arXiv:2301.03756v1 [math.PR] 10 Jan 2023

布朗运动击中球面

Yuji Hamana 和 Hiroyuki Matsumoto

摘要

设 S_r^{d-1} 为 R^d 中以原点为中心、半径为 r 的球面， σ_r 为标准布朗运动$\{B_t\}_{t\geqq 0}$（可能带有常数漂移）首次到达该球面的时刻。本文旨在利用球谐函数给出 (σ_r, B_{σ_r}) 联合分布密度的显式公式，并研究其分布函数的渐近行为。 [1]

1. 引言及主要结果

对于 $d \geqq 2$，我们考虑一个标准的 d维布朗运动 $B = \{B_t\}_{t\geqq 0}$，它从固定点（a, 0, ..., 0）出发，其中假设 $a > 0$，并定义在概率空间（Ω $\mathscr{F}$, P_a）上。设 S_r^{d-1}为R^d 中以原点为中心、半径为 r 的球面，我们关注 B 首次到达 S_r^{d-1}的时刻 σ_r 与击中位置 B_{σ_r}的联合分布。

本文旨在借助球谐函数（即盖根鲍尔多项式和切比雪夫多项式），给出联合分布密度的显式表达式。作为应用，我们研究尾概率 $P_a(t < \sigma_r < \infty, B_{\sigma_r} \in A)$ $A \subset S_b^{d-1}$ 在 $a > r$时的渐近行为。本文还研究了具有常数漂移的布朗运动的联合密度。

多位作者研究过联合分布。首先应当指出，在退出问题中，也就是 $a < r$ 的情形下，联合密度由满足狄利克雷边界条件的热方程的一个解给出。关于一般性讨论，参见 Aizenman-Simon [1]；关于球面的显式表达式，参见 Hsu [9]。Wendel [19] 利用球谐函数，得出了关于 (σ_b, B_{σ_b}) 的函数期望的一个优美结果。关于这一方向的近期研究，参见 Gzyl [4] 及其中的参考文献；关于分布函数的渐近行为及其在维纳香肠中的应用，参见 Uchiyama [17, 18]。Yin-Wang [20] 讨论了带漂移的布朗运动的类似问题。

我们采用另一种方法。从布朗运动的斜积表示出发，我们利用 Mijatovic-Mramor-Uribe Bravo [13]所证明的事实：布朗运动在球面上的投影 $S^{d-1} = S_1^{d-1}$定义了扩散过程。我们可以看到，对于一维投影，其特征值

[1]2020数学主题分类：60J65 关键词：布朗运动、命中时间和位置、球谐函数、一维扩散,

生成元的特征函数由球谐函数明确给出。

结合这些事实以及布朗运动概率律的旋转不变性，我们得到如下结论。按照惯例，我们用 I_ν 和 K_ν 表示修正贝塞尔函数。我们还分别用 C_n^ν 和 T_n 表示盖根鲍尔多项式和切比雪夫多项式。

定理 1.1. 记 E_a 为关于 P_a 的期望。那么，对于 $\lambda > 0$ 和 $u \in \mathbf{R}^d$，我们有

$$\begin{aligned} E_a[e^{-\lambda\sigma_r} e^{\langle u, B_{\sigma_r}\rangle}] =& \frac{\mathcal{L}_0(a\sqrt{2\lambda})}{\mathcal{L}_0(r\sqrt{2\lambda})} \int_{S^1} e^{r\langle u,z\rangle} ds(z) \\ &+ 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{L}_n(a\sqrt{2\lambda})}{\mathcal{L}_n(r\sqrt{2\lambda})} \int_{S^1} e^{r\langle u,z\rangle} T_n(z_1) ds(z) \end{aligned}$$

当 $d = 2$ 且

$$\begin{aligned} & E_a\left[e^{-\lambda\sigma_r} e^{\langle u, B_{\sigma_r}\rangle} I_{\{\sigma_r<\infty\}}\right] \\ &= \frac{1}{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\nu)\frac{a^{-\nu}\mathcal{L}_{n+\nu}(a\sqrt{2\lambda})}{r^{-\nu}\mathcal{L}_{n+\nu}(r\sqrt{2\lambda})} \int_{S^{d-1}} e^{r\langle u,z\rangle} C_n^\nu(z_1) ds(z) \end{aligned}$$

当 $d \geqq 3$ 时，其中 ds 是 S^{d-1} 上的均匀概率测度，并且对于 $a < r$， $\mathcal{L} = I$；对于 $a > r$， $\mathcal{L} = K$。

令 $u = 0$，并注意到当 $n \geqq 1$ 时， $T_n(z_1)$ 和 $C_n^\nu(z_1)$ 的曲面积分均为零，我们便得到 $E_a[e^{-\lambda\sigma_r}]$ 的著名公式（参见 [2]）。

我们可以对联合拉普拉斯变换进行反演，得到如下结果。我们用 $\rho_{a\,r,}^{(\nu)}(t)$ 表示从 a 出发、指标为 ν 的贝塞尔过程首次到达 r 的概率密度。

定理 1.2。对于 $t > 0$ 和 $z \in \mathbf{R}^d$，其中 $|z| = r$，我们有

$$P_a(\sigma_r \in dt, B_{\sigma_r} \in dz) = \rho_{a,r}^{(0)}(t) dt ds_r(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \rho_{a,r}^{(n)}(t) T_n\left(\frac{z_1}{r}\right) dt ds_r(z)$$

当 $d = 2$ 且

$$\begin{aligned} & P_a(\sigma_r \in dt, B_{\sigma_r} \in dz) \\ &= \frac{1}{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\nu)\left(\frac{a}{r}\right)^n \rho_{a,r}^{(n+\nu)}(t) C_n^\nu\left(\frac{z_1}{r}\right) dt ds_r(z) \end{aligned}$$

当 $d \geqq 3$时，其中 $\nu = \frac{d-2}{2}$ 和 ds_r 是 S_r^{d-1}上的均匀概率测度 .

作者 [8] 给出了联合拉普拉斯变换的另一种表达式，据此我们可以证明定理 1.2。

本文其余部分安排如下。在接下来的第 2 节中，我们研究 S^{d-1} 上布朗运动的第一坐标或一维投影。第 3 节给出上述定理的证明；第 4 节则研究当 $t \to \infty$ 时， $P_a(t < \sigma_r < \infty, B_{\sigma_r} \in A)$、 $A \subset S_r^{d-1}$ 的渐近行为。最后，在第 5 节中，我们讨论具有常数漂移的布朗运动。

2. 布朗运动在球面上的投影

设 $\theta = \{\theta(t)\}_{t\geqq 0}$ 是 S^{d-1} 上的布朗运动，它对应于 S^{d-1} 上配备通常欧几里得度量的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。Mijatovic-Mramor-Uribe Bravo [13] 已证明， θ 的投影是扩散过程，可表示为随机微分方程的唯一解。这一事实，尤其是关于一维投影的结果，是我们论证的基础；我们在此回顾这一特殊情形下的结果。

命题2.1. $\{\theta_1(t)\}_{t\geqq 0}$ 的第一坐标 θ 是在（-1,1）上取值的扩散过程，其生成元为

$$\mathscr{G}_d = \frac{1}{2}(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d-1}{2}x\frac{d}{dx}.$$

容易看出，当 $d = 2$时，边界 ± 1 是常返且反射的；当 $d \geqq 3$时，它们是入口边界。$\mathscr{G}_d$ 的特征值和特征函数均有显式表达式，并且其转移密度具有特征函数展开。由于这些结果在后续各节中起着重要作用，我们现在回顾一些基本事实。关于下文的切比雪夫多项式和Gegenbauer多项式的详细信息，请参阅 [3, 12, 14]。

记

$$\mathscr{G}_d = \frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{d-3}{2}}}\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{(1-x^2)^{-\frac{d-1}{2}}}\frac{d}{dx}\Big)$$

并令 $dm(x) = 2(1-x^2)^{\frac{d-3}{2}}dx$ 为规范（速度）测度。注意， m是（-1, 1）上的有限测度。此外，取

$$s(x) = \int_0^x (1-y^2)^{-\frac{d-1}{2}}dy$$

作为尺度函数。

当 $d = 2$, $s(\pm 1)$ 均为有限值且边界是正则的时，切比雪夫多项式 $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ 满足

$$\mathscr{G}_2 T_n = -\frac{n^2}{2}T_n \qquad \text{and} \qquad \frac{d}{ds}T_n(\pm 1) = 0.$$

此外，正交关系为

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & m = n \neq 0 \\ \pi & m = n = 0. \end{cases}$$

因此，令

$$\phi_0^0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \phi_n^0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}T_n(x) \quad (n \geqq 1),$$

我们看到，$\{\phi_n^0\}_{n=0}^{\infty}$ 构成了 $L^2(dm)$的一组标准正交基，并且 $\{\theta_1(t)\}$ 相对于 dm 的转移密度 $p_2(t,x,y)$为

$$p_2(t,x,y)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}n^2t}T_n(x)T_n(y). \tag{2.1}$$

对于 $d\geqq 3$，特征函数由Gegenbauer多项式 C_n^{ν}给出，其定义为

$$\sum_{n=0}^{\infty}s^nC_n^{\nu}(x)=\frac{1}{(1+s^2-2sx)^{\nu}},\qquad |s|<1,$$

其中 $\nu=(d-2)/2$。事实上，我们有

$$\mathscr{G}_dC_n^{\nu}=-\frac{1}{2}n(n+2\nu)C_n^{\nu}\qquad\text{and}\qquad \frac{d}{ds}C_n^{\nu}(\pm1)=0$$

以及正交关系

$$\int_{-1}^{1}C_m^{\nu}(x)C_n^{\nu}(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dx=\delta_{m,n}\frac{\pi\Gamma(n+2\nu)}{2^{2\nu-1}(n+\nu)n!(\Gamma(\nu))^2}.$$

因此，令

$$\phi_n^{\nu}(x)=\Big(\frac{(n+\nu)n!}{\pi\Gamma(n+2\nu)}\Big)^{\frac{1}{2}}2^{\nu-1}\Gamma(\nu)C_n^{\nu}(x),$$

我们得到 $L^2(dm)$的标准正交基$\{\phi_n^{\nu}\}_{n=0}^{\infty}$，以及关于 dm的转移密度 $p_d(t,x,y)$的特征函数展开式 $\{\theta_1(t)\}$，

$$p_d(t,x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}n(n+2\nu)t}\phi_n^{\nu}(x)\phi_n^{\nu}(y). \tag{2.2}$$

3. 定理1.1和定理1.2的证明

我们采用与第1节相同的记号，并从标准布朗运动 $B=\{B_t\}_{t\geqq 0}$ 的斜积表示开始论证：存在一个 d维贝塞尔过程 $R=\{R_t\}_{t\geqq 0}$（指标为 $\nu=(d-2)/2$）以及一个布朗运动 $\theta=\{\theta(t)\}_{t\geqq 0}$，定义在 S^{d-1} 上且与 R 独立，使得

$$B_t=R_t\theta(\Xi_t),\qquad \Xi_t=\int_0^t\frac{ds}{R_s^2}.$$

$B_0=(a,0,...,0)$ 表示 $R_0=a$，而 $\theta(0)=(1,0,...,0)$。根据R 与 θ的独立性，我们有

$$E_a[e^{-\lambda\sigma_r}e^{\langle u,B_{\sigma_r}\rangle}]=E_a^{(\nu)}[e^{-\lambda\tau_r}E_a[e^{r\langle u,\theta(t)\rangle}]\Big|_{t=\Xi_{\tau_r}}],$$

其中，$E_a^{(\nu)}[\,\cdot\,]$ 表示相对于 R概率律的期望，τ_r 是 R 到 r的首次到达时刻。

首先，在 $d = 2$时证明这些定理。记 $\theta(t) = (\theta_1(t)\ \theta_2(t))$和$u = (u_1, u_2)$，由标准布朗运动的概率律具有旋转不变性可得

$$\begin{aligned} E_a[e^{r\langle u,\theta(t)\rangle}] &= E_a[e^{ru_1\theta_1(t)}E_a[e^{ru_2\theta_2(t)}|\theta_1(t)]] \\ &= \int_{-1}^{1} e^{ru_1 y}\frac{1}{2}\big(e^{ru_2\sqrt{1-y^2}} + e^{-ru_2\sqrt{1-y^2}}\big)P(\theta_1(t) \in dy). \end{aligned}$$

因此，公式 (2.1) 意味着

$$\begin{aligned} &E_a[e^{r\langle u,\theta(t)\rangle}] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{ru_1 y}\frac{1}{2}\big(e^{ru_2\sqrt{1-y^2}} + e^{-ru_2\sqrt{1-y^2}}\big)\frac{2dy}{\sqrt{1-y^2}} \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}n^2 t}\int_{-1}^{1} e^{ru_1 y}\frac{1}{2}\big(e^{ru_2\sqrt{1-y^2}} + e^{-ru_2\sqrt{1-y^2}}\big)T_n(y)\frac{2dy}{\sqrt{1-y^2}} \end{aligned}$$

因为 $T_n(1) = 1$。由于 $|T_n(y)| \leqq 1$，交换积分与求和的顺序是合理的。我们可以将右侧的积分写成曲面积分，得到

$$E_a[e^{r\langle u,\theta(t)\rangle}] = \int_{S^1} e^{r\langle u,z\rangle}ds(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}n^2 t}\int_{S^1} e^{r\langle u,z\rangle}T_n(z_1)ds(z).$$

现在，回顾公式 ([2,p.407])

$$E_a^{(0)}[e^{-\lambda\tau_r - \frac{1}{2}n^2\Xi_{\tau_r}}] = \frac{\mathcal{L}_n(a\sqrt{2\lambda})}{\mathcal{L}_n(r\sqrt{2\lambda})}, \tag{3.1}$$

当 $d = 2$ 时，我们便得到定理 1.1 的断言。

接下来注意另一个公式 ([2, p.398])

$$E_a^{(\mu)}[e^{-\lambda\tau_r}] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\rho_{a,r}^{(\mu)}(t)dt = \frac{a^{-\mu}\mathcal{L}_\mu(a\sqrt{2\lambda})}{r^{-\mu}\mathcal{L}_\mu(r\sqrt{2\lambda})}.$$

当 $d = 2$ 时，我们便得到定理 1.2。同样，我们很容易证明其绝对收敛，并说明可以在 t 中交换求和与积分的顺序。

接下来，我们证明 $d \geqq 3$ 情形下的定理。此时，对于球面布朗运动 θ，在给定 $\theta_1(t) = \xi_1$ 的条件下，$(\theta_2(t) ..., \theta_d(t))$ 的条件分布是球面 $S^{d-2}_{\sqrt{1-\xi_1^2}}$ 上半径为 $\sqrt{1-\xi_1^2}$ 的均匀分布。因此，记 $u = (u_1, u')\ \theta = (\theta_1, \theta') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{d-1}$，我们有

$$E_a[e^{\langle u,r\theta(t)\rangle}] = E_a\Big[e^{ru_1\theta_1(t)}\int_{S^{d-2}} e^{r\sqrt{1-\theta_1(t)^2}\langle u',\xi'\rangle}\ ds(\xi')\Big].$$

利用上一节给出的 Gegenbauer多项式 的性质，并将二重积分写成曲面积分，由式 (2.2) 可得

$$
\begin{aligned}
&E_a[e^{\langle u, r\theta(t)\rangle}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}n(n+2\nu)t}\phi_n^\nu(1)\int_{-1}^{1}\phi_n^\nu(\xi_1)e^{ru_1\xi_1}2(1-\xi_1^2)^{\frac{d-3}{2}}d\xi_1 \\
&\qquad\qquad \times \int_{S^{d-2}} e^{r\sqrt{1-\xi_1^2}\langle u',\xi'\rangle}\frac{\mathrm{vol}(d\xi')}{\mathrm{vol}(S^{d-2})} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+\nu)2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)^2\,\mathrm{vol}(S^{d-1})}{\pi\Gamma(2\nu)\,\mathrm{vol}(S^{d-2})}e^{-\frac{1}{2}n(n+2\nu)t}\int_{S^{d-1}} C_n^\nu(w_1)e^{r\langle u,w\rangle}ds(w).
\end{aligned}
$$

我们使用了公式 $C_n^\nu(1) = \binom{2\nu+n-1}{n} = \Gamma(n+2\nu)/(n!\Gamma(2\nu))$，以及估计

$$
\max_{|y|\leqq 1}|C_n^\nu(y)| = C_n^\nu(1) \leqq Cn^{2\nu-1} \tag{3.2}
$$

对于某个常数 C（例如参见 [12, 第 218, 225] 页），以证明求和与积分次序的交换是合理的。

此外，回顾公式

$$
\mathrm{vol}(S^{d-1}) = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \qquad \text{and} \qquad \Gamma(2\nu) = \frac{2^{2\nu}}{2\sqrt{\pi}}\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+\frac{1}{2}),
$$

我们得到

$$
E_a[e^{\langle u, r\theta(t)\rangle}] = \frac{1}{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\nu)e^{-\frac{1}{2}n(n+2\nu)t}\int_{S^{d-1}} C_n^\nu(w_1)e^{r\langle u,w\rangle}ds(w).
$$

现在，利用（3.1），我们得到定理 1.1 的断言。定理 1.2 的证明方法与 $d=2$ 的情形相同。

4. 分布函数的渐近行为

本节中，假设 $a > r$ 并应用定理 1.2，我们研究当 $t \to \infty$时，固定的球面 S_r^{d-1}上的博雷尔子集 A 所对应的分布函数 $P_a(t < \sigma_r < \infty, B_{\sigma_r} \in A)$ 的渐近行为。我们使用与前几节相同的记号。

在关于贝塞尔过程首次击中时间的研究中，作者[6, 7]证明了以下结果。考虑一个指标为 ν 、起始于 a 且定义在某个概率空间 $(\Omega', \mathscr{F}', Q_a^{(\nu)})$ 上的贝塞尔过程，并令 τ_r 为其到达 r的击中时间。那么，当 $a > r$时，$Q_a^{(\nu)}(t < \tau_r < \infty)$ 的渐近行为为

$$
Q_a^{(0)}(t < \tau_r < \infty) = \frac{2\log(a/r)}{\log t}(1+o(1)) \tag{4.1}
$$

当 $d = 2$ 且

$$
Q_a^{(\nu)}(t < \tau_r < \infty) = \kappa^{(\nu)}t^{-\nu}(1+o(1)), \tag{4.2}
$$

当 $d \geqq 3$, 其中常数 $\kappa^{(\nu)}$ 由下式给出

$$\kappa^{(\nu)} = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\Big(\frac{r^3}{2a}\Big)^{\nu}\Big\{\Big(\frac{a}{r}\Big)^{\nu} - \Big(\frac{a}{r}\Big)^{-\nu}\Big\}.$$

结合这些结果并对余项进行一些估计，我们得到以下结论。

定理 4.1. 对于 S_r^{d-1}的任意博雷尔子集 A ,

$$P_a(t < \sigma_r < \infty, B_{\sigma_r} \in A) = \frac{2\log(a/r)}{\log t} s_r(A)(1+o(1))$$

当 $d = 2$ 时，成立 $t \to \infty$ ，且

$$P_a(t < \sigma_r < \infty, B_{\sigma_r} \in A) = \kappa^{(\nu)} s_r(A) t^{-\nu}(1+o(1))$$

当 $d \geqq 3$时成立。

注 4.2. 对于贝塞尔过程首次到达时刻的分布函数 $Q_a^{(\nu)}(t < \tau_r < \infty)$, Hamana 等人[5] 给出了精确的渐近展开；利用这些结果，我们可以得到联合分布函数的渐近展开。详细内容将另行发表。

为证明定理 4.1，我们给出以下关于 σ_r尾概率的估计。

引理 4.3。假设 $d \geqq 3$。那么，对于 $t > 0$，我们有

$$P_a(t < \sigma_r < \infty) \leqq \frac{r^{2\nu}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)t^{\nu}}.$$

证明。令 L_r 为布朗运动 B 击中球面S_r^{d-1}的末次命中时刻:

$$L_r = \sup\{s > 0 : |B_s| = r\}.$$

与通常做法一样，当 B 未击中 S_r^{d-1}时，我们令 $L_r = 0$ 。那么我们有

$$P_a(t < \sigma_r < \infty) \leqq P_a(t < L_r < \infty).$$

记 μ_r 为以原点为中心、半径为 r 的球 B_r 的平衡测度。那么众所周知（[16]），

$$P_a(t < L_r < \infty) = \int_t^{\infty} ds \int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{(2\pi s)^{d/2}} e^{-\frac{|x-a|^2}{2s}} d\mu_r(x).$$

现在回想起，B_r的容量为 $\mu_r(\mathrm{R}^d) = 2\pi^{\frac{d}{2}} r^{d-2}/\Gamma(\frac{d}{2}-1)$，我们看到

$$P_a(t < L_r < \infty) \leqq \int_t^{\infty} ds \int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{(2\pi s)^{d/2}} d\mu_r(x) = \frac{r^{2\nu}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)t^{\nu}}. \qquad \square$$

注 4.4。对于瞬态一维扩散过程，末次命中时刻的密度可用转移密度来表示。维数为 $d \geqq 3$ 的贝塞尔过程就是这种情况，而且我们还有转移密度的显式表达式。利用这些事实，我们可以为引理 4.3 给出另一种证明。

现在我们可以证明定理 4.1。注意，下面用于表示联合分布的无穷级数绝对收敛。

对于 $d = 2$，由定理 1.2 可得

$$P_a(t < \sigma_r < \infty, B_{\sigma_r} \in A) = Q_a^{(0)}(\tau_r > t)s_b(A) + I_t,$$

其中

$$I_t = 2\sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{a}{r}\big)^n Q_a^{(n)}(t < \tau_r < \infty) \int_A T_n(\frac{z_1}{r}) ds_r(z).$$

假设 $t > 1$，并注意到 $|T_n(x)| = |\cos(n \arccos x)| \leqq 1$。那么，由引理 4.3 可得

$$|I_t| \leqq 2\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{a}{r}\Big)^n \frac{r^{2n}}{2^n \Gamma(n+1) t^n} \leqq \frac{2}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{ar}{2}\Big)^n \frac{1}{n!} \leqq \frac{2}{t} e^{\frac{ar}{2}}$$

再由 (4.1)，即可得到定理 4.1 的断言。

对于 $d \geqq 3$，我们有

$$P_a(t < \sigma_r < \infty, B_{\sigma_r} \in A) = Q_a^{(\nu)}(t < \tau_r < \infty)s_r(A) + J_t,$$

其中

$$J_t = \frac{1}{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} (n+\nu) \big(\frac{a}{r}\big)^n Q_a^{(n+\nu)}(t < \tau_r < \infty) \int_A C_n^{\nu}(\frac{z_1}{r}) ds_r(z).$$

因此，结合 (3.2)、引理 4.3 和 (4.2)，我们得到 $J_t = O(t^{-1-\nu})$，并得到定理 4.1 的断言。

5. 带漂移的布朗运动

设 $B = \{B_t\}_{t \geqq 0}$ 是一个从 $x = (a, 0, ..., 0)$ 出发的标准 d 维布朗运动，与前文相同；对于常向量 $v \in \mathbf{R}^d$，令 $B^{(v)} = \{B^{(v)}(t)\}_{t \geqq 0}$ 为漂移为 v 的布朗运动，其定义为 $B^{(v)}(t) = B_t + tv$。我们用 $\sigma_r^{(v)}$ 表示 $B^{(v)}$ 到球面 S_r^{d-1} 的首次到达时刻。

卡梅伦-马丁定理和布朗运动的强马尔可夫性质推出

$$E_a\Big[e^{-\lambda \sigma_r^{(v)}} e^{\langle u, B^{(v)}(\sigma_r^{(v)})\rangle} I_{\{\sigma_r^{(v)} < \infty\}}\Big] = e^{-av_1} E_a\Big[e^{-(\lambda + \frac{|v|^2}{2})\sigma_r} e^{\langle u+v, B_{\sigma_r}\rangle} I_{\{\sigma_r < \infty\}}\Big].$$

He因此，我们可以将定理 1.1 应用于右侧，得到如下结果：

定理 5.1。对于 $\lambda > 0$ 和 $u \in \mathbf{R}^d$，我们有

$$E_a\Big[e^{-\lambda\sigma_r^{(v)}} e^{\langle u, B^{(v)}(\sigma_r^{(v)})\rangle} I_{\{\sigma_r<\infty\}}\Big] = e^{-av_1}\Bigg\{\frac{\mathcal{L}_0(a\sqrt{2\lambda+|v|^2})}{\mathcal{L}_0(r\sqrt{2\lambda+|v|^2})}\int_{S^1} e^{r\langle u+v,z\rangle} ds(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathcal{L}_n(a\sqrt{2\lambda+|v|^2})}{\mathcal{L}_n(r\sqrt{2\lambda+|v|^2})}\int_{S^1} e^{r\langle u+v,z\rangle} T_n(z_1) ds(z)\Bigg\}$$

当 $d = 2$ 且当 $d \geqq 3$时,

$$E_a\Big[e^{-\lambda\sigma_r^{(v)}} e^{\langle u, B^{(v)}(\sigma_r^{(v)})\rangle} I_{\{\sigma_r<\infty\}}\Big] = \frac{1}{\nu} e^{-av_1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\nu)\frac{a^{-\nu}\mathcal{L}_{n+\nu}(a\sqrt{2\lambda+|v|^2})}{r^{-\nu}\mathcal{L}_{n+\nu}(r\sqrt{2\lambda+|v|^2})}\int_{S^{d-1}} e^{r\langle u+v,z\rangle} C_n^{\nu}(z_1) ds(z).$$

我们可以像之前一样对拉普拉斯变换进行逆变换，并得到如下结果:

定理 5.2. 对于 $t > 0$ 且 $z \in \mathbf{R}^d$ 满足 $|z| = r$，我们有

$$P_a(\sigma_r^{(v)} \in dt, B^{(v)}(\sigma_r^{(v)}) \in dz) = e^{-av_1+\langle v,z\rangle} e^{-\frac{|v|^2}{2}t}\rho_{a,r}^{(0)}(t) dt ds_r(z) + 2e^{-av_1+\langle v,z\rangle} e^{-\frac{|v|^2}{2}t}\sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{a}{r}\big)^n \rho_{a,r}^{(n)}(t) T_n\big(\frac{z_1}{r}\big) dt ds_r(z)$$

当 $d = 2$ 且当 $d \geqq 3$时

$$P_a(\sigma_r^{(v)} \in dt, B_{\sigma_r}^{(v)} \in dz) = \frac{1}{\nu} e^{-av_1+\langle v,z\rangle} e^{-\frac{|v|^2}{2}t}\sum_{n=0}^{\infty}\big(n+\nu\big)\big(\frac{a}{r}\big)^n \rho_{a,r}^{(n+\nu)}(t) C_n^{\nu}\big(\frac{z_1}{r}\big) dt ds_r(z).$$

接下来，假设 $a > r$，对于固定的 $A \subset S_r^{d-1}$，我们考察分布函数 $P(t < \sigma_r^{(v)} < \infty, B^{(v)}(\sigma_r^{(v)}) \in A)$ 在 $t \to \infty$ 时的渐近行为。正如之前很容易猜到的，其首项由定理 5.2 右端各式的第一项给出。

定理 5.3. 对于 S_r^{d-1}的任意博雷尔子集 A，我们有

$$P_a(t < \sigma_r^{(v)} < \infty, B^{(v)}(\sigma_r^{(v)}) \in A) = 2\log\big(\frac{a}{r}\big) e^{-av_1}\int_A e^{\langle v,z\rangle} ds_r(z)\frac{1}{t(\log t)^2} e^{-\frac{|v|^2}{2}t}(1+o(1))$$

当 $d = 2$ 且

$$P_a(t < \sigma_r^{(v)} < \infty, B^{(v)}(\sigma_r^{(v)}) \in A) = \frac{2L(\nu)}{|v|^2} e^{-av_1}\int_A e^{\langle v,z\rangle} ds_r(z) t^{-\nu-1} e^{-\frac{|v|^2}{2}t}(1+o(1))$$

当 $d \geqq 3$ 时，其中

$$L(\nu) = \frac{r^{2\nu}}{2^{\nu}\Gamma(\nu)}\Big\{1 - \Big(\frac{r}{a}\Big)^{2\nu}\Big\}.$$

为了估计高阶项，我们回顾 [8] 中关于.....的渐近结果

$$H^{(\nu)}(t) := \int_t^\infty e^{-\frac{|v|^2}{2}s}\rho_{a,r}^{(\nu)}(s)ds,$$

其中 $\rho_a^{(\nu)},_r$ 是从 a 出发、指标为 ν 的贝塞尔过程到达 r 的首次到达时刻 τ_r 的密度：当 $d=2$ 时，

$$H^{(\nu)}(t) = \frac{2\log(a/r)}{t(\log t)^2}e^{-\frac{|v|^2}{2}t}(1+o(1))$$

而当 $d \geqq 3$ 时

$$H^{(\nu)}(t) = \frac{2L(\nu)}{|v|^2 t^{\nu+1}}e^{-\frac{|v|^2}{2}t}(1+o(1)). \tag{5.1}$$

定理 5.3 的断言可由以下引理推出：

引理 5.4. 存在一个常数 C，它依赖于 $|v|$ 和 r，使得

$$H^{(\nu)}(t) \leqq \frac{Cr^{2\nu}}{\Gamma(\nu)}\frac{1}{(2t)^{\nu+1}}e^{-\frac{|v|^2}{2}t}$$

对所有 $d \geqq 3$ 都成立。

证明。当 $d=3$ 和 $d=4$ 时，我们使用 (5.1)，并在下文假设 $d \geqq 5$.

记 P_y 为以 y 为起点的 d 维维纳测度，并用同一记号 σ_r 表示相应布朗运动首次到达 S_r^{d-1}的时刻。此外，令 $p(t,x,y) = (2\pi t)^{-d/2}\exp(-|y-x|^2/2t)$ 为高斯核，并为简便起见设 $\alpha = |v|^2/2$ 。于是有

$$H^{(\nu)}(t) = \alpha\int_t^\infty e^{-\alpha s}P_a(t < \sigma_r \leqq s)ds$$

并令 $e = (1, 0, ..., 0)$,

$$\begin{aligned} P_a(t < \sigma_r \leqq s) &\leqq \int_{\mathbf{R}^d} p(t, ae, y)P_y(\sigma_r \leqq s-t)dy \\ &\leqq \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\int_{\mathbf{R}^d} P_y(\sigma_r \leqq s-t)dy \end{aligned}$$

由布朗运动的马尔可夫性质可知。于是，经过简单的变量替换，我们得到

$$H^{(\nu)}(t) \leqq \frac{\alpha e^{-\alpha t}}{(2\pi t)^{d/2}}\int_0^\infty e^{-\alpha s}ds\int_{\mathbf{R}^d} P_y(\sigma_r \leqq s)dy.$$

现在令 L_r 为布朗运动击中 S_r^{d-1}的末次命中时刻。于是有

$$\int_{\mathbf{R}^d} P_y(\sigma_r \leqq s) = \int_{\mathbf{R}^d} P_y(0 < L_r \leqq s)dy + \int_{\mathbf{R}^d} P_y(\sigma_r \leqq s < L_r)dy. \tag{5.2}$$

对于右侧的第二项，勒加尔 [11] 已证明

$$\int_{\mathbf{R}^d} P_y(\sigma_r \leqq s < L_r)dy = \int_{\mathbf{R}^d} P_y(\sigma_r \leqq s)P_y(\sigma_r < \infty)dy, \tag{5.3}$$

这意味着

$$\int_{\mathbf{R}^d} P_y(\sigma_r \leqq s < L_r)dy \leqq \int_{\mathbf{R}^d} P_y(\sigma_r < \infty)^2 dy. \tag{5.4}$$

这个估计足以满足我们的目的。完成引理 5.4 的证明后，我们将给出（5.3）的另一个初等证明。

与上一节一样，我们用 μ_r 表示球 B_r的平衡测度。于是，对于（5.2）的第一项，有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\alpha s}ds \int_{\mathbf{R}^d} P_y(0 < L_r \leqq s)dy &= \int_0^\infty e^{-\alpha s}ds \int_{\mathbf{R}^d} dy \int_0^s d\tau \int_{\mathbf{R}^d} p(\tau, y, z)d\mu_r(z) \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha s}ds \int_0^s d\tau \int_{\mathbf{R}^d} d\mu_r(z) \\ &= \frac{2\pi^{d/2}r^{d-2}}{\alpha^2\Gamma(\frac{d}{2}-1)}.\end{aligned}$$

对于第二项，我们回忆

$$P_y(\sigma_r < \infty) = 1 \wedge \Big(\frac{r}{|y|}\Big)^{d-2}.$$

于是，由（5.4）可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\alpha s}ds \int_{\mathbf{R}^d} P_y(\sigma_r < \infty)^2 dy &= \frac{1}{\alpha}\Big\{ \int_{|y|\leqq r} dy + \int_{|y|\geqq r} \big(\frac{r}{|y|}\big)^{2(d-2)} dy \Big\} \\ &= \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}r^d}{\alpha\Gamma(\frac{d}{2})}\Big(\frac{1}{d} + \frac{1}{d-4}\Big).\end{aligned}$$

结合上述不等式，即得引理所述结论。 □

（5.3）的证明。根据布朗运动的马尔可夫性质，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d} P_y(\sigma_r \leqq s < L_r)dy &= \int_{\mathbf{R}^d} E_y[1_{\{\sigma_r \leqq s\}}1_{\{L_r > s\}}]dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} E_y[1_{\{\sigma_r \leqq s\}}E_{B_s}[1_{\{L_r > 0\}}]]dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} dy \int_{\mathbf{R}^d} E_y[1_{\{\sigma_r \leqq s\}}P_{B_s}(L_r > 0)|B_s = x]p(s, y, x)dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} dx \int_{\mathbf{R}^d} P_x(L_r > 0)P_y(\sigma_r \leqq s|B_s = x)p(s, y, x)dy.\end{aligned}$$

请注意，此处 $P_x(L_r > 0) = P_x(\sigma_r < \infty)$，且钉扎布朗运动的时间反演仍是钉扎布朗运动。于是我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d} P_y(\sigma_r \leqq s < L_r)dy &= \int_{\mathbf{R}^d} P_x(\sigma_r < \infty)dx \int_{\mathbf{R}^d} P_x(\sigma_r \leqq s|B_s = y)p(s, x, y)dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} P_x(\sigma_r < \infty)P_x(\sigma_r \leqq s)dx.\end{aligned}$$

□

致谢

作者部分获得了日本学术振兴会科学研究费助成事业资助，项目编号为 20K03634 和 21K03298。

参考文献

[1] M. Aizenman 和 B. Simon，施罗丁格算子的布朗运动与Harnack不等式，《纯粹与应用数学通讯》，XXXV (1982)，209–273。[2] A. N. Borodin 和 P. Salminen，《布朗运动手册：事实与公式》，第2版，Birkh¨user，2002。[3] I. S. Gradshteyn 和 I. M. Ryzhik，《积分、级数与乘积表》，第8版，Academic Press，2015。[4] H. Gzyl，重新探讨布朗运动击中球面，Statist. Probaba. Lett.，155 (2019) 108565。[5] Y. Hamana、R. Kaikura 和 K. Shinozaki，贝塞尔过程首次击中时间的渐近展开，《数学短论》，41 (2021)，509–537。[6] Y. Hamana 和 H. Matsumoto，贝塞尔过程首次击中时间的概率分布，Trans Amer. Math. Soc.，365 (2013)，5237–5257。[7] Y. Hamana 和 H. Matsumoto，贝塞尔过程首次击中时间概率分布的渐近性质，《电子概率通讯》19 (2014)，第5期，1–5。[8] Y. Hamana 和 H. Matsumoto，带漂移和不带漂移的布朗运动击中球面的时间，《美国数学会会刊》，144，第12期 (2016)，5385–5396。[9] P. Hsu，球内布朗运动的离开分布，载于《随机过程研讨会》，1985，Birkh¨aser，1986。[10] K. Itˆo 和 H. P. McKean, Jr.，《扩散过程及其样本路径》，Springer，1974。[11] J.-F. Le Gall，关于M. Kac的一个猜想，《概率论及相关领域》，78 (1988)，389–402。[12] W. Magnus、F. Oberhettinger 和 R. P. Soni，《数学物理特殊函数公式与定理》，Springer，1966。[13] A. Mijatovic、V. Mramor 和 G. Uribe Bravo，球面布朗运动的投影，《电子概率通讯》23 (2018)，第52期，1–12。[14] C. M¨uller，《欧几里得空间中球面对称性的分析》，Springer，1998。

[15] J. W. Pitman 和 M. Yor，贝塞尔过程与无限可分律，载于 D. Williams（编）《随机积分》，数学讲义，851，Springer，1981。[16] S. C. Port 和 C. J. Stone，《布朗运动与经典位势理论》，Academic Press，1978。[17] K. Uchiyama，布朗运动首次击中圆盘和球的时空分布密度，位势分析，44 (2016)，497–541。[18] K. Uchiyama，有界集的布朗运动时空击中分布，以及布朗桥的维纳香肠期望体积，伦敦数学会会刊（第3辑），116 (2018)，575–628。[19]J. G. Wendel，布朗运动击中球面，概率年刊，8 (1980)，164–169。[20] C. Yin 和 C. Wang，带漂移的布朗运动的击中时间和位置，开放统计与概率期刊，1 (2009)，38–42。

Yuji Hamana
hamana@math.tsukuba.ac.jp 数学系
筑波大学 筑波市天王台1-1-1，
305-8571，日本

Hiroyuki Matsumoto
matsu@math.aoyama.ac.jp 数学系 青山学院大学 渊野边5-10-1，相模原252-5258，日本