arXiv:2301.03792v1 [math.GT] 10 Jan 2023

奇异拟群的 G-族及双色奇异链环的不变量

Mohd Ibrahim Sheikh、Mohamed Elhamdadi 和 Danish Ali

摘要。我们引入并研究双色奇异链环。我们还构造了 G-族奇异拟群，并利用它们定义无向双色奇异链环的计数不变量。我们通过一些例子说明，这些不变量能够区分某些双色奇异链环。

目录

1. 引言 1 2. 奇异链环、奇异拟群与双色链环 2 3. 双色奇异链环 5 4. G-族奇异拟群（二奇异拟群）6 5. 无向双色奇异链环的可计算不变量 10 致谢 14 参考文献 15

数学主题分类（2020）：57M25，57M27。
关键词和短语：纽结；链环；奇异纽结；奇异链环；双色链环；二染色奇异链环；夸代数；奇异 quandle；disingquandle；disingquandle 计数不变量。

1. 引言

纽结是三维空间中的一条简单闭曲线 $\mathbb{R}^3$，而两个或更多纽结的不交并构成一个具有两个或更多分支的链环 [8]。纽结和链环有多种分类方式。其中一种是利用交叉类型来定义纽结或链环的类型。经典、虚拟和奇异纽结及链环就是一些例子，因为它们都根据自身包含的交叉类型来识别。另一种定义链环类型的方式是为经典链环的各分支标记。双色链环采用这种方法定义，因为其分支标记为“1”或“2” [1, 2, 10, 11, 14]。奇异链环是至少含有一个奇异交叉的链环。本文将这种标记方法用于奇异链环，并定义一种新型链环，称为双色奇异链环。

夸代数是一种代数结构，满足一些由定向经典纽结和链环的 Reidemeister 变换导出的公理。此外，如果夸代数中所有固定元素的右乘都是对合，那么这种结构就称为对合拟群或 Kei。它们用于研究无定向纽结和链环。Joyce 和 Matveev [13, 16] 独立引入了夸代数。此后，人们利用夸代数构造纽结与链环的不变量 [4, 6, 17]。夸代数也被用于通过一次取一族夸代数来定义新的代数系统。

这类系统称为 G-族夸代数，这一概念由 Ishii、Iwakiri、Jang 和 Oshiro 于 2013年 提出 [12]。 G-族夸代数被用于定义把手体纽结的不变量。此外，在 [15] ，Lee 和 Sheikh 使用 $\mathbb{Z}_2$-族夸代数，为定向双色链环构造代数不变量。

本文介绍了 G 奇异 quandle 族和双色奇异链环的概念。双色奇异链环是一个具有 n 个分支的奇异链环，其中每个分支都标记为“1”或“2”。奇异 quandle 是一种代数系统，其公理的构思源自无向奇异结的 Reidemeister 变换。通过取一族这样的代数系统（奇异 quandle），我们定义了一种新的代数系统，称为 G 奇异 quandle 族或 disingquandle。后一种系统的公理源自无向双色奇异链环的广义 Reidemeister 变换。我们讨论了 G 奇异 quandle 族的若干实例和一些性质，并且还证明了 G 奇异 quandle 族 X 能够通过计算无向双色奇异链环的所有 X-染色集合，并证明当其弧由 X 的元素着色时这些集合彼此不同，从而区分这些链环。

本文安排如下。第 2 节回顾奇异链环、奇异拟群以及双色链环及其广义 Reidemeister 变换的相关预备知识。第 3 节引入双色奇异链环的概念，并给出一些典型的无向双色奇异链环示例。第 4 节引入 G-奇异拟群族（dis- ingquandles）的概念，并给出一些典型的 G-奇异拟群族示例。第 5 节讨论 G-奇异拟群族与无向双色奇异链环之间的关系，并为无向双色奇异链环构造可计算的不变量。我们讨论一些示例，展示这些不变量如何区分无向双色奇异链环，尤其是如何检测分支标记的变化。

2. 奇异链环、奇异拟群与双色链环

本节回顾奇异链环、奇异拟群和双色链环的相关预备知识。本节的大多数术语可见于 [5, 9, 15]。我们从奇异链环的定义开始。

定义 2.1. $\mathbb{S}^3$ 中的奇异链环是 $\mathbb{S}^3$ 中 n 个圆的光滑浸入的像，且有有限个双重点，称为奇异点。

$\mathbb{R}^3$ 中的奇异链环由平面 $\mathbb{R}^2$中的奇异链环图表示，该图是带有一个或多个奇异点的经典链环图。奇异点是链环粘接到自身的刚性顶点。图 1 给出了两个奇异链环的示例。

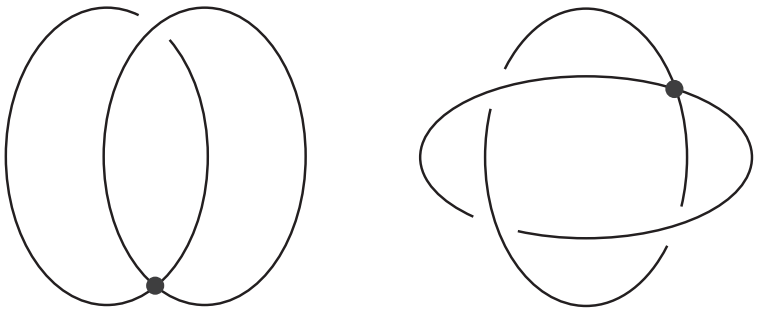


图 1. 奇异链环

如果两个奇异链环 L_1 和 L_2 可以通过有限次用于奇异链环的广义 Reidemeister 变换相互转化（如下面的图所示），则称它们同痕等价。设 D_1 和 D_2 是平面 $\mathbb{R}^2$ 中的两个奇异链环图，分别表示 L_1 和 L_2。那么，L_1 和 L_2 等价，当且仅当 D_1 和 D_2 可以通过有限次图 2 所示的经典与奇异 Reidemeister 变换相互转化。

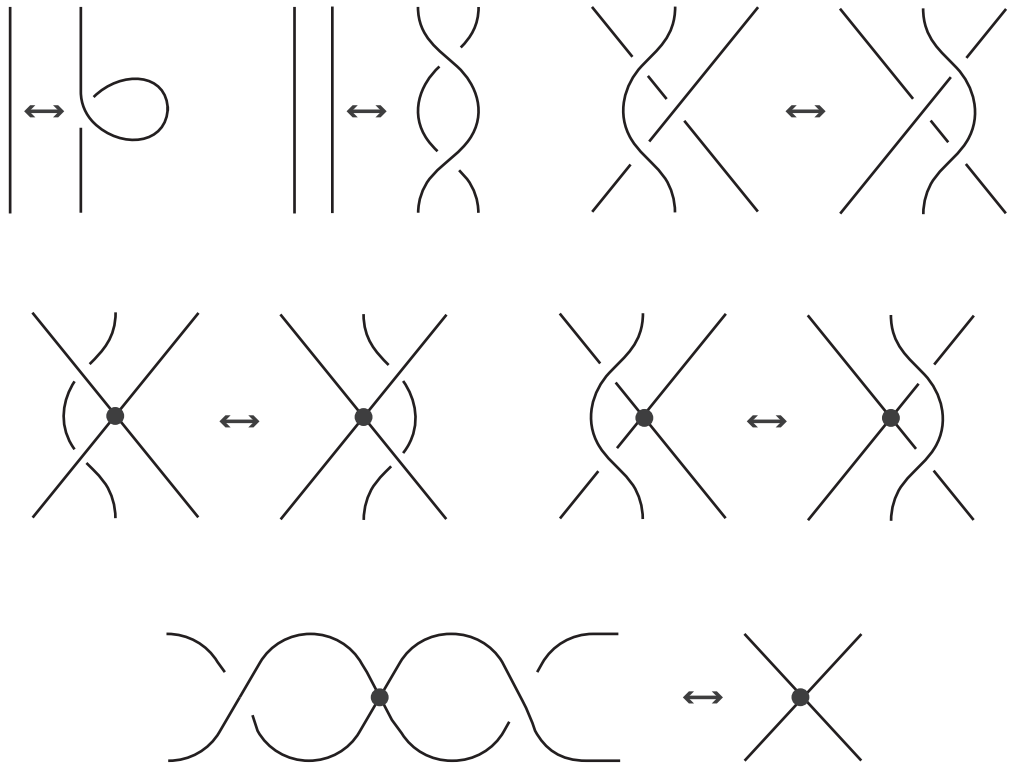


图 2. 经典与奇异 Reidemeister 变换

定义 2.2. [5] 设 $(X,*)$ 是一个对合 quandle。设 $\mathrm{R_1}$ 和 $\mathrm{R_2}$ 是从 $X\times X$ 到 X 的两个映射。若满足以下公理，则四元组 $(X,*,\mathrm{R_1},\mathrm{R_2})$ 称为奇异 quandle

$$x=\mathbf{R_1}(y,\mathbf{R_2}(x,y))=\mathbf{R_2}(\mathbf{R_2}(x,y),\mathbf{R_1}(x,y)), \tag{2.2.1}$$

$$y=\mathbf{R_2}(\mathbf{R_2}(x,y),x)=\mathbf{R_1}(\mathbf{R_2}(x,y),\mathbf{R_1}(x,y)), \tag{2.2.2}$$

$$\mathbf{R}(x,y)=(\mathbf{R_1}(y,\mathbf{R_2}(x,y)),\mathbf{R_2}(\mathbf{R_2}(x,y),x)), \tag{2.2.3}$$

$$(y*z)*\mathbf{R_2}(x,z)=(y*x)*\mathbf{R_1}(x,z), \tag{2.2.4}$$

$$\mathbf{R_1}(x,y)=\mathbf{R_2}(y*x,x), \tag{2.2.5}$$

$$\mathbf{R_2}(x,y)=\mathbf{R_1}(y*x,x)*\mathbf{R_2}(y*x,x), \tag{2.2.6}$$

$$\mathbf{R_1}(x*y,z)*y=\mathbf{R_1}(x,z*y), \tag{2.2.7}$$

(2.2.8) $$\mathbf{R_2}(x*y,z)=\mathbf{R_2}(x,z*y)*y.$$

提醒读者，奇异quandle公理源自无向奇异结的广义 Reidemeister 变换。奇异拟群是作为夸代数的一种分支而引入的，旨在研究奇异链环，例见 [4,5,17]。

以下是奇异 quandle 的几个典型例子。

- 对于一个对合 quandle $(X,*)$，其中 $x*y=2y-x$ 且 $X=\mathbb{Z}_n$，四元组 $(X,*,\mathrm{R_1},\mathrm{R_2})$ 构成一个奇异 quandle，当且仅当满足以下条件：
  (1) $\mathrm{R_2}(x,y)=\mathrm{R_1}(x,y)+y-x$, (2) $\mathrm{R_1}(x,y)=\mathrm{R_1}(2x-y,x)+y-x$, (3) $\mathrm{R_1}(x,2y-z)=2y-\mathrm{R_1}(2y-x,z)$, (4) $\mathrm{R_2}(2y-x,z)=2y-\mathrm{R_2}(x,2x-z)$.

- 对于一个对合 quandle $(X,*)$，其中 X 是一个群 G 且 $x*y=yx^{-1}y$，四元组 $(X,*,\mathrm{R_1},\mathrm{R_2})$ 构成一个奇异 quandle，当且仅当满足以下条件：
  (1) $\mathrm{R_2}(x,z)z^{-1}yz^{-1}\mathrm{R_2}(x,z)=\mathrm{R_1}(x,z)x^{-1}yx^{-1}\mathrm{R_1}(x,z)$, (2) $\mathrm{R_1}(x,y)=\mathrm{R_2}(xy^{-1}x,x)$, (3) $\mathrm{R_2}(x,y)=\mathrm{R_2}(xy^{-1}x,x)[\mathrm{R_1}(xy^{-1}x,x)]^{-1}\mathrm{R_2}(xy^{-1}x,x)$, (4) $y[\mathrm{R_1}(yx^{-1}y,z)]^{-1}y=\mathrm{R_1}(x,yz^{-1}y)$, (5) $\mathrm{R_1}(yx^{-1}y,z)=y[\mathrm{R_2}(x,yz^{-1}y)]^{-1}y$。

定义2.3. 对于一个正整数 $n\geq 1$。双色链环是 n 个圆在 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑嵌入，且每个分支都标记为“1”或“2”。

在 $\mathbb{R}^2$ 中，每个双色链环都由一个双色链环图表示，该图是一个经典链环图，且每个分支都标记为“1”或“2”。例如，参见图3。

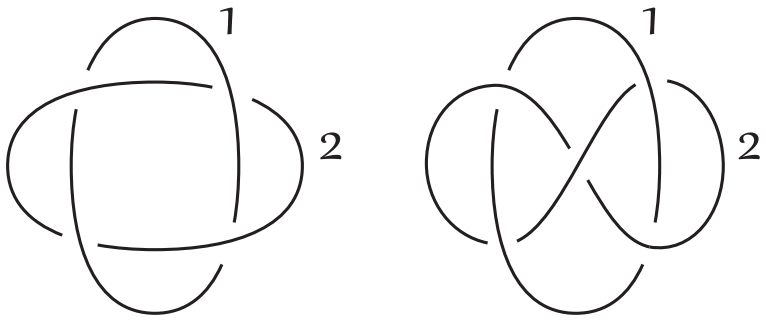


图3. 双色链环

如果一个双色链环 L_1 能够通过有限次图4所示的双色链环广义 Reidemeister 变换得到另一个双色链环 L_2，则二者同痕等价。设 D_1 和 D_2 是 $\mathbb{R}^2$ 中分别表示 L_1 和 L_2 的两个双色链环图。那么，当且仅当 L_1 和 L_2 能够通过有限次下图4所示的广义 Reidemeister 变换互相转化时，它们才等价。

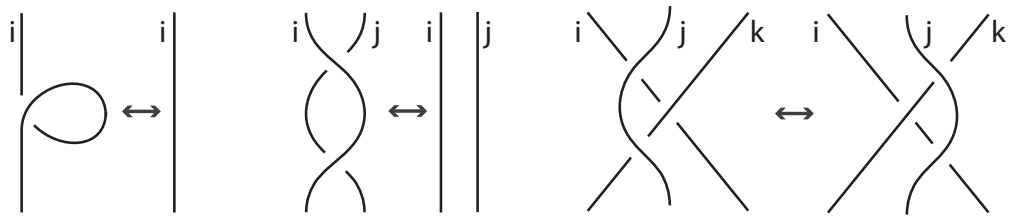


图4. 双色链环的广义 Reidemeister 变换

3. 二染色奇异链环

本节讨论双色奇异链环，它是奇异链环的一种推广。为构造双色奇异链环，我们用“1”或“2”为奇异链环的各个分支标记。因此，我们有如下定义。

定义 3.1. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，每个分支都被染色（标记）为“1”或“2”的奇异链环 L，称为二染色奇异链环。

在 $\mathbb{R}^3$ 中的二染色奇异链环 L，由 $\mathbb{R}^2$ 中的二染色奇异链环图 D 表示，其中每个分支都标记为“1”或“2”。图 5 展示了两个无向二染色奇异链环图的例子。

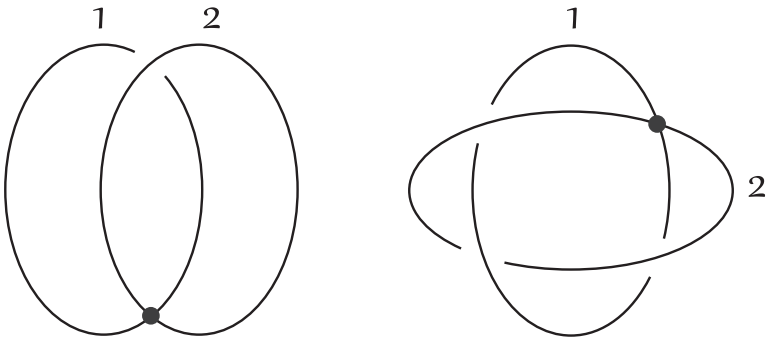


图 5. 二染色奇异链环

若存在自同胚 $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，将一个链环映射到另一个链环，并保持奇异点以及标签“1”和“2”不变，使得 $h(L_1) = L_2$，则 $\mathbb{R}^3$ 中的两个二染色奇异链环 L_1 和 L_2 环境同痕。因此，如果一个奇异二染色链环 L_1 可以通过保持每个分支标签的一系列有限次广义二染色奇异 Reidemeister 移动变为另一个奇异二染色链环 L_2，则二者等价，如图 6 所示。设 $\mathbb{R}^2$ 中的两个二染色奇异链环图 D_1 和 D_2 分别表示 L_1 和 L_2。当且仅当 D_1 和 D_2 可通过图 6 所示的一系列有限次广义二染色奇异 Reidemeister 移动相互变换时，L_1 和 L_2 等价，其中 i、j、$k \in \{1, 2\}$。

具有 n 个分支的二染色奇异链环称为 n 分支二染色奇异链环。因此，$\mathbb{R}^3$ 中的 n 分支二染色奇异链环可定义为 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$。

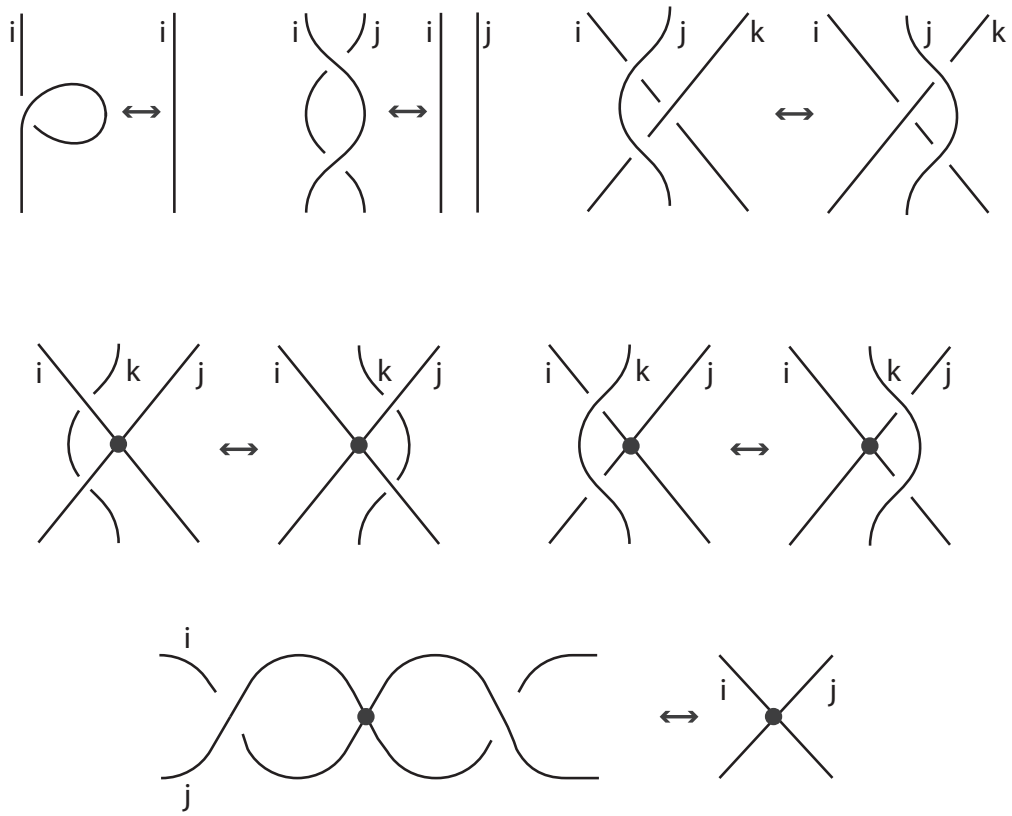


图 6. 上方为常规二染色Reidemeister移动 RI、RII 和 $RIII$；中间和下方为二染色奇异Reidemeister移动 $RIVa$、$RIVb$ 和 RV。

取 $n = 2$，我们得到二分支二染色奇异链环。一些二分支无向二染色奇异链环图（见 [18] 第 814 页）如图 12 所示。

命题3.2. 设 L_1 和 L_2 是 $\mathbb{R}^3$ 中的两个无向双色奇异链环，并设 D_1和 D_2 是 $\mathbb{R}^2$ 中分别表示 L_1 和 L_2的两个无向二染色奇异链环图。那么，L_1 和 L_2 等价，当且仅当 D_1 和 D_2 可通过有限次无向双色奇异链环的广义 Reidemeister 变换相互转化，同时保持奇异点及每个分支的标签不变，如图 6 所示，其中包括 i、j、$k \in \{1, 2\}$ 以及 $\mathbb{R}^2$的环境同痕。

4. G-奇异拟群族（二奇异拟群）

在介绍 G 奇异拟群族的概念之前，我们先回顾 [12] 中对夸代数的 G 族的定义。

定义 4.1. 给定一个群 G 和一个集合 X，G 族夸代数（记作 (G, X)）是在集合 X 上为每个元素 $g \in G$ 选取一个拟群运算 $*^g$，使其满足以下公理:

(1) 对所有 $g \in G$ 以及所有 $x \in X, x *^g x = x$，(2) 对所有 $g, h \in G$ 以及所有 $x, y \in X$，$(x *^g y) *^h y = x *^{gh} y$，(3) 对所有 $x, y \in X, x *^e x = x$，其中 e 是 G 的单位元，

(4) 对所有 $x, y, z \in X$，$(x *^g y) *^h z = (x *^h z) *^{h^{-1}gh} (y *^h z)$

G族拟群的两个例子如下。

- 对于任意群 G 和任意集合 X，对所有 x、$y \in X$ 以及所有 $g \in G$定义 $x *^g y = x$。由此得到一个称为平凡 G族拟群的 G族拟群。
- 设 $(X, *)$ 是基数为 n的循环型拟群 [19]。令 R_x 表示由 x给出的右乘，因此根据定义，$R_{x^{(n-1)}}$ 是恒等映射。然后定义 $x *^i y = {R_y}^i(x)$，由此可知，根据 [12] 中的命题 2.3，$(\mathbb{Z}, X)$ 是一个 $\mathbb{Z}$族拟群，同时也是 $\mathbb{Z}_{(n-1)}$族拟群。

G族拟群 (G, X) 在集合 $G \times X$ 上诱导出如下拟群运算：

$$(g, x) * (h, y) = (h^{-1}gx, x *^h y).$$

Ishii、Iwakiri、Jang 和 Oshiro 于 2013年在 [12] 中引入了 G族拟群的概念，以构造把手体结的不变量。他们定义了把手体结的着色不变量和余循环不变量，并利用这些不变量检测某些把手体结的手性。之后，2015年，Ishii 独立研究了 G族拟群的概念，并探讨其与多重共轭拟群的联系，证明后者可以由前者得到。2017年和2018年，Ishii、Nelson 以及 Ishii、Iwakiri、Kamada、Kim、Matsuzaki、Oshiro 分别利用这项工作，引入了部分乘法双拟群和多重共轭双拟群的概念。2021年，Lee 和 Sheikh 合作使用 G 族拟群，为定向双色链环构造代数不变量 [15]。我们引入以下定义。

定义 4.2. 设 X 是一个集合，配备两个二元运算 $*_1$ 和 $*_2$，使得 $(X, *_1)$、$(X, *_2)$ 均为对合拟群。设 $\mathrm{R_1}$，$\mathrm{R_2}$ 是从 $X \times X$ 到 X 的两个映射，使得四元组 $(X, *_1, \mathrm{R_1}, \mathrm{R_2})$ 和 $(X, *_2, \mathrm{R_1}, \mathrm{R_2})$ 均为奇异 quandle。若满足以下公理，则称五元组 $(X, *_1, *_2, \mathrm{R_1}, \mathrm{R_2})$ 为 disingquandle 或 $\mathbb{Z}_2$-族奇异 quandle

$$(x *_1 y) *_2 z = (x *_2 z) *_1 (y *_2 z), \tag{4.2.1}$$

$$(x *_2 y) *_1 z = (x *_1 z) *_2 (y *_1 z), \tag{4.2.2}$$

$$(y *_1 z) *_2 \mathbf{R_2}(x, z) = (y *_2 x) *_1 \mathbf{R_1}(x, z), \tag{4.2.3}$$

$$(y *_2 z) *_1 \mathbf{R_2}(x, z) = (y *_1 x) *_2 \mathbf{R_1}(x, z), \tag{4.2.4}$$

$$\mathbf{R_2}(x, y) = \mathbf{R_1}(y *_1 x, x) *_2 \mathbf{R_2}(y *_1 x, x), \tag{4.2.5}$$

$$\mathbf{R_2}(x, y) = \mathbf{R_1}(y *_2 x, x) *_1 \mathbf{R_2}(y *_2 x, x), \tag{4.2.6}$$

上述 disingquandle 公理源自图 6 所示的广义双染色奇异 Reidemeister 变换，并考虑了图 7 所示的着色规则。

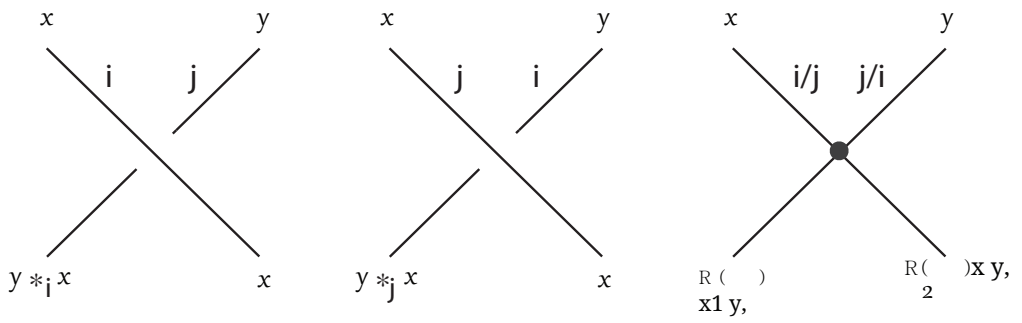


图 7. 使用 disingquandle 着色

下面的引理由上述构造启发而来。

引理 4.3. 用 disingquandle 对二染色奇异链环进行着色所得的集合，在图 6 所示的二染色奇异Reidemeister移动下保持不变。

证明. 与经典纽结理论和奇异纽结理论的情形一样，每个二染色奇异Reidemeister移动前后的着色之间存在一一对应关系。根据定义 4.2 中给出的方程 4.2.1、4.2.2、4.2.3、4.2.4、4.2.5 和 4.2.6，不变性可直接得出。□

例4.4. 设 $(X, *_1, \mathbf{R_1}, \mathbf{R_2})$ 和 $(X, *_2, \mathbf{R_1}, \mathbf{R_2})$ 是两个奇异拟群，满足 such that $x *_1 y = x = x *_2 y$ and $\mathbf{R_1}(x, y) = \mathbf{R_2}(x, y)$，则 $(X, *_1, *_2, \mathbf{R_1}, \mathbf{R_2})$ 构成一个 disingquandle。

例4.5. 设 $(X, *_1, \mathbf{R_1}, \mathbf{R_2})$ 和 $(X, *_2, \mathbf{R_1}, \mathbf{R_2})$ 是两个奇异拟群。若对所有 $x, y \in X$，都有 $x *_1 y = x *_2 y$，则 $(X, *_1, *_2, \mathbf{R_1}, \mathbf{R_2})$ 构成一个 disingquandle。

Now 例4.5 与 [5] 中的命题3.6 结合，得到以下例子 .

例4.6. 设 $\Lambda = \mathbb{Z}[t, B]/(t^2 - 1, B(1 + t)\ t - (1 - B)^2)$ 和 X 是一个 Λ-模。定义 $x *_1 y = tx + (1 - t)y$, $R_1(x, y) = (1 - t - b)x + (t + b)y$ 以及 $R_2(x, y) = (1 - B)x + By$，然后通过令 $*_2 = *_1$，可得 $(X, *_1, *_2, \mathbf{R_1}, \mathbf{R_2})$ 构成一个 disingquandle。

例4.7. 设 X 是一个在 $\Lambda = \mathbb{Z}[t]$ 上的模。定义 $x *_1 y = x *_2 y = tx + (1 - t)y$, $R_1(x, y) = (1 - t - B)x + (t + B)y$ 以及 $R_2(x, y) = (1 - B)x + By$。令 $t = -1$ 和 $X = \mathbb{Z}_7$，则五元组 $(X, *_1, *_2, \mathbf{R_1}, \mathbf{R_2})$ 在 $B = 4$ 或 $B = 5$ 时构成一个 disingquandle。

这个例子可以推广到 $\mathbb{Z}_p$，其中 p 是一个素数。

例4.8. 设 p 为奇素数，并设 $B \in \mathbb{Z}_p$。考虑满足 $x *_1 y = x *_2 y = -x + 2y$、$R_1(x, y) = (2 - B)x + (-1 + B)y$ 以及 $R_2(x, y) = (1 - B)x + By$的 $\mathbb{Z}_p$。设 ζ是 $\mathbb{Z}_p$ 中的一个单位根的本原根，使得 $\zeta^{\frac{p-1}{2}} = -1$。通过选择 $1 - B = \zeta^{\frac{p-1}{2}}$，我们得到 $(\mathbb{Z}_p, *_1, *_2, \mathbf{R_1}, \mathbf{R_2})$ 构成一个 disingquandle。

例 4.9. 设 $X = G$ 是一个乘法群，带有对合 quandles 运算 $x *_1 y = x *_2 y = yx^{-1}y$（$G$ 上的核 quandle），则直接计算可得，五元组 $(X, *_1, *_2, \mathbf{R_1}, \mathbf{R_2})$ 构成一个 disingquandle，当且仅当 $\mathbf{R_1}$ 和 $\mathbf{R_2}$ 满足以下方程:

$$\mathbf{R_2}(x, z)z^{-1}yz^{-1}\mathbf{R_2}(x, z) = \mathbf{R_1}(x, z)x^{-1}yx^{-1}\mathbf{R_1}(x, z), \tag{5.1}$$

$$\mathbf{R_2}(x, y) = \mathbf{R_2}(xy^{-1}x, x)[\mathbf{R_1}(xy^{-1}x, x)]^{-1}\mathbf{R_2}(xy^{-1}x, x), \tag{5.2}$$

直接计算可得以下解

$$\mathbf{R_1}(x,y)=x \textit{ and } \mathbf{R_2}(x,y)=y, \textit{ for all } x,y,z\in G.$$

现在假设 G 是一个没有 2-挠的阿贝尔群，因此 $x*y=-x+2y$，那么 $(X,*_1,*_2,$ $\mathrm{R_1},\mathrm{R_2})$ 构成一个 disingquandle，当且仅当 $R_2(x,y)=R_1(x,y)+y-x$，其中 R_1 满足恒等式 $R_1(x,y)=R_1(-x+2y,x)+y-x$。例如，对于任意整数 m，映射 $R_1(x,y)$ $=mx+(2m+1)y$ 给出一个解。因此，我们得到一个由整数 m 参数化的解族：

$$R_1(x,y)=mx+(2m+1)y,\ R_2(x,y)=(m-1)x+2(m+1)y.$$

定义 4.10. 若映射 $f\colon X\to Y$是 disingquandle $(X,*_1,*_2,\mathrm{R_1},\mathrm{R_2})$ 与 $(Y,*_1',*_2',\mathrm{R_1'},\mathrm{R_2'})$ 的同态，则称其为 disingquandle 同态，当且仅当对所有 $x,y,z\in X$，下列条件均成立

(i) $f(x*_1y)=f(x)*_1'f(y)$, (ii) $f(x*_2y)=f(x)*_2'f(y)$, (iii) $f(\mathrm{R_1}(x,y))=\mathrm{R_1'}(f(x)\ f(y))$, (iv) $f(\mathrm{R_2}(x,y))=\mathrm{R_1'}(f(x)\ f(y))$.

若 disingquandle 同态是双射，则称其为 disingquandle 同构。若两个 $\mathbb{Z}_2$-奇异拟群族之间存在 disingquandle 同构，则称它们同构。

定义 4.11. 设 $(X,*_1,*_2,\mathrm{R_1},\mathrm{R_2})$ 是一个 disingquandle。若子集 $Y\subset X$ 使得 $(Y,*_1,*_2,\mathrm{R_1},\mathrm{R_2})$ 本身也是一个 disingquandle，则称 $Y\subset X$ 为子 disingquandle。

例 4.12. 我们利用例 4.9 得到以下两个例子：

- 设 $X=\mathbb{Z}_9$ 是具有 $x*y=-x+2y$, $R_1(x,y)=mx+(2m+1)y$, $R_2(x,y)=(m-1)x+2(m+1)y$. 的二面体 quandles。则 $(Y,*_1,*_2,\mathrm{R_1},\mathrm{R_2})$ 本身是一个带有 $Y=\mathbb{Z}_3$ 的 disingquandle。

- 设 $X=\mathbb{Z}_{25}$ 是具有 $x*y=-x+2y$, $R_1(x,y)=mx+(2m+1)y$, $R_2(x,y)=(m-1)x+2(m+1)y$. 的二面体 quandles。则 $(Y,*_1,*_2,\mathrm{R_1},\mathrm{R_2})$ 本身是一个带有 $Y=\mathbb{Z}_5$ 的 disingquandle。

给定一个二奇异拟群的同态，我们得到以下引理。

引理 4.13. 从 $(X,*_1,*_2,\mathrm{R_1},\mathrm{R_2})$ 到 $(Y,*_1',*_2',\mathrm{R_1'},\mathrm{R_2'})$ 的任意二奇异拟群同态 f 所对应的像 Im(f) 始终是一个子双单辫群胚。

证明. 设 $f\colon(X,*_1,*_2,\mathrm{R_1},\mathrm{R_2})\to(Y,*_1',*_2',\mathrm{R_1'},\mathrm{R_2'})$ 是一个同态。则定义 4.10 中的方程 (i)、(ii)、(iii) 和 (iv) 表明 Im(f) 在 $*_1$、$*_2$、$\mathbf{R_1}$ 和 $\mathbf{R_2}$ 下封闭。于是二奇异拟群的公理在 Y 中成立，因此它们也自动在 Im(f) 中成立。引理得证。□

现在我们引入无向双色奇异链环的基本不定奇异拟群的概念，并给出一个示例。设 D 是 $\mathbb{R}^2$中的无向双色奇异链环 L 的图。我们将 D的基本不定奇异拟群记作 $\mathcal{DSQ}(D)$，并定义为不定奇异拟群词 W-$\mathcal{DSQ}(D)$ 在由不定奇异拟群公理及图 7 所示交叉关系生成的等价关系下的等价类集合。其中，W-$\mathcal{DSQ}(D)$通过取一组生成元 $X=\{x_1,x_2,x_3,.....,x_n\}$ 来定义，这组生成元与 D中的半弧一一对应，并由以下两条规则递归确定：

(1) $X \subset W\text{-}\mathcal{DSQ}(D)$; (2) 若 $x, y \in W\text{-}\mathcal{DSQ}(D)$, 则 $x *_1 y, x *_2 y$, $\mathrm{R_1}(x, y)$, $\mathrm{R_2}(x, y) \in W\text{-}\mathcal{DSQ}(D)$。

例 4.14. 考虑以下无向双色奇异链环 L。

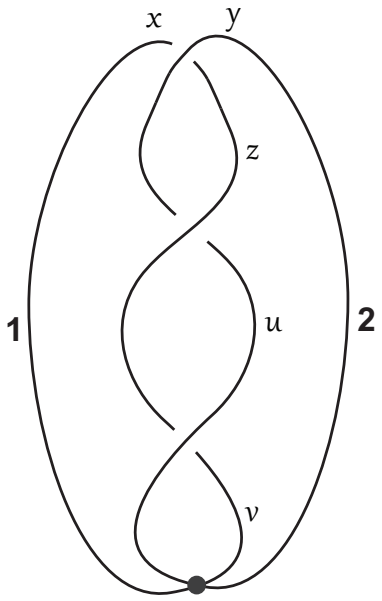


图 8. 无向双色奇异链环的基本不定奇异拟群

L 的基本不定奇异拟群表示为

$$\mathcal{DSQ}(L) = \langle x, y, z, u, v |\ z = x *_2 y; u = y *_1 z; v = z *_2 u; x = R_1(u, v); y = R_2(u, v) \rangle.$$

该表示可简化为以下 $\mathcal{DSQ}(L)$ 的表示

$$\langle x, y |\ x = R_1(y *_1 (x *_2 y), (x *_2 y) *_2 (y *_1 (x *_2 y))); y = R_2(y *_1 (x *_2 y), (x *_2 y) *_2 (y *_1 (x *_2 y))) \rangle.$$

5. 无向双色奇异链环的可计算不变量

设 D 是一个无向双色奇异链环图，并令 $\mathcal{A}(D)$ 表示 D 的所有弧构成的集合。设 $(X, *_1, *_2, \mathrm{R_1}, \mathrm{R_2})$ 是一个 disingquandle。D 到 X 的 disingquandle 着色，或简称 D 的 disingquandle X-着色，是一个映射 $\mathcal{C}: \mathcal{A}(D) \to X$，满足每个经典交叉和奇异交叉处均符合图 7 所示的关系。disingquandle 元素 $\mathcal{C}(s)$ 称为弧 s 的颜色，而有序对 $(D, \mathcal{C})$ 称为由 $\mathcal{C}$ 着色的无向双色奇异链环图。D 的所有 disingquandle X-着色构成的集合记为 $\mathrm{Col}_X^{dsq}(D)$。于是有如下结论：

引理 5.1. 设 D 和 D' 是 $\mathbb{R}^2$ 中的两个无向二染色奇异链环图，它们可通过图 6 所示的无向广义二染色奇异 Reidemeister 移动相互变换。那么，对于任意有限不定奇异拟群 X，$\mathrm{Col}_X^{dsq}(D)$ 与 $\mathrm{Col}_X^{dsq}(D')$ 之间存在一一对应。

证明. 只需证明当 D' 由 D 经过一次无向广义二染色奇异 Reidemeister 移动得到时，结论成立。设 E 是 $\mathbb{R}^2$中应用所考虑的无向广义二染色奇异 Reidemeister 移动的一个开圆盘。则 $D\cap(\mathbb{R}^2-E) = D'\cap(\mathbb{R}^2-E)$。现在设 $\mathcal{C}$ 是 D的一个 disingquandle X-着色。根据定义 4.2，($X, *_1$, $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2$) 和 ($X, *_2$, $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2$) 都是奇异 quandle。从图 6 可以明显看出，将 $\mathcal{C}$限制在 $D\cap(\mathbb{R}^2-E)(= D'\cap(\mathbb{R}^2-E))$ 上后，可将其扩展为 D' 的唯一一个 disingquandle X-着色，其中所用的无向广义二染色奇异 Reidemeister 移动为 RI、RII 和 $RIII$。此外，利用双奇异 quandle 公理 4.2.1 至 4.2.6，从图 6 可以容易看出，将 $\mathcal{C}$ 限制在 $D\cap(\mathbb{R}^2-E)(= D'\cap(\mathbb{R}^2-E))$ 上后，可将其扩展为 D' 的唯一一个 disingquandle X-着色，其中所用的无向广义二染色奇异 Reidemeister 移动为 $RIVa$、$RIVb$ 和 RV。证毕。□

在一个 X 色无向双色奇异链环图（$D,\mathcal{C}$）中，我们将 disingquandle X 的元素视为图 D 中各弧的标记，交叉处采用不同的运算，如图 7 所示。由引理 5.1 可知，定义 4.2 中的双奇异 quandle 公理是无向双色奇异链环的一组生成性无向广义 Reidemeister 变换的转写，这组变换足以生成其他任意无向广义双色奇异 Reidemeister 变换。也就是说，公理 4.2.1 和 4.2.2 来自无向广义双色奇异 Reidemeister 变换 $RIVa$，公理 2.2.3 和 2.2.4 来自无向广义双色奇异 Reidemeister 变换 $RIVb$，而公理 2.2.5 和 2.2.6 来自无向广义双色奇异 Reidemeister 变换 RV，如图 6 所示。

定理 5.2. 设 L 是 $\mathbb{R}^3$ 中的无向双色奇异链环，且 D 是L的一个图。那么对于任意有限不定奇异拟群 X，基数 $\sharp\mathrm{Col}_X^{dsq}(L)$ 是 L的不变量。

证明. 设 D' 是 L 的另一个无向双色奇异链环图，它由 D经过有限次无向广义二染色奇异 Reidemeister 移动得到。根据引理 5.1，可直接得出 $\sharp\mathrm{Col}_X^{dsq}(D') = \sharp\mathrm{Col}_X^{dsq}(D)$。证明完毕。□

如果 X 是一个有限不定奇异拟群，我们称基数 $\sharp\mathrm{Col}_X^{dsq}(D)$ 为 disingquandle X-着色数，或称为 L的 disingquandle 计数不变量，并记作 $\mathbb{Z}_X^{dsq}(L)$，即 $\mathbb{Z}_X^{dsq}(L) = \sharp\mathrm{Col}_X^{dsq}(D)$。

定理 5.3. 设 L 为一个无向双色奇异链环，X 为一个 disingquandle。那么 $\mathrm{Col}_X^{dsq}(L)$ 与 $\mathrm{Hom}(\mathcal{DSQ}(L)\ X)$ 之间存在一一对应。因此，$\mathbb{Z}_X^{dsq}(L) = \sharp\mathrm{Hom}(\mathcal{DSQ}(L)\ X)$.

证明. 由于 L 的 disingquandle X-着色生成链环 L 的基本不定奇异拟群 $\mathcal{DSQ}(L)$，而该拟群由其弧标记生成。对于 L的 disingquandle X-着色，L 的每条弧也都被赋予 X中的一个元素，因此我们可以为每种着色关联一个映射 $f\colon \mathcal{DSQ}(L) \to X$。其中，若基本不定奇异拟群中的一条弧标记为 a，并被赋予颜色 $x \in X$，则 $f(a) = x$。证明完毕。□

现在我们给出一个例子。

例 5.4. 现在，我们给出三个无向双色奇异链环 L_1、L_2 和 L_3 的一个具体例子，并说明着色不变量可以将它们彼此区分。考虑奇异 quandle ($X, *$, $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2$)，其中 $X = \mathbb{Z}_6$, $x *_1 y = x *_2 y = -x+2y = x * y$, $R_1(x, y) = x+3$,

以及 $R_2(x,y) = 3x^2 + 3x + y + 3$ （见 [7]第 9 页）。直接验证定义 4.2 中的方程成立后，我们得到五元组$(X, *_1, *_2, R_1, R_2)$构成一个 disingquandle。现在，如下方图 9 所示，给链环 L_1 的两条顶端弧分别赋予 x 和 y，即可得到以下着色方程：

$$x = R_1(R_1(x,y), R_2(x,y)) \quad and \quad y = R_2(R_1(x,y), R_2(x,y)).$$

由此得到方程组，$\begin{cases} x = 3 + 3\ 3 + x, \\ y = 3 + 3\ 3 + x \end{cases}$ $(\ ) + 3(3+x)^2 + (3 + 3x + 3x^2)$。

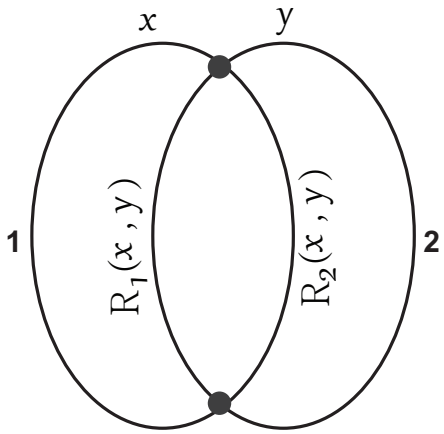


图 9. 无向双色奇异链环(L_1)

任意一对（x, y）都是该方程组在 $\mathbb{Z}_6$ 上的一个解，因此集合 $\mathrm{Col}_X^{dsq}(L_1)$ 等于 $\mathbb{Z}_6^2$。现在，如下方图10所示，对链环 L_2 进行着色，可得着色方程为：

$$R_1(R_1(x,y), x * R_1(x,y)) = R_2(x,y) * y \quad and \quad R_2(R_1(x,y), x * R_1(x,y)) = y.$$

一 n 得到解为 $y = 3x^2 + 4x + 3$，因此 $\mathrm{Col}_X^{dsq}(L_2)$ 为

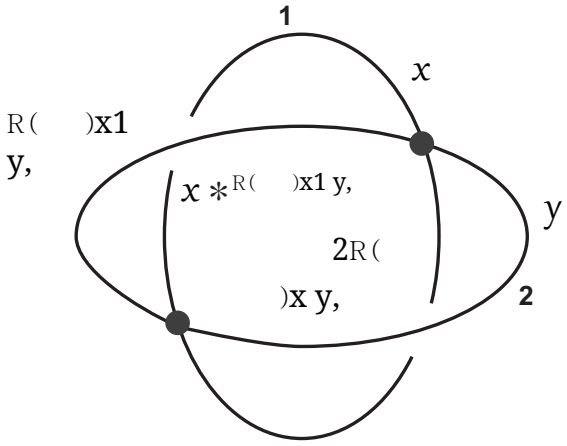


图10。无向双色奇异链环(L_2)

$$\{(0,3),(1,4),(2,5),(3,0),(4,1),(5,2)\}.$$

现在我们考虑如下图11所示的链环 L_3 （双色奇异怀特海德）。

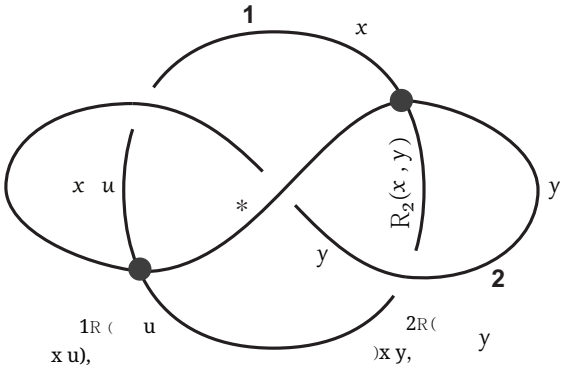


图11。无向双色奇异链环(L_3)

着色方程为:

$$R_2(y * R_1(x,y), x * (y * R_1(x,y))) = R_1(x,y),$$

and

$$R_1(y * R_1(x,y), x * (y * R_1(x,y))) = R_2(x,y) * y.$$

这两个方程组成的系统可化简为 $\begin{cases} 0 = 3y^2 + y + 2x, \\ 0 = 3x^2 + x + 2y, \end{cases}$

因此我们得到 $2(y-x) = 0$，给出 $x = y$ 或 $y = x + 3$。

Then $\mathrm{Col}_X^{dsq}(L_3) = \{(x,x), x \in X\} \cup \{(x,x+3), x \in X\}.$

因此，三个链环 L_1、L_2 和 L_3 两两不同。

例 5.5. 令 $1_1^2, 3_1^2, 4_1^2, 5_1^2, 5_2^2, 5_3^2, 6_1^2, 6_2^2, 6_3^2, 6_4^2, 6_5^2, 6_6^2, 6_7^2, 6_8^2, 6_9^2, 6_{10}^2, 6_{11}^2,$ 和 6_{12}^2 为图 12 中的十八个无向双色奇异链环，并令 X 为例 5.4 中的 disingquandle。通过与该例中类似的计算，我们得到下表:

L	$\#\mathrm{Col}_X^{dsq}(L)$
6_2^2	0
6_6^2	2
$4_1^2, 6_{12}^2$	18
$1_1^2, 3_1^2, 5_1^2, 5_2^2, 5_3^2, 6_1^2, 6_3^2, 6_4^2, 6_5^2, 6_7^2, 6_8^2, 6_9^2, 6_{10}^2, 6_{11}^2$	6

此表显示，disingquandle 计数不变量 $\mathbb{Z}_X^{dsq}(L)$ 能够区分这十八个无向双色奇异链环中的一部分。

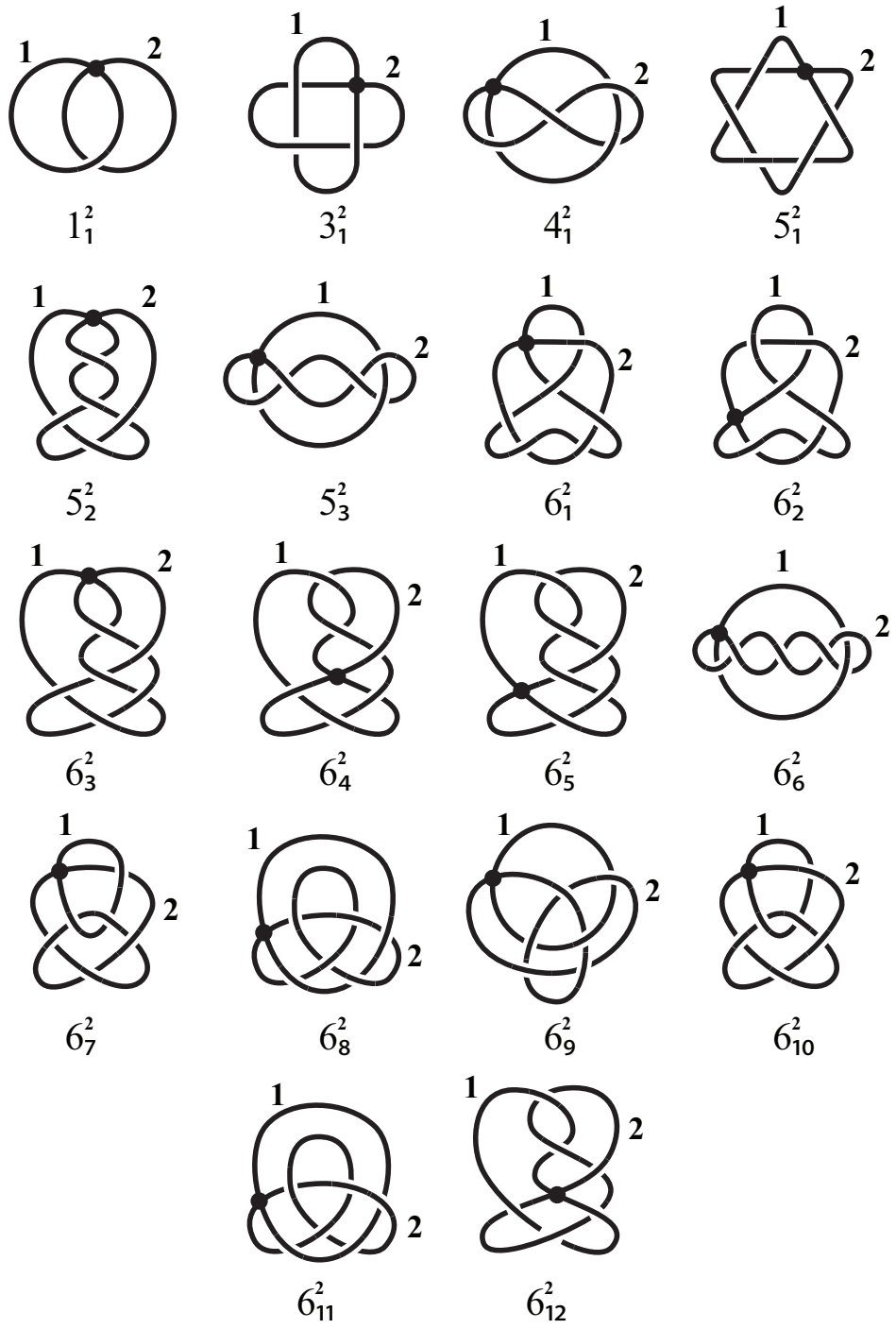


图 12. 无向双色奇异链环表

致谢

Mohamed Elhamdadi 部分获得了西蒙斯基金会合作项目资助，资助编号为 712462。

参考文献

[1] K. Bataineh，关于双色链环的纽结图理论及有限型不变量，《纽结理论及其推广杂志》. 26(13) (2017年) 1750092.[2] K. Bataineh 和 I. Saidi，对合拟群与双色链环，《对称性》. 12(1) (2020) 111.[3] Madeline Brown 和 Sam Nelson，*G*族多项式，《纽结理论及其推广杂志》30 (2021年)，第 9 期，论文编号 2150070，15，doi: 10.1142/S021821652150070X. MR4358333[4] Jose Ceniceros、Indu R. Churchill 和 Mohamed Elhamdadi，奇异 quandle 阴影与奇异纽结不变量，《加拿大数学通报》65 (2022)，第 3 期，770–787，doi: 10.4153/S0008439521000837. MR4472501[5] Indu R. U. Churchill、Mohamed Elhamdadi、Mustafa Hajij 和 Sam Nelson，奇异纽结与对合拟群，《纽结理论及其推广杂志》26 (2017年)，第 14 期，1750099，14，doi: 10.1142/S0218216517500997. MR3735400[6] Jose Ceniceros、Indu R. Churchill、Mohamed Elhamdadi 和 Mustafa Hajij，奇异拟群、伪拟群与奇异纽结：综述，《纽结理论及其推广杂志》30 (2021年)，第 12 期，论文编号 2141003，22，doi: 10.1142/S0218216521410030. MR4394062[7] ———, 余循环不变量与定向奇异纽结，《地中海数学杂志》18 (2021)，第 5 期，论文编号 217，17，doi: 10.1007/s00009-021-01867-6. MR4309525[8] Mohamed Elhamdadi 和 Sam Nelson，《夸代数——纽结代数导论》，学生数学丛书，第 74 卷，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2015年。MR3379534[9] Allison Henrich 和 Sam Nelson，半拟群与平面虚纽结，《太平洋数学杂志》248 (2010)，第 1 期，155–170，doi: 10.2140/pjm.2010.248.155. MR2734169[10] Jim Hoste 和 Mark E. Kidwell，双色链环不变量，《美国数学会汇刊》321 (1990)，第 1 期，197–229，doi: 10.2307/2001598. MR961623[11] Jim Hoste 和 J´ozef H. Przytycki，双色链环的一个不变量，《美国数学会会刊》105 (1989)，第 4 期，1003–1007，doi: 10.2307/2047066. MR989100[12] Atsushi Ishii、Masahide Iwakiri、Yeonhee Jang 和 Kanako Oshiro，一个 *G*族夸代数与把手体纽结，《伊利诺伊数学杂志》57 (2013年)，第 3 期，817–838。MR3275740[13] David Joyce，纽结的一个分类不变量：纽结拟群，《纯粹与应用代数杂志》23 (1982)，第 1 期，37–65，doi: 10.1016/0022-4049(82)90077-9. MR638121[14] Uwe Kaiser，强带和与双色不变量，《数学手稿》74 (1992)，第 3 期，237–251，doi: 10.1007/BF02567670. MR1149761[15] Sang Youl Lee 和 Mohd Ibrahim Sheikh，二拟群与定向双色链环的不变量，《纽结理论及其推广杂志》30 (2021)，第 7 期，论文编号 2150049，19，doi: 10.1142/S0218216521500498. MR4321932[16] S. V. Matveev，纽结理论中的分配群胚，《数学文集》（新辑）119(161) (1982)，第 1 期，78–88，160（俄文）。MR672410[17] Sam Nelson、Natsumi Oyamaguchi 和 Radmila Sazdanovic，伪拟群、奇异纽结与伪纽结，《东京数学杂志》42 (2019)，第 2 期，405–429，doi: 10.3836/tjm/1502179287. MR4106586[18] Natsumi Oyamaguchi，平面顶点同痕下空间二花束图的枚举，B 部分，《拓扑学及其应用》196 (2015)，B 部分，805–814，doi: 10.1016/j.topol.2015.05.049. MR3431017[19] Hiroshi Tamaru，具有素数基数的二点齐性拟群，《日本数学会杂志》65 (2013年)，第 4 期，1117–1134，doi: 10.2969/jmsj/06541117. MR3127819

数学系 ，自然科学研究生院 釜山国立大学-SITY, 釜山 46241 ，大韩民国
电子邮箱地址：ibrahimsheikh@pusan.ac.kr

南佛罗里达大学，坦帕，佛罗里达州，美国 电子邮箱地址：emohamed@usf.edu

中国大连理工大学数学系 电子邮箱：danishali@mail.dlut.edu.cn