arXiv:2301.03757v1 [math.AP] 10 Jan 2023

球面上旋量 Yamabe 方程的 Delaunay 型解构造

AliMaalaoui Yannick Sire Tian Xu

摘要

本文构造了球面上的临界狄拉克方程的奇异解。更确切地说，首先我们构造了具有两个奇异点的解，并将其称为 Delaunay 型解，这是因为它们与在 [32, 35] 中为奇异Yamabe问题构造的 Delaunay解相似。随后，我们构造了另一类奇异解，其奇异集为一条大圆。这些解是一般 Spin流形上奇异解的构件。

关键词。旋量雅马贝；奇异解；Delaunay 型解。

目录

1 引言与主要结果陈述 **2**

2 几何预备知识 **8**

2.1 自旋几何的一般预备知识.8 2.2 乘积流形上的旋量丛与狄拉克算子.9 2.3 欧几里得空间中的一种特定试探形式.10

3 问题的建立 **14**

3.1 奇异集为一对对跖点.15 3.2 奇异集为一个赤道圆.16

4 常微分方程组的分析 **18**

4.1 非耗散情形：正周期轨道的分岔 . . . . . 19 4.2 耗散情形：射击法.24

数学主题分类（*2010*年）：主要分类 53C27；次要分类 35R01

1 引言及主要结果陈述

自亚马贝问题得到解决以来，人们对两个共形相关度量的标量曲率函数之间的半线性椭圆方程的解的行为有了许多新的认识。近来若干进展的起点之一，是 R. Schoen 构造了球面S^m上的完备度量；该度量具有正常数标量曲率，与标准圆度量共形，并具有预先指定的孤立奇点（见 [36]）。从分析角度看，这等价于寻求满足以下条件的函数 $u > 0$

$$-\Delta_{g_{S^m}} u + \frac{m(m-2)}{4} u = \frac{m(m-2)}{4} u^{\frac{m+2}{m-2}} \quad \text{on } S^m \setminus \Sigma,\ m \geq 3 \tag{1.1}$$

在分布意义下， u在 $\Sigma \subset S^m$的每一点都奇异。这里，我们用g_{S^m} 表示 S^m上的标准黎曼度量。

方程（1.1）及其在一般流形（M，g）上的对应形式称为奇异*Yamabe*问题，并已得到广泛研究。与紧情形下的经典亚马贝问题一样，关于正标量曲率为常数的度量的问题要复杂得多。Schoen 和 Yau [37] 以及Schoen [36] 在环境流形为 m-球面S^m时，取得了卓越的突破，并构造出几何上颇具吸引力的例子。前者证明，若 $S^m \setminus \Sigma$ 存在一个标量曲率有正数常量下界的完备度量，则 Σ 的豪斯多夫维数至多为$(m-2)/2$；后者则构造了若干区域 $S^m \setminus \Sigma$ 的例子，这些区域存在标量曲率为正数常量的完备共形平坦度量，其中包括 Σ 为任意含至少两个点的有限集的情形。随后，Mazzeo 和 Smale [34] 以及Mazzeo 和 Pacard [32,33]推广了存在性结果：当环境流形（M，g）是标量曲率为非负常数的一般紧流形时，允许 Σ 为由维数介于1与$(m-2)/2$ 之间的子流形组成的不交并；而在情形（M，g）$=$（S^m，g_{S^m}）下，维数范围则为0至$(m-2)/2$。

在过去二十年中，人们逐渐认识到，共形拉普拉斯算子，即作为（1.1）线性部分出现的算子，属于一类特殊的算子。这些算子被称为阶为 k、双次数为 $((m-k)/2,(m+k)/2)$ 的共形协变椭圆算子，作用于维数为 $m > k$ 的流形 (M, g) 上。许多重要的几何算子都属于这一类，例如共形拉普拉斯算子、Paneitz 算子和狄拉克算子；更多例子还可参见 [10, 13, 20]。所有这类算子都具有若干共同的解析性质，尤其是它们与 Sobolev 空间$H^{k/2} \hookrightarrow L^{2m/(m-k)}$ 的非紧嵌入相关。并且，它们通常在共形几何中发挥核心作用。

设 $(M, g\ \sigma)$ 是一个 m 维 Spin流形， $m \geq 2$，其上固定了黎曼度量 g 和自旋结构 σ： $P_{\mathrm{Spin}}(M) \to P_{\mathrm{SO}}(M)$。狄拉克算子 D_g 根据自旋群 Spin(m) 的表示 ρ : Spin(m) $\to$ Aut$(\mathbb{S}_m)$ 定义，该表示与克利福德乘法相容。令 $\mathbb{S}(M) := P_{\mathrm{Spin}}(M) \times_\rho \mathbb{S}_m$ 为相应的丛，我们称其为 M 上的旋量丛。于是，狄拉克算子 D_g作用于 $\mathbb{S}(M)$ 的光滑截面，即 D_g: $C^\infty(M, \mathbb{S}(M)) \to C^\infty(M, \mathbb{S}(M))$，是一个双次数为 $((m-1)/2, (m+1)/2)$ 的一阶共形协变算子。我们在此指出，旋量丛 $\mathbb{S}(M)$ 具有复维数 $2^{[\frac{m}{2}]}$。

与涉及标量曲率的共形拉普拉斯算子类似，Spin流形上的狄拉克算子与下列对象相关的平均曲率函数密切相关：

将万有覆盖共形浸入欧几里得空间。这一理论称为旋量魏尔斯特拉斯表示；关于这一方向的更多详情，请参阅 [2,3,17,25–27、31、41–43] 及其中的参考文献。与亚马贝问题类似，亚马贝方程的旋量类比（与归一化正常平均曲率相关）可写为

$$D_g\psi = |\psi|_g^{\frac{2}{m-1}}\psi \quad \text{on } (M,g) \tag{1.2}$$

其中，$|\cdot|_g$ 表示旋量丛纤维上的诱导厄米度量。也可以考虑符号相反的方程

$$D_g\psi = -|\psi|_g^{\frac{2}{m-1}}\psi \quad \text{on } (M,g) \tag{1.3}$$

它对应于负常平均曲率曲面。然而，由于 D_g 的谱在 $\mathbb{R}$ 上无界，且在许多流形上关于原点对称（例如，当 $\dim M \neq 3 \equiv 0 \pmod 4$ 时），从分析的角度看，问题 (1.2) 和 (1.3) 具有相同的结构。

尽管共形协变算子具有许多共同性质，但只有少数结论能够同时适用于所有这类算子。特别是，共形不变方程 (1.2) 或 (1.3) 的解的性质仍不明确。从分析角度来看，一些共形协变算子有下界（例如，Yamabe 算子和潘尼茨算子），而另一些则没有（例如，狄拉克算子）。其中一些作用于函数，另一些则作用于向量丛截面。对于狄拉克算子，定义时还需要用到额外的结构（例如自旋结构），因此需要特别关注这一特殊情形。

本文开始研究当环境流形为 S^m时非线性狄拉克方程 (1.2) 的奇异解；这或许是该问题在几何上最引人注目的情形。正如前文所述，对于给定的闭子集 $\Sigma \subset S^m$，问题是寻找度量$g = |\psi|_{g_{S^m}}^{4/(m-1)} g_{S^m}$，使其在 $S^m \setminus \Sigma$ 上完备，并且 ψ 满足方程 (1.2)，其中 $(M, g) = (S^m \setminus \Sigma, g_{S^m})$。这就是奇异旋量亚马贝问题。值得一提的是，迄今为止，尚无已知的方程 (1.2) 奇异解的存在性实例。我们的第一个主要结果如下：

定理 1.1. 设 $\Sigma \subset S^m$ 为一对对跖点（当 $m \geq 2$时），或为一条赤道圆（当$m \geq 3$时）。存在一个单参数族 $\mathfrak{S}_m$ 旋量 ψ，它们是下列问题的解

$$D_{g_{S^m}}\psi = |\psi|_{m-1}^{\frac{2}{g_{S^m}}}\psi \qquad \text{在 } S^m \setminus \Sigma \text{ 上} \tag{1.4}$$

使得 $g = |\psi|^{m-1}_{g_{S^m}} g_{S^m}$ 是 $S^m \setminus \Sigma$ 上的完备度量。此外，

(1) 若 Σ 是一对对跖点，则族 $\mathfrak{S}_m$ 由 $\mu \in [-\frac{(m-1)^m}{2^{m+1}m}, +\infty)\backslash\{0\}$ 参数化。

(2) 若 Σ 是一条赤道圆，则族 $\mathfrak{S}_m$ 由 $\mathcal{O} = \cup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_k$ 参数化，其中每个$\mathcal{O}_k \subset (0, +\infty)$ 都是有界开集，$\mathcal{O}_k \cap \mathcal{O}_j = \emptyset$ 在 $k \neq j$ 时成立，而 $\mathcal{O}$ 无界。

注 1.2. 值得指出的是，方程 (1.4)，或者更一般地说，方程 (1.2)，在若干李群作用下保持不变。例如，$S^1 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in [0, 2\pi]\}$ 对旋量的典范作用

使该方程保持不变（也就是说，若 ψ 是方程 (1.4) 的一个解，则对任意固定的 θ，$e^{i\theta}\psi$ 也是一个解）。此外，对于情形 $m \equiv 2$，3，4（模 8），旋量丛具有与Clifford乘法交换的四元数结构；例如，可参见 [18,第 1 节7] 或 [28, 第 33 页，表 III]中的构造。在这些情形下，方程 (1.4) 在单位四元数 $S^3 = \{q = \mathbb{H} : |q| = 1\}$ 对旋量的作用下保持不变。因此，一般而言，区分狄拉克方程在各种群作用下的解至关重要。例如，文献 [29]利用这些对称性构造了球面上的解族，而文献 [30]则利用 S^1 对称性展示了次临界狄拉克方程的非平凡解。借助我们的构造，定理 1.1 中得到的解族 $\mathfrak{S}_m$ 可通过其参数化加以区分。并且，若 $\mathcal{G}$ 是一个使方程 (1.4) 保持不变的群，我们的构造还揭示了更大的奇异解族 $\mathcal{G} \times \mathfrak{S}_m$。

正如我们将在第3节中看到的，通过对度量g_{S^m}作共形变换，问题（1.4）可以转化为

$$D_{g_{\mathbb{R}^m}}\psi = |\psi|_{g_{\mathbb{R}^m}}^{\frac{2}{m-1}}\psi \quad \text{on } \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \tag{1.5}$$

当 Σ 为一对对跖点时，以及

$$D_{g_{\mathbb{R}^{m-1}}}\psi = f(x)^{\frac{1}{m-1}}|\psi|_{g_{\mathbb{R}^{m-1}}}^{\frac{2}{m-1}}\psi \quad \text{on } \mathbb{R}^{m-1} \setminus \{0\} \tag{1.6}$$

当 Σ为一个赤道圆时，其中 $f(x) = \frac{2}{1+|x|^2}$。为使方程（1.4）的结果与经典 Yamabe 方程的类似结果相一致，一个基本思路是在圆柱体 $\mathbb{R} \times S^l$、$l = m-1$ 或 $m-2$上表达方程（1.5）和（1.6）。通过引入柱坐标 $(t, \theta) \in \mathbb{R} \times S^l$:

$$t = -\ln|x|, \quad \theta = \frac{x}{|x|}$$

对于 $x \in \mathbb{R}^{l+1}$，人们可能会期望试探形式

$$\varphi(t, \theta) = |x|^{\frac{l}{2}}\psi(x)$$

能够通过变量分离过程将方程（1.5）转化为一个更易处理的问题，从而得到一个“径向”解 $\psi(x) = \psi(|x|)$。许多椭圆型问题都属于这种情形（相应地改变 $|x|$上的指数），包括亚马贝方程、分数阶 Yamabe 方程 [12] 以及 Q-曲率问题 [24]。然而，我们指出，在标量情形中，存在一种与椭圆算子相容的对称化过程，可将问题简化为研究一个常微分方程。但在处理作用于向量丛（本例中为旋量丛）上的微分算子时，并不存在通用的对称化过程。特别是，即使在欧几里得空间 $\mathbb{R}^m$中，也不能对 $x \in \mathbb{R}^m$使用径向试探形式 $\psi = \psi(r)$、$r = |x|$，将狄拉克方程化为关于 r的常微分方程组。

注意到，旋量雅马贝方程（1.5）（分别为（1.6））包含 $2^{[\frac{m}{2}]}$（分别为 $2^{[\frac{m-1}{2}]}$）一个未知复函数，这是一个相当大的数量，因为 m 会增长。我们并非盲目地“猜测”某个特定的试探形式，而是以自旋结构，更确切地说，以自旋表示为出发点。事实上，我们利用克利福德乘法的矩阵表示，为旋量场构造了一个在狄拉克算子 $D_{g_{\mathbb{R}^m}}$ 作用下保持不变的“良好”函数空间 $E(\mathbb{R}^m)$，其定义见第2.3节。我们发现，空间 $E(\mathbb{R}^m)$ 从两个角度来看都具有

特别的意义（见下文注 2.1）：首先，当维数 $m = 2,3,4$, $E(\mathbb{R}^m)$ 时，它涵盖了几种重要而特殊的旋量表达形式；粒子物理学家在研究量子电动力学系统时会关注这些形式。许多重要的物理模拟都是通过使用这些特殊旋量获得的，例如见 [11, 14, 40, 45]。第二个角度是，$E(\mathbb{R}^m)$ 中的旋量显著简化了方程（1.5）：对于任意维数 $m \geq 2$，方程（1.5）和（1.6）都可以化为以下仅含两个未知函数的常微分方程组

$$\begin{cases} -f_2' - \dfrac{m-1}{r} f_2 = (f_1^2 + f_2^2)^{\frac{1}{m-1}} f_1 \\ f_1' = (f_1^2 + f_2^2)^{\frac{1}{m-1}} f_2 \end{cases} \quad \text{for } r > 0 \tag{1.7}$$

and

$$\begin{cases} -f_2' - \dfrac{m-2}{r} f_2 = \left(\dfrac{2}{1+r^2}\right)^{\frac{1}{m-1}} (f_1^2 + f_2^2)^{\frac{1}{m-1}} f_1 \\ f_1' = \left(\dfrac{2}{1+r^2}\right)^{\frac{1}{m-1}} (f_1^2 + f_2^2)^{\frac{1}{m-1}} f_2 \end{cases} \quad \text{对于 } r > 0 \tag{1.8}$$

其中 $f_1,\ f_2 \in C^1(0,\ +\infty)$。经过 Emden-Fowler 变量变换 $r = e^{-t}$，并在 (1.7) 中令 $f_1(r) = -u(t)e^{\frac{m-1}{2}t}$，$f_2(r) = v(t)e^{\frac{m-1}{2}t}$，可得一个由 $(u,\ v)$ 构成的非耗散哈密顿系统

$$\begin{cases} u' + \dfrac{m-1}{2} u = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{m-1}} v, \\ -v' + \dfrac{m-1}{2} v = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{m-1}} u. \end{cases} \tag{1.9}$$

此外，令 $f_1(r) = -u(t)e^{\frac{m-2}{2}t}$ 和 $f_2(r) = v(t)e^{\frac{m-2}{2}t}$，即可将 (1.8) 转化为

$$\begin{cases} u' + \dfrac{m-2}{2} u = \cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}} (u^2 + v^2)^{\frac{1}{m-1}} v \\ -v' + \dfrac{m-2}{2} v = \cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}} (u^2 + v^2)^{\frac{1}{m-1}} u \end{cases} \tag{1.10}$$

这是一个耗散哈密顿系统。

记我们表示为

$$H(u,v) = -\frac{m-1}{2} uv + \frac{m-1}{2m} (u^2 + v^2)^{\frac{m}{m-1}}$$

为方程组 (1.9) 对应的哈密顿能量。注意，H 沿着 (1.9) 的轨道保持为常数。此外，H 的平衡点为

$$(0,0) \quad \text{and} \quad \pm \left(\frac{(m-1)^{(m-1)/2}}{2^{m/2}}, \frac{(m-1)^{(m-1)/2}}{2^{m/2}} \right), \tag{1.11}$$

其中 (0,0) 是一个鞍点，另外两个是中心点；于是容易得出，对于 $\mu \in [-\frac{(m-1)^m}{2^{m+1}m}, +\infty) \setminus \{0\}$，方程 (1.9) 存在能级为 $\{H = \mu\}$ 的周期解。我们将 $\mathfrak{D}_m^1$ 用于表示这些按其哈密顿能量参数化的周期解。我们区分

集合 $\mathfrak{D}_m^1$ 内基于哈密顿能量 μ符号的一种二分情形。事实上， $\mathfrak{D}_m^1 = \mathfrak{D}^{1,+}_m \cup \mathfrak{D}^{1,-}_m$，其中

$$\mathfrak{D}_m^{1,+} := \{(u,v) \in \mathfrak{D}_m^1; H(u,v) > 0\} \text{ and } \mathfrak{D}_m^{1,-} := \{(u,v) \in \mathfrak{D}_m^1; H(u,v) < 0\}.$$

我们将 $\mathfrak{D}^{1,-}_m$ 中的元素称为正 Delaunay 型解，将 $\mathfrak{D}^{1,+}_m$ 中的元素称为方程（1.5）的变号 Delaunay 型解。这一术语基于 $\mathfrak{D}^{1,-}_m$ 与亚马贝问题的经典 Delaunay 解之间的相似性。我们将在本文中进一步阐明这些相似之处。由于任何 $(u,v) \in \mathfrak{D}_m^1$ 都不会到达静止点 (0,0)，因此对所有 $t \in \mathbb{R}$， $u(t)^2 + v(t)^2$ 都与 0 保持正距离。除了上述存在性结果外，我们还得到了以下关于解 $(u,v) \in \mathfrak{D}^{1,-}_m$ 的分岔现象。

定理 1.3. 令 $m \geq 2$，方程组(1.9)具有以下性质：

(1) 对每个 $T > 0$，(1.9) 都有常数 $2T$-周期解

$$\pm\Big(\frac{(m-1)^{(m-1)/2}}{2^{m/2}}, \frac{(m-1)^{(m-1)/2}}{2^{m/2}}\Big).$$

此外，对于 $T \leq \frac{\sqrt{m-1}}{2}\pi$，这些是(1.9)的唯一解。

(2) 设 $T > \frac{\sqrt{m-1}}{2}\pi$ 和 $d \in \mathbb{N}$ 满足 $d\frac{\sqrt{m-1}}{2}\pi < T \leq (d+1)\frac{\sqrt{m-1}}{2}\pi$。那么，(1.9) 有 $d+1$ 个不等价解。特别地，这些解由常数解以及一个基本周期为 $2T/k$ 的解 $(u_{T,k}, v_{T,k})$ 的 k 个周期给出。

(3) 哈密顿能量 $H(u_T,1,v_T,1) \nearrow 0$ 当 $T \to +\infty$ 时，而 $(u_T,1,v_T,1)$ 在以下意义下是（局部）紧的：$(u_T,1,v_T,1)$ 在 $C^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ 中收敛到方程 *(1.9)* 的非平凡同宿解。也就是说，存在 $t_0 \in \mathbb{R}$，使得 $(u_T,1,v_T,1)$ 在 C^1_{loc} 中收敛到 $(u_0(\cdot - t_0)\ v_0(\cdot - t_0))$，其中

$$u_0(t) = \frac{m^{(m-1)/2}e^{t/2}}{2^{m/2}\cosh(t)^{m/2}} \quad \textit{and} \quad v_0(t) = \frac{m^{(m-1)/2}e^{-t/2}}{2^{m/2}\cosh(t)^{m/2}}.$$

将上述结果转化为方程组（1.7）（因此也适用于方程（1.5）），我们得到

推论 1.4. 设 $m \geq 2$，方程 （1.5） 在$\mathbb{R}^m\backslash\{0\}$上存在一个由 $[-\frac{(m-1)^m}{2^{m+1}m}, +\infty)\backslash\{0\}$ 参数化的奇异解单参数族 $\mathfrak{S}^1_m$。此外，以下渐近估计成立

- $|\psi(x)| \neq 0$,
- $|\psi(x)| = O(|x|^{-\frac{m-1}{2}})$ 作为 $|x| \to +\infty$,
- $|\psi(x)| = O(|x|^{-\frac{m-1}{2}})$ 作为 $|x| \to 0$,

对每个 $\psi \in \mathfrak{S}^1_m$。此外，如果 ψ_μ 是对应于 $\mu \in [-\frac{(m-1)^m}{2^{m+1}m}, 0)$ 的解，那么存在 $\lambda > 0$，使得 ψ_μ 在 $C^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$ 中收敛到 $\psi_\infty = \big(\frac{2\lambda}{\lambda^2+|x|^2}\big)^{\frac{m}{2}}\big(1 - \frac{x}{\lambda}\big)\cdot\gamma_0$，当 $\mu \Longrightarrow 0$ 时，其中 γ_0 是一个满足 $|\gamma_0| = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{m}{2}^{\frac{m-1}{2}}$ 的常数旋量，而“$\cdot$”表示旋量上的克利福德乘法。

这里需要注意，我们在前一个推论中发现的奇异解的衰减率，与 [8] 中研究的方程 (1.5) 的正则解的衰减率之间存在差异。事实上，正则解的衰减率为 $O(|x|^{-m+1})$，而奇异解的衰减率为 $O(|x|^{-\frac{m-1}{2}})$。

对于方程组 (1.10)，我们有

定理 1.5。设 $m \geq 3$，方程组 (1.10) 取初始数据 $u(0) = v(0) = \mu > 0$，则存在一个解 (u_μ, v_μ) 在 $\mathbb{R}$ 上全局定义。此外，初始数据恰有两种类型，可由以下条件刻画：

$$A_k = \Big\{\mu > 0 : \ v_\mu \textit{ changes sign } k \textit{ times on } (0, +\infty) \textit{ and } \lim_{|t|\to+\infty} H_\mu(t) < 0\Big\},$$

and

$$I_k = \Big\{\mu > 0 : \ v_\mu \textit{ changes sign } k \textit{ times on } (0, +\infty) \textit{ and } H_\mu(t) > 0 \textit{ for all } t \in \mathbb{R}\Big\}$$

对于 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，其中

$$H_\mu(t) := -\frac{m-2}{2} u_\mu v_\mu + \frac{m-1}{2m} \cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}} (u_\mu^2 + v_\mu^2)^{\frac{m}{m-1}}.$$

特别地，

(1) $A_k \neq \emptyset$ 对所有 k都是有界开集；

(2) *if we set* $\mu_k = \sup A_k$, *then* $\mu_k \in I_k$ *and* $\mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_j < \mu_{j+1} < \cdots \to +\infty$;

(3) 若令 $\nu_k =$ 上确界 I_k，则 $\nu_k < +\infty$ 且 $(\nu_k, \nu_k + \varepsilon) \subset A_{k+1}$，其中某个 $\varepsilon > 0$ 足够小；

(4) 若 $\mu \in I_k$，则 $(u_\mu(t)\ v_\mu(t)) \to (0,0)$ 当 $|t| \to \infty$ 时。更准确地说，我们有

$$u_\mu(t)^2 + v_\mu(t)^2 = O(e^{-(m-2)t})$$

当 $|t| \to +\infty$时；

(5) 若 $\mu \in A_k$，则 $u_\mu(t)^2 + v_\mu(t)^2$ 对所有$t \in \mathbb{R}$ 都有一个正数常量作为下界，并且当 $|t| \to +\infty$ 时无界；此外，除去一个常数倍因子后，$u_\mu(t)^2 + v_\mu(t)^2$ 对所有充分大的 $|t|$ 都有上界 $\cosh(t)$。

令 $\mathfrak{D}_m^2 = \{(u_\mu,\ v_\mu) : \ \mu \in \cup_{k\geq 0} A_k\}$，我们将这些无界解称为方程 (1.6) 的 Delaunay 型解。作为定理 1.5 的直接推论，我们得到实数集 $\mathbb{R}^{m-1} \setminus \{0\}$ 上方程 (1.6) 的奇异解的刻画。

推论 1.6. 令 $m \geq 3$，方程 (1.5) 在$\mathbb{R}^{m-1} \setminus \{0\}$上存在一个由 $\cup_{k\geq 0} A_k$ 参数化的单参数族 $\mathfrak{S}_m^2$ 奇异解。此外，以下渐近估计成立

$$|x|^{-\frac{m-2}{2}} < |\psi(x)| \lesssim |x|^{-\frac{m-1}{2}} \quad \textit{as } |x| \to 0$$

and

$$|x|^{-\frac{m-2}{2}} < |\psi(x)| \lesssim |x|^{-\frac{m-3}{2}} \quad \textit{as } |x| \to +\infty$$

对于每个 $\psi \in \mathfrak{S}_m^2$

本文结构安排如下。首先，在第2节中，我们介绍表述问题所需的几何预备知识，其中包括用于构造奇异解族的主要试探形式。接着，在第3节中，我们利用该试探形式将问题表述为实数集 $\mathbb{R}^2$ 上的哈密顿系统（点奇异性情形下为自治系统，一维奇异性情形下为非自治系统）。在第4节中，我们研究这两种情形下哈密顿系统解的性质，并由此证明定理1.3和1.5。

2 几何预备知识

2.1 自旋几何的一般预备知识

设 (M,g) 是一个 m 维黎曼流形（不一定紧致），并选定一个定向。令 $P_{\mathrm{SO}}(M)$ 表示 (M,g) 上正向标准正交标架的集合。这是 M 上的一个 $\mathrm{SO}(m)$ 主丛。M 上的一个自旋结构是一个有序对 $\sigma=(P_{\mathrm{Spin}}(M),\vartheta)$，其中 $P_{\mathrm{Spin}}(M)$ 是 M 上的一个 $\mathrm{Spin}(m)$ 主丛，而 $\vartheta\colon P_{\mathrm{Spin}}(M)\to P_{\mathrm{SO}}(M)$ 是一个映射，使得下图

$$\begin{array}{ccc} P_{\mathrm{Spin}}(M)\times \mathrm{Spin}(m) & \longrightarrow & P_{\mathrm{Spin}}(M) \\ \downarrow{\scriptstyle \vartheta\times\Theta} & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta} \quad \searrow M \\ P_{\mathrm{SO}}(M)\times \mathrm{SO}(m) & \longrightarrow & P_{\mathrm{SO}}(M) \end{array}$$

可交换，其中 $\Theta:\mathrm{Spin}(m)\to\mathrm{SO}(m)$ 是 $\mathrm{SO}(m)$ 的非平凡双重覆盖。自旋结构存在的一个拓扑条件是第二斯蒂费尔–惠特尼类 $\omega_2(M)\in H^2(M,\mathbb{Z}_2)$ 消失。此外，即使自旋结构存在，它也未必唯一。关于这些结果，请参见 [18,28]。

为介绍旋量丛，我们回顾一下，Clifford 代数 $Cl(\mathbb{R}^m)$ 是由满足关系 $x\cdot y-y\cdot x=-2(x,y)$ 的 $\mathbb{R}^m$ 生成的带单位元的结合 $\mathbb{R}$ 代数，其中 $x,y\in\mathbb{R}^m$（此处 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $\mathbb{R}^m$ 上的欧几里得标量积）。事实证明，$Cl(\mathbb{R}^m)$ 存在一个维数为 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_m)=2^{[\frac{m}{2}]}$ 的最小表示 $\rho:\mathrm{Spin}(m)\subset Cl(\mathbb{R}^m)\to End(\mathbb{S}_m)$，使得 $\mathbb{C}l(\mathbb{R}^m):=Cl(\mathbb{R}^m)\otimes\mathbb{C}\cong End_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_m)$ 作为 $\mathbb{C}$ 代数成立。当 m 为偶数时，这个不可约表示由此唯一确定，但它作为 $\mathrm{Spin}(m)$ 表示可分解为两个不等价的子表示 $\mathbb{S}_m^+$ 和 $\mathbb{S}_m^-$。若 m 为奇数，则存在两个不可约 $\mathbb{C}l_m$ 表示 $\mathbb{S}_m^0$ 和 $\mathbb{S}_m^1$。若将它们视为 $\mathrm{Spin}(m)$ 表示，则二者相同。

定义手征算子 $\omega_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}^m}=i^{[\frac{m+1}{2}]}e_1\cdot e_2\cdot\overline{\cdots e_m}\in\mathbb{C}l_m$，其中 $\{e_1,\dots,e_m\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上的正向定向正交标架。若 m 为偶数，则 $\omega_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}^m}$ 在 $\mathbb{S}_m^{\pm}$ 上的作用为 ±1，而 $\mathbb{S}_m^+$（分别为 $\mathbb{S}_m^-$）的截面称为正（分别为负）旋量。若 m 为奇数，则手征算子在 $\mathbb{S}_m^j$ 上的作用为 $(-1)^j$ $j=0,\ 1$。因此，当 m 为奇数时，将 $\mathbb{S}_m^0$ 和 $\mathbb{S}_m^1$ 视为同一向量空间，即 $\mathbb{S}_m=\mathbb{S}_m^0=\mathbb{S}_m^1$，并赋予它们符号相反的克利福德乘法，不会造成混淆。

根据上述观察，旋量丛定义如下：

$$\mathbb{S}(M):=P_{\mathrm{Spin}}(M)\times_{\rho}\mathbb{S}_m.$$

注意，旋量　　丛带有自然的克利福德乘法和自然的厄米度量

以及由 TM 上的 Levi-奇维塔联络诱导的度量联络（见 [18, 28]），该丛满足狄拉克丛的公理，即

对于任意 $x \in M$、 X， $Y \in T_xM$以及 $\psi \in \mathbb{S}_x(M)$

$$X \cdot Y \cdot \psi + Y \cdot X \cdot \psi + 2g(X,Y)\psi = 0;$$

对于任意 $X \in T_xM$和 ψ_1， $\psi_2 \in \mathbb{S}_x(M)$,

$$(X \cdot \psi_1, \psi_2)_g = -(\psi_1, X \cdot \psi_2)_g,$$

其中 $(\cdot,\ \cdot)_g$ 是 $\mathbb{S}(M)$ 上的厄米度量;

对于任意 X， $Y \in \Gamma(TM)$ 和 $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}(M))$,

$$\nabla^{\mathbb{S}}_X(Y \cdot \psi) = (\nabla_X Y) \cdot \psi + Y \cdot \nabla^{\mathbb{S}}_X \psi,$$

其中 $\nabla^{\mathbb{S}}$ 是 $\mathbb{S}(M)$ 上的度量联络。

狄拉克算子定义在旋量丛 $\mathbb{S}(M)$ 上，是以下映射的复合

$$D_g : \Gamma(\mathbb{S}(M)) \xrightarrow{\nabla^{\mathbb{S}}} \Gamma(T^*M \otimes \mathbb{S}(M)) \longrightarrow \Gamma(TM \otimes \mathbb{S}(M)) \xrightarrow{\mathfrak{m}} \Gamma(\mathbb{S}(M))$$

其中 $\mathfrak{m}$ 表示克利福德乘法 $\mathfrak{m}:\ X \otimes \psi \mapsto X \cdot \psi$。

需要指出的是，克利福德乘法“$\mathfrak{m}$”或“$\cdot$”隐含地依赖于 g。事实上，考虑一个简单情形：将 g 替换为共形度量 $\tilde{\mathrm{g}} = e^{2u}\mathrm{g}$，等距映射 $X \mapsto e^{-u}X$从 (TM, g) 到 $(TM, \tilde{\mathrm{g}})$ 定义了主丛同构 $\mathrm{SO}(TM, \mathrm{g}) \to \mathrm{SO}(TM, \tilde{\mathrm{g}})$，并将其提升至自旋层面。接着，它诱导出丛同构 $\mathbb{S}(M, \mathrm{g}) \to \mathbb{S}(M, \tilde{\mathrm{g}})$, $\psi \mapsto \tilde{\psi}$，该同构在每个纤维上保持厄米内积不变，并将$X \cdot \psi$ 映射到 $e^{-u}X \tilde{\cdot} \tilde{\psi}$。在下文中，必要时我们将写作 D^M_g和 $\cdot_g$ 等，以明确底流形 M 和度量 g。

2.2 乘积流形上的旋量丛与狄拉克算子

在本小节中，我们采用的记号与 [38] 相近。设 $(N = M_1 \times M_2, g_N = g_{M_1} \oplus g_{M_2})$ 是由黎曼旋量 m_j-流形 $(M_j, g^{M_j}, \sigma_{M_j})$ 的乘积，其中 $j = 1, 2$。我们有

$$P_{\mathrm{Spin}}(N) = (P_{\mathrm{Spin}}(M_1) \times P_{\mathrm{Spin}}(M_2)) \times_\zeta \mathbb{S}_{m_1+m_2}$$

其中 ζ: $\mathrm{Spin}(m_1) \times \mathrm{Spin}(m_2) \to \mathrm{Spin}(m_1 + m_2)$ 是李群同态，它将 $\mathrm{SO}(m_1) \times \mathrm{SO}(m_2) \to \mathrm{SO}(m_1 + m_2)$ 的标准嵌入提升为 Spin 群之间的映射。

上的旋量丛 N 可以被视为

$$\mathbb{S}(N) = \begin{cases} (\mathbb{S}(M_1) \oplus \mathbb{S}(M_1)) \otimes \mathbb{S}(M_2) & \text{both } m_1 \text{ and } m_2 \text{ are odd,} \\ \mathbb{S}(M_1) \otimes \mathbb{S}(M_2) & m_1 \text{ is even.} \end{cases}$$

也就是说，我们总是将偶数维因子放在 M_1的位置上。而 $\mathbb{S}$（N）上的克利福德乘法可以用其各因子上的克利福德乘法明确表示。事实上，对于 $X \in TM_1$、 $Y \in TM_2$、 $\varphi \in \Gamma$（$\mathbb{S}$（M_2））以及

$$\psi = \begin{cases} \psi_1 \oplus \psi_2 \in \Gamma(\mathbb{S}(M_1) \oplus \mathbb{S}(M_1)) & \text{for both } m_1 \text{ and } m_2 \text{ odd} \\ \psi \in \Gamma(\mathbb{S}(M_1)) & \text{for } m_1 \text{ even} \end{cases}$$

我们有

$$(X \oplus Y) \cdot_{g_N} (\psi \otimes \varphi) = (X \cdot_{g_{M_1}} \psi) \otimes \varphi + (\omega_{\mathbb{C}}^{M_1} \cdot_{g_{M_1}} \psi) \otimes (Y \cdot_{g_{M_2}} \varphi) \tag{2.1}$$

其中，当 m_1和 m_2为奇数时，令 $X \cdot_{g_{M_1}} \psi = (X \cdot_{g_{M_1}} \psi_1) \oplus (-X \cdot_{g_{M_1}} \psi_2)$，且 $\omega_{\mathbb{C}}^{M_1} \cdot_{g_{M_1}} \psi = i(\psi_2 \oplus -\psi_1)$。值得指出的是，克利福德乘法 (2.1) 有多种表述方式，但这些变换都是等价的。事实上，由于 $\mathbb{C}l(TM_1 \oplus TM_2)$ 的唯一性， $\mathbb{S}(N)$ 上克利福德乘法的任何定义，都可以通过向量丛同构与 (2.1) 对应（见下一小节中的例子）。

设 $\nabla^{\mathbb{S}(M_1)}$ 和 $\nabla^{\mathbb{S}(M_2)}$ 分别为 $\mathbb{S}(M_1)$ 和 $\mathbb{S}(M_2)$ 上的 Levi-奇维塔联络。根据

$$\nabla^{\mathbb{S}(M_1)\otimes\mathbb{S}(M_2)} = \nabla^{\mathbb{S}(M_1)} \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{S}(M_2)} + \mathrm{Id}_{\mathbb{S}(M_1)} \otimes \nabla^{\mathbb{S}(M_2)}$$

我们将 $\mathbb{S}(M_1) \otimes \mathbb{S}(M_2)$ 上的张量积联络记为。于是，由 (2.1)， N 上的狄拉克算子为

$$D_g^N = \tilde{D}_{g_{M_1}}^{M_1} \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{S}(M_2)} + (\omega_{\mathbb{C}}^{M_1} \cdot_{g_{M_1}} \mathrm{Id}_{\mathbb{S}(M_1)}) \otimes D_{g_{M_2}}^{M_2} \tag{2.2}$$

其中，若 m_1和 m_2均为奇数，则 $\tilde{D}^{M_1}{}_{g_{M_1}} = D^{M_1}{}_{g_{M_1}} \oplus -D^{M_1}{}_{g^{M_1}}$；若 m_1为偶数，则 $\tilde{D}^{M_1}{}_{g_{M_1}} = D^{M_1}{}_{g^{M_1}}$。

对于 $m_1 + m_2$为偶数的情形，我们有分解 $\mathbb{S}(N) = \mathbb{S}(N)^+ \oplus \mathbb{S}(N)^-$；此外，将 D_g^N 限制在那些半旋量空间上时，我们得到 D_g^N： $\Gamma(\mathbb{S}(N)^{\pm}) \to \Gamma(\mathbb{S}(N)^{\mp})$。

2.3 欧几里得空间中的一种特定试探形式

设 $M = \mathbb{R}^m$ 赋有欧几里得度量，则旋量丛由$\mathbb{S}(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}_m \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{C}^{2^{[\frac{m}{2}]}}$给出。尽管在抽象设定下，狄拉克算子可以表示为

$$D_{g_{\mathbb{R}^m}}\psi = \sum_{k=1}^{m} e_k \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} \nabla_{e_k}\psi, \quad \psi \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^m)$$

其中 $\{e_1, \ldots, e_m\}$ 是 $\mathbb{R}^m$的一组正交归一基，我们可以对该算子给出更明确的表示。事实上，狄拉克算子可以写成如下形式的常系数微分算子

$$D_{g_{\mathbb{R}^m}} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(m)} \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{2.3}$$

其中 $\alpha_k^{(m)}$是一个线性映射 $\alpha_k^{(m)}$： $\mathbb{C}^{2^{[\frac{m}{2}]}} \to \mathbb{C}^{2^{[\frac{m}{2}]}}$，满足关系

$$\alpha_j^{(m)}\alpha_k^{(m)} + \alpha_k^{(m)}\alpha_j^{(m)} = -2\delta_{ij} \tag{2.4}$$

对所有 j, k。

下面给出一种可能的构造方法：利用具有分块结构的 $2^{[\frac{m}{2}]}\times 2^{[\frac{m}{2}]}$复矩阵来构造这些 $\{\alpha_j^{(m)}\}$。我们从 $m=1$ 和一维狄拉克算子 $D_{g_{\mathbb{R}}}=i\frac{d}{dx}$出发，也就是说，我们有 $-\alpha_1^{(1)}=i$ 纯虚单位。若 m 为偶数，则定义

$$\alpha_j^{(m)}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & -i\alpha_j^{(m-1)}\\ i\alpha_j^{(m-1)} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\quad \text{for } j=1,\dots,m-1\quad\text{and}\quad \alpha_m^{(m)}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & i\,\mathrm{Id}\\ i\,\mathrm{Id} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

wh此处“Id”表示 $\mathbb{C}^{2^{[\frac{m-1}{2}]}}$上的恒等算子。若 m 为奇数，则定义

$$\alpha_j^{(m)}=\alpha_j^{(m-1)}\quad \text{for } j=1,\dots,m-1\quad\text{and}\quad \alpha_m^{(m)}=i^{\frac{m+1}{2}}\alpha_1^{(m-1)}\cdots\alpha_{m-1}^{(m-1)}.$$

考察这一构造在低维情形下的表现颇有启发：

例 1. 对于 $m=2$，我们有

$$\alpha_1^{(2)}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad \alpha_2^{(2)}=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}.$$

将旋量场 ψ： $\mathbb{R}^2\to\mathbb{S}(\mathbb{R}^2)$按分量写为 $\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$，则有

$$D_{g_{\mathbb{R}^2}}\psi=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}+i\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\\ -\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+i\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\end{pmatrix}.\tag{2.5}$$

因此，在这种情形下，狄拉克算子就是柯西-黎曼算子。

考虑乘积 $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 以及识别 $\mathbb{S}(\mathbb{R}^2)=(\mathbb{S}(\mathbb{R})\oplus\mathbb{S}(\mathbb{R}))\otimes\mathbb{S}(\mathbb{R})$。我们可以明确地将纤维逐点同构写为

$$(\mathbb{S}(\mathbb{R})\oplus\mathbb{S}(\mathbb{R}))\otimes\mathbb{S}(\mathbb{R})\ni\begin{pmatrix}u_1v\\ u_2v\end{pmatrix}\longleftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}(u_1+u_2)v\\ (u_1-u_2)v\end{pmatrix}\in\mathbb{S}(\mathbb{R}^2)\tag{2.6}$$

对于 u_1， u_2， $v\in\Gamma(\mathbb{S}(\mathbb{R}))$。特别地，由 (2.2) 可知，

$$\begin{pmatrix}i\frac{d}{dx} & 0\\ 0 & -i\frac{d}{dx}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1v\\ u_2v\end{pmatrix}-\frac{d}{dy}\begin{pmatrix}u_2v\\ -u_1v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}iu_1'v-u_2v'\\ -iu_2'v+u_1v'\end{pmatrix}$$

这与 (2.5) 一致（在 (2.6) 中同构的作用下）。

例2。 对于 $m=3$，我们有

$$\alpha_1^{(3)}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad \alpha_2^{(3)}=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad \alpha_3^{(3)}=\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$$

它们恰好是经典泡利矩阵。对于乘积 $\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$，由 (2.3) 易得

$$D_{g_{\mathbb{R}^3}}=D_{g_{\mathbb{R}^2}}\otimes\mathrm{Id}_{\mathbb{S}(\mathbb{R})}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\otimes D_{g_{\mathbb{R}}}$$

代入（2.2）中。

例3. 对于 $m=4$，我们有

$$\alpha_1^{(4)}=\begin{pmatrix} 0 & & & -i \\ & i & & \\ & & -i & \\ i & & & 0 \end{pmatrix},\quad \alpha_2^{(4)}=\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ -1 & & & 0 \end{pmatrix},\quad \alpha_3^{(4)}=\begin{pmatrix} 0 & & -1 & 0 \\ & 0 & & 1 \\ 1 & & 0 & \\ 0 & -1 & & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$\alpha_4^{(4)}=\begin{pmatrix} 0 & & i & 0 \\ & 0 & & i \\ i & & 0 & \\ 0 & i & & 0 \end{pmatrix}$$

对于乘积 $\mathbb{R}^4=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$，我们有 $\mathbb{S}(\mathbb{R}^4)=\mathbb{S}(\mathbb{R}^2)\otimes\mathbb{S}(\mathbb{R}^2)$。通过考虑一个丛同构

$$\mathbb{S}(\mathbb{R}^2)\otimes\mathbb{S}(\mathbb{R}^2)\ni\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\longleftrightarrow\begin{pmatrix}-iu_1v_1\\-iu_2v_2\\iu_1v_2\\iu_2v_1\end{pmatrix}\in\mathbb{S}(\mathbb{R}^4)$$

对于 $u_1,\ u_2,\ v_1,\ v_2\in\Gamma(\mathbb{S}(\mathbb{R}^2))$，很容易验证这一对应关系

$$D_{g_{\mathbb{R}^4}}=D_{g_{\mathbb{R}^2}}\otimes\mathrm{Id}_{\mathbb{S}(\mathbb{R}^2)}+\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\otimes D_{g_{\mathbb{R}^2}}$$

这为（2.2）提供了依据。同时，对于乘积 $\mathbb{R}^4=\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$ 及其相关的旋量丛 $\mathbb{S}(\mathbb{R}^4)=(\mathbb{S}(\mathbb{R}^3)\oplus\mathbb{S}(\mathbb{R}^3))\otimes\mathbb{S}(\mathbb{R})$，我们有纤维逐点同构

$$(\mathbb{S}(\mathbb{R}^3)\oplus\mathbb{S}(\mathbb{R}^3))\otimes\mathbb{S}(\mathbb{R})\ni\begin{pmatrix}\psi_1\varphi\\\psi_2\varphi\\\psi_3\varphi\\\psi_4\varphi\end{pmatrix}\longleftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}(\psi_4-\psi_2)\varphi\\(\psi_3-\psi_1)\varphi\\(\psi_2+\psi_4)\varphi\\-(\psi_1+\psi_3)\varphi\end{pmatrix}\in\mathbb{S}(\mathbb{R}^4)$$

对于 $\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}\in\mathbb{S}(\mathbb{R}^3)$ 和 $\varphi\in\mathbb{S}(\mathbb{R})$，使得其作用

$$\begin{pmatrix}D_{g_{\mathbb{R}^3}}&0\\0&-D_{g_{\mathbb{R}^3}}\end{pmatrix}\otimes\mathrm{Id}_{\mathbb{S}(\mathbb{R})}+i\begin{pmatrix}0&\mathrm{Id}_{\mathbb{S}(\mathbb{R}^3)}\\-\mathrm{Id}_{\mathbb{S}(\mathbb{R}^3)}&0\end{pmatrix}\otimes D_{g_{\mathbb{R}}}$$

在 $(\mathbb{S}(\mathbb{R}^3)\oplus\mathbb{S}(\mathbb{R}^3))\otimes\mathbb{S}(\mathbb{R})$ 上与 $D_{g_{\mathbb{R}^4}}$ 在 $\mathbb{S}(\mathbb{R}^4)$ 上的作用一致。这验证了（2.2）。注意其与二维情形的类比。

我们可以继续这一分析。对于一般的 m，可以计算矩阵 $\{\alpha_j^{(m)}\}$、手征算子 $\omega_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}^m}$，尤其当 m 为偶数时，还可以计算相应的丛同构，以便在乘积结构下分解狄拉克算子。然而，这类显式公式并不常见。使用克利福德模的抽象框架总是更简单。

值得注意的是，前述狄拉克算子的显式公式启发了一个“良好”的函数空间，该空间在狄拉克算子的作用下保持不变。更确切地说，令

$$E(\mathbb{R}^m) := \Big\{\psi(x) = f_1(|x|)\gamma_0 + \frac{f_2(|x|)}{|x|}x\cdot\gamma_0 \,:\, x\in\mathbb{R}^m,\ f_1, f_2 \in C^\infty(0,\infty) \text{ and } \gamma_0 \in S_{\mathbb{C}}^{2^{[\frac{m}{2}]}}\Big\}$$
$$= \Big\{\psi(x) = f_1(|x|)\gamma_0 + \frac{f_2(|x|)}{|x|}\sum_{k=1}^m x_k\alpha_k^{(m)}\gamma_0 \,:\, f_1, f_2 \in C^\infty(0,\infty) \text{ and } \gamma_0 \in S_{\mathbb{C}}^{2^{[\frac{m}{2}]}}\Big\}.$$

其中，$S_{\mathbb{C}}^{2^{[\frac{m}{2}]}}$表示旋量模 $\mathbb{S}_m \cong \mathbb{C}^{2^{[\frac{m}{2}]}}$中的复单位球面。接着，根据克利福德乘法的规则或关系式 (2.4)，不难验证

$$D_{g_{\mathbb{R}^m}}\psi = -\Big(f_2'(|x|) + \frac{(m-1)f_2(|x|)}{|x|}\Big)\gamma_0 + \frac{f_1'(|x|)}{|x|}x\cdot\gamma_0 \in E(\mathbb{R}^m) \quad \forall\psi\in E(\mathbb{R}^m).$$

此外，为确保 ψ 在原点处连续，可以进一步将其限制在子空间

$$E_0(\mathbb{R}^m) = \Big\{\psi(x) = f_1(|x|)\gamma_0 + \frac{f_2(|x|)}{|x|}x\cdot\gamma_0 \in E \,:\, f_1'(t) = O(t) \text{ and } f_2(t) = O(t) \text{ as } t\searrow 0\Big\}.$$

注 2.1。 (1) 值得注意的是， $E(\mathbb{R}^m)$中给出的这一特定试探形式包含了旋量的一些重要表示形式，许多物理学家在研究量子电动力学中的旋量场时都会关注这些表示形式。事实上，据我们所知，这一表示形式最早可追溯到 1951年，R. Finkelstein、R. LeLevier 和 M. Ruderman [14]当时研究了 $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$中的一个非线性狄拉克方程。通过分离时间变量，作者引入了一种非常特殊的旋量场表示形式，即

$$\psi(r,\theta_1,\theta_2) = \begin{pmatrix} f_1(r)\\ 0\\ if_2(r)\cos\theta_1\\ if_2(r)\sin\theta_1 e^{i\theta_2}\end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} if_2(r)\cos\theta_1\\ if_2(r)\sin\theta_1 e^{i\theta_2}\\ f_1(r)\\ 0\end{pmatrix} \tag{2.7}$$

其中（r， θ_1， θ_2） $\in(0,\ +\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$ 是 $\mathbb{R}^3$上的球坐标。此后，这种试探形式在旋量发挥关键作用的粒子物理学中得到了广泛应用，例如参见 [40, 45] 和 [11] ，其中给出了二维类比。现在，在我们的设定中，我们知道上述旋量场属于子丛 $\mathbb{S}(\mathbb{R}^3)\oplus\mathbb{S}(\mathbb{R}^3)$。考虑标准球坐标

$$x_1 = r\cos\theta_1,\quad x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2,\quad x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3$$

and

$$x_4 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3$$

对于 $r>0, \theta_1,\ \theta_2\in[0,\pi]$ 和 $\theta_3\in[0,2\pi]$，若我们限制在 $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$（即将变量 x_2 分离出来，并将其视为时间变量），并取

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \in S_{\mathbb{C}}^4,$$

我们很快便可推导出

$$f_1(|x|)\gamma_0+\frac{f_2(|x|)}{|x|}\sum_{k=1}^{4}x_k\alpha_k^{(4)}\gamma_0=\begin{pmatrix}if_2(r)\cos\theta_1\\ if_2(r)\sin\theta_1 e^{i\theta_3}\\ f_1(r)\\ 0\end{pmatrix}$$

这恰好是（2.7）中的后者。

（2）尽管用于旋量的特殊试探形式（2.7）已有半个多世纪的历史，但对于一般维数而言，族 $E(\mathbb{R}^m)$ 仍然是新颖且重要的。特别是， $E(\mathbb{R}^m)$ 中的试探形式大大简化了狄拉克方程。事实上，对于以下形式的半线性方程

$$D_{g_{\mathbb{R}^m}}\psi=h(|x|,|\psi|)\psi,\quad \psi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{S}_m\cong\mathbb{C}^{2^{[\frac{m}{2}]}} \tag{2.8}$$

其中 $h:\ [0,+\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是给定函数， $E(\mathbb{R}^m)$ 中的试探形式将其等价地转化为

$$\begin{cases}-f_2'-\dfrac{m-1}{r}f_2=h\Big(r,\sqrt{f_1^2+f_2^2}\Big)f_1,\\ f_1'=h\Big(r,\sqrt{f_1^2+f_2^2}\Big)f_2,\end{cases}\quad \text{对于 } r>0$$

从而使问题更容易处理。

（3）这种试探形式也被用于研究若干数理物理模型。例如，关于狄拉克型方程的研究，参见 [6–8]；关于耦合狄拉克型方程的类粒子解的研究，参见 [15, 39]。

（4）空间 $E(\mathbb{R}^m)$在旋量场中具有某种自然性。事实上，考察 $\mathbb{R}^m$ 上的平行旋量以及狄拉克泡 [9] （对应于球面上的 Killing旋量），就会发现它们都属于 $E(\mathbb{R}^m)$。因此，我们可以将$E(\mathbb{R}^m)$视为旋量的一类广义特殊类。

3 问题的设定

令 m维球面 S^m 为 $\mathbb{R}^m\cup\{\infty\}$，其中坐标 $x\in\mathbb{R}^m$ 由从北极 α_m 出发的标准立体投影给出： $S^m\setminus\{P_N^{m+1}\}\to\mathbb{R}^m$ （此处$P_N^{m+1}=(0,\dots,0,1)\in S^m\subset\mathbb{R}^{m+1}$表示北极）。为清晰起见，我们用下标或上标表示相应的维数。令 $P_S^{m+1}=(0,\dots,0,-1)$ 为南极，可见流形 $\mathbb{R}\times S^{m-1}$ 与 $S^m\setminus\{P_N^{m+1},\,P_S^{m+1}\}$共形等价。共形微分同胚可明确表示为

$$\begin{array}{ccccc}S^m\setminus\{P_N^{m+1},\,P_S^{m+1}\} & \xrightarrow{\alpha_m} & \mathbb{R}^m\setminus\{0\} & \xrightarrow{\beta_m} & \mathbb{R}\times S^{m-1}\\ \xi=(\xi_1,\dots,\xi_{m+1}) & \longmapsto & x=(x_1,\dots,x_m) & \longmapsto & (\ln|x|,x/|x|)\end{array} \tag{3.1}$$

其中我们有 $(\alpha_m^{-1})^* g_{S^m} = \frac{4}{(1+|x|^2)^2} g_{\mathbb{R}^m}$ 以及 $(\beta_m)^*(g_{\mathbb{R}} \oplus g_{S^{m-1}}) = \frac{1}{|x|^2} g_{\mathbb{R}^m}$.

这一观察引出了进一步的思考。典型例子来自其补集为赤道圆的（连通）区域 $\Omega \subset S^n$ 。不失一般性，我们可以考虑区域

$$S^m \setminus S^1 = \Big\{(\xi_1, \dots, \xi_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : \sum_k \xi_k^2 = 1,\ \xi_1^2 + \xi_{m+1}^2 < 1\Big\}.$$

于是我们得到如下共形等价

$$\Omega = S^m \setminus S^1 \quad \xrightarrow{\alpha_m} \quad \mathbb{R}^m \setminus \{(\mathbb{R}, 0, \dots, 0)\} \quad \xrightarrow{\beta_m} \quad \mathbb{R} \times (S^{m-1} \setminus \{P_N^m, P_S^m\}) \tag{3.2}$$

现在我们考虑球面 $(S^m,\ g_{S^m})$ 上旋量 Yamabe 方程的解，这些解在给定的闭集 $\Sigma \subset S^m$ 上是奇异的。更具体地说，我们将考虑以下问题

$$D_{g_{S^m}} \phi = |\phi|^{\frac{2}{m-1}}_{g_{S^m}} \phi \quad \text{on } \Omega = S^m \setminus \Sigma \tag{3.3}$$

当 Σ 由一对对跖点给定时，不妨记为 $\{P_N^{m+1}, P_S^{m+1}\}$；或者由一个赤道圆 S^1 给定时 .

在讨论方程（3.3）的 Delaunay 族解之前，我们先回顾狄拉克算子在共形变换下的变换公式（见 [21,23]）：

命题 3.1. 设 g_0 和 $g = f^2 g_0$ 是黎曼自旋 m-流形 M上的两个共形度量。那么，存在一个向量丛同构 $F\colon\ \mathbb{S}(M, g_0) \to \mathbb{S}(M, g)$，它是逐纤维等距映射，并且满足

$$D_g\big(F(\psi)\big) = F\big(f^{-\frac{m+1}{2}} D_{g_0}\big(f^{\frac{m-1}{2}}\psi\big)\big),$$

其中， D_{g_0} 和 D_g 分别是 M 上相对于度量 g_0 和 g 的狄拉克算子。

下文的讨论将以此公式为基础。

3.1 奇异集是一对对跖点

在此情形下，不失一般性，我们假设 $\Sigma = \{P_N^{m+1}, P_S^{m+1}\} \subset S^m$。于是，作为命题 3.1 的直接推论，若 ψ 是方程的一个解

$$D_{g_{\mathbb{R}^m}} \psi = |\psi|^{\frac{2}{m-1}}_{g_{\mathbb{R}^m}} \psi \quad \text{on } \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \tag{3.4}$$

那么， $\phi = F(f^{-\frac{m-1}{2}}\psi)$ $(f(x) = \frac{2}{1+|x|^2})$ 是方程（3.3）的一个解。注意到方程（3.4）与（2.8）具有相同的结构，因此我们将考察如下形式的解

$$\psi(x) = f_1(|x|)\gamma_0 + \frac{f_2(|x|)}{|x|} x \cdot \gamma_0 \in E(\mathbb{R}^m). \tag{3.5}$$

接着，应用 Emden-Fowler 变量变换 $r = e^{-t}$ 并令 $f_1(r) = -u(t)e^{\frac{m-1}{2}t}$和 $f_2(r) = v(t)e^{\frac{m-1}{2}t}$，我们得到以下方程组

$$\begin{cases} u' + \dfrac{m-1}{2} u = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{m-1}} v, \\ -v' + \dfrac{m-1}{2} v = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{m-1}} u. \end{cases} \tag{3.6}$$

这个方程组 容易积分，且是非耗散的；特别是，哈密顿能 gy

$$H(u,v)=-\frac{m-1}{2}uv+\frac{m-1}{2m}\big(u^2+v^2\big)^{\frac{m}{m-1}}$$

沿着方程组 (3.6) 的解保持为常数。

方程组 (3.6) 的平衡点为

$$(0,0)\quad\text{and}\quad\pm\Big(\frac{(m-1)^{(m-1)/2}}{2^{m/2}},\frac{(m-1)^{(m-1)/2}}{2^{m/2}}\Big).$$

并且存在一条特殊的同宿轨道

$$u_0(t)=\frac{m^{(m-1)/2}e^{t/2}}{2^{m/2}\cosh(t)^{m/2}},\quad v_0(t)=\frac{m^{(m-1)/2}e^{-t/2}}{2^{m/2}\cosh(t)^{m/2}}\tag{3.7}$$

对应于等值集 $H=0$；当 t 趋于 $\pm\infty$ 时，它趋近于原点，并在第一象限的 (u,v) 平面内围出一个有界集合 Λ，其表达式为 $\{H\le 0\}$。容易看出，未被该等值集围住的轨道，即 $\{H>0\}$ 中的轨道，必定穿过 u 轴和 v 轴。也就是说，u 和 v 必须改变符号。注意，平衡点 (0,0) 恰好包含在两条轨道中：同宿轨道和驻定轨道 (0,0)。因此，对于 $\{H\neq 0\}$ 中的轨道 ($u(t)$, $v(t)$)，必有 $u^2+v^2\neq 0$ 对所有 t 均成立。由此，我们得到一个无界的一参数周期解族

$$\mathfrak{D}_m^1=\left\{(u,v)\text{ is a solution to Eq. (3.6)}:\ u(0)=v(0)=\mu>0,\ \mu\neq\frac{m^{(m-1)/2}}{2^{m/2}}\right\},$$

由此，通过（3.5）相应地得到方程（3.4）的一族奇异解 $\mathfrak{S}_m^1$。注意，对于每个 $\psi\in\mathfrak{S}_m^1$，$|\psi(x)|\to+\infty$ 作为 $|x|\to 0$，而 $|\psi(x)|=O(|x|^{-\frac{m-1}{2}})$作为 $|x|\to+\infty$。因此，这些解产生了方程（3.3）的特殊奇异解。

如果我们只考虑 $\mathfrak{D}_m^1$中的周期解，就称它们为旋量Yamabe问题（3.4）的 Delaunay 型解。尽管我们无法显式写出这些解，但在第4节中，我们将研究 $(u,\ v)$ 平面第一象限内解的分岔现象。

3.2 奇异集是一个赤道圆

首先，我们需要注意到，通过对黎曼度量 g_{S^m} 在 $S^m\setminus S^1$ 上作共形变换，方程（3.3）可以被解释为 $\mathbb{R}\times(S^{m-1}\setminus\{P_N^m,P_S^m\})$ 上的一个方程。考虑 $\mathbb{R}\times S^{m-1}$ 上的乘积度量，它在 $(\tau,\ \vartheta)$ 坐标下表示为 $\bar{}g=d\tau^2+d\vartheta^2$，其中 $\vartheta=(\vartheta_1,\ .....,\ \vartheta_{m-1})$ 参数化单位球面 S^{m-1}。由共形等价关系（3.2）可得

$$(\alpha_m^{-1}\circ\beta_m^{-1})^*g_{S^m}=\frac{4e^{2\tau}}{(1+e^{2\tau})^2}\bar{g}=\frac{1}{\cosh(\tau)^2}\bar{g}.$$

并且，作为命题 3.1 的直接推论，若 φ 是方程的一个解

$$D_{\bar{g}}\varphi=|\varphi|_{\bar{g}}^{\frac{2}{m-1}}\varphi\quad\text{on }\mathbb{R}\times(S^{m-1}\setminus\{P_N^m,P_S^m\})\tag{3.8}$$

那么 $\phi = F(\cosh(\tau)^{\frac{m-1}{2}}\varphi)$ 是方程（3.3）的一个解，其中 F 是一个丛同构 .

值得指出的是，乘积流形上的公式 (2.2) 为构造方程 (3.8) 的奇异解提供了一种方法。事实上，若 m 为奇数（因此 $m \geq 3$），则 $m-1$ 为偶数，我们可以考虑如下形式的特殊旋量 $\varphi = 1 \otimes \psi$，使得方程 (3.8) 化为

$$D_{g_{S^{m-1}}}\tilde{\psi} = |\tilde{\psi}|^{\frac{2}{m-1}}_{g_{S^{m-1}}}\tilde{\psi} \tag{3.9}$$

其中 $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\vartheta)$ 是 $S^{m-1} \setminus \{P_N^m, P_S^m\}$上的旋量。再一次，利用命题 3.1 中的共形公式，方程 (3.9) 可等价地变换为

$$D_{g_{\mathbb{R}^{m-1}}}\psi = f(x)^{\frac{1}{m-1}}|\psi|^{\frac{2}{m-1}}_{g_{\mathbb{R}^{m-1}}}\psi \quad \text{on } \mathbb{R}^{m-1} \setminus \{0\} \tag{3.10}$$

其中 $f(x) = \frac{2}{1+|x|^2}$对于 $x \in \mathbb{R}^{m-1}$。而方程 (3.9) 和 (3.10) 的解通过旋量的如下对应关系一一对应：$\tilde{\psi} \leftrightarrow f^{-\frac{m-2}{2}}\psi$。

现在，考虑如下试探形式

$$\psi(x) = f_1(|x|)\gamma_0 + \frac{f_2(|x|)}{|x|}x \cdot \gamma_0 \in E(\mathbb{R}^{m-1}).$$

并进行变量代换 $r = e^{-t}$，我们可以将方程 (3.10) 化为方程组

$$\begin{cases} u' + \dfrac{m-2}{2}u = \cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(u^2+v^2)^{\frac{1}{m-1}}v \\ -v' + \dfrac{m-2}{2}v = \cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(u^2+v^2)^{\frac{1}{m-1}}u \end{cases} \tag{3.11}$$

其中 $f_1(r) = -u(t)e^{\frac{m-2}{2}t}$且 $f_2(r) = v(t)e^{\frac{m-2}{2}t}$。

如果 m 为偶数，那么 $\mathbb{R} \times (S^{m-1} \setminus \{P_N^m, P_S^m\})$ 上的旋量丛可与$\mathbb{S}(\mathbb{R}) \otimes (\mathbb{S}(S^{m-1}) \oplus \mathbb{S}(S^{m-1}))$ 视为同一，并且狄拉克算子可表示为

$$D_{\bar{g}} = \begin{pmatrix} D_{g_{S^{m-1}}} & 0 \\ 0 & -D_{g_{S^{m-1}}} \end{pmatrix} \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{S}(\mathbb{R})} + i\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_{\mathbb{S}(S^{m-1})} \\ -\mathrm{Id}_{\mathbb{S}(S^{m-1})} & 0 \end{pmatrix} \otimes D_{g_{\mathbb{R}}}.$$

因此，考虑形如 $\varphi = 1 \otimes (\tilde{\psi}_1 \oplus \tilde{\psi}_1)$ 的旋量，其中 $\tilde{\psi}_1$，$\tilde{\psi}_1 \in \Gamma(\mathbb{S}(S^{m-1}))$，我们可将方程 (3.8) 化为以下狄拉克方程组

$$\begin{pmatrix} D_{g_{S^{m-1}}}\tilde{\psi}_1 \\ -D_{g_{S^{m-1}}}\tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} = \left(|\tilde{\psi}_1|^2_{g_{S^{m-1}}} + |\tilde{\psi}_2|^2_{g_{S^{m-1}}}\right)^{\frac{1}{m-1}}\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix}$$

on $S^{m-1} \setminus \{P_N^m, P_S^m\}$。与方程 (3.10) 类似，我们可以将上述方程组变换为

$$\begin{pmatrix} D_{g_{\mathbb{R}^{m-1}}}\psi_1 \\ -D_{g_{\mathbb{R}^{m-1}}}\psi_2 \end{pmatrix} = f(x)^{\frac{1}{m-1}}\left(|\psi_1|^2_{g_{\mathbb{R}^{m-1}}} + |\psi_2|^2_{g_{\mathbb{R}^{m-1}}}\right)^{\frac{1}{m-1}}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

在 $\mathbb{R}^{m-1} \setminus \{0\}$ 上。

现在，采用试探形式

$$\psi_1(x)=f_1(|x|)\gamma_0+\frac{f_2(|x|)}{|x|}x\cdot\gamma_0\quad\text{and}\quad\psi_2(x)=f_3(|x|)\gamma_0+\frac{f_4(|x|)}{|x|}x\cdot\gamma_0$$

在 $E(\mathbb{R}^{m-1})$ 中并进行变量代换 $r=e^{-t}$后，我们得到以下方程组

$$\begin{cases}u_1'+\dfrac{m-2}{2}u_1=\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}\left(u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2\right)^{\frac{1}{m-1}}v_1\\-v_1'+\dfrac{m-2}{2}v_1=\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}\left(u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2\right)^{\frac{1}{m-1}}u_1\\u_2'+\dfrac{m-2}{2}u_2=\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}\left(u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2\right)^{\frac{1}{m-1}}v_2\\-v_2'+\dfrac{m-2}{2}v_2=\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}\left(u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2\right)^{\frac{1}{m-1}}u_2\end{cases}\tag{3.13}$$

其中，我们代入了 $f_1(r)=-u_1(t)e^{\frac{m-2}{2}t}$, $f_2(r)=v_1(t)e^{\frac{m-2}{2}t}$, $f_3(r)=u_2(t)e^{\frac{m-2}{2}t}$ 以及$f_4(r)=v_2(t)e^{\frac{m-2}{2}t}$。因此，我们可以考虑满足 $u_1=u_2$ 和 $v_1=v_2$的解；这类解具有最简单、最清晰的结构。令 $u=\sqrt{2}u_1$ 和$v=\sqrt{2}v_1$，便可将(3.13)化为

$$\begin{cases}u'+\dfrac{m-2}{2}u=\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}\left(u^2+v^2\right)^{\frac{1}{m-1}}v\\-v'+\dfrac{m-2}{2}v=\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}\left(u^2+v^2\right)^{\frac{1}{m-1}}u\end{cases}$$

这与(3.11)完全一致。

显然，方程组(3.11)具有哈密顿结构，其哈密顿能量为

$$H(t,u,v)=-\frac{m-2}{2}uv+\frac{m-1}{2m}\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(u^2+v^2)^{\frac{m}{m-1}}.$$

显然，该方程组是耗散的，不存在周期解。然而，我们可以考虑当 $t\to\pm\infty$ 时不收敛到(0，0)的解。更准确地说，我们将刻画以下解族

$$\mathfrak{D}_m^2=\left\{(u,v)\text{ is a solution to Eq. (3.11) : }u^2(t)+v^2(t)\to+\infty\text{ as }t\to\pm\infty\right\}$$

由此可得到方程（3.9）的一族奇异解 $\mathfrak{S}_m^2$。因此，这些解也导出了方程（3.3）的奇异解。在此情形下，我们将这族解 $\mathfrak{D}_m^2$ 称为 Delaunay 型解。

4 常微分方程组的分析

本节主要研究动力系统 (3.6) 和 (3.11)。我们指出，这两个方程组都具有变分结构。事实上，若记 $z=(u,\ v)\in\mathbb{R}^2$，则方程组 (3.6) 和 (3.11) 可改写为

$$\dot{z}=\frac{dz}{dt}=J\nabla_z H(t,z)\tag{4.1}$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

并且 H 表示相应的哈密顿能量。泛函

$$\Phi_T(z) = \frac{1}{2}\int_{-T}^{T}(-J\dot{z}, z)dt - \int_{-T}^{T} H(t,z)dt$$

and

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(-J\dot{z}, z)dt - \int_{\mathbb{R}} H(t,z)dt$$

分别可用于求得方程 (4.1) 的周期解和同宿解。特别地，方程 (4.1) 的 $2T$-周期解与 Φ_T 的临界点之间存在一一对应关系（只要 $H(t,\ z)$ 关于 t 变量是周期的或与 t 无关）。类似地，Φ 的临界点对应于方程 (4.1) 的同宿解，即当 $t \to \pm\infty$ 时，$z(t) \to (0,\ 0)$。

对于自治方程组，即 (3.6)，我们指出，对于每个 $T > T_0$ 和某个 $T_0 > 0$，$2T$-周期解的存在性以及这些解在 $T \nearrow +\infty$ 时的渐近行为，已在 [1,44] 中得到研究。总结其结果可得

命题 4.1. 存在 $T_0 > 0$，使得对每个 $T > T_0$，哈密顿系统 (3.6)都有一个非常数 $2T$-周期解 z_T。族 $\{z_T\colon\ T > T_0\}$ 在以下意义下是紧的：对于任意序列 $T_n \nearrow +\infty$，必要时取其子序列，z_{T_n} 在 $C^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ 中收敛到系统 (3.6) 在 $\mathbb{R}$ 上的一个非平凡解 z_∞，且满足

$$\lim_{|t|\to+\infty} z_\infty(t) = \lim_{|t|\to+\infty} \dot{z}_\infty(t) = 0,$$

也就是说，z_∞ 是一条同宿轨道。

请注意，前一个命题并未清楚描述解 z_T 在 $T \searrow T_0$ 时的行为，也未刻画 z_∞。例如，根据 [1,44]，中的论证，我们无法估计 T_0，也不知道在 T_0 以下是否存在非常数解。事实上，如果 H 在其平衡点附近具有良好的结构，那么可以利用 Lyapunov 中心定理，展示一族从平衡解分岔而来的小振幅周期解，并且还能对 T_0 作出估计。然而，这并不能保证非常数解族的唯一性。

在下文中，我们将采用不同的方法来刻画 Delaunay 型族 $\mathfrak{D}^1_m$ 和 $\mathfrak{D}^2_m$。我们还想指出，另一种方法可用于寻找族 $\mathfrak{D}^{1,\ m}$的周期解：通过变分分析并追踪最小能量解，我们可以刻画同宿能量 z_∞，它对应于泛函 Φ的最小能量解。这一过程已在更一般的乘积流形情形中使用，见 [5]。

4.1 Th无耗散情形：正周期轨道的分岔 s

为了分析动力系统 (3.6)，我们回顾

$$H(u,v) = -\frac{m-1}{2}uv + \frac{m-1}{2m}\left(u^2+v^2\right)^{\frac{m}{m-1}}$$

对于 $u,\ v \in \mathbb{R}$ 和 $m \geq 2$，它与 t 无关。我们将重点关注 $(u,\ v)$-平面的第一象限内 (3.6) 的周期解/轨道，即 $u,\ v$：对所有 $T > 0,\ \mathbb{R}/2T\mathbb{Z} \to (0,\ +\infty)$。这类解称为正解。

方程组 (3.6) 有一个"显然的"常数解 $u = v \equiv (m-1)_{2^{m/2}}^{(m-1)/2}$，对所有 $T > 0$ 均成立。从现在起，我们打算考察非常数解。令 $z = u^2 + v^2$ 和 $w = u^2 - v^2$，则有 $uv = \frac{\sqrt{z^2-w^2}}{2}$，于是 (3.6) 变为

$$\begin{cases} z' = -2\lambda w \\ zz' - ww' = \dfrac{1}{\lambda} z^{p-1} z' \sqrt{z^2 - w^2} \end{cases} \tag{4.2}$$

其中，为简便起见，我们记 $\lambda = \frac{m-1}{2} > 0$ 和 $p = \frac{m}{m-1} \in (1, 2]$。将第二个方程乘以 $(z^2 - w^2)^{-1/2}$ 后，得到

$$\frac{d}{dt}\big(\sqrt{z^2 - w^2}\,\big) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{\lambda p} z^p\Big).$$

因此，对于任意解 z 和 w，都存在一个常数 K，使得 $\sqrt{z^2 - w^2} = \frac{1}{\lambda p} z^p + K$，即

$$w^2 = z^2 - \Big(\frac{1}{\lambda p} z^p + K\Big)^2 \quad \text{and} \quad \frac{1}{\lambda p} z^p + K \geq 0. \tag{4.3}$$

对于 $K \in \mathbb{R}$，记

$$F_K(s) = s^2 - \Big(\frac{1}{\lambda p} s^p + K\Big)^2 \quad \text{for } s \geq 0.$$

注意，若 (z, w) 是 (4.2) 的非常数 $2T$-周期解，则 z 必须在一个周期内达到最大值和最小值。因此，z' 至少有两个零点。结合 (4.2) 中的第一个方程可知，F_K 至少应有两个零点。因此，对 K 的条件限制尤其严格。事实上，当 $K = 0$ 时，我们可以将 (4.2) 中的第一个方程与 (4.3) 结合，得到 $(z')^2 = 4\lambda^2 z^2 - \frac{4}{p^2} z^{2p}$。于是，若存在 t_0 和 t_1 使得 $z(t_0) < z(t_1)$ 且 $z'(t_0) = z'(t_1) = 0$，则有 $z(t_0) = 0$ 且 $z(t_1) = (\frac{m}{2})^{m-1}$。显然，这对应于同宿解 (3.7)，不可能是周期解。对于 $K < 0$，通过分析代数方程 $F_K(s) = 0$，可以看出 F_k 在 $(0, +\infty)$ 上恰有两个零点 $0 < s_0 < s_1$，它们由以下关系给出

$$\begin{cases} s_0 = -\dfrac{1}{\lambda p} s_0^p - K, \\ s_1 = \dfrac{1}{\lambda p} s_1^p + K. \end{cases}$$

但我们发现 $\frac{1}{\lambda p} s_0^p + K < 0$，它不满足 (4.3) 中的第二个不等式。因此，$K$ 剩下的取值范围为 $(0,\ +\infty)$。然而，显然 K 不可能很大。

引理 4.2。若 $K > 0$ 足够小，则 F_K 在 $(0, +\infty)$ 上恰有两个零点。

证明。 我们只证明情形 $p = \frac{m}{m-1} \in (1,2)$，即 $m > 2$，因为 $p = 2$ 要容易得多。注意，

$$F_K'(s) = 2s - \frac{2}{\lambda}\Big(\frac{1}{\lambda p}s^p + K\Big)s^{p-1}$$

对于 $s \geq 0$和 $p \in (1,2]$,，我们有 $F_K'(0) = 0$，且 $F_K'(s) < 0$ 位于 $(0, \delta_1)$ 内，其中 $\delta_1 > 0$ 足够小。

注意，当 $K > 0$ 足够小时，两个映射 $s \mapsto \lambda s^{2-p}$和 $s \mapsto \frac{1}{\lambda p}s^p + K$ 恰有两个交点。我们将这两个交点的横坐标记为$0 < s_{0,1} < s_{0,2}$。于是，在 $(0, s_{0,1})$ 上，$F_K' < 0$ $(s_{0,2}, +\infty)$，而 $F_K' > 0$ 在 $(s_{0,1}, s_{0,2})$ 上。因此， $F_K(s_{0,1}) < 0$ 是严格局部极小值，而 $F_K(s_{0,2})$ 是严格局部极大值。

由于 $F_0(1) = 1 - \frac{1}{\lambda^2 p^2} > 0$ （我们用到了事实 $\lambda = \frac{m-1}{2}$、 $p = \frac{m}{m-1}$和 $m > 2$），因此对于所有充分小的 K，有$F_K(1) > 0$ 。于是 $F_K(s_{0,\ 2}) > 0$。这意味着 F_K 在 $(0,\ +\infty)$ 上恰有两个零点。 □

Let

$$K_0 := \sup\big\{K > 0 : F_K \text{ has two zeros}\big\}.$$

我们指出，对于 $K > 0$， F_K 在 $(0,\ +\infty)$ 内不可能有第三个零点，因为 F_K' 至多变号两次，且 $F_K(0) < 0$。

引理 4.3。 $K_0 < +\infty$ 和 F_{K_0} 仅有一个零点，该点即为全局最大值。此外，$F_K(s) < 0$ 对于所有 $K > K_0$ 和 $s \geq 0$均成立。

证明。 由于 $K_0 < +\infty$ 显而易见，我们只需检查其余陈述。首先，我们指出

$$\frac{\partial}{\partial K}F_K(s) = -2\Big(\frac{1}{\lambda p}s^p + K\Big) < 0 \tag{4.4}$$

ˆ 前提是 $K > 0$ 和 $s \geq 0$。因此，若对于某个 $K > 0$，有 $F\hat{}_K(s\hat{}_K) > 0$，且 $s\hat{}_K > 0$，则 ˆ 对所有 $K \in (0, K]$，都有 $F_K(s\hat{}_K) > 0$。此外，由于 F_K 关于 ˆ ˆK连续，存在 $\varepsilon > 0$ 使得当 $K \in (K, K + \varepsilon)$ 时， $F_K(s\hat{}_K) > 0$。因此可以看出，$\{K > 0 :\ F_K$ 在开区间 $(0, K_0)$ 内有两个零点，且 $\max F_{K_0} \leq 0$（否则F_{K_0} 将有两个零点）。选取一个序列 $K_n \nearrow K_0$ 和 $s_n > 0$，使得 $F_{K_n}(s_n) > 0$，则 $\{s_n\}$ 有界，且当 $n \to \infty$时，$F_{K_n}(s_n) \to 0$。因此， F_{K_0} 只有一个零点，即全局最大值。最后一个断言由事实 (4.4) 得出。 □

注 4.4。 K_0 的值可以显式计算。具体而言，我们有 e

$$K_0 = \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\lambda^{\frac{1}{p-1}} = \frac{1}{m}\Big(\frac{m-1}{2}\Big)^{m-1}.$$

事实上， $K = K_0$ 是使方程 $s = \frac{1}{\lambda p}s^p + K$ 有解的最大正数。 —

在下文中，令 $K \in (0,\ K_0)$，我们将 $0 < s_0 < s_1$ 设为使 F_K 为零的点。值得指出的是， s_0 和 s_1 是 K的函数。于是， F_K 在区间 $(s_0,\ s_1)$ 上为正。现在，方程 (4.3) 等价于

$$\frac{dz}{2\lambda\sqrt{F_K(z)}} = \pm dt,$$

该方程可由 $\eta_K(z) = \pm t + C$ 求解，其中

$$\eta_K(z) = \int_{s_0}^{s} \frac{dz}{2\lambda\sqrt{F_K(z)}}$$

且 $C \in \mathbb{R}$ 是一个常数。

当然， η_K 定义在区间（s_0, s_1）上。注意到 s_0 和 s_1 是 F_K的单根（即，对于 $j = 0, 1$， $F_K'(s_j) \neq 0$ ），我们得到 $\eta_K(s_1)$ 定义良好。此外，当 $s \to s_0$ 或 s_1时，我们有 $\eta_K'(s) > 0$ 且 $\eta_K'(s) \to +\infty$ 。因此， η_K 有一个反函数 η_K^{-1} ，它在区间 $[0, \eta_K(s_1)]$上从 s_0 递增至 s_1。现在，方程（4.3）的解可表示为$z(t) = \eta_K^{-1}(\pm t + C)$，其中 $C \in \mathbb{R}$。

令

$$z_K(t) = \begin{cases} \eta_K^{-1}(t) & t \in [0, \eta_K(s_1)], \\ \eta_K^{-1}(-t) & t \in [-\eta_K(s_1), 0], \end{cases} \tag{4.5}$$

由此可知， z_K 是方程（4.2）的一个 $2\eta_K(s_1)$-周期解，且不存在更小的周期。此外，这个 z_K（连同方程（4.2）中对应的 w_K ）产生了方程（3.6）的一个正解（u_K, v_k），其中 $H(u_K, v_K) = -\frac{\lambda K}{2} < 0$。

引理 4.5. 映射 $K \mapsto \eta_K(s_1)$ 是连续的。特别地，

$$\lim_{K \searrow 0} \eta_K(s_1) = +\infty \quad \textit{and} \quad \lim_{K \nearrow K_0} \eta_K(s_1) = \frac{\sqrt{m-1}}{2}\pi$$

证明. 首先，我们将写作 $s_0 = s_0(K)$和 $s_1 = s_1(K)$，以强调 s_0 和 s_1是 K的函数。注意，s_0 和 s_1 是方程 $s = \frac{1}{\lambda p}s^p + K$的解。根据隐函数定理， s_0 和 s_1 是 C^1 函数，特别地，

$$\begin{cases} \Big(1 - \dfrac{1}{\lambda} s_0(K)^{p-1}\Big) s_0'(K) = 1, \\ \Big(1 - \dfrac{1}{\lambda} s_1(K)^{p-1}\Big) s_1'(K) = 1. \end{cases}$$

由于我们假设了 $s_0 < s_1$，因此

$$\Big(1 - \frac{1}{\lambda} s_0(K)^{p-1}\Big) > 0 \quad \text{and} \quad \Big(1 - \frac{1}{\lambda} s_1(K)^{p-1}\Big) < 0$$

这意味着$s_0'(K) > 0$ 以及$s_1'(K) < 0$。

$\eta_K(s_1)$ 的连续性显而易见，而且无需从函数 $\eta_K(s_1)$ 中挖掘太多信息，我们就能求出当 K 趋近端点 0 和 K_0 时 $\eta_K(s_1)$ 的渐近行为。事实上，为了考察当 $K \searrow 0$ 时 $\eta_K(s_1)$ 的极限行为，我们首先注意到，对于所有充分小的 K， $F_K(0) < 0$且$F_K(2K) > 0$ 。因此我们有 $0 < s_0(K) < 2K$。此外， $\lambda^{1/(p-1)} < s_1(K)$，因为 $s_1(K)$ 是方程 $s = \frac{1}{\lambda p}s^p + K$ 的较大解。于是

$$\eta_K(s_1) \geq \int_{2K}^{\lambda^{1/(p-1)}} \frac{dz}{2\lambda\sqrt{F_K(z)}} \geq \frac{1}{2\lambda} \int_{2K}^{\lambda^{1/(p-1)}} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\lambda}\big(\ln \lambda^{1/(p-1)} - \ln 2K\big).$$

因此，通过取 $K \to 0$，我们有 $\lim_{K\searrow 0} \eta_K(s_1) = +\infty$。

当 K接近 K_0时，设 $G_K(t) = F_K(t^{m-1})$，即

$$G_K(t) = t^{2(m-1)} - \Big(\frac{2}{m}t^m + K\Big)^2.$$

记作 $t_0 = s_0^{1/(m-1)}$ 和 $t_1 = s_1^{1/(m-1)}$，则可将 G_K 写成其因式分解形式

$$G_K(t) = \frac{4}{m^2}(t-t_0)(t_1-t)P_K(t)$$

with

$$P_K(t) = \Big(t^m + \frac{m}{2}t^{m-1} + \frac{m}{2}K\Big)\big(a_0t^{m-2} + a_1t^{m-3} + \cdots + a_{m-3}t + a_{m-2}\big),$$

其中

$$a_0 = 1, \quad a_1 = t_0 + t_1 - \frac{m}{2}$$

and

$$a_j = -t_0t_1a_{j-2} + (t_0+t_1)a_{j-1} \quad \text{for } j = 2, \ldots, m-2.$$

通过初等计算，我们可以简洁地写成

$$a_j = \frac{t_1^{j+1} - t_0^{j+1}}{t_1 - t_0} - \frac{m}{2}\frac{t_1^j - t_0^j}{t_1 - t_0} \tag{4.6}$$

对于 $j = 0$，1，……，$m-2$。于是我们可以将 $\eta_K(s_1)$ 重新表述为

$$\eta_K(s_1) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{t^{m-2}dt}{\sqrt{G_K(t)}} = \frac{m}{2}\int_0^1 \frac{(t_0 + (t_1-t_0)\tau)^{m-1}d\tau}{\sqrt{\tau(1-\tau)P_K(t_0+(t_1-t_0)\tau)}}. \tag{4.7}$$

注意，当 K趋近于 K_0时，有 t_0，$t_1 \to \frac{m-1}{2}$。由 $\eta_K(s_1)$ 的连续性可得

$$\lim_{K\to K_0}\eta_K(s_1) = c_m\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} = c_m\pi$$

其中

$$c_m = \frac{m(m-1)^{m-1}}{2^m\sqrt{P_{K_0}(\frac{m-1}{2})}} = \frac{\sqrt{m-1}}{2}.$$

证明至此完成。 □

注 4.6. 回顾一下，我们正在考察方程（4.2）的 $2\eta_K(s_1)$-周期解，那么引理 4.5 蕴含：

(1) 对每个 $T > 0$，方程（4.2）都有常数解 $z_0 \equiv \frac{(m-1)}{2^{m-1}}^{m-1}$ 和 $w_0 \equiv 0$，这给出了方程（3.6）的非平凡常数解。而对于 $T \le \frac{\sqrt{m-1}}{2}\pi$，这是方程（4.2）唯一可能的解。

(2) 设 $d \in \mathbb{N}$满足 $d\frac{\sqrt{m-1}}{2}\pi < T \le (d+1)\frac{\sqrt{m-1}}{2}\pi$。那么，对于任意 $k = 1$，……，d，我们有 $\frac{T}{k} \ge \frac{T}{d} > \frac{\sqrt{m-1}}{2}\pi$，且存在 $K = K(T/k) \in (0, K_0)$，使得 $\eta_K(s_1) = T/k$。

(3) 由 (4.5) 给出的解对应于命题 4.1 中得到的解，因为哈密顿能量 $H(u_K, v_K) \to 0$，且最小周期 $\eta_K(s_1) \to +\infty$为$K \to 0$。此外，我们有 $T_0 = \frac{\sqrt{m-1}}{2}\pi$。

本节最后，我们将比较奇异Yamabe问题研究中出现的经典 Delaunay 解与我们刚刚研究的解。让我们回顾一下 [32, 35]，中奇异Yamabe问题的经典 Delaunay 解，它们通过求解常微分方程得到

$$u'' - \frac{(m-2)^2}{4}u + \frac{m(m-2)}{4}u^{\frac{m+2}{m-2}} = 0, \quad u > 0. \tag{4.8}$$

这个方程显然是非耗散的，相应的哈密顿能量为

$$\widetilde{H}(u, u') = \frac{1}{2}|u'|^2 - \frac{(m-2)^2}{8}u^2 + \frac{(m-2)^2}{8}u^{\frac{2m}{m-2}}.$$

通过考察 $\widetilde{H}$ 的等值集，我们看到，方程（4.8）的所有有界正解都位于 (u, u')-平面中 $\widetilde{H}$ 非正的区域内。在下图中，我们展示了当 $m = 3$时，方程组（3.6）和（4.8）的两个哈密顿量对应的一些轨道。

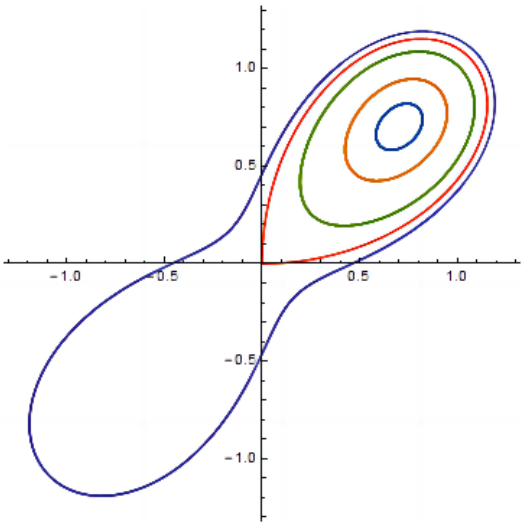


图1：旋量亚马贝方程的轨道

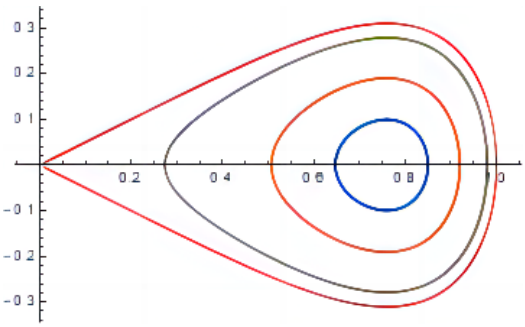


图2：经典亚马贝方程的轨道

4.2 耗散情形：射击法

在本小节中，我们研究方程组 (3.11)。特别地，由于我们要寻找旋量 Yamabe 方程的奇异解，因此我们关注满足以下条件的 (3.11) 的解：

$$(u(t), v(t)) \not\to (0, 0) \quad \text{as } t \to \pm\infty.$$

为避免不必要的复杂性并获得非平凡解，我们选择以下初始条件：

$$u(0) = v(0) = \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

此外，方程组的对称性使我们只需考虑情形 $\mu >$ $0.$

回顾一下，与 (3.11) 相关的哈密顿能量为

$$H(t,u,v) = -\frac{m-2}{2}uv + \frac{m-1}{2m}\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(u^2+v^2)^{\frac{m}{m-1}}.$$

我们从以下内容开始：

引理 4.7。 对于任意 $\mu > 0$，存在$(u_\mu, v_\mu) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$，它是满足(3.11) 的唯一解$u_\mu(0)$ $= v_\mu(0) = \mu$。此外，(u_μ, v_μ) 关于 μ 连续变化，且对 $[-T, T]$ 一致，对任意 $T > 0$均成立。

证明。 首先，我们可以将方程组 (3.11) 写成如下积分形式

$$\begin{cases} u(t) = \mu + \displaystyle\int_0^t \Big[\cosh(s)^{-\frac{1}{m-1}}\big(u(s)^2+v(s)^2\big)^{\frac{1}{m-1}}v(s) - \frac{m-2}{2}u(s)\Big]ds \\ v(t) = \mu - \displaystyle\int_0^t \Big[\cosh(s)^{-\frac{1}{m-1}}\big(u(s)^2+v(s)^2\big)^{\frac{1}{m-1}}u(s) - \frac{m-2}{2}v(s)\Big]ds \end{cases}$$

对于 $t \geq 0$。由于上述方程的右端是 (u, v) 的 Lipschitz 连续函数，经典的压缩映射论证保证了 (u_μ, v_μ) 的局部存在性于$[0, \delta)$。令 $[0, T_\mu)$ 为 (u_μ, v_μ) 的最大存在区间。

显然，若我们对 $t < 0$ 定义 $u_\mu(t) := v_\mu(-t)$ 和 $v_\mu(t) := u_\mu(-t)$，则 $(u_\mu,\ v_\mu)$ 是定义在 $(-T_\mu,\ T_\mu)$ 上的一个解。假设 $T_\mu < +\infty$。那么我们有 $|u_\mu(t)| + |v_\mu(t)| \to +\infty$ 当$|t| \to T_\mu$。

记

$$H_\mu(t) = H(t, u_\mu(t), v_\mu(t)), \quad t \in (-T_\mu, T_\mu).$$

简单计算可得

$$\frac{d}{dt}H_\mu(t) = \frac{d}{dt}\Big[\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}\Big]\frac{m-1}{2m}(u_\mu^2+v_\mu^2)^{\frac{m}{m-1}} \leq 0, \quad \forall t \geq 0$$

因此，能量 H_μ 沿着解 $(u_\mu,\ v_\mu)$ 在 $[0, T_\mu)$ 上单调不增。然而，由于我们有 $|u_\mu(t)$ $| + |v_\mu(t)| \to +\infty$ 当 $t \to T_\mu$，可得

$$H_\mu(t) \geq -\frac{m-2}{2}u_\mu(t)v_\mu(t) + \frac{m-1}{2m}\cosh(T_\mu)^{-\frac{1}{m-1}}(u_\mu(t)^2+v_\mu(t)^2)^{\frac{m}{m-1}} \to +\infty$$

a当 $t \to T_\mu$ 时，这是荒谬的。因此我们有 u_μ，且 v_μ 在 $\mathbb{R}$ 上全局定义 . □

下面我们陈述 (3.11) 的解的一些基本性质。

引理 4.8. 给定 $\mu > 0$，则有以下结论：

- *If, for some $t_0 \neq 0$, we have $u_\mu(t_0) = 0$, then $v_\mu(t_0) \neq 0$ and $u'_\mu(t_0) \neq 0$.*

• 若对于某个 $t_0 > 0$，有 $v_\mu(t_0) = 0$，则 $u_\mu(t_0) \neq 0$且 $v'_\mu(t_0) \neq 0$。

此外， u_μ 和 v_μ 在有界区间$[-T, T]$内都不可能无限次变号。

证明。 注意，方程组 (3.11) 的唯一静止点是 (0,0)。此外，对于 $t_0 \neq 0$，无论是 $t > t_0$ 还是 $t < t_0$，(3.11) 的柯西问题对于任意初始数据 $(u(t_0)\ v(t_0)) \in \mathbb{R}^2$ 在局部都是适定的。因此，静止点不可能在有限时间内到达。

为了证明 u_μ 和 v_μ 在有界区间 $[-T, T]$内都只能有限次变号，我们反设存在 $\{t_j^u\}$ 和 $\{t_j^v\}$ 属于 $[-T, T]$，使得$t_j^u \to T_u$ 和 $t_j^v \to T_v$ 当 $j \to \infty$, $u_\mu(t_j^u) = v_\mu(t_j^v) = 0$ 对所有 j都成立，并且对于任意 $\delta > 0$， u_μ（分别是 v_μ）在 $[-|T_u| + \delta, |T_u| - \delta]$（分别是 $[-|T_v| + \delta, |T_v| - \delta]$）上有限次变号。

如果 $|T_u| < |T_v|$，那么在 $|T_u|$ 的左邻域和 $-|T_u|$的右邻域内， v_μ 不会改变符号。于是，(3.11) 中的第一个方程意味着 $u'_\mu(t_j^u)$ 与 v_μ 具有相同的符号，这是不可能的。因此，$|T_u| \geq |T_v|$。类似地，可以得到 $|T_v| \geq |T_u|$。因此，$|T_u| = |T_v|$。此外，不可能出现 $T_u = -T_v$ 而 u_μ（分别为 v_μ）在 T_v（分别为 T_u）附近保持确定符号的情况。因此，必有 $T_u = T_v = T_0$。特别地，我们有 $u_\mu(T_0) = v_\mu(T_0) = 0$，这同样是不可能的。 □

引理 4.9。 给定 $\mu > 0$。如果 (u_μ, v_μ) 是有界解，即对于所有 $t \in \mathbb{R}$ 及某个 $M > 0$，$|u_\mu(t)| + |v_\mu(t)| \leq M$，那么当 $|t| \to +\infty$ 时，$(u_\mu, v_\mu) \to (0,0)$。

证明。 由对称性，只需证明 $t \to +\infty$ 的情形。将 (3.11) 中的方程分别乘以 u_μ（分别为 v_μ），得到

$$\begin{cases} uu' = \cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(u_\mu^2 + v_\mu^2)^{\frac{1}{m-1}} u_\mu v_\mu - \dfrac{m-2}{2} u_\mu^2, \\ -vv' = \cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(u_\mu^2 + v_\mu^2)^{\frac{1}{m-1}} u_\mu v_\mu - \dfrac{m-2}{2} v_\mu^2. \end{cases}$$

因此，我们需要证明当 $t \to +\infty$ 时， $u_\mu(t)^2 + v_\mu(t)^2 \to 0$。

假设 b　通过矛盾法，任取充分小的 $\varepsilon > 0$，都存在足够大的 $t_0 > 0$，使得　　t

$$\cosh(t_0)^{-\frac{1}{m-1}} M^{\frac{m}{m-1}} \leq 2\varepsilon \quad \text{and} \quad u_\mu(t_0)^2 + v_\mu(t_0)^2 \geq 2\delta_0,$$

对某个 $\delta_0 > 0$。由于

$$\frac{1}{2}(u_\mu^2)' \leq \varepsilon - \frac{m-2}{2} u_\mu^2,$$

我们得到

$$u_\mu(t)^2 \leq \frac{2\varepsilon}{m-2} - \frac{2\varepsilon}{m-2} e^{(m-2)(t_0-t)} + u_\mu(t_0)^2 e^{(m-2)(t_0-t)}.$$

因此，通过增大 t_0，我们可以不失一般性地假设 $v_\mu(t_0)^2 > \delta_0$。于是，我们得到

$$-\frac{1}{2}(v_\mu^2)' \leq \varepsilon - \frac{m-2}{2} v_\mu^2,$$

这意味着

$$v_\mu(t)^2 \geq \frac{2\varepsilon}{m-2} - \frac{2\varepsilon}{m-2} e^{(m-2)(t-t_0)} + v_\mu(t_0)^2 e^{(m-2)(t-t_0)}.$$

取$\varepsilon < \frac{m-2}{2}\delta_0$，我们有 $v_\mu(t)^2 \to +\infty$ 如 $t \to +\infty$。这与 v_μ的有界性矛盾。

□

注 4.10。 由上述结果可知，若存在 $t_0 > 0$ 使得$H_\mu(t_0) \leq 0$，则相应的解 (u_μ, v_μ) 必须随 $t \to \pm\infty$ 趋于无界（因为能量 $H_\mu(t) = H(t, u_\mu(t)\ v_\mu(t))$递减）。

引理 4.11. 设 $\mu > 0$。若 (u_μ, v_μ) 是一个解，且 $\lim_{|t|\to+\infty} H_\mu(t) \in [-\infty, 0)$。则$u_\mu(t)^2 + v_\mu(t)^2 = O(\cosh(t))$ 当 $|t| \to +\infty$ 时。

证明。 由于 $H_\mu(t)$ 递减，我们可以取 $t_0 > 0$ 使得 $H_\mu(t_0) \leq 0$ 并且

$$0 \geq H_\mu(t) \geq \frac{m-1}{2m}\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(u_\mu(t)^2 + v_\mu(t)^2)^{\frac{m}{m-1}} - \frac{m-2}{4}(u_\mu(t)^2 + v_\mu(t)^2)$$

对所有 $t \geq t_0$。注意到 $u_\mu(t)^2 + v_\mu(t)^2$ 不可能在有限时间内达到 0，因此很快有

$$u_\mu(t)^2 + v_\mu(t)^2 \leq c_m \cosh(t)$$

对所有 $t \geq t_0$，且 $c_m > 0$ 仅取决于 m。 □

引理 4.12. 设 (u_μ, v_μ) 是 *(3.11)* 的一个解，且 v_μ 在 $\mathbb{R}$ 上仅变号有限次，则存在 $T > 0$ 使得 $u_\mu(t)v_\mu(t) > 0$ 对所有 $|t| \geq T$ 均成立。

证明。 由于 v_μ 在 $\mathbb{R}$上变号有限次，不妨设对所有 $t \geq T_1$，某个 $T_1 > 0$满足 $v_\mu(t) > 0$。

反设 $u_\mu(t) < 0$ 对所有 $t > T_1$成立。则由(3.11)的第二个方程可得， $v'_\mu(t) > 0$ 对 $t > T_1$ 成立，也就是说， $v_\mu(t)$在 $t > T_1$上递增。因此我们有

$$\lim_{t\to+\infty} v_\mu(t) = v_\infty \in (0, +\infty].$$

注意，再次由第二个方程可得

$$v' \geq \frac{m-2}{2}v \quad \text{for } t \geq T_1.$$

我们推得

$$v_\mu(t) \geq v_\mu(T_1)e^{\frac{m-2}{2}(t-T_1)} \quad \text{for } t \geq T_1.$$

因此 $v_\infty = +\infty$。然而，由于 u_μ 和 v_μ 符号相反，我们得到

$$H_\mu(t) \geq \frac{m-1}{2m}\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(u_\mu(t)^2 + v_\mu(t)^2)^{\frac{m}{m-1}} > \frac{m-1}{2m}\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}v_\mu(t)^{\frac{2m}{m-1}} \to +\infty$$

当 $t \to +\infty$时，这不可能。

令 $t_0 \geq T_1$ 满足 $u_\mu(t_0) = 0$。那么，由 (3.11) 的第一个方程可知，$u'_\mu(t_0) > 0$。若存在 $\hat{}\ t_0 > t_0$，使得 $u_\mu(\hat{}t_0) = 0$，且在 $(t_0, \hat{}t_0)$ 上 $u_\mu(t) > 0$，我们很快便可推出，在 $\hat{}\ t_0$ 左侧的某个邻域内， $u'_\mu(t) < 0$。因此，再次利用 (3.11) 的第一个方程，可得 $v_\mu(\hat{}t_0) \leq 0$。这不可能，因为我们已假设对所有 $t > T_1$， $v_\mu(t) > 0$。因此，取 $T > t_0$，即可得出对所有 $t \geq T$， $u_\mu(t) > 0$。 □

推论 4.13. 设(u_μ, v_μ) 是方程(3.11) 的一个解，且 u_μ 在 $\mathbb{R}$ 上只变号有限次，则存在 $T > 0$ 使得 $u_\mu(t)v_\mu(t) > 0$ 对所有 $|t| \geq T$ 都成立。

证明. 假设对所有 $t \geq T$，其中某个 $T > 0$，都有 $u_\mu(t) > 0$。由引理 4.8 和 4.12 可知，不可能对所有 $t > T$ 都有 $v_\mu(t) < 0$。

假设存在 $t_0 > T_1$ 使得 $v_\mu(t_0) = 0$。那么 $v'_\mu(t_0) < 0$，且 v_μ 进入负值区间，之后便不可能再有零点。事实上，若存在 $\hat{} t_0 > t_0$ 使得 $v_\mu(\hat{} t_0) = 0$，且 $v_\mu(t) < 0$ 在 $(t_0, \hat{} t_0)$ 上成立，则有 $v'_\mu(\hat{} t_0) \geq 0$，这不可能。因此，我们得到了与引理 4.12 矛盾的结论。

□

推论 4.14. 设 (u_μ, v_μ) 是满足 (3.11) 的有界解，且 v_μ （或 u_μ）在 $\mathbb{R}$ 上变号有限次，则

$$u_\mu(t)^2 + v_\mu(t)^2 = O(e^{-(m-2)t})$$

当 $|t| \to +\infty$ 时。

证明。 根据引理 4.12 和推论 4.13，我们可以取足够大的 $T > 1$，使得对所有 $t \geq T$，$u_\mu(t)v_\mu(t) > 0$。然后，由 (3.11) 可推出

$$-(u_\mu^2 + v_\mu^2)'' + (m-2)^2(u_\mu^2 + v_\mu^2) = 4(m-2)\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(u_\mu^2 + v_\mu^2)^{\frac{1}{m-1}}u_\mu v_\mu.$$

因此，由于 u_μ 和 v_μ有界，我们有

$$\begin{cases} -(u_\mu^2 + v_\mu^2)'' + (m-2)^2(u_\mu^2 + v_\mu^2) > 0 \\ -(u_\mu^2 + v_\mu^2)'' + (m-2)^2(u_\mu^2 + v_\mu^2) \leq \delta e^{-\frac{1}{m-1}t}(u_\mu^2 + v_\mu^2) \end{cases} \tag{4.9}$$

当 t 充分大时，其中 $\delta > 0$ 是一个常数。

令 $\Gamma_1(t) = e^{-(m-2)t}$ 且 $\Gamma_2(t) = \arctan(t)e^{-(m-2)t}$，其中 $t > 0$。容易验证

$$-\Gamma_1'' + (m-2)^2\Gamma_1 = 0 \quad \text{and} \quad -\Gamma_2'' + (m-2)^2\Gamma_2 \geq \frac{2(m-2)}{1+t^2}e^{-(m-2)t}.$$

取 $C_1, C_2 > 0$ 使得

$$C_1\Gamma_1(T_0) \leq u_\mu(T_0)^2 + v_\mu(T_0)^2 \leq C_2\Gamma_2(T_0),$$

对于某个 $T_0 > T$，我们得到

$$\begin{cases} -(u_\mu^2 + v_\mu^2 - C_1\Gamma_1)'' + (m-2)^2(u_\mu^2 + v_\mu^2 - C_1\Gamma_1) > 0, \\ -(u_\mu^2 + v_\mu^2 - C_2\Gamma_2)'' + \left[(m-2)^2 - \dfrac{2(m-2)}{(1+t^2)\arctan(t)}\right](u_\mu^2 + v_\mu^2 - C_2\Gamma_2) < 0, \end{cases}$$

对所有 $t > T_0$均成立。于是，根据比较原理，我们有

$$C_1\Gamma_1(t) \leq u_\mu(t)^2 + v_\mu(t)^2 \leq C_2\Gamma_2(t),$$

对于所有 $t > T_0$，至此证明完毕。 □

引理 4.15. 设(u_μ, v_μ) 是(3.11) 的一个解，且 v_μ 在 $\mathbb{R}$上有限次变号。若 $H_\mu(t) = H(t, u_\mu(t)\ v_\mu(t)) > 0$ 对所有 $t > 0$ 都成立，则当 $t \to \pm\infty$ 时， $H_\mu(t) \leq Ce^{-c|t|}$，其中常数 $C, c > 0$ 可能依赖于 μ。

证明. 我们只证明 $t \to +\infty$时的结论。注意到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H_\mu(t) &= \frac{d}{dt}\Big[\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}\Big]\frac{m-1}{2m}(u_\mu^2+v_\mu^2)^{\frac{m}{m-1}}\\ &= -\frac{1}{2m}\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}(u_\mu^2+v_\mu^2)^{\frac{m}{m-1}}\\ &\le -\frac{1-\delta}{2m}\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(u_\mu^2+v_\mu^2)^{\frac{m}{m-1}}\\ &\le -\frac{1-\delta}{m-1}H_\mu(t), \quad \text{for } t \ge T_\delta,\end{aligned}$$

其中 $\delta > 0$ 可以任意取为足够小的值，最后一个不等式由引理 4.12 得出。因此，我们有

$$H_\mu(t) \le H_\mu(T_\delta)e^{-\frac{1-\delta}{m-1}t}$$

对所有 $t \ge T_\delta$均成立，从而完成证明。 □

现在，对于 $\mu > 0$ 以及 (u_μ, v_μ)，相应的 (3.11) 解，我们引入由 $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ 定义的集合 A_k、B_k和 I_k：

$$A_k = \Big\{\mu > 0 :\ v_\mu \text{ changes sign } k \text{ times on } (0,+\infty) \text{ and } \lim_{|t|\to+\infty} H_\mu(t) < 0\Big\},$$

$$B_k = \Big\{\mu > 0 :\quad v_\mu \text{在 } (0,+\infty) \text{ 上变号 } k \text{ 次},\quad H_\mu(t) > 0\text{，且 } (u_\mu, v_\mu) \text{ 无界};$$

$$I_k = \Big\{\mu > 0 :\quad v_\mu \text{在 } (0,+\infty) \text{ 上变号 } k \text{ 次},\quad H_\mu(t) > 0\text{，且 } (u_\mu, v_\mu) \text{ 有界}\Big\}.$$

注意，对于任意 $t \in \mathbb{R}$，$(0,0)$ 是哈密顿能量 $H(t,\cdot,\cdot)$ 的一个双曲平衡点。因此，显然有 $A_0 \ne \emptyset$，因为它包含区间 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$，这是因为

$$H(0,\mu,\mu) < 0 \quad \text{for all } \mu \in \Big(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big].$$

正如我们稍后将看到的，追踪解的符号变化对于定理 1.5 的证明至关重要。主要思路是研究解的分层结构，并通过检查其拓扑和有界性来实现这一点。有界性使我们能够追踪 A_k和 I_k 的上确界，从而证明所有集合 A_k 均非空。正如下面将看到的，追踪符号的思路源自一个具有显式解且符号变化无穷多次的极限问题。这一性质将使我们能够证明所需集合是有界的。

我们先来排除集合 B_k:

引理 4.16。 $B_k = \emptyset$ 对所有 $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$。

证明。反设对于某个 k，$B_k \ne \emptyset$。令 $\mu \in B_k$ 和 $(u_\mu,\ v_\mu)$ 为相应的解。然后，将 $(u_\mu,\ v_\mu)$ 代入方程 (3.11)，可得

$$\begin{cases} u'_\mu v_\mu = \cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(u_\mu^2+v_\mu^2)^{\frac{1}{m-1}}v_\mu^2 - \dfrac{m-2}{2}u_\mu v_\mu,\\ -u_\mu v'_\mu = \cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(u_\mu^2+v_\mu^2)^{\frac{1}{m-1}}u_\mu^2 - \dfrac{m-2}{2}u_\mu v_\mu. \end{cases} \tag{4.10}$$

由此可得

$$\begin{aligned} u'_\mu v_\mu - u_\mu v'_\mu &= \cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(u_\mu^2+v_\mu^2)^{\frac{m}{m-1}} - (m-2)u_\mu v_\mu \\ &= \frac{2m}{m-1}H_\mu(t) + \frac{m-2}{m-1}u_\mu v_\mu > \frac{m-2}{m-1}u_\mu v_\mu, \end{aligned}$$

对所有 t。由引理 4.12，当 t 足够大时，我们可以将上述不等式除以 $u_\mu v_\mu$，得到

$$(\ln u_\mu - \ln v_\mu)' > \frac{m-2}{m-1},$$

这里不失一般性地假设，当 t 足够大时，$u_\mu(t) > 0$ 且 $v_\mu(t) > 0$。因此，我们有

$$\frac{u_\mu(t)}{v_\mu(t)} \geq Ce^{\frac{m-2}{m-1}t} \tag{4.11}$$

对某个常数 $C > 0$ 成立。因此，存在 $T > 0$ 使得对所有 $t > T$，$u_\mu(t) > v_\mu(t)$。现在，由 (4.10) 可得

$$u'_\mu v_\mu + u_\mu v'_\mu = \cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(u_\mu^2+v_\mu^2)^{\frac{1}{m-1}}(v_\mu^2-u_\mu^2) < 0$$

当 $t > T$ 时，也就是说，对于所有充分大的 t，$u_\mu v_\mu$ 是递减的。

假设 th 在 $u_\mu(t)v_\mu(t) \to a_\infty \in [0,+\infty)$ 时，如 $t \to \infty$。由引理 4.12 和 4.15 可得

$$\frac{m-1}{2m}\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(u_\mu(t)^2+v_\mu(t)^2)^{\frac{m}{m-1}} \to \frac{m-2}{2}a_\infty$$

如 $t \to \infty$。因此，对于任意小的 $\varepsilon > 0$，存在 $T_\varepsilon > 0$ 使得

$$\begin{cases} u'_\mu \leq \varepsilon - \dfrac{m-2}{2}u_\mu \\ -v'_\mu \leq \varepsilon - \dfrac{m-2}{2}v_\mu \end{cases}$$

对所有 $t \geq T_\varepsilon$均成立。这意味着

$$u_\mu(t) \leq \frac{2\varepsilon}{m-2} - \frac{2\varepsilon}{m-2}e^{\frac{m-2}{2}(T_\varepsilon - t)} + u_\mu(T_\varepsilon)e^{\frac{m-2}{2}(T_\varepsilon - t)}$$

and

$$v_\mu(t) \geq \frac{2\varepsilon}{m-2} - \frac{2\varepsilon}{m-2}e^{\frac{m-2}{2}(t - T_\varepsilon)} + v_\mu(T_\varepsilon)e^{\frac{m-2}{2}(t - T_\varepsilon)}$$

对所有 $t \geq T_\varepsilon$均成立。由于 $\mu \in B_k$，我们有 $|u_\mu(t)| + |v_\mu(t)|$ 在 $|t| \to +\infty$ 时无界。因此，适当取足够小的 $\varepsilon > 0$，可得

$$v_\mu(t) \sim e^{\frac{m-2}{2}t} \quad \text{and} \quad u_\mu(t) \to 0$$

当 $t \to +\infty$时，这与 (4.11) 矛盾。 □

引理 4.17。 存在常数 $C_0 > 0$，使得若对某个 $T > 1$,

(1) $H_\mu(T) \leq C_0$;

(2) $u_\mu(T)v_\mu(T) > 0$;

(3) v_μ 变号 k 次于 $[0,T]$;

那么 $\mu \in A_k \cup I_k \cup A_{k+1}$。

证明。假设 $\mu \notin A_k \cup I_k$，接下来只需证明 $\mu \in A_{k+1}$。不失一般性，设 $u_\mu(T) > 0$ 且 $v_\mu(T) > 0$。令

$$\widetilde{T} = \inf\left\{t > T : u_\mu(t) \le 0\right\} \in (T, +\infty].$$

若 $T = +\infty$，则 v_μ 在 $(T, +\infty)$ 上至多变号一次。事实上，只要 $u_\mu > 0$，(3.11) 的第二个方程就意味着，每当 v_μ 为零时，$v'_\mu < 0$。因此，v_μ 不可能变号超过一次。若 v_μ 在 $(T, +\infty)$ 上不变号，则有 $\mu \in A_k \cup I_k$，这显然荒谬。然而，若 v_μ 确实在 $(T, +\infty)$ 上变号一次，则当 $\widetilde{T}$ 足够大时，有 $u_\mu(t)v_\mu(t) < 0$。这与引理 4.12 矛盾。因此，我们有 $T < +\infty$ 且 $u_\mu(T) = 0$。

断言 1. v_μ 在 (T,T) 内恰好变号一次。

事实上，重写 (3.11) 的第二个方程可得

$$\left(v_\mu(t)e^{-\frac{m-2}{2}t}\right)' = -\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(u_\mu(t)^2 + v_\mu(t)^2)^{\frac{1}{m-1}}u_\mu(t)e^{-\frac{m-2}{2}t} < 0$$

当 $t \in (T,\widetilde{T})$ 时。如果 v_μ 在 $(T,\widetilde{T})$ 上保持为正，根据引理 4.8，我们在 T 的左邻域内有 $u'_\mu \ge 0$，这不可能。

接下来，令 $f_\mu = (u_\mu - v_\mu)/\sqrt{2}$ 和 $g_\mu = (u_\mu + v_\mu)/\sqrt{2}$。那么 (f_μ, g_μ) 满足以下方程组

$$\begin{cases} f' = \cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(f^2+g^2)^{\frac{1}{m-1}}g - \dfrac{m-2}{2}g, \\ -g' = \cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(f^2+g^2)^{\frac{1}{m-1}}f + \dfrac{m-2}{2}f, \end{cases} \tag{4.12}$$

其哈密顿能量为

$$\widehat{H}(t,f,g) = \frac{m-2}{4}f^2 - \frac{m-2}{4}g^2 + \frac{m-1}{2m}\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(f^2+g^2)^{\frac{m}{m-1}}.$$

显然，对于 $t \in \mathbb{R}$，我们有 $H_\mu(t) = H(t, f_\mu, g_\mu)$。并且根据断言 1，我们可以将 T 稍微增大，使得 $u_\mu > v_\mu$ 在 $[T,T]$ 上成立。也就是说，我们有 $f_\mu > 0$ 在 $[T,T]$ 上，$g_\mu(T) > 0$，$g_\mu(T) < 0$，并且 g_μ 在 (T,T) 内变号一次。

接下来，我们将证明 f_μ 在 $[T,+\infty)$ 上保持为正。于是，(4.12) 中的第二个方程表明，对所有 $t \ge T$，都有 $g'_\mu < 0$。因此，对任意 $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，都有 $\mu \notin I_j$。在这种情形下，我们有 $f_\mu(t) > 0$，且对所有 $t \ge T$，都有 $g_\mu(t) < 0$，这意味着对于 $t \in [T,+\infty)$，$v_\mu(t) < 0$。也就是说，v_μ 在 $(T,+\infty)$ 上恰好变号一次。因此 $\mu \in A_{k+1}$。

反设存在 $\widehat{T} > T$ 使得 f_μ 在 $[T,\widehat{T})$ 上。于是，(4.12) 中的第二个方程表明，g_μ 在 $[T,T]$ 上递减。因此，

$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\sim g_\mu(T) < g_\mu(T) < 0$。于是，我们只需考虑 $H_\mu(T) > 0$ 的情形，因为$\widehat{\ }$条件 $H_\mu(T) \le 0$ 会立即将解 (u_μ, v_μ) 限制在 (u, v)-$\widehat{\ }$平面的第三象限内（当 $t > T$ 时），从而得到 $\mu \in A_{k+1}$。

在情形 $H_\mu(\widehat{T}) > 0$，由 $f_\mu(\widehat{T}) = 0$ 且 $g_\mu(\widehat{T}) < 0$，我们有

$$g_\mu(\widehat{T}) < -\Big(\frac{m(m-2)}{2(m-1)}\Big)^{\frac{m-1}{2}} \cosh(\widehat{T})^{\frac{1}{2}}.$$

$\widehat{\ }$令 $T < T_1 < T_2 < T$ 满足

$$\frac{m-1}{2m}\cosh(\widehat{T})^{-\frac{1}{m-1}} g_\mu(T_1)^{\frac{2m}{m-1}} - \frac{m-2}{4} g_\mu(T_1)^2 = -C_0$$

and

$$\frac{m-1}{2m}\cosh(\widehat{T})^{-\frac{1}{m-1}} g_\mu(T_2)^{\frac{2m}{m-1}} - \frac{m-2}{4} g_\mu(T_2)^2 = 0.$$

$\widehat{\ }$通过假设 C_0 足够小，这样的 T_1 和 T_2 总是存在，并且我们可以得到 $g_\mu(T) < g_\mu(T_2) < g_\mu(T_1) < g_\mu(T_2)/2 < 0$。事实上，令

$$F(s) = \frac{m-1}{2m}\cosh(\widehat{T})^{-\frac{1}{m-1}}|s|^{\frac{2m}{m-1}} - \frac{m-2}{4}|s|^2, \quad s \in \mathbb{R}$$

我们有，$g_\mu(T_2)$不过是 F 在负半轴上的消失点，即

$$g_\mu(T_2) = -\Big(\frac{m(m-2)}{2(m-1)}\Big)^{\frac{m-1}{2}} \cosh(\widehat{T})^{\frac{1}{2}}, \tag{4.13}$$

而 $g_\mu(T_1)$是满足 $F = -C_0$的最小点。然后，利用对所有$t > T$都有 $H_\mu(t) \le C_0$ 这一事实，我们得到

$$\frac{m-2}{4} f_\mu(t)^2 \le C_0 - F(g_\mu(t)) \le 2C_0$$

对 $t \in [T_1, T_2]$成立。因此，我们推得

$$0 < f_\mu(t) \le \delta_0 := \sqrt{\frac{8C_0}{m-2}} \tag{4.14}$$

对 $t \in [T_1, T_2]$成立。注意到

$$F'(g_\mu(T_2)) = -\frac{1}{m-1}\Big(\frac{m}{m-1}\Big)^{\frac{m-1}{2}}\Big(\frac{m-2}{2}\Big)^{\frac{m+1}{2}}\cosh(\widehat{T})^{\frac{1}{2}} < 0$$

and

$$F''(g_\mu(T_2)) = \frac{m-2}{2}\Big(\frac{m(m+1)}{(m-1)^2} - 1\Big) > 0.$$

利用式 (4.12) 和 (4.14) 中的第二个方程，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{C_0}{F'(g_\mu(T_2))} > g_\mu(T_2) - g_\mu(T_1) &= \int_{T_1}^{T_2} g'_\mu(t)dt \\ &\ge -\int_{T_1}^{T_2}\Big[\big(\delta_0^2 + g_\mu(T_2)^2\big)^{\frac{1}{m-1}}\delta_0 + \frac{m-2}{2}\delta_0\Big]dt \\ &\ge -C_m g_\mu(T_2)^{\frac{2}{m-1}}\delta_0(T_2 - T_1)\end{aligned} \tag{4.15}$$

其中 $C_m > 0$ 仅取决于 m （因为我们假设 C_0 很小）。另一方面，我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H_\mu(t) &= -\frac{1}{2m}\cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}(f_\mu(t)^2+g_\mu(t)^2)^{\frac{m}{m-1}}\\ &\le -\frac{1}{2m}\frac{e-e^{-1}}{e+e^{-1}}\cosh(\widehat{T})^{-\frac{1}{m-1}}g_\mu(T_1)^{\frac{2m}{m-1}}\\ &\le -c_m\cosh(\widehat{T})^{-\frac{1}{m-1}}g_\mu(T_2)^{\frac{2m}{m-1}}\end{aligned}$$

对于 $t\in[T_1,T_2]$，其中在最后一个不等式中我们使用了 $|g_\mu(T_1)|>\frac{1}{2}|g_\mu(T_2)|$ 以及

$$c_m=\frac{1}{2m}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{2m}{m-1}}\frac{e-e^{-1}}{e+e^{-1}}.$$

因此，由 (4.15) 可得

$$\begin{aligned}H_\mu(T_2)-H_\mu(T_1)&=\int_{T_1}^{T_2}\frac{d}{dt}H_\mu(t)dt \le -c_m\cosh(\widehat{T})^{-\frac{1}{m-1}}g_\mu(T_2)^{\frac{2m}{m-1}}(T_2-T_1)\\ &\le \frac{c_m\cosh(\widehat{T})^{-\frac{1}{m-1}}g_\mu(T_2)^{\frac{2m}{m-1}}C_0}{C_mF'(g_\mu(T_2))g_\mu(T_2)^{\frac{2}{m-1}}\delta_0}\\ &= -\widetilde{C}_m\cosh(\widehat{T})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{m-1}}\sqrt{C_0}<-C_0\end{aligned}$$

只要 $m\ge 3$ 和 C_0 足够小。这意味着 $H_\mu(T_2)\le 0$，从而导出矛盾，证明至此完成。□

下一个引理给出了集合 A_k 和 I_k的主要性质。

引理 4.18. 对于所有 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，我们有

(1) A_k 是一个开集；(2) 若 $\mu\in I_k$，则存在 $\varepsilon>0$，使得 $(\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon)\subset A_k\cup I_k\cup A_{k+1}$；(3) 若 $A_k\neq\emptyset$ 且有界，则 $\sup A_k\in I_k$；(4) 若 A_k 和 I_k 均有界，令 $\mu=\sup I_k$，则存在 $\varepsilon>0$，使得 $(\mu,\mu+\varepsilon)\subset A_{k+1}$。

证明。(1) 显然成立，因为解 (u_μ,v_μ) 关于初始数据的连续性保证了这一点。

为证明 (2)，固定 $\mu\in I_k$。于是，当 $|t|\to+\infty$ 时，我们有 $H_\mu(t)\to 0$。给定引理 4.17 中的 C_0，存在 $T>1$，使得 $H_\mu(T)<C_0$，$u_\mu(T)v_\mu(T)>0$，并且 v_μ 在 $[0,T]$ 上变号 k 次。解 (u_μ,v_μ) 关于 μ 的连续性意味着，当初始数据 $\tilde{\mu}\in(\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon)$ 满足 $\varepsilon>0$ 充分小时，同样的结论成立。由此，结合引理 4.17 即得结论。

为验证 (3)，令 $\mu=\sup A_k$，并取一个序列 $\{\mu_j\}\subset A_k$，使得当 $j\to+\infty$ 时 $\mu_j\nearrow\mu$。若假设对于某个 l，有 $\mu\in A_l$，则由 (1) 可知，当 j 足够大时，$\mu_j\in A_l$。因此我们有 $l=k$。这意味着 $\mu\in A_k$，这显然不成立，因为 A_k 是一个开集。注意，由于解的连续性，相应的 v_μ 只能改变有限

次符号，发生在 $(0, +\infty)$ 上。因此，必有对于某个 s， $\mu \in I_s$。由 (2)，我们有 $(\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon) \subset A_s \cup I_s \cup A_{s+1}$。这意味着 $s=k$。

最后，为了证明 (4)，我们首先注意到 $\mu = \sup I_k \in I_k$。事实上，设 $\{\mu_j\} \in I_k$ 满足 $\mu_j \nearrow \mu$ 当 $j \to +\infty$ 时成立，则对任意 $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，我们都有 $\mu \notin A_l$。这是因为 A_l 是一个开集。然后，仿照 (3) 的论证，我们得到 $\mu \in I_k$，如所述。现在，由 (2) 可知，对于某个 $\varepsilon > 0$，有 $(\mu, \mu+\varepsilon) \subset A_k \cup A_{k+1}$。由于我们假设 A_k 有界，因此可得 $\sup A_k \le \mu$。于是 $(\mu, \mu+\varepsilon) \subset A_{k+1}$。

□

我们的下一个结果是集合 A_k 和 I_k 的有界性。

命题 4.19。 $A_k \cup I_k$ 对每个 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 都有界。

在证明命题 4.19 之前，我们先做一些准备。记作 $\varepsilon = \mu^{-1} > 0$，考虑如下重标度

$$\begin{cases} U_\varepsilon(t) = \varepsilon u_\mu\big(\varepsilon^{\frac{2}{m-1}} t\big), \\ V_\varepsilon(t) = \varepsilon v_\mu\big(\varepsilon^{\frac{2}{m-1}} t\big). \end{cases}$$

我们得到 $(U_\varepsilon, V_\varepsilon)$ 的方程组为

$$\begin{cases} \quad U_\varepsilon' = \cosh\big(\varepsilon^{\frac{2}{m-1}} t\big)^{-\frac{1}{m-1}} (U_\varepsilon^2 + V_\varepsilon^2)^{\frac{1}{m-1}} V_\varepsilon - \varepsilon^{\frac{2}{m-1}} \dfrac{m-2}{2} U_\varepsilon \\ -V_\varepsilon' = \cosh\big(\varepsilon^{\frac{2}{m-1}} t\big)^{-\frac{1}{m-1}} (U_\varepsilon^2 + V_\varepsilon^2)^{\frac{1}{m-1}} U_\varepsilon - \varepsilon^{\frac{2}{m-1}} \dfrac{m-2}{2} V_\varepsilon \end{cases} \tag{4.16}$$

以及初始数据 $U_\varepsilon(0) = V_\varepsilon(0) = 1$。与方程 (4.16) 相关的极限问题为

$$\begin{cases} \quad U_0' = (U_0^2 + V_0^2)^{\frac{1}{m-1}} V_0 \\ -V_0' = (U_0^2 + V_0^2)^{\frac{1}{m-1}} U_0 \end{cases} \tag{4.17}$$

其中 $U_0(0) = V_0(0) = 1$。

引理 4.20。成立

$$(U_\varepsilon, V_\varepsilon) \to (U_0, V_0) \quad \textit{as } \varepsilon \to 0$$

在 $[0,T]$ 上一致地成立，对所有 $T>0$ 均成立，其中 (U_0, V_0) 是方程 (4.17) 的解。

证明。 首先，我们有 (4.16) 等价于

$$\begin{cases} U_\varepsilon(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t \Big[\cosh\big(\varepsilon^{\frac{2}{m-1}} s\big)^{-\frac{1}{m-1}} (U_\varepsilon^2 + V_\varepsilon^2)^{\frac{1}{m-1}} V_\varepsilon - \varepsilon^{\frac{2}{m-1}} \dfrac{m-2}{2} U_\varepsilon \Big] ds \\ V_\varepsilon(t) = 1 - \displaystyle\int_0^t \Big[\cosh\big(\varepsilon^{\frac{2}{m-1}} s\big)^{-\frac{1}{m-1}} (U_\varepsilon^2 + V_\varepsilon^2)^{\frac{1}{m-1}} U_\varepsilon - \varepsilon^{\frac{2}{m-1}} \dfrac{m-2}{2} V_\varepsilon \Big] ds \end{cases} \tag{4.18}$$

同样，（4.17）等价于

$$\begin{cases} U_0(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t (U_0^2 + V_0^2)^{\frac{1}{m-1}} V_0 \, ds, \\ V_0(t) = 1 - \displaystyle\int_0^t (U_0^2 + V_0^2)^{\frac{1}{m-1}} U_0 \, ds. \end{cases} \tag{4.19}$$

与（4.16）对应的哈密顿能量为

$$H_\varepsilon(t,U,V)=-\varepsilon^{\frac{2}{m-1}}\frac{m-2}{2}UV+\frac{m-1}{2m}\cosh\left(\varepsilon^{\frac{2}{m-1}}t\right)^{-\frac{1}{m-1}}(U^2+V^2)^{\frac{m}{m-1}}.$$

并且容易看出， H_ε 沿着流递减，因此

$$H_\varepsilon(t,U_\varepsilon(t),V_\varepsilon(t))\le H_\varepsilon(0,1,1)<\frac{m-2}{2m}2^{\frac{m}{m-1}}.$$

这意味着

$$U_\varepsilon(t)^2+V_\varepsilon(t)^2\le C_m\cosh\left(\varepsilon^{\frac{2}{m-1}}t\right) \tag{4.20}$$

对于某个与 ε无关的常数 $C_m>0$ 。

固定 $T>0$ 并考虑 $t\in[0,T]$，我们有

$$\begin{aligned}
&|U_\varepsilon(t)-U_0(t)|+|V_\varepsilon(t)-V_0(t)|\\
&\quad\le\int_0^t\cosh\left(\varepsilon^{\frac{2}{m-1}}t\right)^{-\frac{1}{m-1}}\left|(U_\varepsilon^2+V_\varepsilon^2)^{\frac{1}{m-1}}V_\varepsilon-(U_0^2+V_0^2)^{\frac{1}{m-1}}V_0\right|ds\\
&\quad+\int_0^t\cosh\left(\varepsilon^{\frac{2}{m-1}}t\right)^{-\frac{1}{m-1}}\left|(U_\varepsilon^2+V_\varepsilon^2)^{\frac{1}{m-1}}U_\varepsilon-(U_0^2+V_0^2)^{\frac{1}{m-1}}U_0\right|ds\\
&\quad+\int_0^t\left(1-\cosh\left(\varepsilon^{\frac{2}{m-1}}t\right)^{-\frac{1}{m-1}}\right)(U_0^2+V_0^2)^{\frac{1}{m-1}}\big(|U_0|+|V_0|\big)ds\\
&\quad+C_m\varepsilon^{\frac{2}{m-1}}\cosh\left(\varepsilon^{\frac{2}{m-1}}T\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}\tag{4.21}$$

由于 (4.21) 右侧的前两个被积函数是局部利普希茨的，由 (4.20) 以及 U_0 和 V_0的有界性可得

$$|U_\varepsilon(t)-U_0(t)|+|V_\varepsilon(t)-V_0(t)|\lesssim\int_0^t\big(|U_\varepsilon-U_0|+|V_\varepsilon-V_0|\big)ds+\varepsilon^{\frac{2}{m-1}}\cosh\left(\varepsilon^{\frac{2}{m-1}}T\right)^{\frac{1}{2}}.$$

现在，利用格朗沃尔不等式，我们有

$$|U_\varepsilon(t)-U_0(t)|+|V_\varepsilon(t)-V_0(t)|\lesssim\varepsilon^{\frac{2}{m-1}}$$

对于 $t\in[0,T]$，证明该引理。 □

命题的证明4.19. 反设，对于某个 k， $A_k\cup I_k$ 无界。因此，我们可以找到一个序列 $\mu_j\in A_k\cup I_k$，使得当 $j\to+\infty$ 时， $\mu_j\to+\infty$ 。

取 $\varepsilon_j=\mu_j^{-1}$ 后，引理 4.20 推出，对于任意固定的 $T>0$，当 $j\to\infty$ 时， $V_{\varepsilon_j}\to V_0$ 在 $[0,T]$ 上一致地成立。注意，方程 (4.17) 的解 (U_0,V_0) 可以显式写为：

$$U_0(t)=\sqrt{2}\sin\left(2^{\frac{1}{m-1}}t+\frac{\pi}{4}\right)\quad\text{and}\quad V_0(t)=\sqrt{2}\cos\left(2^{\frac{1}{m-1}}t+\frac{\pi}{4}\right).$$

我们可以取足够大的 $T>0$，使得 V_0 在 $[0,T]$上变号 $k+1$ 次。于是，由引理 4.20，对于所有足够大的 j，我们有 V_{ε_j} 在 $[0,T]$ 上变号 $k+1$ 次。然而，由于 $\mu_j\in A_k\cup I_k$和 $V_{\varepsilon_j}(t)$ $=\varepsilon_j v_{\mu_j}\big(\varepsilon_j^{2/(m-1)}t\big)$，我们有 V_{ε_j} 在 $(0,+\infty)$ 上只能变号 k 次。因此，我们得到了矛盾。

□

定理 1.5 的证明。令 $\mu_0 = \sup A_0$。由引理 4.18，我们有 $\mu_0 \in I_0$。现在令 $\nu_0 = \sup I_0$。应用命题 4.19 和引理 4.18，我们得到 $(\nu_0, \nu_0 + \varepsilon_0) \subset A_1$，其中某个$\varepsilon_0 > 0$成立。因此 $A_1 \neq \emptyset$。令 $\mu_1 = \sup A_1$。我们有 $\mu_1 > \nu_0 \geq \mu_0$；因此，由引理 4.18，$\mu_1 \in I_1$，进而 $\nu_1 = \sup I_1 \in I_1$ 且 $(\nu_1, \nu_1 + \varepsilon_1) \subset A_2$，其中某个 $\varepsilon_1 > 0$ 成立。重复这一论证，我们构造出两个递增序列 $\{\mu_j\}$ 和 $\{\nu_j\}$，$\nu_{j+1} \geq \mu_{j+1} > \nu_j \geq \mu_j$，满足$\mu_j \in I_j$且 $(\nu_j, \nu_j + \varepsilon_j) \subset A_{j+1}$，其中某个 $\{\varepsilon_j\} \subset (0, +\infty)$ 成立。

接下来，我们将证明 $\mu_j \to +\infty$ as $j \to +\infty$。反设 μ_j 有界且 $\mu_j \to \mu_\infty$。我们可以看到，对于所有 $t \in \mathbb{R}$，$H_{\mu_\infty}(t) > 0$。事实上，若存在某个有限的 $t_0 > 0$ 使得 $H_{\mu_\infty}(t_0) \leq 0$，则 $(u_{\mu_\infty}(t)\ v_{\mu_\infty}(t))$ 将被限制在 $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2$ 的某个连通分支中：对所有 $t > t_0$，$H(t, u, v < 0)\}$。由于引理 4.8 表明 v_{μ_∞} 在 $[0, t_0]$ 中仅变号有限次，因此对于某个 k_0，有 $\mu_\infty \in A_{k_0}$。这与 μ_∞ 的定义矛盾，因为 A_{k_0} 是开集。此外，v_{μ_∞} 必须在 $(0, +\infty)$ 上无限次变号。

利用 H_{μ_∞} 0 $+\infty$ $H'_{\mu_\infty} \in$ 在 $(,)$ 上递减且 $L^1\ 0\ +\infty$ 有下界这一事实，我们得到 $(,)$。特别是，

$$\cosh(\cdot)^{-\frac{1}{m-1}}(u_{\mu_\infty}^2 + v_{\mu_\infty}^2)^{\frac{m}{m-1}} \in L^1(0, +\infty). \tag{4.22}$$

将 (3.11) 中的方程分别乘以 v_{μ_∞}（和 u_{μ_∞}），得到

$$\begin{cases} v_{\mu_\infty} u'_{\mu_\infty} = \cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(u_{\mu_\infty}^2 + v_{\mu_\infty}^2)^{\frac{1}{m-1}} v_{\mu_\infty}^2 - \dfrac{m-2}{2} u_{\mu_\infty} v_{\mu_\infty}, \\ -u_{\mu_\infty} v'_{\mu_\infty} = \cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(u_{\mu_\infty}^2 + v_{\mu_\infty}^2)^{\frac{1}{m-1}} u_{\mu_\infty}^2 - \dfrac{m-2}{2} u_{\mu_\infty} v_{\mu_\infty}. \end{cases}$$

这意味着

$$v_{\mu_\infty} u'_{\mu_\infty} + u_{\mu_\infty} v'_{\mu_\infty} = \cosh(t)^{-\frac{1}{m-1}}(u_{\mu_\infty}^2 + v_{\mu_\infty}^2)^{\frac{1}{m-1}}(v_{\mu_\infty}^2 - u_{\mu_\infty}^2).$$

因此，我们有 $(u_{\mu_\infty} v_{\mu_\infty})' \in L^1(0, +\infty)$，这表明 $u_{\mu_\infty}(t) v_{\mu_\infty}(t) \to C_\infty \in \mathbb{R}$ 当$t \to \infty$时。由于 $v_{\mu_\infty}(t)$ 随着 $t \to \infty$ 变号无穷多次，我们有 $C_\infty = 0$。结合 (4.22)，可得 $H_{\mu_\infty}(t) \to 0$ 当 $t \to +\infty$ 时。

因此，可以取充分大的 $T > 0$，使得 $H_{\mu_\infty}(T) < C_0$（其中 $C_0 > 0$由引理 4.17 给出），$u_{\mu_\infty}(T) v_{\mu_\infty}(T) > 0$，且 v_{μ_∞} 在 $[0, T]$ 上变号 k_T 次。由引理 4.17 可得 $\mu_\infty \in A_{k_T} \cup I_{k_T} \cup A_{k_T+1}$，从而再次得到矛盾。

最后，为了证明当 $\mu \in A_k$ 时 $\liminf_{t \to +\infty} |u_\mu(t)| + |v_\mu(t)| = +\infty$，我们考虑两种可能：$H_\mu(t) \to -\infty$ 以及 $H_\mu(t) \to H_\infty \in (-\infty, 0)$。在第一种情形下，必有 $u_\mu(t) v_\mu(t) \to +\infty$ 当 $t \to +\infty$ 时成立，这直接推出该断言。在后一种情形下，我们推得当 $t \to +\infty$ 时，$u_\mu(t) v_\mu(t) \to C > 0$。因此，$\cosh(\cdot)^{-\frac{1}{m-1}}(u_\mu^2 + v_\mu^2)^{\frac{m}{m-1}}$ 收敛到一个正数常量。这表明，当 t 足够大时，$|u_\mu(t)| + |v_\mu(t)|$ 按 $\overline{\cosh}(t)^{1/2m}$ 的速度增长。

(u_μ, v_μ) 的上界 $\mu \in A_k$ 由引理 4.11 得出，而 (u_μ, v_μ) $\mu \in I_k$ 的指数衰减由推论 4.14 得出。因此，定理 1.5 的证明完成。

□

注4.21. 对方程组 (3.11) 进行的数值模拟表明如下结论。对于每个 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，当从大于某个 $\mu_k^* \in A_k$ 的 μ 出发时，解轨道会先绕某个特定点（位于第一象限或第三象限）画圆，然后趋于

无穷远。随着 μ 增大，圆也越来越大；一旦圆与原点相切，就会得到 (3.11) 的同宿解，这意味着 $\mu \in I_k$。集合 I_k 似乎只有一个点，因此 A_k 只是开区间。特别地，我们猜想 $\cup_{k\geq 0} I_k$ 只是一个由离散点组成的可数集。下面的图3展示了这一点，其中对一个三维系统进行了数值实验。第一行展示了在 A_0 中取三个不同初始数据时，$\mathbb{R}$ 上的解轨道（u_μ，v_μ），具体为 $\mu = 0.1$、0.6 和 0.7。第二行和第三行分别展示了初始数据为 $\mu \in A_1$ 和 A_2 时的解

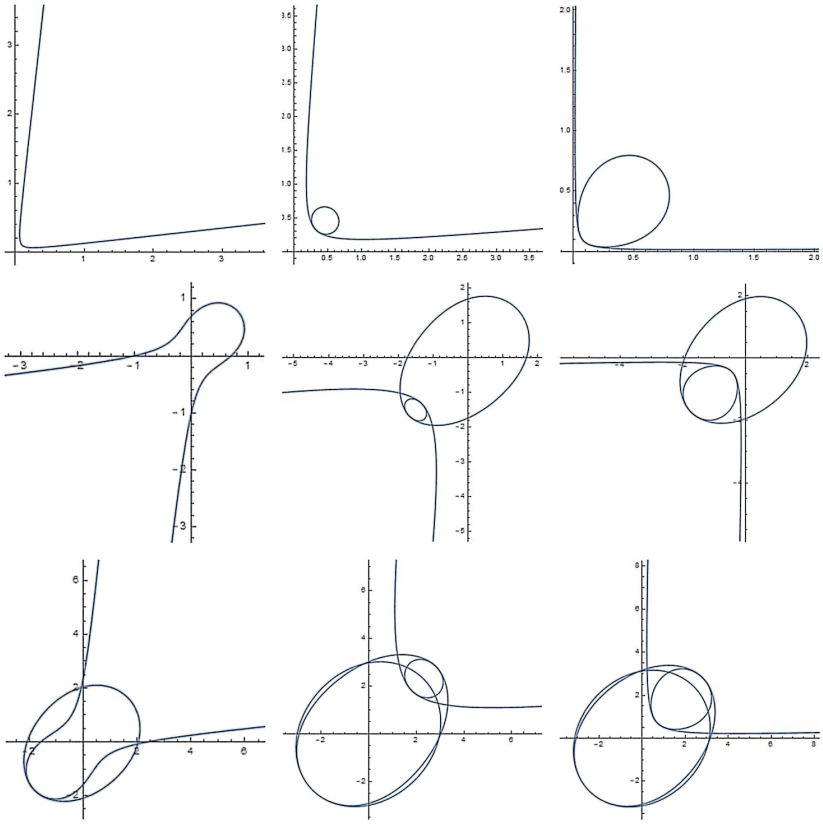


图 3：初始数据为 $\mu \in A_k, k = 0$ 的无界轨线，1，2。

致谢

Y.S. 部分受美国国家科学基金会项目 DMS 2154219 资助，“椭圆与抛物方程中的正则性与奇异性形成”。

参考文献

[1] A. Abbondandolo, J. Molina，《一阶哈密顿系统中强不定泛函、周期轨道和同宿解的指标估计》，《变分法与偏微分方程》11 (2000)，395-430。

[2] B. Ammann, 《共形自旋几何中的变分问题》，教授资格论文，汉堡大学，2003年。[3] B. Ammann, 《自旋共形类中的最小狄拉克特征值与常平均曲率浸入》，《分析与几何通讯》17 (2009)，第3期，429-479。[4] C. B¨ar, 《狄拉克算子特征值的外蕴界》，《全球分析与几何年刊》16 (1998)，第6期，573-596。[5] T. Bartsch, T. Xu, 《乘积流形上旋量雅马贝问题中的曲率效应》，《变分法与偏微分方程》61 (2022)，第5期，论文编号194，共35页。[6] W. Borrelli, 《二维临界狄拉克方程的对称解》，已被《当代数学通讯》24 (2020) 接收，2150019。[7] W. Borrelli, 《克尔非线性下二维临界狄拉克方程的定态解》，《微分方程杂志》263 (2017), 7941-7964。[8] W. Borrelli and R. L. Frank, 《临界狄拉克方程的精确衰减估计》，《美国数学会汇刊》373 (2020)，2045-2070。[9] W. Borrelli, A. Malchiodi, R. Wu, 《基态狄拉克泡与Killing旋量》，《数学物理通讯》383 (2021)，1151-1180。[10] T. P. Branson, 《二阶共形协变算子》，《美国数学会会刊》126 (1998), 1031-1042。[11] J. Cuevas–Maraver, P.G. Kevrekidis, A. Saxena, A. Comech, R. Lan, 《二维非线性狄拉克模型中孤立波与涡旋的稳定性》，《物理评论快报》116:21 (2016)，214101。[12] A. DelaTorre, M. del Pino, M.d.M. Gonzalez, J.C. Wei, 《分数阶雅马贝问题的德洛内型奇异解》，《数学年刊》369 (2017), 597-626。[13] H. D. Fegan, 《共形不变的一阶微分算子》，《牛津季刊数学杂志》第二辑27 (1976)，371-378。[14] R. Finkelstein, R. LeLevier, M. Ruderman, 《非线性旋量场》，《物理评论》83，326 (1951年)。[15] F. Finster, J. Smoller, and S.-T. Yau, 《爱因斯坦–狄拉克方程的类粒子解》，《物理评论D辑》59 (1999)，页码104020。[16] F. Finster, J. Smoller, S.T. Yau, 《爱因斯坦–狄拉克方程的类粒子解》，《物理评论D辑：粒子与场》第三辑59 (1999)，104020

[17] T. Friedrich, 《欧几里得三维空间中曲面的旋量表示》, 几何与物理杂志 28:1-2 (1998), 143-157。[18] T. Friedrich, 《黎曼几何中的狄拉克算子》, 研究生数学系列, 第25卷, 美国数学学会, 普罗维登斯 (2000)。[19] N. Ginoux: 《狄拉克谱》。数学讲义, 第1976卷。施普林格, 柏林 (2009)。[20] R. Gover, L. J. Peterson, 《拉普拉斯算子的共形不变幂、Q-曲率与拖拉机演算》, 《数学物理通讯》235 (2003), 339-378。[21] O. Hijazi, 《狄拉克算子最小特征值的共形下界与Killing旋量》, 《数学物理通讯》104 (1986), 151-162。[22] O. Hijazi, 《狄拉克算子的谱性质与几何结构》, 载于《量子场论的几何方法》。暑期学校论文集, H. Ocampo等编, 哥伦比亚莱瓦镇, 1999年7月12日至30日, 世界科学出版社, 新加坡, 2001, 116-169。[23] N. Hitchin, 《调和旋量》, 数学进展 14 (1974), 1-55。[24] A. Hyder, Y. Sire, 《常 Q-曲率问题的奇异解》, J.Funct. Anal. 280:3 (2021), 108819。[25] K. Kenmotsu, 《预设平均曲率曲面的魏尔斯特拉斯公式》, 《数学年刊》245:2 (1979), 89-99。[26] B. G. Konopelchenko, 《诱导曲面及其可积动力学》, 应用数学研究 96:1 (1996), 9-51。[27] R. Kusner, N. Schmitt, 《空间中曲面的旋量表示》, dg-ga/9610005。[28] H.B. Lawson, M.L. Michelson, 《自旋几何》, 普林斯顿大学出版社 (1989)。[29] A. Maalaoui, 《标准球面上旋量Yamabe问题的无穷多个解》, NoDEA非线性微分方程及其应用 23 (2016), 第25篇, 14页。[30] A. Maalaoui, 《自旋流形上超二次狄拉克方程的Rabinowitz-Floer同调》, 不动点理论与应用杂志 13 (2013), 175–199。[31] S. Matsutani, 《 $\mathbb{R}^3$中曲面上狄拉克算子的浸入异常》, 数学物理评论 11:2 (1999), 171-186。[32] R. Mazzeo, F. Pacard, 《利用渐近分析构造半线性椭圆方程的奇异解》, 微分几何杂志 44 (1996), 第2期, 331-370。

[33] R. Mazzeo, F. Pacard, 《具有孤立奇点的常标量曲率度量》, Duke Math. J. 99 (1999), 第3期, 353-418。[34] R. Mazzeo, N. Smale, 《球面子域上具有正常标量曲率的共形平坦度量》, 微分几何杂志 34 (1991), 第3期, 581-621。[35] R. Schoen, 《黎曼度量总标量曲率泛函的变分理论及相关主题》, 《变分法专题》（蒙特卡蒂尼泰尔梅, 1987）, 120-154, 数学讲义, 第1365卷, 施普林格, 柏林, 1989[36] R. Schoen, 《具有预设奇异行为的共形不变标量方程弱解的存在性》, Comm. Pure and Appl. Math. XLI (1988), 317-392。[37] R. Schoen, S. T. Yau, 《共形平坦流形、克莱因群与标量曲率》, Invent. Math. 92 (1988) 47-71。[38] Y. Sire, T. Xu, 《乘积流形上旋量 Yamabe 方程的变分分析》, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 已录用。[39] S. Rota Nodari, 《爱因斯坦–狄拉克方程类粒子解的摄动方法》, Ann. Henri Poincar´e 10 (2010), 第1377–1393页。[40] M. Soler, 《具有正静止能量的经典稳定非线性旋量场》, 《物理评论》D. 1 (1970), 2766-2769。[41] I. A. Taimanov, 《修正 Novikov–Veselov 方程与曲面的微分几何》, 美国数学学会译丛 (2) 179 (1997), 133-151；http://arxiv.org/dg-ga/9511005。[42] I. A. Taimanov, 《 $\mathbb{R}^3$中闭曲面的魏尔斯特拉斯表示》, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 32:4 (1998), 49-62；英文译本, Funct. Anal. Appl. 32 (1998), 258-267。[43] I. A. Taimanov, 《 $\mathbb{R}^3$中球面的魏尔斯特拉斯表示、Willmore 数与孤子球面》, Trudy Mat. Inst. Steklov. 225 (1999), 339-361；英文译本, Proc. Steklov Inst. Math. 225 (1999), 225-243。[44] K. Tanaka, 《一阶超二次哈密顿系统中的同宿轨道：次谐轨道的收敛性》, 《微分方程杂志》94 (1991), 315-339。[45] M. Wakano, 《经典狄拉克–麦克斯韦场方程的高度局域解》, Progr. Theoret. Phys. 35:6 (1966), 1117-1141。

Ali Maalaoui 数学系，克拉克大学，美国马萨诸塞州伍斯特，邮编 01610-1477 amaalaoui@clarku.edu Yannick Sire 数学系，约翰斯·霍普金斯大学，北查尔斯街 3400 号，巴尔的摩，马里兰州 21218 ysire1@jhu.edu

Tian Xu 应用数学中心，天津大学，邮编 300072，中国天津 xutian@amss.ac.cn