ n}[F]$ 时与 $I_{\ell,\ m,\ n}(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma})[F]$ 相等，即可证明这一陈述的后半部分；而后者则可通过轮廓变形论证证明。

集合 O 非空、开，且包含一个仿射锥。如果

- α_j 对于 $j \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ 具有充分大的实部，而对于 $j \in \mathcal{I}_3$具有充分小的实部，并且
- β_j 的实部足够大时，对于 $j \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3$ 成立；而实部足够小时，对于 $j \in \mathcal{I}1$</style}成立，

那么 $(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}) \in O[F,\mathsf{K}]$, 其中"足够大"的含义取决于 K。因此，给定任意子集 $S \subseteq \mathfrak{S}_\ell \times \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$，由下式定义的集合 $O^{S\cap}$

$$O^{S\cap} = \{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \in \mathbb{C}^{2N} : (\boldsymbol{\alpha}^\sigma,\boldsymbol{\beta}^\sigma) \in O[F^\sigma,\mathsf{K}^\sigma] \text{ for all } \sigma \in S\} \tag{3.62}$$

是开且非空的。如果 K 包含例如 -1，那么 $O[F,\mathsf{K}]$ 包含某个 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$，使得 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \notin V_{\ell,m,n}[F]$。因此，方程 (3.60) 为 $I_{\ell,m,n}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})[F]$ 在某个参数范围内提供了另一种定义。

命题 3.6. 考虑 $\bullet \in \{1,2,3\}$ 和 $j,k \in \boldsymbol{I}_\bullet$，其中 $j<k$ 且 $|j-k|=1$。假设 $\gamma_{j,k} \in \mathbb{Z}$。令 $\tau \in \mathfrak{S}_{\ell,m,n}$ 表示交换 j,k 的换位。那么，

$$\begin{aligned} I_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) - I_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^\tau = \int_{\Gamma_{(-\infty,0],+,0;1}} \cdots \int_{\Gamma_{(-\infty,0],+,\ell-1;\ell}} \Big[\\ \int_{\Gamma_{[0,1],+,0;\ell+1}} \cdots \int_{\Gamma_{[0,1],+,m-1;\ell+m}} \Big[\int_{\Gamma_{[1,\infty),+,0;\ell+m+1}} \cdots \int_{\Gamma_{[1,\infty),+,n-1;N}} \Big(\prod_{j_0=1}^N z_{j_0}^{\alpha_{j_0}} (1-z_{j_0})^{\beta_{j_0}} \Big) \\ \times \Big(\prod_{1 \le j_0 < k_0 \le N} (z_{k_0} - z_{j_0})^{2\gamma_{j_0,k_0}} \Big) F \, \mathrm{d}z_N \cdots \mathrm{d}z_{\ell+m+1} \Big] \, \mathrm{d}z_{\ell+m} \cdots \mathrm{d}z_{\ell+1} \Big] \, \mathrm{d}z_\ell \cdots \mathrm{d}z_1, \end{aligned} \tag{3.63}$$

只要 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in O^{\cap\{1,\tau\}}$，其中 $\Gamma_{\mathrm{I},+,r;i} = \Gamma_{\mathrm{I},+,r;i}$，除非 $i=j$，此时 $\Gamma_{\mathrm{I},+,r;i} = \Gamma_{\mathrm{I},+,r;i}(\{z_{i_0}\}_{i_0 \ne j})$ 是围绕 z_k 的小的逆时针圆，不绕过任何其他的 z 或 0,1. ■

证明。只需考虑 $F=1$ 的情形。事实上，如果 F 是一个单项式，那么我们只需将其吸收到对 $\boldsymbol{\alpha}$ 的重新定义中即可。集合 $O^{\cap\{1,\tau\}}$ 随着 F 中单项式集合的增大而减小，因此一旦对单项式证明了该结果，它便对所有 Laurent 多项式成立。

对于 $\bullet = 2$，该命题可通过直接的围道变形论证得出。情形 $\bullet \in \{1,3\}$ 可通过命题 $\bullet = 3$ 3.5归结为此。 □

3.5. 对称化。

令 $F \in \mathcal{A}^{\mathcal{D}}(A_{\ell,m,n})$。

命题 3.7. 对于任意 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in \cap_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\ell,m,n}} \Omega_{\ell,m,n}[F]^\sigma$,

$$\dot{I}_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\ell,m,n}} e^{i\Theta(\sigma^{-1})} \dot{S}_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^\sigma, \tag{3.64}$$

其中 $\Theta(\sigma) = 2\pi \sum_{1 \le j < k \le N} 1_{\sigma(j)>\sigma(k)} \gamma_{j,k}$。 ■

证明。由解析性可知，只需在上述量均为定义良好的勒贝格积分时证明该结果。将 $\square_{\ell,m,n}$ 分解为 $\ell!m!n!$ 个 $\triangle_{\ell,m,n}$ 的副本，

$$\begin{aligned} I_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\ell,m,n}} \int_{\triangle_{\ell,m,n}} \prod_{j=1}^N |x_j|^{\alpha_{\sigma(j)}} |1-x_j|^{\beta_{\sigma(j)}} \prod_{1 \le j < k \le N} (x_{\sigma^{-1}(k)} - x_{\sigma^{-1}(j)} + i0)^{2\gamma_{j,k}} \\ \times F(x_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, x_{\sigma^{-1}(N)}) \, \mathrm{d}^N x. \end{aligned} \tag{3.65}$$

右侧为

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\ell,m,n}} e^{i\Theta(\sigma^{-1})} \int_{\triangle_{\ell,m,n}} \prod_{j=1}^N |x_j|^{\alpha_{\sigma(j)}} |1-x_j|^{\beta_{\sigma(j)}} \prod_{1 \le j < k \le N} (x_k - x_j)^{2\gamma_{\sigma(j),\sigma(k)}} (F^\sigma) \, \mathrm{d}^N x, \tag{3.66}$$

即为方程 (3.64) 的右侧。 □

命题 3.8。 假设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 在所有 $\sigma\in\mathfrak{S}_{\ell,m,n}$ 下均保持不变，并进一步假设$F\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_N]^{\mathfrak{S}_{\ell,m,n}}$。那么，对于所有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\in\dot{\Omega}_{\ell,m,n}[F]$，

$$\dot{I}_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=\Big[\prod_{k=1}^{\ell}\frac{1-e^{2\pi ik\gamma_1}}{1-e^{2\pi i\gamma_1}}\Big]\Big[\prod_{k=1}^{m}\frac{1-e^{2\pi ik\gamma_2}}{1-e^{2\pi i\gamma_2}}\Big]\Big[\prod_{k=1}^{n}\frac{1-e^{2\pi ik\gamma_3}}{1-e^{2\pi i\gamma_3}}\Big]\dot{S}_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}),\quad(3.67)$$

其中，对于每个 $\bullet\in\{1、2、3\}$，$\gamma_\bullet=\gamma_j$，k 对于所有互不相同的 j、$k\in I_\bullet$。 ■

这里，我们将 $(1-e^{2\pi i\gamma})^{-1}(1-e^{2\pi ik\gamma})$ 视为整函数。

证明。 应用前一个命题，

$$I_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=\Big[\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_\ell}e^{\pi i\,\mathrm{o.o.}(\sigma)\gamma}\Big]\Big[\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}e^{\pi i\,\mathrm{o.o.}(\sigma)\gamma}\Big]\Big[\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}e^{\pi i\,\mathrm{o.o.}(\sigma)\gamma}\Big]S_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}),\quad(3.68)$$

其中 $\mathrm{o.o.}(\sigma)$ 是 σ 中逆序对的数量。我们使用代数恒等式

$$\mathbb{Z}[\zeta]\ni\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\zeta^{\mathrm{o.o.}(\sigma)}=\prod_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{n}\zeta^m=\prod_{n=1}^{N}\frac{1-\zeta^n}{1-\zeta},\quad(3.69)$$

该式对所有 $N\in\mathbb{N}$ 均成立，并刻画了 $\mathfrak{S}_N$ 与冒泡排序算法所有可能执行过程的集合之间的双射。代入 $\zeta=e^{\pi i\gamma}$ 后，方程 (3.68) 变为方程 (3.67)。 □

3.6. **Aomoto-Dotsenko–Fateev 关系**。固定 $N\in\mathbb{N}^+$和 $F\in\mathbb{C}[x_1,x_1^{-1},\dots,x_N,x_N^{-1}]$。对于每个 $j\in\{1,\dots,N\}$，令 $\sigma_j\in\mathfrak{S}_N$为如下置换：将 1 插入第 j 个位置，同时保持其余各项的相对顺序。也就是说，$\sigma_j=(1\ j\ j-1\cdots 2)$。

对于任意 $\ell\in\mathbb{N}^+$和 m，$n\in\mathbb{N}$且满足 $\ell+m+n=N$，令

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda}_{\ell,m,n}[F]&=\dot{V}_{\ell,m,n}[F]\cap\dot{V}_{\ell-1,m+1,n}[F]^{\sigma_\ell}\cap\dot{V}_{\ell-1,m,n+1}[F]^{\sigma_{\ell+m}}\\&=\dot{V}_{\ell,m,n}[F]\cap\dot{V}_{\ell-1,m+1,n}[F]^{\sigma_{\ell+m}}\cap\dot{V}_{\ell-1,m,n+1}[F]^{\sigma_N},\end{aligned}\quad(3.70)$$

$$\dot{\mho}_{\ell,m,n}[F]=(\cap_{j=1}^{\ell}\dot{\Omega}_{\ell,m,n}[F]^{\sigma_j})\cap(\cap_{j=\ell}^{\ell+m}\dot{\Omega}_{\ell-1,m+1,n}[F]^{\sigma_j})\cap(\cap_{j=\ell+m}^{N}\dot{\Omega}_{\ell-1,m,n+1}[F]^{\sigma_j}).\quad(3.71)$$

注意，$\dot{\mho}_{\ell,\,m,\,n}[F]$，$\dot{\Lambda}_{\ell,\,m,\,n}[F]$ 是 $\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}$ 的开、稠密且连通的子集，因为它们是局部有限个复仿射超平面之并的补集。

命题 3.9。对于任意 $(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma})\in\mho_{\ell,\,m,\,n}[F]$，

$$\begin{aligned}0=\sum_{j=1}^{\ell}e^{\pm i\theta_j}\dot{S}_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^{\sigma_j}+\sum_{j=\ell}^{\ell+m}e^{\pm i\vartheta_j}\dot{S}_{\ell-1,m+1,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^{\sigma_j}\\+\sum_{j=\ell+m}^{N}e^{\pm i\varphi_j}\dot{S}_{\ell-1,m,n+1}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^{\sigma_j}\end{aligned}\quad(3.72)$$

对于每一种符号选择均成立，其中 $\theta_j=2\pi\sum_{2\le j_0\le j}\gamma_{1,j_0}$，$\vartheta_j=\pi\alpha+2\pi\sum_{2\le j_0\le j}\gamma_{1,j_0}$，以及 $\varphi_j=\pi\alpha+\pi\beta+2\pi\sum_{2\le j_0\le j}\gamma_{1,j_0}$。 ■

证明。 不失一般性，我们可以假设 $F=1$。令 $\mho_{\ell,m,n}$ 表示由下式定义的 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\in\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}$ 的子集

$$\mho_{\ell,m,n}=\left\{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}):(\boldsymbol{\alpha}^{\sigma_j},\boldsymbol{\beta}^{\sigma_j},\boldsymbol{\gamma}^{\sigma_j})\in\begin{cases}\Omega_{\ell,m,n} & (j\in\{1,\dots,\ell-1\})\\ \Omega_{\ell-1,m+1,n} & (j\in\{\ell+1,\dots,\ell+m-1\})\\ \Omega_{\ell-1,m,n+1} & (j\in\{\ell+m+1,\dots,N\})\\ \Omega_{\ell,m,n}\cap\Omega_{\ell-1,m+1,n} & (j=\ell)\\ \Omega_{\ell-1,m+1,n}\cap\Omega_{\ell-1,m,n+1} & (j=\ell+m)\end{cases}\right\}.\quad(3.73)$$

令 $\varepsilon > 0$。对于每个 $F_1, F_2, F_3 > 0$ 以及满足 $\gamma < \overline{\gamma}$ 的 $\gamma, \overline{\gamma} \in (-(N-1)^{-1}, 0)$，令 $\mathfrak{V}_{0,F,\gamma,\overline{\gamma}}$（为简洁起见，省略对 ℓ, m, n 的依赖）表示满足以下条件的 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \in \mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}$ 集合

- $\gamma < \mathrm{R}\gamma_{j,k} < \overline{\gamma}$ 对所有 $j, k \in \{1, \ldots, N\}$ 满足 $j \neq k$，
- $F_1 < \mathrm{R}\alpha_j < F_2$ 对每个 $j \in \{2, \ldots, \ell\}$，$\mathrm{R}\alpha_j > F_1$ 对每个 $j \in \{\ell+1, \ldots, \ell+m\}$，以及 $\mathrm{R}\alpha_j < -F_3$ 对每个 $j \in \{\ell+m+1, \ldots, N\}$，
- $F_1 < \mathrm{R}\beta_j < F_2$ 对每个 $j \in \{\ell+m+1, \ldots, N\}$，$\mathrm{R}\beta_j > F_1$ 对每个 $j \in \{\ell+1, \ldots, \ell+m\}$，以及 $\mathrm{R}\beta_j < -F_3$ 对 $j \in \{2, \ldots, \ell\}$，

其中 $F = (F_1, F_2, F_3)$。集合 $\mathfrak{V}_{0,F,\gamma,\overline{\gamma}}$ 是开且非空的。根据方程（1.7）以及 $m < N$ 情形下方程（1.7）的类似结果，存在 $F_{00}, F_0, F_{01} > 0$（取决于 $\ell, m, n, \gamma, \overline{\gamma}$），使得

$$\mathfrak{V}_{F,\gamma,\overline{\gamma}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \in \mathfrak{V}_{0,F,\gamma,\overline{\gamma}} \text{ and } (\alpha_1, \beta_1) \in \Omega_{1,0,0} \cap \Omega_{0,1,0} \cap \Omega_{0,0,1}\} \subset \mathfrak{V}_{\ell,m,n} \tag{3.74}$$

只要 $F_2 > F_1 > F_0$ 且 $F_3 > F_{01}F_2 + F_{00}$。注意，$\Omega_{1,0,0} \cap \Omega_{0,1,0} \cap \Omega_{0,0,1}$ 是 $\mathbb{C}^2_{\alpha,\beta}$ 的子集，由不等式 $-1 < \mathrm{R}\alpha$，$\mathrm{R}\beta$ 以及 $\mathrm{R}\alpha + \mathrm{R}\beta < -1$ 定义。集合

$$\{(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < r_1, r_2 \text{ and } r_1 + r_2 < -1\} \tag{3.75}$$

是一个非空三角形。因此，$\mathfrak{V}_{F,\gamma,\overline{\gamma}}$ 是 $\mathbb{C}^{2N+N(N-1)/2}$ 的一个开且非空子集，而且还是 $\mathfrak{V}_{\ell,m,n}$ 的一个开且非空子集。

对于这样的 F 和 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \in \mathfrak{V}_{F,\gamma,\overline{\gamma}}$，方程（3.72）（其中 $F = 1$）可写为

$$0 = \sum_{j=1}^{\ell} e^{\pm i\theta_j} S_{\ell,m,n}[1](\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})^{\sigma_j} + \sum_{j=\ell}^{\ell+m} e^{\pm i\vartheta_j} S_{\ell-1,m+1,n}[1](\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})^{\sigma_j} + \sum_{j=\ell+m}^{N} e^{\pm i\varphi_j} S_{\ell-1,m,n+1}[1](\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})^{\sigma_j} \tag{3.76}$$

（注意 S 上没有点）。根据方程（3.72）中所有函数在 $\mathfrak{V}_{\ell,m,n}$ 上的解析性，只需证明方程（3.76）对这样的 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ 成立。

根据富比尼定理，方程（3.76）的右侧为

$$\int_{\triangle_{\ell-1,m,n}} \omega(x_2, \ldots, x_N) \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} (-x_1 \pm i0)^{\alpha_1} (1 - x_1 \pm i0)^{\beta_1} \Big(\prod_{j=2}^{N} (x_j - x \pm i0)^{2\gamma_{1,j}} \Big) \, \mathrm{d}x \Big] \, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_N, \tag{3.77}$$

其中 $\omega(x_2, \ldots, x_N) = [\prod_{j=2}^{N} |x_j|^{\alpha_j} |1 - x_j|^{\beta_j}] \prod_{2 \leq j < k \leq N} (x_k - x_j)^{2\gamma_{j,k}}$。由此即可得到所述结论

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (-x \pm i0)^{\alpha} (1 - x \pm i0)^{\beta} \Big(\prod_{j=2}^{N} (x_j - x \pm i0)^{2\gamma_j} \Big) \, \mathrm{d}x, \tag{3.78}$$

它对每个 $(x_2, \ldots, x_N) \in (\mathbb{R} \backslash \{0, 1\})^{N-1}$ 均成立，其中 $x_2, \ldots, x_N$ 两两不同，且所有 $\alpha, \beta, \gamma_2, \ldots, \gamma_N \in \mathbb{C}$ 均满足

- 方程（3.78）的被积函数属于 $L^1(\mathbb{R})$ 且
- $\mathrm{R}\gamma_j \in (-1, 0)$ 对所有 $j \in \{2, \ldots, N\}$。

将方程（3.78）的右侧记为 $\mathcal{I}_{\pm} = \mathcal{I}_{\pm}(x_2, \ldots, x_N; \alpha, \beta, \gamma_2, \ldots, \gamma_N)$。当 $R >$ 最大$\{|x_1|, \ldots, |x_{N-1}|\}$，

$$0 = \int_{\Gamma_{\mp}(R)} (-z \pm i0)^{\alpha} (1 - z \pm i0)^{\beta} \prod_{j=2}^{N} (x_j - z \pm i0)^{2\gamma_j} \, \mathrm{d}z, \tag{3.79}$$

其中 $\Gamma_{\pm}(R) = \Gamma_{\pm}(R)(x_2, \ldots, x_N) \subset \mathbb{C}$ 是连接 $-R$ 和 $+R$ 的半圆形围道（带有 $N+1$ 半圆形凹口，使围道避开 $x_2, \ldots, x_N$），其圆弧和半圆形

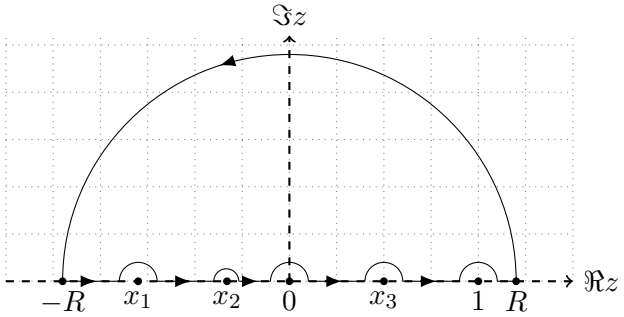


图 11. 当 $\ell = 2,\ m = 1,\ n = 0$ 时的围道 $\Gamma_+(R)$。

位于半平面内的凹口 $\{z \in \mathbb{C}:\ \ \pm Iz \geq 0\}$。参见图 11。在方程 (3.79) 中，被积函数的分支切线定义在负实轴上，因此

$$(x - z \pm i0)^{2\gamma_j} = \begin{cases} \exp(2\gamma_j(\log|x-z| + i\arg(x-z))) & (+\text{ case}, \Im z \leq 0), \\ \exp(2\gamma_j(\log|x-z| - 2\pi i + i\arg(x-z))) & (-\text{ case}, \Im z \geq 0), \end{cases} \tag{3.80}$$

对于任意 $x \in \mathbb{R}$，其中 $\arg(x-z) \in [0, 2\pi)$。我们将 Γ_+ 定向为逆时针，将 Γ_- 定向为顺时针。

令 $\Gamma_{++}(R)$ 表示 $\Gamma_+(R)$ 的大弧，$\Gamma_{+0}(R)$ 表示其余部分；同样，令 $\Gamma_{--}(R)$ 表示 $\Gamma_-(R)$ 的大弧，$\Gamma_{-0}(R)$ 表示其余部分。那么，

$$\mathcal{I}_\pm = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_{\mp 0}(R)} (-z \pm i0)^\alpha (1 - z \pm i0)^\beta \prod_{j=2}^{N} (x_j - z \pm i0)^{2\gamma_j}\, \mathrm{d}z. \tag{3.81}$$

另一方面，当 R 充分大时，

$$\Big| \int_{\Gamma_{\mp\mp}(R)} (-z \pm i0)^\alpha (1 - z \pm i0)^\beta \prod_{j=2}^{N} (x_j - z \pm i0)^{2\gamma_j}\, \mathrm{d}x \Big| \leq \pi (2R)^{1+\Re\alpha+\Re\beta} = O(R^{-\varepsilon}) \tag{3.82}$$

对于某个 $\varepsilon > 0$ 取决于 $(\alpha,\ \beta) \in \Omega_{1,\ 0,\ 0} \cap \Omega_{0,\ 1,\ 0} \cap \Omega_{0,0,1}$。结合方程（3.79）、方程（3.81）和方程（3.82），我们得到 $\mathcal{I}_\pm = 0$。 □

命题 3.10。对于任意 $F \in \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_N, x_N^{-1}]$,

$$\begin{aligned} 0 = \dot{I}_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) &+ e^{+\pi i(\alpha+2\sum_{j=2}^{\ell}\gamma_{1,j})} \dot{I}_{\ell-1,m+1,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^{\sigma_\ell} \\ &+ e^{+\pi i(\alpha+\beta+2\sum_{j=2}^{\ell+m}\gamma_{1,j})} \dot{I}_{\ell-1,m,n+1}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^{\sigma_{\ell+m}} \end{aligned} \tag{3.83}$$

$$\begin{aligned} 0 = \dot{I}_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^{\sigma_\ell} &+ e^{-\pi i(\alpha+2\sum_{j=2}^{\ell}\gamma_{1,j})} \dot{I}_{\ell-1,m+1,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^{\sigma_{\ell+m}} \\ &+ e^{-\pi i(\alpha+\beta+2\sum_{j=2}^{\ell+m}\gamma_{1,j})} \dot{I}_{\ell-1,m,n+1}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^{\sigma_N} \end{aligned} \tag{3.84}$$

对所有 $(\boldsymbol{\alpha}、\ \boldsymbol{\beta}、\ \boldsymbol{\gamma}) \in \Lambda_{\ell,\ m,\ n}[F]$均成立。 ■

证明。令 $\mathfrak{S}'_{\ell\ ,m,n}$ 表示 $\mathfrak{S}_{\ell,\ m,\ n}$ 的杨子群，其中的置换固定 1，即

$$\mathfrak{S}'_{\ell,m,n} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{\ell,m,n} \text{ s.t. } \sigma(1) = 1\}. \tag{3.85}$$

根据解析性，只需证明对所有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in \bigcap_{\sigma\in\mathfrak{S}'_{\ell,m,n}} \mho_{\ell,m,n}[F]^\sigma$.

对于这样的 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$，我们可以引用前面的命题得到

$$0=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}'_{\ell,m,n}}e^{\pi i\Theta(\sigma^{-1})}\Big[\sum_{j=1}^{\ell}e^{\pm i\theta_j^{\sigma}}\dot{S}_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^{\sigma_j\sigma}+\sum_{j=\ell}^{\ell+m}e^{\pm i\vartheta_j^{\sigma}}\dot{S}_{\ell-1,m+1,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^{\sigma_j\sigma}+\sum_{j=\ell+m}^{N}e^{\pm i\varphi_j^{\sigma}}\dot{S}_{\ell-1,m,n+1}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^{\sigma_j\sigma}\Big],\tag{3.86}$$

其中 $\theta_j^{\sigma}=2\pi\sum_{2\le j_0\le j}\gamma_{1,\,\sigma(j_0)}$，$\vartheta_j^{\sigma}=\pi\alpha+2\pi\sum_{2\le j_0\le j}\gamma_{1,\,\sigma(j_0)}$，以及 $\varphi_j^{\sigma}=\pi\alpha+\pi\beta+2\pi\sum_{2\le j_0\le j}\gamma_{1,\,\sigma(j_0)}$。乘法的顺序使得 $\sigma_j\sigma$ 是一个满足条件的置换 $(\sigma_j\sigma)(1)=j$。在方程 (3.86) 中，Θ 的定义与命题 3.7相同。

每个 $\sigma_0\in\mathfrak{S}_{\ell,\,m,\,n}$ 都具有形式 $\sigma_0=\sigma_j\sigma$，其中某个 $j\in\{1,\,\ldots\ldots,\,N\}$ 以及 $\sigma\in\mathfrak{S}_{\ell,\,m,\,n}$ 满足$\sigma(1)=1$。可以看出

$$\Theta(\sigma_0^{-1})=\Theta(\sigma^{-1})+\theta_j^{\sigma}.\tag{3.87}$$

利用命题 3.7，我们验证方程 (3.86) 的两种情形分别得到两个结果，即方程 (3.83) 和方程 (3.84)。例如，

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}'_{\ell,m,n}}e^{\pi i\Theta(\sigma^{-1})}\sum_{j=1}^{\ell}e^{+i\theta_j^{\sigma}}\dot{S}_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^{\sigma_j\sigma}&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\ell,m,n}}e^{\pi i\Theta(\sigma^{-1})}\dot{S}_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^{\sigma}\\&=\dot{I}_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}).\end{aligned}\tag{3.88}$$

方程 (3.86) 中‘+’情形下的另外两个和也有类似的结论，从而得到方程 (3.83)。‘–’情形也可进行类似计算。□

3.7. 对称情形和 DF 对称情形。固定 $F\in\mathcal{A}^{\mathcal{D}}(A_{\ell,m,n})$，不要求其对称。我们假设，对于所有 $\mathrm{F}_{S,Q;\bullet}\in\mathcal{F}(A_{\ell,m,n})$，$d_{\mathrm{F}_{S,Q;\bullet}}\in\mathbb{Z}$。令

$$\delta_k=\min\{d_{\mathrm{F}_{S,Q;0}}:S\subseteq\mathcal{I}_1,Q\subseteq\mathcal{I}_2,|S\cup Q|=k\}\tag{3.89}$$

对每个 $k\in\{1,\ldots,\ell+m\}$，

$$_k=\min\{d_{\mathrm{F}_{S,Q;1}}:S\subseteq\mathcal{I}_2,Q\subseteq\mathcal{I}_3,|S\cup Q|=k\}\tag{3.90}$$

对每个 $k\in\{1,\ldots,m+n\}$，并且

$$d_k=-\min\{d_{\mathrm{F}_{S,Q;\infty}}:S\subseteq\mathcal{I}_3,Q\subseteq\mathcal{I}_1,|S\cup Q|=k\}\tag{3.91}$$

对每个 $k\in\{1,\ldots,\ell+n\}$。这里，我们遍历所有 $\{d_{\mathrm{F}}\}_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(A_{\ell,m,n})}\in\mathcal{D}$。

令 $\dot{W}_{\ell,m,n}[\mathrm{D}]$ 表示满足以下条件的 $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3$ 的集合：只要 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\in\dot{V}_{\ell,m,n}[\mathrm{D}]$，且 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 的分量由 $\alpha_j=\alpha$ 给出，并且对所有指标 $j\in\{1,\ldots,N\}$ 均有 $\beta_j=\beta$；对所有$j,k\in\{1,\ldots,N\}$ 均有 $\gamma_{j,k}=\gamma$，其中 $j<k$。

Prop命题 3.11. 存在一个整函数 $\dot{I}_{\ell,m,n;\mathrm{Reg}}[F]:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}$，使得

$$\begin{aligned}\dot{I}_{\ell,m,n}[F](\alpha,\beta,\gamma)=&\Big[\prod_{k=1}^{\ell+m}\Gamma(\delta_k+k(1+\alpha+(k-1)\gamma))\Big]\Big[\prod_{k=1}^{m+n}\Gamma(\ _k+k(1+\beta+(k-1)\gamma))\Big]\\&\times\Big[\prod_{k=1}^{\ell+n}\Gamma(-d_k-k(1+\alpha+\beta+(2N-k-1)\gamma))\Big]\dot{I}_{\ell,m,n;\mathrm{Reg}}[F](\alpha,\beta,\gamma)\end{aligned}\tag{3.92}$$

对所有 $(\alpha,\beta,\gamma)\in W_{\ell,m,n}[\boldsymbol{D}]$。 ■

证明。 由命题 3.4得出。 □

为便于后文引用，考虑特殊情形 $F \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_N]^{\mathfrak{S}_N}$。参照方程 (1.14)、方程 (1.15) 和方程 (1.28)，按惯例令 $d_{\mathrm{F}_{S,Q;0}} = \delta_j[F]$, $d_{\mathrm{F}_{S,Q;1}} = \ _j[F]$, 以及 $d_{\mathrm{F}_{S,Q;\infty}} = \deg_j[F]$, 其中 $S,Q \subseteq\{1,\dots,N\}$; 对每个 S 和 Q，有 $j = |S \cup Q|$。于是，由方程 (2.23)、方程 (2.25) 和方程 (2.27) 可直接得到,

$$F \in \prod_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}(A_{\ell,m,n})} x_{\mathrm{F}}^{d_{\mathrm{F}}} C^\infty(A_{\ell,m,n}). \tag{3.93}$$

因此，令 $\mathcal{D}$ 表示上述整数的集合， $F \in \mathcal{A}^{\mathcal{D}}(A_{\ell,m,n})$。因此，我们可以应用上述结果，其中 $\delta_j = \delta_j[F]$、$_j = \ _j[F]$, 且 $d_j = -\deg_j[F]$。

现在我们转向“DF0 对称”情形。对于任意 $\mathtt{S} \subseteq \{1,\dots,N\}$，令

$$\dot{W}^{\mathrm{DF0},\mathtt{S}}_{\ell,m,n}[F] = \{(\alpha_-,\alpha_+,\beta_-,\beta_+,\gamma_-,\gamma_0,\gamma_+) \in \mathbb{C}^7 : (\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{DF0}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{DF0}},\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{DF0}}) \in \dot{V}_{\ell,m,n}[F]\}. \tag{3.94}$$

这是 $\mathbb{C}^7$ 的一个稠密、开且连通的子集，并且只通过数值 $|\mathtt{S} \cap \mathcal{I}_j|$ 依赖于 $\mathtt{S}$。实际上，稍后我们需要一个略微精细化的版本；令

$$\dot{W}^{\mathrm{DF1},\mathtt{S}}_{\ell,m,n}[F] = \{(\alpha_{-,1},\alpha_{-,2},\alpha_{-,3},\alpha_{+,1},\alpha_{+,2},\alpha_{+,3},\beta_{-,1},\beta_{-,2},\beta_{-,3},\beta_{+,1},\beta_{+,2},\beta_{+,3},\gamma_-,\gamma_0,\gamma_+) \in \mathbb{C}^9 : (\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{DF1}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{DF1}},\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{DF0}}) \in \dot{V}_{\ell,m,n}[F]\}, \tag{3.95}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{DF1}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{DF1}}$ 定义为其 DF0 对应项，但第 j 个分量的定义使用 $\alpha_{+,\nu}$ 代替 α_+，并对 $\nu \in \mathcal{I}_\nu$ 使用 $\beta_{+,\nu}$ 代替 β_+。

对于 $(\alpha_-,\alpha_+,\beta_-,\beta_+,\gamma_-,\gamma_0,\gamma_+) \in \dot{W}_{\mathrm{DF}\ \ell\ m\ 0\ \mathtt{S}\ ,,,n}[F]$, 令

$$\dot{I}^{\mathrm{DF0};\mathtt{S}}_{\ell,m,n}[F](\alpha_-,\alpha_+,\beta_-,\beta_+,\gamma_-,\gamma_0,\gamma_+) = \dot{I}_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{DF0}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{DF0}},\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{DF0}}). \tag{3.96}$$

令 $\ell_+ = \mathtt{S} \cap \mathcal{I}_1$, $\ell_- = \ell - \ell_+$, $m_+ = \mathtt{S} \cap \mathcal{I}_2$, $m_- = m - m_+$, $n_+ = \mathtt{S} \cap \mathcal{I}_3$, 以及 $n_- = n - n_+$。设$N_+ = |\mathtt{S}|$ 和 $N_- = N - N_+$。

现在假设 $F \in \mathcal{A}^{\mathcal{D}}(A_{\ell,m,n})$ 分别关于变量 $\{x_i\}_{i\in\mathtt{S}}$ 和 $\{x_i\}^{i\notin\mathtt{S}}$ 对称。令

$$\delta_{j_-,j_+} = \min\{d_{\mathrm{F}_{S,Q;0}} : S \subseteq \mathcal{I}_1, Q \subseteq \mathcal{I}_2, |(S\cup Q)\backslash\mathtt{S}| = j_-, |(S\cup Q)\cap\mathtt{S}| = j_+\} \tag{3.97}$$

对于 $j_- \in \{1,\dots,\ell_- + m_-\}$ 以及 $j_+ \in \{1,\dots,\ell_+ + m_+\}$,

$$_{j_-,j_+} = \min\{d_{\mathrm{F}_{S,Q;1}} : S \subseteq \mathcal{I}_2, Q \subseteq \mathcal{I}_3, |(S\cup Q)\backslash\mathtt{S}| = j_-, |(S\cup Q)\cap\mathtt{S}| = j_+\} \tag{3.98}$$

对于 $j_- \in \{1,\dots,m_- + n_-\}$ 以及 $j_+ \in \{1,\dots,m_+ + n_+\}$, and

$$d_{j_-,j_+} = -\min\{d_{\mathrm{F}_{S,Q;\infty}} : S \subseteq \mathcal{I}_3, Q \subseteq \mathcal{I}_1, |(S\cup Q)\backslash\mathtt{S}| = j_-, |(S\cup Q)\cap\mathtt{S}| = j_+\} \tag{3.99}$$

对于 $j_- \in \{1,\dots,\ell_- + n_-\}$ 和 $j_+ \in \{1,\dots,\ell_+ + n_+\}$。类似于上述论证，可得:

命题 3.12. 存在一个整函数 $I^{\mathrm{DF0;S}}_{\ell\,m\,n\ ,,;\mathrm{Reg}}[F]:\mathbb{C}^7\to\mathbb{C}$ 使得

$$\begin{aligned}\dot{I}^{\mathrm{DF0}}_{\ell,m,n}[F](\alpha_-,\alpha_+,\beta_-,\beta_+,\gamma_-,\gamma_0,\gamma_+) &= I^{\mathrm{DF0}}_{\ell,m,n;\mathrm{Reg}}[F](\alpha_-,\alpha_+,\beta_-,\beta_+,\gamma_-,\gamma_0,\gamma_+)\\ &\times\Big[\prod_{j_-=1}^{\ell_-+m_-}\prod_{j_+=1}^{\ell_++m_+}\Gamma(\delta_{j_-,j_+}+j_-(1+\alpha_-+(j_--1)\gamma_-)+j_+(1+\alpha_++(j_+-1)\gamma_+)+2\gamma_0 j_-j_+)\Big]\\ &\times\Big[\prod_{j_-=1}^{m_-+n_-}\prod_{j_+=1}^{m_++n_+}\Gamma(\ _{j_-,j_+}+j_-(1+\beta_-+(j_--1)\gamma_-)+j_+(1+\beta_++(j_+-1)\gamma_+)+2\gamma_0 j_-j_+)\Big]\\ &\times\Big[\prod_{j_-=1}^{\ell_-+n_-}\prod_{j_+=1}^{\ell_++n_+}\Gamma(-d_{j_-,j_+}-j_-(1+\alpha_-+\beta_-+(2N_--j_--1)\gamma_-)\\ &\qquad -j_+(1+\alpha_++\beta_++(2N_+-j_+-1)\gamma_+)-2\gamma_0 j_-j_+)\Big]\end{aligned}\tag{3.100}$$

当 $(\alpha_-,\alpha_+,\beta_-,\beta_+,\gamma_-,\gamma_0,\gamma_+)\in\dot{W}^{\ 0}_{\mathrm{DF}\ell\,m\ ,,n}[F]$ 时成立。 ■□

4. 去除奇点

与前几节一样，固定 $\ell,m,n\in\mathbb{N}$，且不全为零，并令 $N=\ell+m+n$ 和 $\mathcal{I}_1=\{1,\dots,\ell\}$、$\mathcal{I}_2=\{\ell+1,\dots,\ell+m\}$ 以及 $\mathcal{I}_3=\{\ell+m+1,\dots,N\}$。对于 $k\in\mathbb{N}$，令

$$\digamma_k:\mathbb{C}_\gamma\backslash\{k\gamma\in\mathbb{Z}^{\leq -1}\text{ and }\gamma\notin\mathbb{Z}\}\to\mathbb{C}\tag{4.1}$$

表示由 $\digamma_k(\gamma)=\Gamma(1+\gamma)^{-1}\Gamma(1+k\gamma)$ 给出的解析函数，其中 $k\gamma\notin\mathbb{Z}^{\leq -1}$。我们可以将$\digamma_k^{-1}$视为整函数。

4.1. 定理 对称情形。 固定 $F\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_N]^{\mathfrak{S}_N}$，并令 $\delta_j,\ \ j,\ \ d_j\in\mathbb{N}$如上 e.

令$\dot{U}_{\ell,\ m,\ n}[F]$表示满足以下条件的$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\in\mathbb{C}^3$的集合：当 $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}$时，$(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma})\in\dot{\Omega}_{\ell,\ m,\ n}[F]$的各分量由 $\alpha_j=\alpha$ 和 $\beta_j=\beta$ 给出，对所有指标 $j\in\{1,\ \dots,\ N\}$ 以及 $\gamma_{j,\ k}=\gamma$均成立。因此，我们可以定义

$$\dot{S}_{\ell,m,n}[F](\alpha,\beta,\gamma)=\dot{S}_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\tag{4.2}$$

对于任意$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\in\dot{U}_{\ell,\ m,\ n}[F]$。

命题 4.1。 由以下方式定义的函数 $S^{\mathrm{reg}}_{\ell\,m,\ ,\ n}[F]:\ \dot{U}_{\ell,\ m,\ n}[F]\to\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}S^{\mathrm{reg}}_{\ell,m,n}[F](\alpha,\beta,\gamma) &= \Big[\prod_{k=1}^{\ell+m}\Gamma(\delta_k+k(1+\alpha+(k-1)\gamma))\Big]^{-1}\\ &\times\Big[\prod_{k=1}^{m+n}\Gamma(\ _k+k(1+\beta+(k-1)\gamma))\Big]^{-1}\Big[\prod_{k=1}^{\ell+n}\Gamma(-d_k-k(1+\alpha+\beta+(N+k-2)\gamma))\Big]^{-1}\\ &\times\Big[\prod_{k=1}^{\ell}\frac{1}{\digamma_k(\gamma)}\Big]\Big[\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{\digamma_k(\gamma)}\Big]\Big[\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\digamma_k(\gamma)}\Big]\dot{S}_{\ell,m,n}[F](\alpha,\beta,\gamma)\end{aligned}\tag{4.3}$$

可延拓为整函数 $\mathbb{C}^3_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}\to\mathbb{C}$。 ■

证明。• 由于方程（4.3）右侧由所有 函数的倒数组成的前因子是整函数，因此 $_{,n}[F]$ 可延拓为定义在 $\dot{U}_{\ell,m,n}[F]$ 上的解析函数；该区域是 $\dot{S}_{\ell,m,n}[F](\alpha,\beta,\gamma)$ 的定义域。

• 对于所有 $(\alpha,\beta,\gamma)\in U_{\ell,m,n}[F]$，我们有

$$\Big[\prod_{k=1}^{\ell}\frac{1-e^{2\pi ik\gamma}}{1-e^{2\pi i\gamma}}F_k(\gamma)\Big]\Big[\prod_{k=1}^{m}\frac{1-e^{2\pi ik\gamma}}{1-e^{2\pi i\gamma}}F_k(\gamma)\Big]\Big[\prod_{k=1}^{n}\frac{1-e^{2\pi ik\gamma}}{1-e^{2\pi i\gamma}}F_k(\gamma)\Big]S^{\mathrm{reg}}_{\ell,m,n}[F](\alpha,\beta,\gamma)$$
$$= I_{\ell,m,n;\mathrm{Reg}}[F](\alpha,\beta,\gamma) \quad (4.4)$$

由命题 3.8。由命题 3.11，这可延拓为整函数 $\mathbb{C}^3_{\alpha,\beta,\gamma}\to\mathbb{C}$。

乘积 $F_k(\gamma)(1-e^{2\pi ik\gamma})(1-e^{2\pi i\gamma})^{-1}$ 去掉可去奇点后，当且仅当 $k\gamma\in\mathbb{N}$ 和 $\gamma\notin\mathbb{N}$ 时为零。因此，$S^{\mathrm{reg}}_{\ell\,m\,,n}[F]$ 可延拓为定义在.....上的解析函数

$$\mathbb{C}^3_{\alpha,\beta,\gamma}\setminus\cup_{k=2}^{M}\{k\gamma\in\mathbb{N},\gamma\notin\mathbb{N}\}, \quad (4.5)$$

其中 $M=\max\{\ell,m,n\}$。

结合这两个观察，$S^{\mathrm{reg}}_{\ell\,m,,n}[F]$ 可延拓为定义在 $\dot U_{\ell,m,n}[F]\cup(\mathbb{C}^3_{\alpha,\beta,\gamma}\setminus\cup_{k=2}^{M}\{k\gamma\in\mathbb{N},\gamma\notin\mathbb{N}\})$ 上的解析函数。

集合 $\cup_{k=2}^{M}\{k\gamma\in\mathbb{N},\gamma\notin\mathbb{N}\}$ 是超平面的并集，并且与

$$\bigcup_{k=1}^{N}\{k(k+1)\gamma\in\mathbb{Z}^{\leq -k}\}, \quad (4.6)$$

因此 $\dot U_{\ell,m,n}[F]\cup(\mathbb{C}^3_{\alpha,\beta,\gamma}\setminus\cup_{k=2}^{M}\{k\gamma\in\mathbb{N},\gamma\notin\mathbb{N}\})$ 是 $\mathbb{C}^3_{\alpha,\beta,\gamma}$ 中 $\mathbb{C}^3$ 的局部有限复余维 2 仿射子空间集合的补集。因此，由 Hartog 延拓定理可得结果。□

对于任意 $\ell\in\mathbb{N}^+$ 和 $m,n\in\mathbb{N}$,

$$\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3:(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\in\dot{\mho}_{\ell,m,n}[F]\}=\dot U_{\ell,m,n}[F]\cap\dot U_{\ell-1,m+1,n}[F]\cap\dot U_{\ell-1,m,n+1}[F]. \quad (4.7)$$

命题 3.9 的对称情形在两边同乘 $1-e^{\pm 2i\gamma}$, 后为

$$0=(1-e^{\pm 2\pi i\ell\gamma})\dot S_{\ell,m,n}[F](\alpha,\beta,\gamma)+e^{\pm\pi i(\alpha+2(\ell-1)\gamma)}(1-e^{\pm 2\pi i(m+1)\gamma})\dot S_{\ell-1,m+1,n}[F](\alpha,\beta,\gamma)$$
$$+e^{\pm\pi i(\alpha+\beta+2(\ell-1+m)\gamma)}(1-e^{\pm 2\pi i(n+1)\gamma})\dot S_{\ell-1,m,n+1}[F](\alpha,\beta,\gamma) \quad (4.8)$$

对于所有 (α,β,γ) 属于方程 4.7 所定义的集合。定义

$$O_{N;0}=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3:\alpha+j\gamma\notin\mathbb{Z}\text{ for any }j\in\{0,\dots,N-1\}\}, \quad (4.9)$$
$$O_{N;1}=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3:\beta+j\gamma\notin\mathbb{Z}\text{ for any }j\in\{0,\dots,N-1\}\}. \quad (4.10)$$

命题 4.2 （参见 [DF85a][Aom87][FW08]）。

• 对于所有 $(\alpha,\beta,\gamma)\in\dot U_{N,0,0}[F]\cap\dot U_{0,N,0}[F]\cap O_{N;1}$,

$$\dot S_{0,N,0}[F](\alpha,\beta,\gamma)=(-1)^N\Big[\prod_{m=0}^{N-1}\frac{\sin(\pi(\alpha+\beta+(N+m-1)\gamma))}{\sin(\pi(\beta+m\gamma))}\Big]\dot S_{N,0,0}[F](\alpha,\beta,\gamma). \quad (4.11)$$

• 对于所有 $(\alpha,\beta,\gamma)\in\dot U_{0,\,N,\,0}[F]\cap\dot U_{0,\,0,\,N}[F]\cap O_{N;\,0}$,

$$\dot S_{0,N,0}[F](\alpha,\beta,\gamma)=(-1)^N\Big[\prod_{m=0}^{N-1}\frac{\sin(\pi(\alpha+\beta+(N+m-1)\gamma))}{\sin(\pi(\alpha+m\gamma))}\Big]\dot S_{0,0,N}[F](\alpha,\beta,\gamma). \quad (4.12)$$

■

证明。我们证明第二个结论；第一个结论的证明类似。假设

$$(\alpha,\beta,\gamma)\in\bigcap_{n=0}^{N}\dot{U}_{0,N-n,n}[F]\cap\bigcap_{n=0}^{N-1}\dot{U}_{1,N-1-n,n}[F]. \tag{4.13}$$

我们可以对4.8) 应用方程 ($\ell=1$ ，并对 m 的所有有序对， $n\in\{0,\ldots,N-1\}$ ，使得 $m+n=N-1$。将方程 (4.8) 的加号和减号两种情形结合起来，以消去 $S_{1,\,N-n-1,\,n}[F]$ 项，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\Big[e^{+\pi i\alpha}\frac{1-e^{+2\pi i(m+1)\gamma}}{1-e^{+2\pi i\gamma}}-e^{-\pi i\alpha}\frac{1-e^{-2\pi i(m+1)\gamma}}{1-e^{-2\pi i\gamma}}\Big]\dot{S}_{0,N-n,n}[F](\alpha,\beta,\gamma)\\ =-\frac{1}{2i}\Big[e^{+\pi i(\alpha+\beta+2(N-n-1)\gamma)}\frac{1-e^{+2\pi i(n+1)\gamma}}{1-e^{+2\pi i\gamma}}-e^{-\pi i(\alpha+\beta+2(N-n-1)\gamma)}\frac{1-e^{-2\pi i(n+1)\gamma}}{1-e^{-2\pi i\gamma}}\Big]\\ \times\dot{S}_{0,N-n-1,n+1}[F](\alpha,\beta,\gamma)\end{aligned} \tag{4.14}$$

若 $\gamma\notin\mathbb{Z}$。我们计算:

$$\frac{1}{2i}\Big[e^{+\pi i\alpha}\frac{1-e^{+2\pi i(N-n)\gamma}}{1-e^{+2\pi i\gamma}}-e^{-\pi i\alpha}\frac{1-e^{-2\pi i(N-n)\gamma}}{1-e^{-2\pi i\gamma}}\Big]=\frac{2s(\gamma)s(\alpha+(N-n-1)\gamma)s((N-n)\gamma)}{1-\cos(2\pi\gamma)} \tag{4.15}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\Big[e^{+\pi i(\alpha+\beta+2(N-n-1)\gamma)}\frac{1-e^{+2\pi i(n+1)\gamma}}{1-e^{+2\pi i\gamma}}-e^{-\pi i(\alpha+\beta+2(N-n-1)\gamma)}\frac{1-e^{-2\pi i(n+1)\gamma}}{1-e^{-2\pi i\gamma}}\Big]\\ =\frac{2s(\gamma)}{1-\cos(2\pi\gamma)}s(\alpha+\beta+(2N-n-2)\gamma)s((n+1)\gamma),\end{aligned} \tag{4.16}$$

其中 $s(t)=\sin(\pi t)$。因此，对于 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ 如上所述，且方程（4.15）右侧的三角因子均不为零，

$$\dot{S}_{0,N-n,n}[F](\alpha,\beta,\gamma)=-\frac{s(\alpha+\beta+(2N-n-2)\gamma)s((n+1)\gamma)}{s(\alpha+(N-n-1)\gamma)s((N-n)\gamma)}\dot{S}_{0,N-1-n,n+1}[F](\alpha,\beta,\gamma). \tag{4.17}$$

递归地对 $n=0,\ldots,N-1$应用此式，最终得到方程（4.12）。

总之，方程 (4.12) 在 $(\alpha,\beta,\gamma)\in U_{0,N}[F]\cap Q_{N;0}$ 根据解相性，结论成立。□

命题 4.3。 函数 $S_{N;\mathrm{Reg}}[F](\alpha,\beta,\gamma)$ 定义为

$$S_{N;\mathrm{Reg}}[F](\alpha,\beta,\gamma)=\Big[\prod_{j=1}^{N}\frac{\Gamma(2+\bar{d}_j+\alpha+\beta+(N+j-2)\gamma)}{\Gamma(1+\bar{\delta}_j+\alpha+(j-1)\gamma)\Gamma(1+\bar{\ }_j+\beta+(j-1)\gamma)F_j(\gamma)}\Big]S_N[F](\alpha,\beta,\gamma) \tag{4.18}$$

可延拓为整函数 $S_{N;\mathrm{Reg}}[F]:\mathbb{C}^3_{\alpha,\beta,\gamma}\to\mathbb{C}$。 ■

证明。 我们首先定义 $\mathbb{C}^3$的以下开（且稠密）子集:

$$\begin{aligned}Q_{N;0}&=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3:\bar{\delta}_j+\alpha+(j-1)\gamma\notin\mathbb{N}\text{ for any }j\in\{1,\ldots,N\}\},\\ Q_{N;1}&=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3:\bar{\ }_j+\beta+(j-1)\gamma\notin\mathbb{N}\text{ for any }j\in\{1,\ldots,N\}\},\\ Q_{N;\infty}&=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3:\bar{d}_j+\alpha+\beta+(N+j-2)\gamma\notin\mathbb{Z}^{\leq-2}\text{ for any }j\in\{1,\ldots,N\}\},\\ U_{N;0}&=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3:\delta_j+j(\alpha+(j-1)\gamma)\notin\mathbb{Z}^{\leq-j}\text{ for any }j\in\{1,\ldots,N\}\},\\ U_{N;1}&=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3:\ _j+j(\beta+(j-1)\gamma)\notin\mathbb{Z}^{\leq-j}\text{ for any }j\in\{1,\ldots,N\}\},\\ U_{N;\infty}&=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3:-d_j-j(1+\alpha+\beta+(N+j-2)\gamma)\notin\mathbb{Z}^{\leq0}\text{ for any }j\in\{1,\ldots,N\}\}\\ &=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3:d_j+j(1+\alpha+\beta+(N+j-2)\gamma)\notin\mathbb{N}\text{ for any }j\in\{1,\ldots,N\}\}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

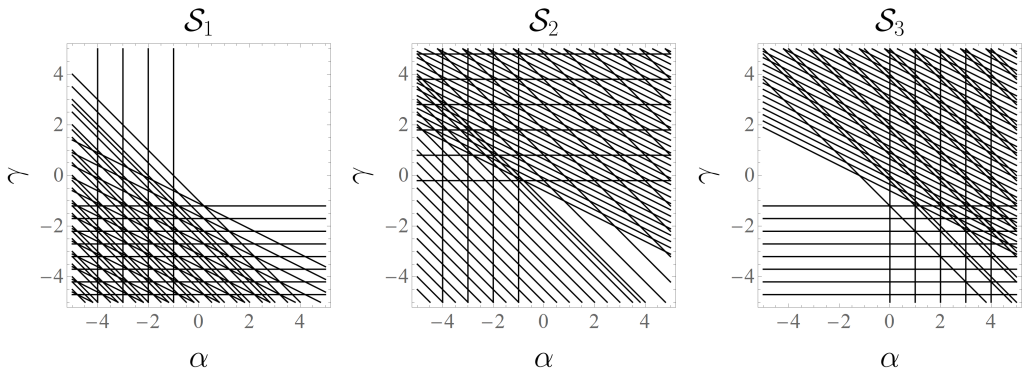


图 12. 在 $\mathbb{R}^3_{\alpha、\beta、\gamma}$ 内、$\beta = 1/5$ 的情形下，$_1$、$_2$、$_3$ 中的集合。

记作

$$S_{N;\mathrm{Reg}}[F](\alpha,\beta,\gamma) = \Upsilon_0(\alpha,\beta,\gamma)\Upsilon_1(\alpha,\beta,\gamma) \times \Big[\prod_{j=1}^{N}\Gamma(\delta_j + j(1+\alpha+(j-1)\gamma))\Gamma(\ _j + j(1+\beta+(j-1)\gamma))F_j(\gamma)\Big]^{-1} S_N[F](\alpha,\beta,\gamma) \quad (4.20)$$

for

$$\Upsilon_0(\alpha,\beta,\gamma) = \prod_{j=1}^{N}\frac{\Gamma(\delta_j + j(1+\alpha+(j-1)\gamma))\Gamma(\ _j + j(1+\beta+(j-1)\gamma))}{\Gamma(1+\bar{\delta}_j+\alpha+(j-1)\gamma)\Gamma(1+\bar{}_j+\beta+(j-1)\gamma)}, \quad (4.21)$$

$$\Upsilon_1(\alpha,\beta,\gamma) = \prod_{j=1}^{N}\Gamma(2+\bar{d}_j+\alpha+\beta+(N+j-2)\gamma). \quad (4.22)$$

根据命题 4.1，方程 (4.20) 右侧的第二行定义了一个整函数。由于 Υ_0 可延拓为 $U_{N;0}\cap U_{N;1}$ 上的解析函数，且 Υ_1 可延拓为 $Q_{N;\infty}$ 上的解析函数，因此 $S_{N;\mathrm{Reg}}[F]$ 可延拓为 $U_{N;0}\cap U_{N;1}\cap Q_{N;\infty}$ 上的解析函数。

在 $O_{N;0}\cap$中 $\dot{U}_{0,N,0}\cap\dot{U}_0$，0，$_N$，命题 4.2 给出

$$S_{N;\mathrm{Reg}}[F](\alpha,\beta,\gamma) = (-1)^N\Upsilon_2(\alpha,\beta,\gamma)\Upsilon_3(\alpha,\beta,\gamma) \times\Big[\prod_{j=1}^{N}\Gamma(-d_j - j(1+\alpha+\beta+(N+j-2)\gamma))\Gamma(\ _j+j(1+\beta+(j-1)\gamma))F_j(\gamma)\Big]^{-1}\dot{S}_{0,0,N}[F](\alpha,\beta,\gamma), \quad (4.23)$$

其中

$$\Upsilon_2 = \prod_{j=1}^{N}\frac{\Gamma(\ _j + j(1+\beta+(j-1)\gamma))}{s(\alpha+(j-1)\gamma)\Gamma(1+\bar{\delta}_j+\alpha+(j-1)\gamma)\Gamma(1+\bar{}_j+\beta+(j-1)\gamma)} \quad (4.24)$$

$$\Upsilon_3 = \prod_{j=1}^{N}s(\alpha+\beta+(N+j-2)\gamma)\Gamma(2+\bar{d}_j+\alpha+\beta+(N+j-2)\gamma) \times\Gamma(-d_j - j(1+\alpha+\beta+(N+j-2)\gamma)). \quad (4.25)$$

根据命题 4.1，方程 (4.23) 第二行中的函数可延拓为关于α、β、γ的整函数。另一方面，Υ_2可延拓为定义在 $Q_{N;0}\cap U_{N;1}$上的解析函数，而 Υ_3可延拓为

定义在 $U_{N;\infty}$ 上的解析函数。综合这些观察， $S_{N;\mathrm{Reg}}[F]$ 可解析延拓至$Q_{N;0}\cap U_{N;1}\cap U_{N;\infty}$。

同样， $S_{N;\mathrm{Reg}}[F]$ 可解析延拓至 $U_{N;0}\cap Q_{N;1}\cap U_{N;\infty}$，使用 $O_{N;1}$ 代替 $O_{N;0}$ 以及命题4.2的另一部分。

因此， $S_{N;\mathrm{Reg}}[F](\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ 可解析延拓至

$$U=(U_{N;0}\cap U_{N;1}\cap Q_{N;\infty})\cup(U_{N;0}\cap Q_{N;1}\cap U_{N;\infty})\cup(Q_{N;0}\cap U_{N;1}\cap U_{N;\infty}). \tag{4.26}$$

这是

$$U=\mathbb{C}^3\Big\backslash\Big[\Big(\bigcup_{H_1\in\mathcal{S}_1,H_2\in\mathcal{S}_2,H_3\in\mathcal{S}_3}H_1\cap H_2\cap H_3\Big)\Big], \tag{4.27}$$

其中

- $\mathcal{S}_1$ 是包含在以下某个集合的补集中的超平面集合：$U_{N;0}$，$U_{N;1}$，$Q_{N;\infty}$，
- $\mathcal{S}_2$ 是包含在$U_{N;0}$,$Q_{N;1}$,$U_{N;\infty}$ 之一的补集中的超平面集合，并且
- $\mathcal{S}_3$ 是包含在 $Q_{N;0}$,$U_{N;1}$, $U_{N;\infty}$ 之一的补集中的超平面集合。

Let

$$\mathcal{H}=\{H_1\cap H_2\cap H_3\neq\varnothing: H_1\in\mathcal{S}_1,H_2\in\mathcal{S}_2,H_3\in\mathcal{S}_3\}, \tag{4.28}$$

因此， $S_{N;\mathrm{Reg}}[F]$ 在 $U=\mathbb{C}^3\backslash\cup_{H\in\mathcal{H}}H$ 上定义了一个解析函数。注意，每个 $H\in\mathcal{H}$ 都是 $\mathbb{C}^3$ 的一个复余维为二或三的仿射子空间（因为 $\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2\cap\mathcal{S}_3=\varnothing$），而集合 $\mathcal{H}$ 是局部有限的。

因此，Hartogs 定理意味着 $S_{N;\mathrm{Reg}}[F]$ 可解析延拓至整个 $\mathbb{C}^3$。 □

这就完成了定理 1.2的证明。

4.2. DF 对称情形。 给定 $\gamma_+\in\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ 以及 $\alpha_+,\beta_+\in\mathbb{C}$，令 $\gamma_-=\gamma_+^{-1}$、$\alpha_-=-\gamma_-\alpha_+$ 和 $\beta_-=-\gamma_-\beta_+$ 如引言中所述。固定 $\mathsf{S}\subseteq\{1,\dots,N\}$。

给定 $\gamma_+\neq 0,1$ 和 $F\in\mathrm{DF}$ 对称$(N;\mathsf{S},\lambda)$，其中 $\lambda=\gamma_+^{-1}(\gamma_+-1)$，令 $\dot{W}_{\mathrm{DF}\ell m}{}^{\mathsf{S}}{}_{,,n}[F;\gamma_+]$ 表示满足以下条件的 $(\alpha_+,\beta_+)\in\mathbb{C}^2$ 集合：

$$(\alpha_-,\alpha_+,\beta_-,\beta_+,\gamma_-,-1,\gamma_+)\in\dot{W}^{\mathrm{DF0},\mathsf{S}}_{\ell,m,n}[F]. \tag{4.29}$$

对于 $(\alpha_+,\beta_+)\in\dot{W}_{\mathrm{DF}\ell m}{}^{\mathsf{S}}{}_{,,n}[F;\gamma_+]$，令

$$\dot{I}^{\mathrm{DF};\mathsf{S}}_{\ell,m,n}[F](\alpha_+,\beta_+,\gamma_+)=I^{\mathrm{DF0};\mathsf{S}}_{\ell,m,n}[F](\alpha_-,\alpha_+,\beta_-,\beta_+,\gamma_-,-1,\gamma_+). \tag{4.30}$$

正如 Dotsenko 和 Fateev 所预示的那样：

命题 4.4。 对于任意 $\sigma\in\mathfrak{S}_{\ell,m,n}$,

$$\dot{I}^{\mathrm{DF};\mathsf{S}}_{\ell,m,n}[F](\alpha_+,\beta_+,\gamma_+)=\dot{I}^{\mathrm{DF};\mathsf{S}}_{\ell,m,n}[F](\alpha_+,\beta_+,\gamma_+)^{\sigma} \tag{4.31}$$

对于所有 $(\alpha_+,\beta_+)\in\dot{W}_{\mathrm{DF}\ell m}{}^{\mathsf{S}}{}_{,,n}[F;\gamma_+]$。 ■

由于 $\dot{W}_{\mathrm{DF}\ell m}{}^{\mathsf{S}}{}_{,,n}[F]$ 仅通过 $|\mathsf{S}\cap\mathcal{I}_1|,|\mathsf{S}\cap\mathcal{I}_2|,|\mathsf{S}\cap\mathcal{I}_3|$ 依赖于 S，

$$\dot{W}^{\mathrm{DF},\mathsf{S}}_{\ell,m,n}[F;\gamma_+]=\dot{W}^{\mathrm{DF},\mathsf{S}}_{\ell,m,n}[F;\gamma_+]^{\sigma}, \tag{4.32}$$

因此，方程（4.31）的右侧对任意 $(\alpha_+,\ \beta_+)\in\dot{W}_{\mathrm{DF}\ell m}{}^{\mathsf{S}}{}_{,,n}[F$ 都有定义；$\gamma_+]$。

证明。 由于 $\mathfrak{S}_{\ell,m,n}$ 由 τ （对$\mathcal{I}_1$,$\mathcal{I}_2$,$\mathcal{I}_3$, 中相邻元素进行的对换）生成，只需考虑 σ 为这样的换位的情形， τ。为简化记号，我们考虑 τ 是某个 $j,j+1\in\mathcal{I}_2$ 与 $j\in\mathsf{S}$之间的换位的情形。其他情形类似，但记号略有变化。

令 $\dot{W}^{\mathrm{DF}}_{\ell\,m\ 1\,\mathfrak{s},,,n}[F;\ \gamma_+] \subseteq \mathbb{C}^6$ 表示满足以下条件的 $(\alpha_{1,+},\alpha_{2,+},\alpha_{3,+},\beta_{1,+},\beta_{2,+},\beta_{3,+})$ 的集合

$$(\alpha_{-,1},\alpha_{-,2},\alpha_{-,3},\alpha_{+,1},\alpha_{+,2},\alpha_{+,3},\beta_{-,1},\beta_{-,2},\beta_{-,3},\beta_{+,1},\beta_{+,2},\beta_{+,3},\gamma_-,-1,\gamma_+)\in \dot{W}^{\mathrm{DF1},\mathfrak{s}}_{\ell,m,n}[F], \quad (4.33)$$

其中 $\alpha_{-,\ \nu}=-\gamma_-\alpha_{+,\ \nu}$ 以及 $\beta_{-,\ \nu}=-\gamma_-\beta_{+,\ \nu}$。只需证明，对于任意 $\sigma\in\mathfrak{S}_{\ell,\ m,\ n}$，

$$\begin{aligned}&\dot{I}^{\mathrm{DF},1,;\mathfrak{s}}_{\ell,m,n}[F](\alpha_{-,1},\alpha_{-,2},\alpha_{-,3},\alpha_{+,1},\alpha_{+,2},\alpha_{+,3},\beta_{-,1},\beta_{-,2},\beta_{-,3},\beta_{+,1},\beta_{+,2},\beta_{+,3},\gamma_+)\\&\quad=\dot{I}^{\mathrm{DF},1;\mathfrak{s}}_{\ell,m,n}[F](\alpha_{-,1},\alpha_{-,2},\alpha_{-,3},\alpha_{+,1},\alpha_{+,2},\alpha_{+,3},\beta_{-,1},\beta_{-,2},\beta_{-,3},\beta_{+,1},\beta_{+,2},\beta_{+,3},\gamma_+)^{\sigma}\end{aligned} \quad (4.34)$$

对于所有 $(\alpha_{1,\ +},\ \alpha_{2,\ +},\ \alpha_{3,\ +},\ \beta_{1,\ +},\ \beta_{2,\ +},\ \beta_{3,\ +})\in\dot{W}^{\mathrm{DF}}_{\ell\,m\ 1\,\mathfrak{s},\ .\ .\ .\ n}[F;\ \gamma_+]$，其中

$$\dot{I}^{\mathrm{DF},1;\mathfrak{s}}_{\ell,m,n}[F](\alpha_{-,1},\alpha_{-,2},\alpha_{-,3},\alpha_{+,1},\alpha_{+,2},\alpha_{+,3},\beta_{-,1},\beta_{-,2},\beta_{-,3},\beta_{+,1},\beta_{+,2},\beta_{+,3},\gamma_+)= \dot{I}_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{DF},1},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{DF},1},\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{DF}}), \quad (4.35)$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{DF},\ 1}$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{DF},\ 1}$ 定义为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{DF1}}$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{DF1}}$，使用 $\alpha_{-,\ \nu}=-\gamma_-\alpha_{+,\ \nu}$ 以及 $\beta_{-,\ \nu}=-\gamma_-\beta_{+,\ \nu}$。

首先注意到存在一个非空开子集

$$O\subset \dot{W}^{\mathrm{DF},1,\mathfrak{s}}_{\ell,m,n}[F;\gamma_+] \quad (4.36)$$

(包含一个仿射锥)，使得$(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{DF},1},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{DF},1},\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{DF}})\in O^{\{1,\tau\}}$ 只要$(\alpha_{+,1},\dots,\beta_{+,3})\in O$，其中 $O^{\{1,\tau\}}$ 按§3.4 中的定义给出。我们可以选择 O，使得 $R\alpha_{\pm,2},R\beta_{\pm,2}>0$ 在 O 中处处成立。

由于 $\dot{W}^{\mathrm{DF}}_{\ell\,m\ \ \mathfrak{s},,n}[F;\ \gamma_+]$ 是连通的，因此根据解析性，只需证明

$$(\alpha_{1,+},\alpha_{2,+},\alpha_{3,+},\beta_{1,+},\beta_{2,+},\beta_{3,+})\in O. \quad (4.37)$$

下文中，我们用 $\alpha_\pm$ 代替 $\alpha_{\pm,2}$，用 $\beta_\pm$ 代替$\beta_{\pm,2}$。

我们可以对3.6 中的命题应用于$(\alpha_{+,1},\dots,\beta_{+,3})\in O$。根据命题3.6，只需验证：只要除$z_j$ 之外的所有 z_k和z_{j+1} 都位于方程 (3.63) 中相应围道的内部某处，

$$\int_{\Gamma_{[0,1],+,j-\ell}}\oint z_j^{\alpha_+}(1-z_j)^{\beta_+}z_{j+1}^{\alpha_-}(1-z_{j+1})^{\beta_-}\Big(\prod_{\substack{1\le j_0<k_0\le N\\ \{j_0,k_0\}\cap\{j,j+1\}\neq\varnothing}}(z_{k_0}-z_{j_0})^{2\gamma_{j_0,k_0}}\Big)F\,\mathrm{d}z_j\,\mathrm{d}z_{j+1}=0, \quad (4.38)$$

其中，对每个 $z_{j+1}\in\Gamma_{[0,1],\ +,\ j-\ell}\backslash\{0、1\}$，内层积分均沿着 z_{j+1} 周围的一条小圆进行。由于被积函数在 z_{j+1} 的一个去心邻域内关于 z_j 全纯，我们应用柯西留数定理，推得左侧与.....成正比

$$\int_{\Gamma_{[0,1],+,j-\ell}}G_0\frac{\partial G}{\partial z_j}\Big|_{z_j=z_{j+1}}\mathrm{d}z_{j+1}, \quad (4.39)$$

其中

$$G_0(z_1,\dots,z_N)=z_{j+1}^{\alpha_-}(1-z_{j+1})^{\beta_-}\Big[\prod_{j_0\in([N]\setminus\mathfrak{s})\setminus\{j+1\}}(z_{j+1}-z_{j_0})^{2\gamma_-}\Big]\Big[\prod_{j_0\in\mathfrak{s}\setminus\{j\}}(z_{j+1}-z_{j_0})^{-2}\Big], \quad (4.40)$$

$$G(z_1,\dots,z_N)=z_j^{\alpha_+}(1-z_j)^{\beta_+}\Big[\prod_{j_0\in([N]\setminus\mathfrak{s})\setminus\{j+1\}}(z_j-z_{j_0})^{-2}\Big]\Big[\prod_{j_0\in\mathfrak{s}\setminus\{j\}}(z_j-z_{j_0})^{2\gamma_+}\Big]F. \quad (4.41)$$

我们选择分支切割，使得在沿着z_j、z_{j+1} 进行积分时$\Gamma_{[0,1],\ +,\ j-\ell}$ 不会遇到任何分支切割（端点处除外）。除此之外，分支切割的具体选择并不重要。

方程 (4.39) 中的被积函数计算结果为

$$G_0\frac{\partial G}{\partial z_j}\Big|_{z_j=z_{j+1}} = \Big[\frac{\alpha_+}{z_{j+1}} - \frac{\beta_+}{1-z_{j+1}} + 2\gamma_+\sum_{j_0\in \mathsf{S}\setminus\{j\}}\frac{1}{z_{j+1}-z_{j_0}} - 2\sum_{j_0\in([N]\setminus \mathsf{S})\setminus\{j+1\}}\frac{1}{z_{j+1}-z_{j_0}} + \frac{\partial_{z_j}F}{F}\Big|_{z_j=z_{j+1}}\Big]H, \quad (4.42)$$

其中 $H = G_0G|_{z_j=z_{j+1}}$。另一方面，

$$\frac{\partial H}{\partial z_{j+1}} = \Big[\frac{\alpha_-+\alpha_+}{z_{j+1}} - \frac{\beta_-+\beta_+}{1-z_{j+1}} + (2\gamma_+-2)\sum_{j_0\in \mathsf{S}\setminus\{j\}}\frac{1}{z_{j+1}-z_{j_0}} + (2\gamma_--2)\sum_{j_0\in([N]\setminus \mathsf{S})\setminus\{j+1\}}\frac{1}{z_{j+1}-z_{j_0}} + \frac{\partial_{z_{j+1}}(F|_{z_j=z_{j+1}})}{F|_{z_j=z_{j+1}}}\Big]H. \quad (4.43)$$

由于 $1-\gamma_- = \alpha_+^{-1}(\alpha_-+\alpha_+) = \beta_+^{-1}(\beta_-+\beta_+) = \gamma_+^{-1}(\gamma_+-1) = \lambda$，且由于 $F\in \mathrm{DF}$ 对称$(N,\ \mathsf{S},\ \lambda)$，

$$G_0\frac{\partial G}{\partial z_j}\Big|_{z_j=z_{j+1}} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial H}{\partial z_{j+1}}. \quad (4.44)$$

因此，

$$\int_{\Gamma_{[0,1],+,j-\ell}} G_0\frac{\partial G}{\partial z_j}\Big|_{z_j=z_{j+1}}\mathrm{d}z_{j+1} = \frac{1}{\lambda}\int_{\Gamma_{[0,1],+,j-\ell}}\frac{\partial H}{\partial z_{j+1}}\mathrm{d}z_{j+1}. \quad (4.45)$$

右侧与以下表达式成正比

$$\int_p \frac{\partial H}{\partial z_{j+1}}\mathrm{d}z_{j+1} \quad (4.46)$$

若 $\alpha_+,\ \beta_+\notin\mathbb{Z}$，其中 p 是位于 $\mathbb{C}^2\setminus\{0,\ 1\}$ 内且充分接近 $\Gamma_{[0,1],\ +,\ j-\ell}$。提升到 $\Gamma_{[0,1],\ +,\ j-\ell}$ 的一个邻域覆盖空间上，在该空间中 H 提升为单值解析函数，我们可以得出结论（利用解析性），方程 (4.46) 中的积分为零。利用解析性，我们可以去除对 $\alpha_+,\ \beta_+$ 非整数的限制，从而得出

$$\int_{\Gamma_{[0,1],+,j-\ell}}\frac{\partial H}{\partial z_{j+1}}\mathrm{d}z_{j+1} = 0 \quad (4.47)$$

对于所有 $(\alpha_{+,\ 1},\ \ldots\ldots,\ \beta_{+,\ 3}) \in O$。

□

命题 4.5（参见 [DF85a]）。在上述设置下，对于任意 S：

- 对于所有满足以下条件的 $(\alpha_+,\beta_+)\in \dot{W}_{\mathrm{DFN}\ 0}{}^{\mathsf{S}}{}_{,,0}[F;\ \gamma_+]\cap \dot{W}_{\mathrm{DF0}\ N}{}^{\mathsf{S}}{}_{,,0}[F;\ \gamma_+]$ $\beta_\pm + m_\pm\gamma_\pm\notin\mathbb{Z}$ 对于任意 $m_\pm\in\{0,\ldots,N_\pm-1\}$

$$\dot{I}^{\mathrm{DF},\mathsf{S}}_{0,N,0}[F](\alpha_+,\beta_+,\gamma_+) = (-1)^N\dot{I}^{\mathrm{DF},\mathsf{S}}_{N,0,0}[F](\alpha_+,\beta_+,\gamma_+)$$
$$\times\Big[\prod_{m_+=0}^{N_+-1}\frac{\sin(\pi(\alpha_++\beta_++(N_++m_+-1)\gamma_+))}{\sin(\pi(\beta_++m_+\gamma_+))}\Big]\Big[\prod_{m_-=0}^{N_--1}\frac{\sin(\pi(\alpha_-+\beta_-+(N_-+m_--1)\gamma_-))}{\sin(\pi(\beta_-+m_-\gamma_-))}\Big]. \quad (4.48)$$

- 对于所有满足以下条件的 $(\alpha_+,\beta_+)\in \dot{W}_{\mathrm{DF}0\,N}{}^{\mathtt{S}}{}_{,,0}[F;\gamma_+]\cap \dot{W}_{\mathrm{DF}0\,0}{}^{\mathtt{S}}{}_{,,N}[F;\gamma_+]$ $\alpha_\pm+m_\pm\gamma_\pm\notin\mathbb{Z}$ 对于任意 $m_\pm\in\{0,\dots,N_\pm-1\}$,

$$\dot{I}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}}_{0,N,0}[F](\alpha_+,\beta_+,\gamma_+)=(-1)^N\dot{I}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}}_{0,0,N}[F](\alpha_+,\beta_+,\gamma_+)$$
$$\times\Big[\prod_{m_+=0}^{N_+-1}\frac{\sin(\pi(\alpha_++\beta_++(N_++m_+-1)\gamma_+))}{\sin(\pi(\alpha_++m_+\gamma_+))}\Big]\Big[\prod_{m_-=0}^{N_--1}\frac{\sin(\pi(\alpha_-+\beta_-+(N_-+m_--1)\gamma_-))}{\sin(\pi(\alpha_-+m_-\gamma_-))}\Big].\tag{4.49}$$

对于 $\mathtt{S}=\{1,\dots,N_+\}$，我们还有：

- 对于所有满足 $\beta_++m_+\gamma_+\notin\mathbb{Z}$ 对任意$m_+\in\{0,\dots,N_+-1\}$ 的 $(\alpha_+,\beta_+)\in \dot{W}_{\mathrm{DF}N_+}{}^{\mathtt{S}}{}_{,N_-,0}[F;\gamma_+]\cap \dot{W}_{\mathrm{DF}0\,N}{}^{\mathtt{S}}{}_{,,0}[F;\gamma_+]$

$$\dot{I}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}}_{0,N,0}[F](\alpha_+,\beta_+,\gamma_+)=(-1)^{N_+}\dot{I}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}}_{N_+,N_-,0}[F](\alpha_+,\beta_+,\gamma_+)$$
$$\times\Big[\prod_{m_+=0}^{N_+-1}\frac{\sin(\pi(\alpha_++\beta_++(N_++m_+-1)\gamma_+))}{\sin(\pi(\beta_++m_+\gamma_+))}\Big].\tag{4.50}$$

- 对于所有满足 $\alpha_-+m_-\gamma_-\notin\mathbb{Z}$ 对任意$m_-\in\{0,\dots,N_--1\}$ 的 $(\alpha_+,\beta_+)\in \dot{W}_{\mathrm{DF}0\,N}{}^{\mathtt{S}}{}_{,,0}[F;\gamma_+]\cap \dot{W}_{\mathrm{DF}0}{}^{\mathtt{S}}{}_{,N_+,N_-}[F;\gamma_+]$,

$$\dot{I}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}}_{0,N,0}[F](\alpha_+,\beta_+,\gamma_+)=(-1)^{N_-}\dot{I}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}}_{0,N_+,N_-}[F](\alpha_+,\beta_+,\gamma_+)$$
$$\times\Big[\prod_{m_-=0}^{N_--1}\frac{\sin(\pi(\alpha_-+\beta_-+(N_-+m_--1)\gamma_-))}{\sin(\pi(\alpha_-+m_-\gamma_-))}\Big].\tag{4.51}$$

同样，对于 $\mathtt{S}=\{N-N_++1,\dots,N\}$，我们有：

- 对于所有$(\alpha_+,\beta_+)\in \dot{W}_{\mathrm{DF}N_-}{}^{\mathtt{S}}{}_{,N_+,0}[F;\gamma_+]\cap \dot{W}_{\mathrm{DF}0\,N}{}^{\mathtt{S}}{}_{,,0}[F;\gamma_+]$ 满足 $\beta_-+m_-\gamma_-\notin\mathbb{Z}$ 对任意$m_-\in\{0,\dots,N_--1\}$

$$\dot{I}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}}_{0,N,0}[F](\alpha_+,\beta_+,\gamma_+)=(-1)^{N_-}\dot{I}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}}_{N_-,N_+,0}[F](\alpha_+,\beta_+,\gamma_+)$$
$$\times\Big[\prod_{m_-=0}^{N_--1}\frac{\sin(\pi(\alpha_-+\beta_-+(N_-+m_--1)\gamma_-))}{\sin(\pi(\beta_-+m_-\gamma_-))}\Big].\tag{4.52}$$

- 对于所有$(\alpha_+,\beta_+)\in \dot{W}_{\mathrm{DF}0\,N}{}^{\mathtt{S}}{}_{,,0}[F;\gamma_+]\cap \dot{W}_{\mathrm{DF}0\,N_-}{}^{\mathtt{S}}{}_{,,N_+}[F;\gamma_+]$ 满足 $\alpha_++m_+\gamma_+\notin\mathbb{Z}$ 对任意$m_+\in\{0,\dots,N_+-1\}$,

$$\dot{I}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}}_{0,N,0}[F](\alpha_+,\beta_+,\gamma_+)=(-1)^{N_+}\dot{I}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}}_{0,N_-,N_+}[F](\alpha_+,\beta_+,\gamma_+)$$
$$\times\Big[\prod_{m_+=0}^{N_+-1}\frac{\sin(\pi(\alpha_++\beta_++(N_++m_+-1)\gamma_+))}{\sin(\pi(\alpha_++m_+\gamma_+))}\Big].\tag{4.53}$$

■

证明。 按照命题 3.10 的证明方法，反复应用命题 4.2 即可。与命题4.2 的证明唯一的不同之处在于，我们要应用命题 4.4 来证明（而不是将其视为对称性的自动推论）：

$$\dot{I}_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}},\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}})=\dot{I}_{\ell,m,n}[F](\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}},\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}})^{\sigma_\ell}\tag{4.54}$$
$$\dot{I}_{\ell-1,m+1,n}[F](\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}},\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}})^{\sigma_\ell}=\dot{I}_{\ell-1,m+1,n}[F](\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}},\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}})^{\sigma_{\ell+m}}\tag{4.55}$$
$$\dot{I}_{\ell-1,m,n+1}[F](\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}},\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}})^{\sigma_{\ell+m}}=\dot{I}_{\ell-1,m,n+1}[F](\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}},\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{DF},\mathtt{S}})^{\sigma_N}.\tag{4.56}$$

□

Prop命题 4.6。 对于 $\gamma_+ \in \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$，由下式定义的函数 $I^{\mathrm{DF},\mathsf{s}}_{N;\mathrm{Reg}}[F](\alpha_+, \beta_+, \gamma_+)$

$$\dot{I}^{\mathrm{DF},\mathsf{s}}_N[F](\alpha_+, \beta_+, \gamma_+) = \Big[\prod_{\pm}\prod_{j=1}^{N_\pm} \frac{\sin(\pi(\alpha_\pm + \beta_\pm + (N_\pm + j - 2)\gamma_\pm))}{\sin(\pi(\alpha_\pm + (j-1)\gamma_\pm))\sin(\pi(\beta_\pm + (j-1)\gamma_\pm))}\Big] \times I^{\mathrm{DF},\mathsf{s}}_{N;\mathrm{Reg}}[F](\alpha_+, \beta_+, \gamma_+) \quad (4.57)$$

延拓为整函数 $I^{\mathrm{DF},\mathsf{s}}_{N;\mathrm{Reg}}[F] : \mathbb{C}^2_{\alpha_+,\beta_+} \to \mathbb{C}$。 ■□

证明。 证明过程与用于证明命题4.3的过程非常相似。结合前一个命题与命题 4.4，只需注意到这九个集合的并

$$\dot{W}^{\mathrm{DF},\mathsf{s}_-}_{N,0,0}[F;\gamma_+], \dot{W}^{\mathrm{DF},\mathsf{s}_-}_{0,N,0}[F;\gamma_+], \dot{W}^{\mathrm{DF},\mathsf{s}_-}_{0,0,N}[F;\gamma_+], \dot{W}^{\mathrm{DF},\mathsf{s}_-}_{N_-,N_+,0}[F;\gamma_+], \dot{W}^{\mathrm{DF},\mathsf{s}_-}_{N_-,0,N_+}[F;\gamma_+],$$
$$\dot{W}^{\mathrm{DF},\mathsf{s}_-}_{0,N_-,N_+}[F;\gamma_+], \dot{W}^{\mathrm{DF},\mathsf{s}_+}_{N_+,N_-,0}[F;\gamma_+], \dot{W}^{\mathrm{DF},\mathsf{s}_+}_{N_+,0,N_-}[F;\gamma_+], \dot{W}^{\mathrm{DF},\mathsf{s}_+}_{0,N_+,N_-}[F;\gamma_+] \subset \mathbb{C}^2_{\alpha_+,\beta_+}, \quad (4.58)$$

其中 $\mathsf{s}_+ = \{1, \dots, N_+\}$ 以及 $\mathsf{s}_- = \mathsf{s}^{\complement}$ 是局部有限点集的补集，因而由 Hartogs 定理可得结论。

□

Appendix A. The $N = 2$ case

现在我们详细考察 $N = 2$ 情形，先从公式开始

$$S_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \frac{\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\beta_2)\Gamma(2+2\gamma_{1,2}+\alpha_1+\alpha_2)\Gamma(1+2\gamma_{1,2})}{\Gamma(2+\alpha_1+2\gamma_{1,2})\Gamma(3+\alpha_1+\alpha_2+\beta_2+2\gamma_{1,2})} \cdot {}_3F_2(a, b; 1), \quad (A.1)$$

$a = (a_1, a_2, a_3) = (1+\alpha_1, -\beta_1, 2+2\gamma_{1,2}+\alpha_1+\alpha_2)$ 和 $b = (b_1, b_2) = (2+\alpha_1+2\gamma_{1,2}, 3+\alpha_1+\alpha_2+\beta_2+2\gamma_{1,2})$。这在 α 与 β 的作用上是不对称的，但也有一个类似公式，将右侧的 α 与 β 互换。 S_2 的一些奇点在该公式中显而易见，但另一些则隐藏在 ${}_3F_2$ 因子中。

现在考虑 Dotsenko–Fateev 型积分

$$I^{\mathrm{DF0}}_2(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma) = \int_0^1 \int_0^1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} (1-x_1)^{\beta_1} (1-x_2)^{\beta_2} (x_2 - x_1 + i0)^{2\gamma} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2. \quad (A.2)$$

根据前面的命题：

推论 A.0.1。

$$\dot{I}^{\mathrm{DF0}}_2(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma) = \Gamma(2+2\gamma+\alpha_1+\alpha_2)\Gamma(1+2\gamma)\Big[\frac{\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\beta_2)\,{}_3F_2(a, b; 1)}{\Gamma(2+\alpha_1+2\gamma)\Gamma(3+\alpha_1+\alpha_2+\beta_2+2\gamma)} + e^{2\pi i\gamma}\frac{\Gamma(1+\alpha_2)\Gamma(1+\beta_1)\,{}_3F_2(a', b'; 1)}{\Gamma(2+\alpha_2+2\gamma)\Gamma(3+\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+2\gamma)}\Big], \quad (A.3)$$

其中 $a' = (a'_1, a'_2, a'_3) = (1+\alpha_2, -\beta_2, 2+2\gamma+\alpha_1+\alpha_2)$ 以及 $b' = (b'_1, b'_2) = (2+\alpha_2+2\gamma, 3+\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+2\gamma)$。 ■□

方程 (A.3) 不适用于向 $\gamma = -1$进行解析延拓，因此我们改用 §3.4中所述的方法。由此得到

$$\dot{I}_2(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma) = \frac{\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\beta_1)}{\Gamma(2+\alpha_1+\beta_1)} \int_\Gamma \Big[z^{\alpha_2+2\gamma}(1-z)^{\beta_2} \times {}_2F_1\Big(-2\gamma, 1+\alpha_1, 2+\alpha_1+\beta_1; \frac{1}{z}\Big)\Big] \mathrm{d}z, \quad (A.4)$$

其中， Γ 是复平面上半部的一个梯形轮廓。只要α_1， α_2， β_1， β_2 相对于 γ具有足够大的正实部，就可以用此公式数值计算实部为较大负值的 γ 对应的 $I_2^{\mathrm{DF0}}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \gamma)$。

我们通过计算与 1.1 相关的留数，来说明定理的证明方法 $\alpha_- + \alpha_+ + 2\gamma \in \mathbb{Z}^{-2-d}$。引入坐标 $\varrho = x_2$ 和 $\lambda = x_1/x_2$,

$$\begin{aligned} S_2(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma) &= \int_0^1 \int_0^{x_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} (1-x_1)^{\beta_1} (1-x_2)^{\beta_2} (x_2-x_1)^{2\gamma}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \varrho^{1+\alpha_1+\alpha_2+2\gamma} \lambda^{\alpha_1} (1-\lambda\varrho)^{\beta_1} (1-\varrho)^{\beta_2} (1-\lambda)^{2\gamma}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\varrho. \end{aligned} \tag{A.5}$$

将 $(1-\lambda\varrho)^{\beta_1}(1-\varrho)^{\beta_2}$ 在 $\varrho = 0$ 附近展开为泰勒级数，可得

$$(1-\lambda\varrho)^{\beta_1}(1-\varrho)^{\beta_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{k} \binom{\beta_1}{\kappa} \binom{\beta_2}{k-\kappa} \lambda^{\kappa} (-\varrho)^k. \tag{A.6}$$

然后，逐项计算外层积分，并对内层积分使用 β 函数公式，

$$S_2(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2+\alpha_1+\alpha_2+2\gamma+k} \sum_{\kappa=0}^{k} \binom{\beta_1}{\kappa} \binom{\beta_2}{k-\kappa} \frac{\Gamma(1+\alpha_1+\kappa)\Gamma(1+2\gamma)}{\Gamma(2+\alpha_1+2\gamma+\kappa)} \tag{A.7}$$

其中，“∼”表示相差一个在所研究的超平面上（除一个正余维子集外）不具奇点的误差项。右侧在 $\alpha_1+\alpha_2+2\gamma \in \mathbb{Z}^{\leq -2}$时显然有极点。

现在考察一些特殊情形。固定 $d \in \mathbb{N}$。首先考虑

$$S_2[x^d](\alpha,\beta,\gamma) = S_2(\alpha,\alpha+d,\beta,\beta,\gamma) = \int_0^1 \int_0^{x_2} x_1^{\alpha} x_2^{d+\alpha} (1-x_1)^{\beta} (1-x_2)^{\beta} (x_2-x_1)^{2\gamma}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2. \tag{A.8}$$

根据方程 (A.1),

$$S_2[x^d](\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+2\gamma)\Gamma(2+2\alpha+2\gamma+d)}{\Gamma(2+\alpha+2\gamma)\Gamma(3+2\alpha+\beta+2\gamma+d)} \cdot {}_3F_2(a,b;1), \tag{A.9}$$

其中现在 $a = (a_1,a_2,a_3) = (1+\alpha, -\beta, 2+2\alpha+2\gamma+d)$， 且 $b = (b_1,b_2) = (2+\alpha+2\gamma, 3+2\alpha+\beta+2\gamma+d)$。在 $d=2$ 情况下，右侧绝对值的数值生成图如图13所示。应用定理 1.1，其中 $\alpha_{1,*} = \alpha$, $\alpha_{2,*} = d+2\alpha+2\gamma$, $\beta_{1,*} = \beta$, $\beta_{2,*} = 2\beta+2\gamma$， 且 γ_1,2,$_* = 2\gamma$，我们推得 $S_2[x^d](\alpha,\beta,\gamma)$ 可延拓为一个解析函数，其定义在

$$\mathbb{C}^3_{\alpha,\beta,\gamma} \Big\backslash \Big[\{\alpha \in \mathbb{Z}^{\leq -1}\} \cup \{\alpha+\gamma \in 2^{-1}\mathbb{Z}^{\leq -2-d}\} \cup \{\beta \in \mathbb{Z}^{\leq -1}\} \cup \{\beta+\gamma \in 2^{-1}\mathbb{Z}^{\leq -2}\} \cup \{\gamma \in 2^{-1}\mathbb{Z}^{\leq -1}\} \Big]. \tag{A.10}$$

在 $d=2$ 情况下，这一点可见于图13。

另一方面，考虑

$$S_2[y^d](\alpha,\beta,\gamma) = S_2(\alpha+d,\alpha,\beta,\beta,\gamma) = \int_0^1 \int_0^{x_2} x_1^{d+\alpha} x_2^{\alpha} (1-x_1)^{\beta} (1-x_2)^{\beta} (x_2-x_1)^{2\gamma}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2. \tag{A.11}$$

根据公式（1.20），

$$S_2[y^d](\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\Gamma(1+\alpha+d)\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+2\gamma)\Gamma(2+2\alpha+2\gamma+d)}{\Gamma(2+\alpha+2\gamma+d)\Gamma(3+2\alpha+\beta+2\gamma+d)} \cdot {}_3F_2(a',b';1), \tag{A.12}$$

其中 $a' = (a_1',\ a_2,\ a_3) = (1+d+\alpha,\ -\beta,\ 2+d+2\alpha+2\gamma)$， 且 $b' = (b_1',\ b_2) = (2+d+\alpha+2\gamma,\ 3+d+2\alpha+\beta+2\gamma)$。我们再次应用定理 1.1，但这次令 $\alpha_{1,\ *} = d+\alpha$, $\alpha_{2,\ *} = d+2\alpha+2\gamma$， 以便

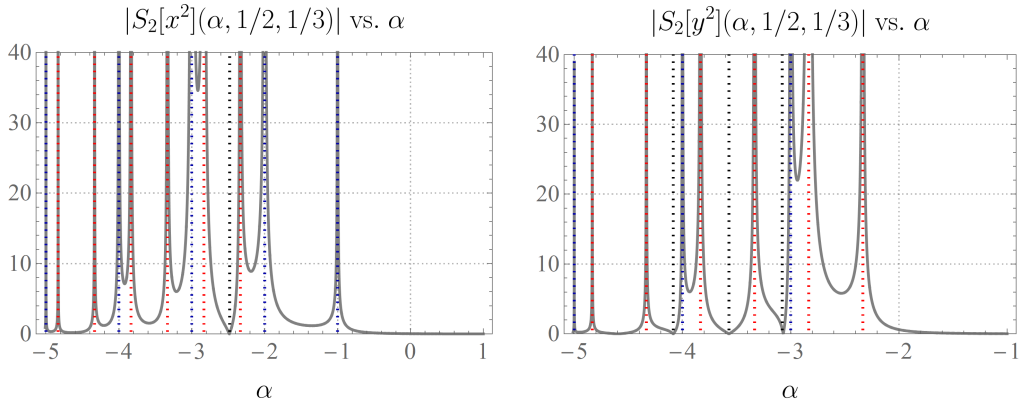


图13. 方程 (A.9)（左）和方程 (A.12)（右）右端的绝对值随 α变化的图像，其中 $\beta = 1/2$ 和 $\gamma = 1/3$ 固定。方程 (A.10)、方程 (A.13) 预测的奇点以垂直虚线标出，其中与 $\{\alpha \in \mathbb{Z}\}$相关的用蓝色表示，与 $\{\alpha+\gamma \in 2^{-1}\mathbb{Z}\}$相关的用红色表示。看起来所有可能出现的极点都确实出现了。图中范围内 α对应的 $S_2[F](\alpha, 1/2, 1/3)$ 的表观零点以黑色虚线标出，并经数值计算得出：当 $F = x^2$ 时为 ≈ -2.48503，当 -3.57013、≈ -3.06833时为 -4.08562，以及当 $F = y^2$时为 -4.08562。

推导出 $S_2[y^d](\alpha, \beta, \gamma)$ 可解析延拓至

$$\mathbb{C}^3_{\alpha,\beta,\gamma} \setminus \Big[\{\alpha \in \mathbb{Z}^{\leq -1-d}\} \cup \{\alpha+\gamma \in 2^{-1}\mathbb{Z}^{\leq -2-d}\} \cup \{\beta \in \mathbb{Z}^{\leq -1}\} \cup \{\beta+\gamma \in 2^{-1}\mathbb{Z}^{\leq -2}\} \cup \{\gamma \in 2^{-1}\mathbb{Z}^{\leq -1}\}\Big]. \tag{A.13}$$

参见图 13，其中给出了数值生成的图。

如果我们改为选取 $F(x, y) = x^d + y^d$，这在某种意义上是前两个例子的对称化，情况就大不相同了。结合上述公式可得

$$S_2[x^d + y^d](\alpha,\beta,\gamma) = (S_2[x^d] + S_2[y^d])(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+2\gamma)\Gamma(2+2\alpha+2\gamma+d)}{\Gamma(2+\alpha+2\gamma)\Gamma(3+2\alpha+\beta+2\gamma+d)} \times \Big[{}_3F_2(a,b;1) + \frac{\Gamma(1+\alpha+d)\Gamma(2+\alpha+2\gamma)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2+\alpha+2\gamma+d)} \cdot {}_3F_2(a',b';1)\Big]. \tag{A.14}$$

关于 另一方面，根据定理 1.2，我们知道 $S_2[x^d + y^d]$ 在解析意义下延拓至 o

$$\mathbb{C}^3_{\alpha,\beta,\gamma} \setminus \Big[\{\alpha \in \mathbb{Z}^{\leq -1-\bar{\delta}_1}\} \cup \{\alpha+\gamma \in \mathbb{Z}^{\leq -2-\bar{\delta}_2}\} \cup \{\beta \in \mathbb{Z}^{\leq -1-\bar{}_1}\} \cup \{\beta+\gamma \in \mathbb{Z}^{\leq -1-\bar{}_2}\} \cup \{\gamma \in 2^{-1}\mathbb{Z}^{\leq -1}, \gamma \notin \mathbb{Z}\}\Big], \tag{A.15}$$

其中 δ_1, $_1$, δ_2, $_2$ 如定理中所述。在此例中，δ_1, $_1$, $_2 = 0$, $\delta_2 = \lceil d/2 \rceil$, $d_2 = d$, 以及 $d_1 = \lfloor d/2 \rfloor$。参见图 14，其中 $d = 2$。

在和式方程 (A.14)中，各个加项在此类 $2\alpha + 2\gamma \in \mathbb{Z}^{\leq -2-d} \cap (2\mathbb{Z}+1)$处的极点（从图 13 可见其确实存在）必须相互抵消。根据方程 (A.7)，$S_2[x^d + y^d](\alpha, \beta, \gamma)$在此类点处的留数正比于

$$\sum_{\kappa=0}^{k} \binom{\beta}{\kappa}\binom{\beta}{k-\kappa}\Big[\frac{\Gamma(1+\alpha+\kappa)}{\Gamma(2+\alpha+2\gamma+\kappa)} + \frac{\Gamma(1+\alpha+\kappa+d)}{\Gamma(2+\alpha+2\gamma+\kappa+d)}\Big]. \tag{A.16}$$

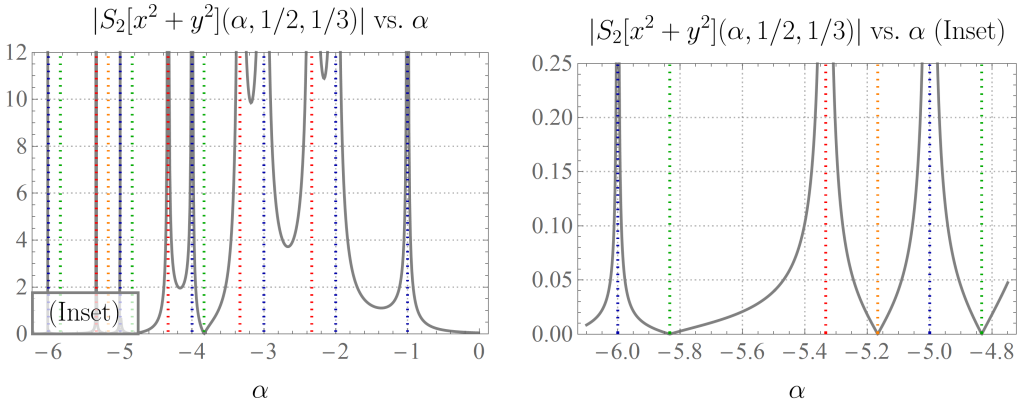


图 14. 方程 (A.14) 右侧的绝对值，分别以 $\alpha \in (-6, 0)$（左）和 $\alpha \in (-6.1, -4.75)$（右）为自变量绘制，其中 $\beta = 1/2$ 和 $\gamma = 1/3$ 固定。与 $\{\alpha \in \mathbb{Z}\}$ 相关的奇点用蓝线标出，与 $\{\alpha+\gamma \in \mathbb{Z}\}$ 相关的奇点用红线标出。与 $\{\alpha+\beta+\gamma \in \mathbb{Z}\}$ 相关的零点用绿色标出，与 $\{\alpha+\beta+2\gamma \in \mathbb{Z}\}$ 相关的零点用橙色标出。右图的位置在左图中以插图标出（未按比例绘制）。

因此，只要 $-2-d-k$ 为奇数，且 $(\alpha,\ \gamma) \in \{2\alpha+2\gamma = -2-d-k\} \subset \mathbb{C}^2_{\alpha,\ \gamma}$ 使方程 (A.16) 中的函数有定义，这一项就必须为零。对此事实作直接的代数证明并非易事，但逐例检查很简单。

函数 $S_{2;\mathrm{Reg}}[x^d+y^d](\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ 作为 $\alpha \in \mathbb{C}$ 的函数绘于图 15中，这里仍取 $d=2$ 的情形——固定 $\beta,\ \gamma$。正如预期，它似乎没有奇点，这与定理 1.2一致。不同于 $F=1$的情形，在该情形下，塞尔伯格公式表明 $S_{2;\mathrm{Reg}}[1](\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ 为常数，$S_{2;\mathrm{Reg}}[x^d+y^d]$ 是非常数。

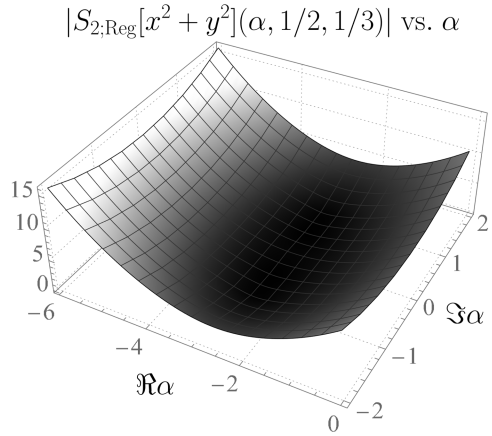


图 15. 函数 $S_{2;\mathrm{Reg}}[x^2+y^2](\alpha,\ 1/2,\ 1/3)$ 由方程 (1.29定义，其图像是以 $\alpha \in \mathbb{C}$为自变量绘制的。

现在考虑 $I_2^{\mathrm{DF}}(\alpha_+,\ \beta_+) = I_2^{\mathrm{DF0}}(\alpha_+,\ -\alpha_+,\ \beta_+,\ -\beta_+,\ 1)$，这是一个满足$\gamma_\pm = -1$的 DF 对称积分。其具体表达式为

$$I_2^{\mathrm{DF}}(\alpha_+,\beta_+) = \frac{\Gamma(1+\alpha_+)\Gamma(1+\beta_+)}{\Gamma(2+\alpha_++\beta_+)}\int_\Gamma \Big[z^{\alpha_++2\gamma}(1-z)^{\beta_+} \times {}_2F_1\Big(-2\gamma, 1+\alpha_+, 2+\alpha_++\beta_+; \frac{1}{z}\Big)\Big]\,\mathrm{d}z \quad \text{(A.17)}$$

当 α_+、β_+ 的实部足够大时。Dotsenko–Fateev 的断言，即方程（1.49），在差一个符号的意义下，是

$$I_2^{\mathrm{DF}}(\alpha_+,\beta_+) = -\frac{\Gamma(1+\alpha_+)\Gamma(1+\beta_+)\Gamma(\alpha_+)\Gamma(\beta_+)}{2\Gamma(1+\alpha_++\beta_+)\Gamma(\alpha_++\beta_+)}. \quad \text{(A.18)}$$

附录 B. $[0,1)^N_{\mathrm{tb}}$ 上的显式坐标

在本附录中，我们讨论全边界（tb）爆破 $[0,1)^N_{\mathrm{tb}}$，即通过从最低维的面开始，对 $[0,1)^N$ 的所有面进行爆破而构造的带角流形。

对于每个非空子集 $S \subseteq \{1,\dots,N\}$，令 F_S 表示 $[0,1)^N_{\mathrm{tb}}$ 中与面 $\{j \in S \Rightarrow x_j = 0\}$ 相对应的面 $[0,1)^N_x$。追溯全边界爆破的构造，我们可以得到各个面的边界定义函数（bdf）的一种显式选取。若$N \geq 3$，这些函数不同于引言第 §2 节中讨论的递归定义的边界定义函数。

可以证明：

命题 B.1. 函数

$$x_{\mathrm{F}_S} = x_{\mathrm{F}_S,N} = \prod_{S_0 \supseteq S}\Big[\sum_{j\in S_0} x_j\Big]^{(-1)^{|S|-|S_0|}} \quad \text{(B.1)}$$

是F_S的边界定义函数。

设 $\mathtt{I}$ 是 $\{1,\dots,N\}$ 的一组（可以为空的）嵌套非空子集。那么，

$$\mathrm{f}_{\mathtt{I}} = \{x_{\mathrm{F}_S} = 0 \text{ for all } S \in \mathtt{I}\} \quad \text{(B.2)}$$

是 $[0,1)^N_{\mathrm{tb}}$ 的余维 $|\mathtt{I}|$ 面。这定义了 $\{1,\dots,N\}$ 的嵌套非空子集集合与 $[0,1)^N_{\mathrm{tb}}$ 的面的集合之间的双射对应。

如果 p 位于 th 内部 $\mathrm{f}_{\mathtt{I}}$，那么，令 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ 表示与 $\mathtt{I}$一致的任意置换 ，

$$\varrho = x_{\sigma(1)}, \hat{x}_{\sigma(2)} = x_{\sigma(2)}/x_{\sigma(1)}, \cdots, \hat{x}_{\sigma(N)} = x_{\sigma(N)}/x_{\sigma(N-1)} \quad \text{(B.3)}$$

给出 p 附近的一组局部坐标。 ■□

这里，我们称 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ 与 $\mathtt{I}$ 一致，如果每当 $j<k$ 时，$\sigma(j) \in S \in \mathtt{I} \Rightarrow \sigma(k) \in S$。

我们可以用满足以下形式的坐标图覆盖 $[0,1)^N_{\mathrm{tb}}$，其在内部的限制为

$$\{0 < x_{\sigma(N)} < 2x_{\sigma(N-1)} < \cdots < 2^N x_{\sigma(1)} < 2^N\} \cap (0,1)^N \to [0,1)_{x_{\sigma(1)}} \times [0,2)_{x_{\sigma(2)}/x_{\sigma(1)}} \times \cdots \times [0,2)_{x_{\sigma(N)}/x_{\sigma(N-1)}}, \quad \text{(B.4)}$$

对于 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$。

前述命题用于证明：

命题 B.2。 对于任意 $M \in \{1,\dots,N-1\}$ 以及非空的 $Q \subseteq \{1,\dots,M\}$ ，

$$x_{\mathrm{F}_Q,M} = \prod_{Q_0 \subseteq \{M+1,\dots,N\}} x_{\mathrm{F}_{Q\cup Q_0},N} \quad \text{(B.5)}$$

在 $(0,1)^N_x$ 中。 ■

证明。 因子 $\sum_{j\in Q\cup Q_0} x_j$ 出现在方程（B.5）右侧的幂次上

$$\sum_{Q_1\subseteq Q_0} (-1)^{|Q_0|}, \tag{B.6}$$

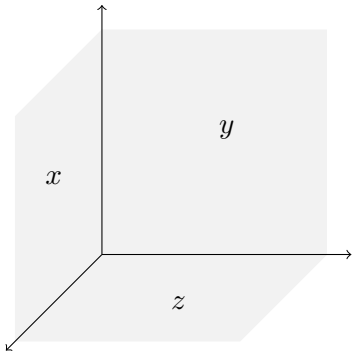
根据二项式定理，其为 $+1$ 若 $Q_0=\varnothing$，否则为 0。因此，$\prod_{Q_0\subseteq\{M+1,\dots,N\}} x_{\mathrm{F}_{Q\cup Q_0},N} = \sum_{j\in Q} x_j$。□

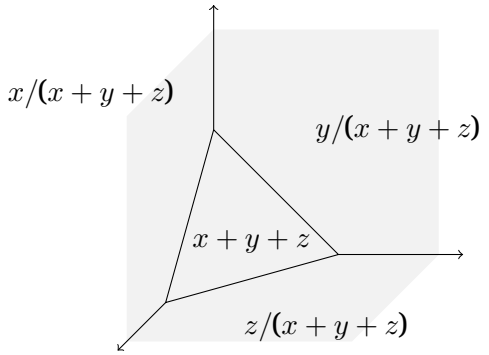
命题 B.1的完整证明与本文其余部分的关系有些偶然，因此我们仅以 $N=3$ 情形为例说明论证过程。该方法可推广至 $N\geq 3$ 情形，对 $N=2$ 情形的处理则更为简单。

全边界爆破 $[0,1)^N_{\mathrm{tb}}$ 定义为

$$[[0,1)^3;\{x,y,z=0\};\{y,z=0\};\{x,z=0\},\{x,y=0\}], \tag{B.7}$$

其中，第一次爆破是对 $\{x,y,z=0\}$ 进行的，且必须首先执行。其余三次爆破可以按任意顺序进行，且每种顺序都会得到一个典范微分同胚的带角流形。第一次爆破的输入和输出分别为 $[[0,1)^3;\ \{x,y,z=0\}]$,



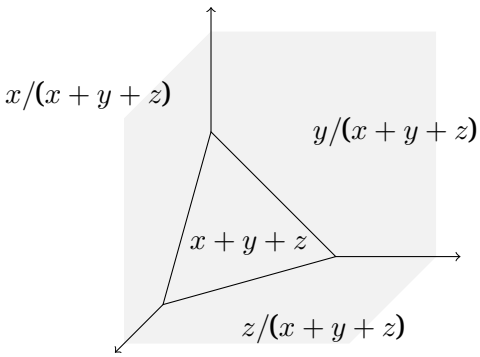


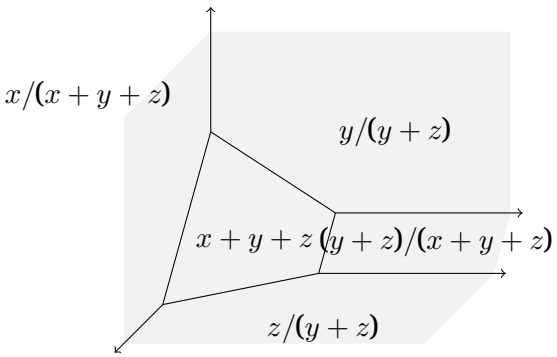
分别而言，这里我们用边界定义函数标记各个面（使用笛卡尔坐标 x、y、z代替 x_1、x_2、x_3）。吹起上的边界定义函数的选取遵循 §2 引言中的规定。

下一次吹起得到

$$[[0,1)^3;\{x,y,z=0\};\{y,z=0\}], \tag{B.8}$$

其输入和输出为





再次说明，边界定义函数的选取遵循 §2。

接下来，我们爆破 $[[0,1)^3;\{x,y,z=0\};\{y,z=0\}]$ 中对应于 y-轴的面。由于前一次爆破发生在当前待爆破的面之外，我们可以使用和

$$\frac{x}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}=\frac{x+z}{x+y+z} \tag{B.9}$$

作为当前爆破前面的边界定义函数的 $[[0,1)^3; \{x,y,z=0\}]$ 中相邻面的边界定义函数之和，而不是

$$\frac{x}{x+y+z}+\frac{z}{y+z}=\frac{xy+2xz+yz+z^2}{(y+z)(x+y+z)}, \tag{B.10}$$

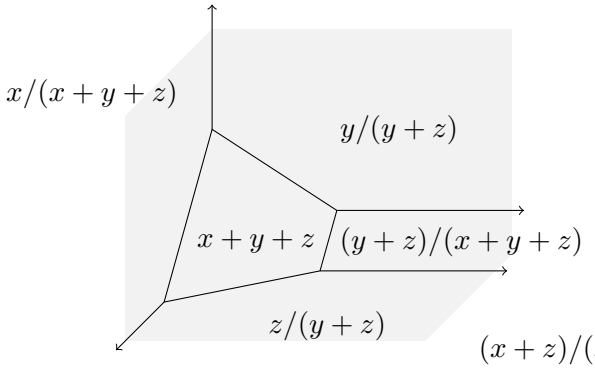
这将是 §2中的规定。方程 (B.9) 与方程 (B.10) 中的选择是等价的，也就是说，它们的商在 $[[0,1)^3$ 上是光滑非零函数；$\{x,y,z=0\}$；$\{y,z=0\}$；$\{x,z=0\}]$。鉴于方程 (B.9) 是最近一次吹起的前面的边界定义函数，该商

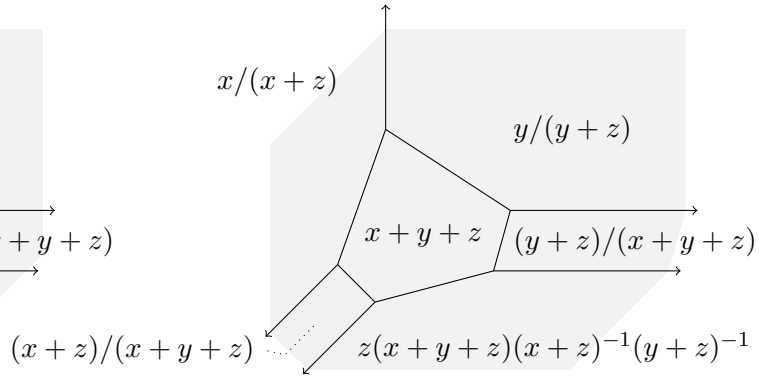
$$\frac{x/(x+y+z)}{(x+z)/(x+y+z)}=\frac{x}{x+z} \tag{B.11}$$

在 $[[0,1)^3$ 中是边界定义函数；$\{x,y,z=0\}$；$\{y,z=0\}$；$\{x,z=0\}]$ 对于 yz-平面的提升而言，并且

$$\frac{z/(y+z)}{(x+z)/(x+y+z)}=\frac{z(x+y+z)}{(x+z)(y+z)} \tag{B.12}$$

是 xy-平面提升的边界定义函数。总之，第三次吹起的输入和输出为

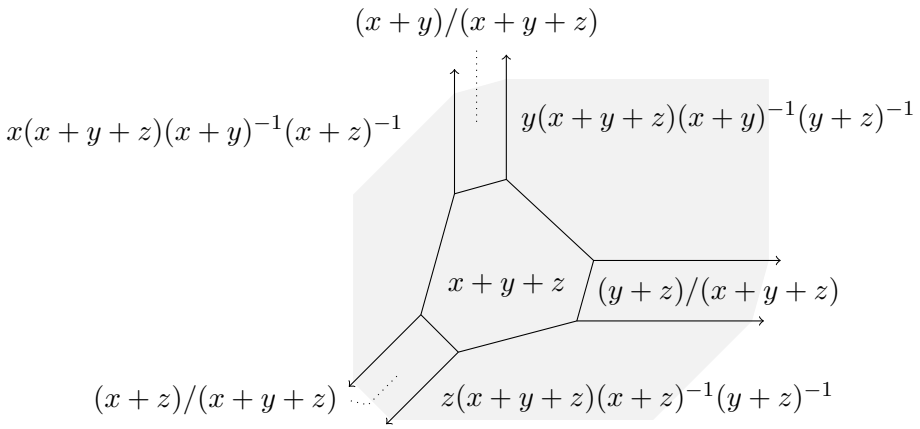




最后一次吹起，得到 $[0,1)^3_{\mathrm{tb}}=[[0,1)^3; \{x,y,z=0\}; \{y,z=0\}; \{x,z=0\}, \{x,y=0\}]$，类似。我们将 $(x+y)/(x+y+z)$ 用作对应于 z-轴的面的吹起的边界定义函数，然后可以使用

$$\begin{aligned}\frac{x/(x+z)}{(x+y)/(x+y+z)}&=\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}\\ \frac{y/(y+z)}{(x+y)/(x+y+z)}&=\frac{y(x+y+z)}{(x+y)(y+z)}\end{aligned} \tag{B.13}$$

作为 fa 的边界定义函数 分别对应于 yz 平面和 xz 平面的面。因此，我们最终得到



作为最终结果。

这就证明了命题 B.1的第一部分，至少在 $N=3$ 情形下。

其余部分可以推导出来。例如，考虑 $[0,1)^3_{\mathrm{tb}}$ 中六边形面 $\mathrm{f}^{\{\{1,2,3\}\}}$ 的左上角。此处为 $\mathrm{f}^{\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}}$。附近，$z \gg y \gg x$，因此，在该角的某个邻域 U 中，并且

$$x+y+z \in zC^\infty(U;\mathbb{R}^+), \qquad x+z \in zC^\infty(U;\mathbb{R}^+), \quad x+y \in yC^\infty(U;\mathbb{R}^+). \tag{B.14}$$

因此，上文所示选取的边界定义函数为 $x+y+z \in zC^\infty(U;\mathbb{R}^+)$, $(x+y)/(x+y+z) \in (y/z)C^\infty(U;\mathbb{R}^+)$, 以及

$$x(x+y+z)(x+y)^{-1}(x+z)^{-1} \in (x/y)C^\infty(U;\mathbb{R}^+). \tag{B.15}$$

这表明 $z, y/z, x/y$ 在 U 内构成一个有效的坐标系。与 $\mathrm{I} = \{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$ 相容的唯一置换 $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ 是 $\sigma = (1,3)$，它将 1、2、3 的顺序反转。也就是说，$\sigma(1) = 3$，$\sigma(2) = 2$，且 $\sigma(3) = 1$。方程 (B.3) 中定义的坐标 $\varrho, \hat{}x_j$ 为

$$\varrho = x_3 = z, \quad \hat{x}_2 = x_2/x_3 = y/z, \tag{B.16}$$

以及 $\hat{}x_1 = x_1/x_2 = x/y$。可以看出，$U$ 可以取为任意一个不包含 $\mathrm{f}^{\{\{1,2,3\}\}}$ 其他角点的开集。每个角点的情况都类似，因此，命题 B.1 的最后一条结论，至少在所考虑的 $N = 3$ 情形下，可由上述计算得出。

参考文献

[AK11] K. Aomoto 和 M. Kita。《超几何函数理论》。Springer 数学专著丛书。附 Toshitake Kohno 所作附录，由 Kenji Iohara 从日文翻译。Springer-Verlag，东京，2011。doi: 10.1007/978-4-431-53938-4(引自第 8 页)。[Alb+11] V. A. Alba 等。“关于 AGT 猜想所产生的共形块的组合展开”。数学物理快报 98.1 (2011)，33–64。doi: 10.1007/s11005-011-0503-z(引自第 5 页)。[Aom87] K. Aomoto。“关于复 Selberg 积分”。牛津数学季刊 (2) 38.152 (1987)，385–399。doi: 10.1093/qmath/38.4.385(引自第 4、5、7、29、43 页)。[BPZ84] A. A. Belavin、A. M. Polyakov 和 A. B. Zamolodchikov。“二维量子场论中的无限维共形对称性”。核物理 B 241.2 (1984)，333–380。doi: 10.1016/0550-3213(84)90052-X(引自第 8、9 页)。[CKW18] L. de la Cruz、A. Kniss 和 S. Weinzierl。“散射形式的性质及其与结合子的关系”。高能物理杂志 3 (2018)。doi: 10.1007/jhep03(2018)064(引自第 4 页)。[CMT19] E. Casali、S. Mizera 和 P. Tourkine。“来自扭曲同调的单值性关系”。高能物理杂志 12 (2019)，087，34。doi: 10.1007/jhep12(2019)087(引自第 4 页)。[DF84] V. S. Dotsenko 和 V. A. Fateev。“二维统计模型中的共形代数与多点关联函数”。核物理 B 240.3 (1984)，312–348。doi: 10.1016/0550-3213(84)90269-4(引自第 8–10 页)。[DF85a]。“中心荷为 $c \leq 1$ 的二维共形不变理论中的四点关联函数与算子代数”。核物理 B 251 (1985)，691–734。doi: 10.1016/S0550-3213(85)80004-3(引自第 7–11、29、35、43、48 页)。[DF85b]。“中心荷为 $c \leq 1$ 的二维共形理论的算子代数”。物理快报 B 154.4 (1985)，291–295。doi: 10.1016/0370-2693(85)90366-1(引自第 8 页)。[Fel89] G. Felder。“极小模型的 BRST 方法”。核物理 B **317** 1 1989 215 236 10.1016/0550-3213(89)90568-3。（），–。doi:（引自第 页）。[FK15a] S. M. Flores 和 P. Kleban。“一组零态偏微分方程的解空间：第 1 部分”。数学物理通讯 333.1 (2015)，389–434。doi: 10.1007/s00220-014-2189-4(引自第 8 页)。[FK15b]。“一组零态偏微分方程的解空间：第 2 部分”。数学物理通讯 333.1 (2015)，435–481。doi: 10.1007/s00220-014-2185-8(引自第 8 页)。[FK15c]。“一组零态偏微分方程的解空间：第 3 部分”。数学物理通讯 333.2 (2015)，597–667。doi: 10.1007/s00220-014-2190-y(引自第 8 页)。[FK15d]。“一组零态偏微分方程的解空间：第 4 部分”。数学物理通讯 333.2 (2015)，669–715。doi: 10.1007/s00220-014-2180-0(引自第 8 页)。[FS89] G. Felder 和 R. Silvotti。“黎曼曲面上极小模型的自由场表示”。物理快报 B 231.4 (1989)，411–416。doi: 10.1016/0370-2693(89)90685-0(引自第 8 页)。[FS92]。“黎曼曲面上极小模型的共形块”。数学物理通讯 144.1 (1992)，17–40（引自第 8 页）。

[FW08] P. J. Forrester 和 S. O. Warnaar。“塞尔伯格积分的重要性”。Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 45.4 (2008)，489–534。doi: 10.1090/S0273-0979-08-01221-4 (引自第 1、6–8、43 页)。[Gey94] W. Geyer。“关于 Tamari 格”。Discrete Math.

133 1 3 1994 99 122 10.1016/0012-365X(94) 。- () ， –。90019-1 doi:（引自第 页）。2

[GS64] I. M. Gel’fand 和 G. E. Shilov。《广义函数》。第 I 卷：性质与运算。Academic Press, 1964（引自第 30 页）。[HMM97] A. Hassell、R. Mazzeo 和 R. B. Melrose。“余维为二的带角流形的符号公式”。Topology 36.5 (1997)，1055–1075。doi: 10.1016/S0040-9383(96)00043-2 (引自第 11、21 页)。[Kad93] K. W. J. Kadell。“两个塞尔伯格-杰克对称多项式乘积的一个积分”。Compositio Math. 87.1 (1993)，5–43。网址: http://www.numdam.org/item?id=CM_1993__87_1_5_0 (引自第 5 页)。[Kad97] 。“塞尔伯格-杰克对称函数”。Adv. Math.

130 1 1997 33 102 10.1006/aima. 。() ， –。1997.1642 doi:（引自第 页）。5

[KT86a] Y. Kanie 和 A. Tsuchiya。“维拉索罗代数的福克空间表示：交织算子”。Publ. Res. Inst. Math. Sci.

22 2 1986 259 327 10.2977/prims/1195178069 4, 5, 8, 10, 。 () ， –。12, 16 doi:（引自第 页）。[KT86b] 。“维拉索罗代数的福克空间表示与交织算子”。Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 62.1 (1986)，12–15。网址: http://projecteuclid.org/euclid.pja/1195514490 (引自第 4、8、10 页)。[LV19] J. Lenells 和 F. Viklund。“Dotsenko-Fateev 积分的渐近分析”。Ann. Henri Poincaré 20.11 (2019)，3799–3848。doi: 10.1007/s00023-019-00849-5 (引自第 8 页)。[Mel] R. Melrose。《带角流形上的微分分析》（引自第 11、15 页）。[Miz17] S. Mizera。“Kawai-Lewellen-Tye 关系的组合与拓扑”。高能物理杂志 8 (2017)，097–150。doi: 10.1007/jhep08(2017)097。网址: https://doi.org/10.1007/jhep08(2017)097 (引自第 4 页)。[Miz20] 。《散射振幅与模空间局部化的若干方面》。Springer Theses。Springer，2020。doi: 10.1007/978-3-030-53010-5 (引自第 4 页)。[MS08] R. Melrose 和 M. Singer。《散射构型空间》。

2008 0808.2022 [DG] 22, 。arXiv: 23（引自第 页）。[MSS02] M. Markl、S. Shnider 和 J. Stasheff。《代数、拓扑与物理中的歌剧集》。数学调查与专著 96。美国数学学会，2002。doi: 10.1090/surv/096 (引自第 4 页)。[MY03] K. Mimachi 和 M. Yoshida。“扭曲循环的交数与共形场论的关联函数”。数学物理通讯 234.2 (2003)，339–358。doi: 10.1007/s00220-002-0766-4 (引自第 4、8 页)。[MY04] 。“与塞尔伯格积分相关的扭曲循环的交数及其在共形场论中的应用”。数学物理通讯 250.1 (2004)，23–45。doi: 10.1007/s00220-004-1138-z (引自第 8 页)。[PFM97] P. Philippe Francesco 和 D. S. Mathieu。《共形场论》。当代物理研究生教材。Springer，1997。doi: 10.1007/978-1-4612-2256-9 (引自第 8–10 页)。[Pos09] A. Postnikov。“排列多面体、结合子及其他”。Int. Math. Res. Not. IMRN 6 (2009)，1026–1106。doi: 10.1093/imrn/rnn153 (引自第 4 页)。[Sel44] A. Selberg。“关于一个多重积分的评注”。Norsk Mat. Tidsskr. 26 (1944)，71–78（引自第 6 页）。[Sta63] J. D. Stasheff。“ H-空间的同伦结合性。I、II”。Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963)，275-292；同刊 108 (1963)，293–312。doi: 10.1090/s0002-9947-1963-0158400-5 (引自第 4 页)。[Tam62] D. Tamari。“括号表达式代数及其计数”。Nieuw Arch. Wisk. (3) 10 (1962)，131–146（引自第 2 页）。[TV03] V. Tarasov 和 A. Varchenko。“与 $\mathfrak{sl}_3$ 相关的塞尔伯格型积分 ”。数学物理快报 65.3 (2003)，173–185。doi: 10.1023/B:MATH.0000010712.67685.9d (引自第 4 页)。[Var95] A. Varchenko。《多维超几何函数与李代数及量子群表示论》。数学物理高级丛书 21。World Scientific Publishing Co.，1995。doi: 10.1142/2467 (引自第 4、8、11、30 页)。[War09] S. O. Warnaar。“李代数 A_n 的一个塞尔伯格积分”。Acta Math. 203.2 (2009)，269–304。doi: 10.1007/s11511-009-0043-x (引自第 4 页)。[Yos03] M. Yoshida。“塞尔伯格积分的几何解释”。Internat. J. Modern Phys. A 18.24 (2003)，4343–4359。doi: 10.1142/S0217751X03015192 (引自第 8 页)。

电子邮箱: ethanws@mit.edu

美国马萨诸塞州02139-4307，麻省理工学院数学系