arXiv:2301.03807v2 [math.RA] 8 Nov 2023

# 泊松代数的泛构造。应用

A. L. AGORE 和 G. MILITARU

ABSTRACT. 我们引入两个泊松代数 $P$和 $Q$的 *universal algebra* ，将其定义为满足某种泛性质的交换代数 $A := \mathcal{P}(P, Q)$。我们证明，对于任意有限维泊松代数 $P$ ，该泛代数都存在，并着重介绍了它的若干应用。对于任意泊松 $P$-模 $U$，我们构造一个函子 $U\otimes -\colon {}_A\mathcal{M} \to {}_Q\mathcal{P}\mathcal{M}$，它从 $A$-模范畴映射到泊松$Q$-模范畴；当 $U$ 有限维时，该函子存在左伴随。类似地，若 $V$ 是一个 $A$-模，则存在另一个函子 $-\otimes V\colon {}_P\mathcal{P}\mathcal{M} \to {}_Q\mathcal{P}\mathcal{M}$，连接 $P$ 和 $Q$的泊松表示范畴；当 $V$有限维时，后一个函子也有左伴随。若 $P$是 $n$维的，则 $\mathcal{P}(P) := \mathcal{P}(P, P)$ 是所有余作用于 $P$的交换双代数范畴中的始对象。作为代数， $\mathcal{P}(P)$可描述为多项式代数 $k[X_{ij} \,|\, i, j = 1, \cdots, n]$ 对由 $2n^3$ 个$\leq$ 2次非齐次多项式生成的理想取商。我们给出两个应用。首先，将自同构群 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Poiss}}(P)$ 描述为有限对偶 $\mathcal{P}(P)^{\circ}$ 中所有可逆类群状元构成的群。其次，我们证明，对于阿贝尔群 $G$， $P$ 上的所有 $G$-分次都可以用泛余作用双代数 $\mathcal{P}(P)$ 明确描述和分类。

## INTRODUCTION

泊松代数最初作为经典力学系统范畴的对偶，在哈密顿力学中被引入；它们在量子群、微分几何、非交换几何、可积系统、量子场论或顶点算子代数的研究中发挥着重要作用（参见[12, 13, 15, 18, 19, 20, 30]）。泊松代数可视为泊松流形的代数对应物；泊松流形是光滑流形$M$ ，其交换代数 $C^\infty(M, \mathbb{R})$——实光滑函数的交换代数——带有一个李括号 $[-,-]$ ，并满足莱布尼茨法则，即 $C^\infty(M, \mathbb{R})$ 是一个泊松代数。

本文介绍并研究了泊松代数的一些泛对象，并着重阐述其主要应用；本文的灵感源自 Sweedler [28], 、Manin [22] 和 Tambara [25] 此前关于结合代数上的霍普夫代数（余）作用的研究。从范畴论观点来看，对于给定的范畴 $\mathcal{C}$ ，具有某种性质的泛对象的存在性可以揭示范畴 $\mathcal{C}$ 本身的结构。特别是，泛对象（群

2020 *Mathematics Subject Classification.* 17B63，16T05，16T10，16W20，16W50。
*Key words and phrases.* 泊松代数、泛构造、自同构群、分次。本研究由研究、创新与数字化部拨款资助，资助机构为 CNCS/CCCDI – UEFISCDI，项目编号 PN-III-P4-ID-PCE-2020-0458，项目属于 PNCDI III。

或“类群对象”，如李群、代数群、霍普夫代数、群胚或量子群胚等）若能作用或余作用于某个范畴$\mathcal{C}$ 中的固定对象 $\mathcal{O}$，往往会在数学的许多领域中有各种应用。下面是一个简单但颇具启发性的例子：设 $\mathcal{O}$ 是某个范畴$\mathcal{C}$ 中的给定对象，并考虑范畴 $\mathrm{ActGr}_{\mathcal{O}}$，其对象为所有作用于 $\mathcal{O}$的群；也就是说，$\mathrm{ActGr}_{\mathcal{O}}$ 中的对象是形如 $(G, \varphi)$ 的二元组，由离散群 $G$ 和群同态$\varphi : G \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathcal{O})$ 构成，其中 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathcal{O})$ 表示范畴 $\mathcal{C}$中对象 $\mathcal{O}$的自同构群。那么，范畴 $\mathrm{ActGr}_{\mathcal{O}}$ 有一个终对象，即 $\big(\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathcal{O}), \mathrm{Id}\big)$。现在，若将作用于 $\mathcal{C}$ 中固定对象 $\mathcal{O}$ 的离散群换成某个更复杂范畴 $\mathcal{D}$ 中的其他“类群对象”（例如李群、代数群、霍普夫代数等），使其（余）作用于 $\mathcal{O}$，并且要求该（余）作用保持 $\mathcal{O}$上可能存在的代数、微分或拓扑结构，那么事情就会变得非常复杂。事实上，我们遇到的第一个障碍是 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathcal{O})$ 可能不再是范畴 $\mathcal{D}$ 中的对象。然而，即使在这种复杂情形下，上述结论仍有可能成立，只是终对象的构造会复杂得多。此外可以预期，如果这个终对象存在，它将包含关于对象 $\mathcal{O}$的整个自同构群的重要信息。据我们所知，这一方向上的首个结果由 Sweelder [28, 在定理 7.0.4] 中证明，适用于 $\mathcal{C}$为结合代数范畴且 $\mathcal{D}$ 为双代数范畴的情形：若 $A$ 是一个固定的结合代数，那么所有作用于 $A$ 的双代数 $H$（即 $A$是一个$H$-模代数）构成的范畴有一个终对象 $\mathrm{M}(A)$；Sweedler 称之为 $A$的泛测量双代数。关于双代数余作用于固定代数 $A$的对偶情形，Manin [22] 最先在 $\mathcal{C}$ 为分次代数范畴的情形下进行研究，原因与非交换几何有关；Tambara [25]则研究了一般情形。若 $A$ 是一个结合代数（此处必须是有限维的），那么所有余作用于 $A$ 的双代数构成的范畴（即 $A$ 是一个 $H$-余模代数）有一个始对象 $a(A)$。近年来，这些结果已推广至双代数胚余作用的情形，见[7, 8]。此外， $A$ 的通常自同构群 $\mathrm{Aut}^{\mathrm{Alg}}(A)$ 确实可还原为有限对偶 $a(A)^{\mathrm{o}}$ [23, 中所有可逆类群状元构成的群（定理 2.1] ），而 $a(A)^{\mathrm{o}}$ 正是 Sweedler 在所有作用于 $A$ [25, 的双代数范畴中的终对象（注 1.3]）。若以霍普夫代数范畴取代双代数范畴，上述两个结果依然成立。特别地， $a(A)$ 的 Hopf 包络记作 $\mathrm{aut}(A)$，在非交换几何中称为$A$ [27] 的非交换对称群；对它的描述极为复杂。近期，研究者在 Ω-代数的背景下探讨了这些泛（余）作用双代数／霍普夫代数的存在性及其刻画，见[2] 。Sweedler 对象与 Manin-Tambara 对象之间的对偶性已推广到这一一般框架，并给出了泛余作用双代数／霍普夫代数存在的充要条件；这些条件大致解释了为何 Manin-Tambara 的构造需要假设有限维。请注意，本文中引入的两个泊松代数 $P$ 和 $Q$ 之间的泛代数 $A := \mathcal{P}(P, Q)$（定义 2.1）的存在性，并不能由 [2] 推出，因为$A$ 假设为交换代数，且仅在交换余测量代数中具有泛性。

此外，文献中也从不同视角研究了泊松代数的泛余作用对象[3]，由此得到完全不同的构造。我们仅指出，在[3], 中，所考虑的泛余作用对象实际上是一个泊松霍普夫代数，而本文构造的对象只是一个交换代数，不具有任何李代数结构。关于泛双代数／霍普夫代数在数学各领域中的重要性及其应用的更多背景，可参阅 [4, 7,8, 10, 11, 16, 17]。

本文结构如下。定义 2.1 引入了本文的核心对象，即两个泊松代数 $P$ 和 $Q$的泛代数，它是一个对 $(\mathcal{P}(P,Q)\ \eta)$，由交换代数 $A := \mathcal{P}(P,Q)$ 和泊松代数同态$\eta$: $Q \to P \otimes \mathcal{P}(P,Q)$组成，并满足某个泛性质。定理 2.2 证明，若 $P$ 是有限维的，则 $P$ 和 $Q$ 的泛代数 $\mathcal{P}(P,Q)$存在，并给出了其显式构造。这一结果有两个重要推论：首先，如定理 2.5 所证，对于一个固定的泊松 $P$模 $U$，存在一个典范函子$U \otimes -$: ${}_A\mathcal{M} \to {}_Q\mathcal{P}\mathcal{M}$，它将通常的 $A$模范畴（即结合代数 $A$的表示）映到泊松 $Q$模范畴（即 $Q$的泊松表示）；此外，若 $U$ 有限维，该函子有一个左伴随（定理 2.6）。其次，若 $V$ 是一个 $A$模，则存在一个典范函子$- \otimes V$: ${}_P\mathcal{P}\mathcal{M} \to {}_Q\mathcal{P}\mathcal{M}$，连接 $P$和 $Q$上的泊松模范畴；此外，若 $V$ 有限维，则前述函子有一个左伴随（定理 2.7）。这些结果在泊松代数层面回答了以下一般性问题：若 $\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{O}_2$ 是两个数学对象（不一定属于同一范畴），能否在这两个对象的表示范畴 Rep($\mathcal{O}_1$) 和 Rep($\mathcal{O}_2$) 之间构造“典范函子”?

在第 3 节中，我们将进一步探讨这些构造的三个应用。对于一个 $n$ 维泊松代数 $P$，记 $\mathcal{P}(P) := \mathcal{P}(P,P)$，并将 $\mathcal{P}(P)$ 构造为多项式代数 $k[X_{ij} \mid i,j = 1,\cdots,n]$ 对由 $2n^3$ 个 $\leq 2$ 次非齐次多项式生成的理想取商所得的代数。$\mathcal{P}(P)$ 具有典范的双代数结构，定理 3.3 表明，$\mathcal{P}(P)$ 是范畴 CoactBialg$_P$（所有在 $P$ 上余作用的交换双代数所构成的范畴）的始对象，因此我们称之为 $P$ 的泛余作用双代数。与李 [5] 或结合代数 [23], 的情形一样，泛双代数 $\mathcal{P}(P)$ 有两个重要应用，从理论上回答了关于泊松代数的以下开放问题：(1) 显式描述给定泊松代数 $P$ 的自同构群；(2) 描述并分类给定阿贝尔群 $G$ 的所有 $G$-分次。更确切地说，定理 3.6 证明，$P$ 的所有泊松自同构构成的群与有限对偶 $\mathcal{P}(P)^o$ 的所有可逆类群元构成的群之间存在群同构。第二个应用见定理 3.9：对于阿贝尔群 $G$，有限维泊松代数 $P$ 上的所有 $G$-分次都可以用双代数同态 $\mathcal{P}(P) \to k[G]$ 加以描述和分类。取 $\mathcal{P}(P)$ 的 Takeuchi 交换 Hopf 包络后，我们得到范畴 Coact Hopf$_P$（所有在 $P$ 上余作用的交换 Hopf 代数所构成的范畴）具有一个始对象 $\mathcal{H}(P)$（推论 3.4）。我们有理由期待 $\mathcal{H}(P)$ 将发挥泊松代数 $P$ 的非交换对称群的作用。这一预期基于这样一个事实：泊松 $H$-余模代数的概念

我们所讨论的，是代数群作用于仿射泊松簇的代数对应物 [14,例 2。20]。

## 1. Preliminaries

所有向量空间、（双）线性映射、未加修饰的张量积、结合代数、李代数或泊松代数等，均定义在任意域 $k$ 上。全文中，$\delta_{s,\,1}$ 表示克罗内克符号。泊松代数是一个向量空间 $P$，它同时具有一个（不一定含幺的）交换结合代数结构和一个李代数结构，并且对所有$x$、$y$、$z \in P$，均有：

$$[x,\, yz] = [x,\, y]\, z + y\, [x,\, z]. \tag{1}$$

两个泊松代数 $P_1$ 和 $P_2$ 之间的态射是一个线性映射 $f\colon P_1 \to P_2$，它既是代数同态，也是李代数同态；若 $P_1$ 和 $P_2$是含幺泊松代数，则泊松同态默认保幺。我们用 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Poiss}}(P)$ 表示泊松代数 $P$的自同构群。

设 $P$ 是一个泊松代数。左泊松 $P$-模 [6, 29] 是一个配备了两个双线性映射 $\triangleright\colon P\times V\to V$和 $\rightharpoonup\colon P\times V\to V$的向量空间 $V$，使得 $(V, \triangleright)$ 是一个左 $P$-模，$(V, \rightharpoonup)$ 是一个左李 $P$-模，并且对所有 $a$、$b \in P$和 $x \in V$，满足以下两个相容条件：

$$(ab) \rightharpoonup x = a \triangleright (b \rightharpoonup x) + b \triangleright (a \rightharpoonup x) \tag{2}$$

$$[a,\, b] \triangleright x = a \rightharpoonup (b \triangleright x) - b \rightharpoonup (a \triangleright x) \tag{3}$$

我们将以 ${}_P\mathcal{PM}$ 表示泊松 $P$-模所成的范畴，其态射为与两种作用都相容的所有线性映射。

注 1.1。1. 泊松 $P$-模所成的范畴 ${}_P\mathcal{PM}$ 等价于通常左 $P^e$-模所成的范畴（[29, 推论 1]），其中 $P^e$ 是该处构造的 $P$ 的泛包络代数。特别地，对于任意集合 $S$，我们用 $(P^e)^{(S)}$表示由 $S$生成的自由$P^e$-模，它也是由 $S$生成的自由泊松 $P$-模。通过由生成元系$R$ 生成的泊松子模 $N$ 取商所得的任意商 $(P^e)^{(S)}/N$，称为由 $S$ 生成且关系为 $R$的自由泊松 $P$-模。

2. 泊松代数 $P$ 在向量空间 $V$ [6, 上的表示 备注 2.9] 是一个有序对 $(\psi, \varphi)$，由代数映射 $\psi\colon P \to \mathrm{End}_k(V)$ 和李代数映射 $\varphi\colon P \to \mathfrak{gl}_k(V)$ 组成，并满足对任意 $a, b \in P$:

$$\varphi(ab) = \psi(a)\circ\varphi(b) + \psi(b)\circ\varphi(a), \quad \psi([a,b]) = \varphi(a)\circ\psi(b) - \varphi(b)\circ\psi(a).$$

在 $V$ 上的泊松 $P$-模结构与 $V$ 上 $P$ 的表示这两个概念显然等价。

我们将泊松代数、含幺泊松代数和含幺交换结合代数范畴分别记作 $\mathbf{Poiss}_k$、$\mathbf{Poiss}_k^1$ 和 $\mathbf{ComAlg}_k$，它们均定义在 $k$ 上。此外，交换双代数范畴（分别地，霍普夫代数范畴）记作 $\mathbf{ComBiAlg}_k$（分别地，$\mathbf{ComHopf}_k$）。对于余代数 $C$，我们将其群状元集合记作 $G(C)$，即 $G(C) := \{x \in C \mid \Delta(x) = x\otimes x \text{ 且 } \varepsilon(x) = 1\}$。若 $B$ 是双代数，则 $G(B)$ 关于 $B$ 上的乘法构成一个幺半群。对于双代数 $B$,

我们将其有限对偶记作 $B^{o}$。回顾一下，若 $H$ 和 $L$ 是两个双代数，则阿贝尔群 $\mathrm{Hom}_k(H, L)$ 在卷积积 [28]:$(\theta_1 \star \theta_2)(h) := \sum \theta_1(h_{(1)})\theta_2(h_{(2)})$ 下构成一个结合代数，其中对所有 $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Hom}_k(H, L)$ 和 $h \in H$。

若 $H$ 是交换双代数（或霍普夫代数），则称泊松代数 $P$ 为右泊松 $H$-余模代数 [9]（也称 $H$ 余作用于 $P$），如果存在$\rho_P$： $P \to P \otimes H$ 一个泊松代数映射（ $P \otimes H$上的泊松代数结构由下文的 (4) 给出），同时它也是 $P$上的右 $H$-余模结构。若（$P$， $\rho_P$）是右泊松 $H$-余模代数，则余不变量子代数 $P^{\mathrm{co}(H)} := \{p \in P \mid \rho_P(p) = p \otimes 1_H\}$是 $P$ 的泊松子代数。对于固定的泊松代数 $P$，我们用 $\mathbf{CoactBialg}_P$（分别用 $\mathbf{CoactHopf}_P$）表示所有余作用于 $P$的交换双代数（分别是霍普夫代数）所构成的范畴。也就是说，其对象是所有由交换双代数（分别是霍普夫代数） $H$ 及其右泊松 $H$-余模代数结构 $\rho_P$: $P \to P \otimes H$组成的对（$H$， $\rho_P$）；而 $\mathbf{CoactBialg}_P$中的态射 $f$: （$H$， $\rho_P$） $\to$（$H'$，$\rho'_P$）是满足（$\mathrm{Id}_P \otimes f$） $\circ \rho_P = \rho'_P$的双代数映射 $f$: $H \to H'$。

例 1.2。1. 泊松 $H$-余模代数的第一个基本例子，是由 $G$-分次泊松代数诱导出的例子。回顾一下，给定一个阿贝尔群 $G$ 和一个泊松代数 $P$， $P$上的 $G$-分次是一个向量空间分解 $P = \oplus_{\sigma \in G} P_\sigma$，满足 $P_\sigma P_\tau \subseteq P_{\sigma\tau}$和 $[P_\sigma, P_\tau] \subseteq P_{\sigma\tau}$，对所有 $\sigma, \tau \in G$均成立。若存在一个 $w \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Poiss}}(P)$，即 $P$ 的自同构，使得对所有 $\sigma \in G$，都有 $w(P_\sigma) = P'_\sigma$，则称 $P$上的两个 $G$-分次 $P = \oplus_{\sigma \in G} P_\sigma = \oplus_{\sigma \in G} P'_\sigma$同构。令 $k[G]$ 为 $G$的群代数。通过推广霍普夫代数理论中的一个著名结果（[26, 练习 3.2.21]），很容易看出，泊松代数 $P$ 上的所有右泊松 $k[G]$-余模结构 $\rho$: $P \to P \otimes k[G]$ 的集合，与所有$P = \oplus_{\sigma \in G} P_\sigma$上的 $G$-分次的集合之间存在一个双射。该双射满足：当且仅当 $\rho(x_\sigma) = x_\sigma \otimes \sigma$（对所有 $\sigma \in G$）时， $x_\sigma \in P_\sigma$。

泊松余模代数的第二个例子来自代数几何[14, 例 2.20]: 若 $V$ 是仿射泊松簇（即，其坐标环 $k[V]$ 是泊松代数），且 $G$ 是一个代数群，通过泊松簇的自同构作用于 $V$，那么 $k[V]$ 是一个泊松 $k[G]$- 余模代数。

关于泊松代数研究的更多细节，请参见 [12, 20] 及其中的参考文献；对于范畴论（分别为霍普夫代数）中未定义的概念，请读者参见 [21]（分别为 [26, 28]）。

## 2. The universal algebra of two Poisson algebras

在介绍本文的主要对象之前，我们先作如下重要观察：如果 $P$ 是一个泊松代数，且 $A$ 是一个交换结合代数，那么 $P \otimes A$是一个泊松代数。对所有 $x$、 $y \in P$ 和 $a$、 $b \in A$，结合代数结构和李括号定义如下：

$$(x \otimes a)(y \otimes b) = xy \otimes ab, \qquad [x \otimes a, y \otimes b] = [x, y] \otimes ab. \tag{4}$$

事实上，考虑到 $A$ 是一个交换结合代数，我们有：

$$\Big[x\otimes a,\ \underline{(y\otimes b)(z\otimes c)}\Big] \overset{(4)}{=} \underline{[x\otimes a,\ yz\otimes bc]} \overset{(4)}{=} \underline{[x,\ yz]}\otimes abc$$

$$\overset{(1)}{=} [x,\ y]\,z\otimes abc + y\,[x,\ z]\otimes abc \overset{(4)}{=} (\underline{[x,\ y]\otimes ab})(z\otimes c) + (y\otimes b)(\underline{[x,\ z]\otimes ac})$$

$$\overset{(4)}{=} [x\otimes a,\ y\otimes b]\,(z\otimes c) + (y\otimes b)\,[x\otimes a,\ z\otimes c]$$

对所有 $x$、 $y$、 $z\in P$以及 $a$、 $b$、 $c\in A$，即（1）对 $P\otimes A$成立。此外，若 $f$: $A\to B$是代数映射，则 $\mathrm{Id}_P\otimes f$： $P\otimes A\to P\otimes B$ 是泊松代数态射。总之，给定一个泊松代数 $P$，赋值 $A\mapsto P\otimes A$ 定义了一个函子 $P\otimes -$： $\mathsf{ComAlg}_k\to \mathrm{Poiss}_k$，从交换代数范畴到泊松代数范畴。基于这一说明，我们现在可以引入以下概念：

定义 2.1. 设 $P$和 $Q$ 是两个泊松代数。 $P$和$Q$ 的泛代数是一个对 $\big(\mathcal{P}(P,\,Q)\ \ \eta\big)$，由一个交换代数 $\mathcal{P}(P,\,Q)\in \mathsf{ComAlg}_k$ 和一个泊松代数同态 $\eta$: $Q\to P\otimes\mathcal{P}(P,\,Q)$组成，并满足以下泛性质：对于任意交换代数 $A$ 以及任意泊松代数同态$g$: $Q\to P\otimes A$，存在唯一的代数同态 $\theta$: $\mathcal{P}(P,\,Q)\to A$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\ \eta\ } & P\otimes\mathcal{P}(P,\,Q) \\ & {\scriptstyle g}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_P\otimes\theta} \\ & & P\otimes A \end{array} \qquad \text{i.e. } g=\big(\mathrm{Id}_P\otimes\theta\big)\circ\eta \tag{5}$$

若 $Q=P$，则 $\mathcal{P}(P):=\mathcal{P}(P,\,P)$ 将称为 $P$[1] 上的泛余作用双代数。

两个泊松代数 $P$ 和 $Q$ 的泛代数（若存在）在代数同构意义下是唯一的。下文将证明，若 $P$ 是一个有限维泊松代数，而 $Q$ 是任意泊松代数，那么 $\mathcal{P}(P,\,Q)$ 是 $P$和 $Q$ 的泛代数，并将给出其显式构造。我们用伴随函子的语言表述这一结果，将其视为泊松代数版本的 [25, 定理 1.1]。

定理 2.2. 设 $P$ 是一个有限维泊松代数。则函子 $P\otimes -:\mathsf{ComAlg}_k\to\mathsf{Poiss}_k$ 有一个左伴随 $\mathcal{P}(P,\,-):\mathsf{Poiss}_k\to\mathsf{ComAlg}_k$。此外，若$Q$ 是任意泊松代数，则 $\mathcal{P}(P,\,Q)$ 是 $P$ 和 $Q$ 的泛代数。

证明。设 $n\in\mathbb{N}^*$ 为正整数， $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为泊松代数 $P$ 的一组基。我们用 $\{\tau_{i,j}^s\,|\,i,j,s=1,\cdots,n\}$ 和 $\{\mu_{i,j}^s\,|\,i,j,s=1,\cdots,n\}$ 分别表示 $P$ 关于结合结构和李代数结构的结构常数，即对所有 $i$、 $j=1$、 $\cdots$、 $n$，有：

$$e_i\,e_j=\sum_{s=1}^{n}\tau_{i,j}^s\,e_s,\qquad [e_i,\,e_j]_P=\sum_{s=1}^{n}\mu_{i,j}^s\,e_s. \tag{6}$$

我们将为张量积函子 $P\otimes -:\mathsf{ComAlg}_k\to\mathsf{Poiss}_k$显式构造一个左伴随 $\mathcal{P}(P,\,-):\mathsf{Poiss}_k\to\mathsf{ComAlg}_k$。为此，设 $Q$ 为一个泊松代数

[1]这一术语由下文的定理 3.3 解释。

并将 $\{f_i \,|\, i \in I\}$ 视为它的基。那么，对于所有 $i, j \in I$，我们可以找到两个有限子集$U_{i,\,j}$ 和 $V_{i,\,j}$，它们属于 $I$，使得:

$$f_i\, f_j = \sum_{u\in U_{i,j}} \alpha^u_{i,j}\, f_u, \qquad [f_i,\, f_j]_Q = \sum_{u\in V_{i,j}} \beta^u_{i,j}\, f_u \tag{7}$$

对于某些标量 $\alpha^u_{i,\,j}, \beta^u_{i,\,j} \in k$。现在令 $k[X_{si} \,|\, s = 1, \cdots, n,\, i \in I]$ 为通常的多项式代数，并令

$$\mathcal{P}(P,\, Q) := k[X_{si} \,|s = 1, \cdots, n,\, i \in I]/J$$

其中 $J$ 是由所有形如以下形式的多项式生成的理想:

$$\Gamma^{(P,Q)}_{(a,i,j)} = \sum_{u\in U_{i,j}} \alpha^u_{i,j}\, X_{au} - \sum_{s,t=1}^{n} \tau^a_{s,t}\, X_{si} X_{tj} \tag{8}$$

$$\Omega^{(P,Q)}_{(a,i,j)} = \sum_{u\in V_{i,j}} \beta^u_{i,j}\, X_{au} - \sum_{s,t=1}^{n} \mu^a_{s,t}\, X_{si} X_{tj} \tag{9}$$

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$对所有的 $a = 1, \cdots, n$ 和 $i, j \in I$ 均成立。记 $x_{si} := X_{si}$，其中 $X_{si}$表示 $X_{si}$ 在商代数 $\mathcal{P}(P, Q)$ 中的等价类，由此可得下列关系在 $\mathcal{P}(P, Q)$ 中成立:

$$\sum_{u\in U_{i,j}} \alpha^u_{i,j}\, x_{au} = \sum_{s,t=1}^{n} \tau^a_{s,t}\, x_{si} x_{tj} \tag{10}$$

$$\sum_{u\in V_{i,j}} \beta^u_{i,j}\, x_{au} = \sum_{s,t=1}^{n} \mu^a_{s,t}\, x_{si} x_{tj} \tag{11}$$

对所有的 $a = 1, \cdots, n$ 和 $i, j \in I$ 均成立。接下来，我们考虑以下线性映射:

$$\eta_Q \colon Q \to P \otimes \mathcal{P}(P,\, Q), \quad \eta_Q(f_i) := \sum_{s=1}^{n} e_s \otimes x_{si}, \quad \text{for all } i \in I. \tag{12}$$

我们将看到，$\eta_Q$ 事实上是一个泊松代数映射；确实，对所有的 $i$、$j \in I$，我们有:

$$\begin{aligned}
&[\eta_Q(f_i),\, \eta_Q(f_j)]_{P\otimes\mathcal{P}(P,Q)} = \Big[\sum_{s=1}^{n} e_s \otimes x_{si},\, \sum_{t=1}^{n} e_t \otimes x_{tj}\Big]_{P\otimes\mathcal{P}(P,Q)} \\
&= \sum_{s,t=1}^{n} \underline{[e_s,\, e_t]_P} \otimes x_{si} x_{tj} = \sum_{a=1}^{n} e_a \otimes \underline{\Big(\sum_{s,\,t=1}^{n} \mu^a_{s,t}\, x_{si} x_{tj}\Big)} \overset{(11)}{=} \sum_{a=1}^{n} e_a \otimes \Big(\sum_{u\in V_{i,j}} \beta^u_{i,j}\, x_{au}\Big) \\
&= \sum_{u\in V_{i,j}} \beta^u_{i,j}\, \eta_Q(f_u) = \eta_Q([f_i,\, f_j]_Q)
\end{aligned}$$

and

$$\eta_Q(f_i)\,\eta_Q(f_j) = \Big(\sum_{s=1}^{n} e_s \otimes x_{si}\Big)\,\Big(\sum_{t=1}^{n} e_t \otimes x_{tj}\Big) = \sum_{s,t=1}^{n} \underline{e_s\, e_t} \otimes x_{si}x_{tj}$$
$$= \sum_{a=1}^{n} e_a \otimes \underline{\Big(\sum_{s,t=1}^{n} \tau_{s,t}^{a}\, x_{si}x_{tj}\Big)} \overset{(10)}{=} \sum_{a=1}^{n} e_a \otimes \Big(\sum_{u\in U_{i,j}} \alpha_{i,j}^{u}\, x_{au}\Big) = \sum_{u\in U_{i,j}} \alpha_{i,j}^{u}\, \eta_Q(f_u)$$
$$= \eta_Q(f_i\, f_j)$$

这表明，正如所声称的，$\eta_Q$ 确实是一个泊松代数同态。证明的下一步是证明，对于任意泊松代数 $Q$ 和任意交换代数 $A$，下述映射是双射：

$$\gamma_{Q,\,A}\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg_k}}\left(\mathcal{P}(P,\,Q),\,A\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Poiss_k}}\left(Q,\,P\otimes A\right),\quad \gamma_{Q,\,A}(\theta) = \big(\mathrm{Id}_P \otimes \theta\big)\circ\eta_Q \tag{13}$$

为此，设 $g\colon Q \to P\otimes A$ 是一个泊松代数同态。我们需要证明存在唯一的代数同态 $\theta\colon \mathcal{P}(P,\,Q) \to A$，使得 $g = \big(\mathrm{Id}_P \otimes \theta\big)\circ\eta_Q$。设 $\{d_{si}\,|\,s=1,\cdots,n, i\in I\}$ 是 $A$ 中的一族元素，使得对所有 $i\in I$，我们有：

$$g(f_i) = \sum_{s=1}^{n} e_s \otimes d_{si} \tag{14}$$

此外，由于 $g\colon Q \to P\otimes A$ 是一个泊松代数映射，我们可以很容易地得出，对于所有 $a=1$、$\cdots$、$n$ 和 $i$、$j\in I$，以下相容性成立：

$$\sum_{u\in U_{i,j}} \alpha_{i,j}^{u}\, d_{au} = \sum_{s,t=1}^{n} \tau_{s,t}^{a}\, d_{si}d_{tj} \tag{15}$$

$$\sum_{u\in V_{i,j}} \beta_{i,j}^{u}\, d_{au} = \sum_{s,t=1}^{n} \mu_{s,t}^{a}\, d_{si}d_{tj} \tag{16}$$

多项式代数的泛性质给出了唯一的代数同态$v\colon\ k[X_{si}\,|s=1,\cdots,n,\,i\in I] \to A$ 使得 $v(X_{si}) = d_{si}$，对所有 $s=1$、$\cdots$、$n$ 以及 $i\in I$。此外，我们有 $J\subseteq \mathrm{Ker}(v)$，其中 $J$ 是由（8）和（9）中列出的所有多项式生成的理想。事实上，对于所有 $i$、$j\in I$和 $a=1$、$\cdots$，$n$我们有：

$$v\big(\Gamma_{(a,i,j)}^{(P,Q)}\big) = v\Big(\sum_{u\in U_{i,j}} \alpha_{i,j}^{u}\, X_{au} - \sum_{s,t=1}^{n} \tau_{s,t}^{a}\, X_{si}X_{tj}\Big) = \underline{\sum_{u\in U_{i,j}} \alpha_{i,j}^{u}\, d_{au} - \sum_{s,t=1}^{n} \tau_{s,t}^{a}\, d_{si}d_{tj}} \overset{(15)}{=} 0$$

$$v\big(\Omega_{(a,i,j)}^{(P,Q)}\big) = v\Big(\sum_{u\in V_{i,j}} \beta_{i,j}^{u}\, X_{au} - \sum_{s,t=1}^{n} \mu_{s,t}^{a}\, X_{si}X_{tj}\Big) = \underline{\sum_{u\in V_{i,j}} \beta_{i,j}^{u}\, d_{au} - \sum_{s,t=1}^{n} \mu_{s,t}^{a}\, d_{si}d_{tj}} \overset{(16)}{=} 0$$

因此，存在唯一的代数同态 $\theta\colon \mathcal{P}(P,\,Q) \to A$，使得对于所有 $s=1$、$\cdots$、$n$和 $i\in I$，$\theta(x_{si}) = d_{si}$。接下来只需证明 $g = \big(\mathrm{Id}_P \otimes \theta\big)\circ\eta_Q$。为此，对于所有 $i\in I$，我们有：

$$\big(\mathrm{Id}_P \otimes \theta\big)\circ\eta_Q(f_i) = \big(\mathrm{Id}_P \otimes \theta\big)\Big(\sum_{s=1}^{n} e_s \otimes x_{si}\Big) = \sum_{s=1}^{n} e_s \otimes d_{si} \overset{(30)}{=} g(f_i),$$

如所期望的。接下来只需证明 $\theta$ 是满足此性质的唯一态射。事实上，考虑另一个代数同态 $\tilde{\theta}$: $\mathcal{P}(P, Q) \to A$，使得对于所有 $i \in I$，$\left(\mathrm{Id}_P \otimes \tilde{\theta}\right) \circ \eta_Q(f_i) = g(f_i)$。那么，$\sum_{s=1}^{n} e_s \otimes \tilde{\theta}(x_{si}) = \sum_{s=1}^{n} e_s \otimes d_{si}$，因此对于所有 $s = 1$、$\cdots$、$n$ 和 $i \in I$，有 $\theta(x_{si}) = d_{si} = \theta(x_{si})$。由于集合 $\{x_{si} \,|\, s = 1, \cdots, n, i \in I\}^{\sim}$ 生成代数 $\mathcal{P}(P, Q)$，我们可以得出结论：$\theta = \theta$。总之，我们证明了由 (13) 给出的映射 $\gamma_{Q,A}$ 是双射。

唯一尚待证明的是，给定一个有限维泊松代数 $P$，赋值 $Q \mapsto \mathcal{P}(P, Q)$ 定义了一个函子 $\mathcal{P}(P, -)$: $\mathrm{Poiss}_k \to \mathrm{ComAlg}_k$。事实上，设 $u$: $Q_1 \to Q_2$ 是一个泊松代数同态。利用映射 (13) 对泊松代数同态 $\eta_{Q_2} \circ u$ 所定义的双射性，可得唯一的代数同态 $\theta$: $\mathcal{P}(P, Q_1) \to \mathcal{P}(P, Q_2)$，使得：

$$\left(\mathrm{Id}_P \otimes \theta\right) \circ \eta_{Q_1} = \eta_{Q_2} \circ u \tag{17}$$

将 $\mathcal{P}(P, u)$ 视为这个唯一的态射 $\theta$，函子 $\mathcal{P}(P, -)$ 就完全定义了。此外，现在很容易验证 $\mathcal{P}(P, -)$ 确实是一个函子，并且 $\gamma_{Q,A}$ 在两个变量上都是自然的。因此，函子 $\mathcal{P}(P, -)$ 是函子 $P \otimes -$ 的左伴随。最后，映射 (13) 的双射性表明，$\left(\mathcal{P}(P, Q)\ \eta_Q\right)$ 确实是 $P$ 和 $Q$ 的泛代数。□

注 2.3. 定理 2.2 在将 $\mathrm{Poiss}_k$ 替换为含幺泊松代数范畴 $\mathrm{Poiss}_k^1$ 时仍然成立。若 $P$ 是有限维含幺泊松代数，则函子 $P \otimes - : \mathrm{ComAlg}_k \to \mathrm{Poiss}_k^1$ 具有左伴随 $\mathcal{P}^1(P, -) : \mathrm{Poiss}_k^1 \to \mathrm{ComAlg}_k$，其构造如下。若 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是泊松代数 $P$ 的一个基，满足 $e_1 := 1_P$，且 $Q$ 是一个含幺泊松代数，其基为 $\{f_i \,|\, i \in I\}$，满足 $f_{i_0} := 1_Q$，则定义

$$\mathcal{P}^1(P, Q) := \mathcal{P}(P, Q)/L$$

其中 $L$ 是由 $\mathcal{P}(P, Q)$ 生成的理想，其中生成元为 $x_{si_0} - \delta_{s,1}$，对所有 $s = 1, \cdots, n$ 成立。这些新关系对于映射 $\eta_Q$: $Q \to P \otimes \mathcal{P}^1(P, Q)$（定义于（12））为含幺映射是必要且充分的，即 $\eta_Q(1_Q) = 1_P \otimes 1$。证明其余部分与定理 2.2 完全相同。

此外，通过逐字重复上述证明，定理2.2 可以推广到雅可比代数范畴。回顾一下，雅可比代数[6] 是一个四元组 $J = (J,\ m_J,\ 1_J,\ [-, -])$，其中（$J$，$m_J$，$1_J$）是含幺交换代数，（$A$，$[-, -]$）是李代数，且对所有 $a$，$b$，$c \in J$ 都有：

$$[ab, c] = a\,[b, c] + [a, c]\,b - ab\,[1_A, c] \tag{18}$$

我们可以证明，对于任意雅可比代数 $J$ 和任意交换代数 $A$，张量积 $J \otimes A$ 在由（4）给出的结构下是一个雅可比代数。若以 $\mathrm{Jac}_k$ 表示雅可比代数范畴，则对于任意有限维雅可比代数 $J$，函子 $J \otimes - : \mathrm{ComAlg}_k \to \mathrm{Jac}_k$ 有一个左伴随。

由定理 $\mathcal{P}(P, Q)$ 构造的两个泊松代数 $P$ 和 $Q$ 的泛代数 2.2 是比较这两个泊松代数的重要工具：第一个应用表明，所有通常的代数映射 $\mathcal{P}(P, Q) \to k$ 可以参数化所有泊松代数映射 $Q \to P$ 的空间。事实上，考虑 $A := k$，式（13）中描述的双射可写为：

推论 2.4。设 $P$ 和 $Q$ 是两个泊松代数，且 $P$ 是有限维的。则下列映射是双射：

$$\gamma : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg_k}}\left(\mathcal{P}(P, Q), k\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Poiss_k}}\left(Q, P\right), \quad \gamma(\theta) := \left(\mathrm{Id}_P \otimes \theta\right) \circ \eta_Q \tag{19}$$

泛代数的下述应用 $\mathcal{P}(P, Q)$ 更为细致，涉及两个泊松代数 $P$ 和 $Q$的表示（即泊松模）。下文将使用定理 2.2的证明中给出的代数$\mathcal{P}(P, Q)$ 的生成元与关系的显式描述。

定理 2.5. 设 $P$ 和 $Q$ 为泊松代数，且 $P$ 为有限维，$A = \mathcal{P}(P, Q)$为相应的泛代数，$(U, \blacktriangleright, \curvearrowright) \in {}_P\mathcal{PM}$为泊松 $P$模，而 $(V, \cdot) \in {}_A\mathcal{M}$ 为一个 $A$模。

那么 $(U \otimes V, \triangleright, \rightharpoonup) \in {}_Q\mathcal{PM}$ 为泊松 $Q$模，其中 $Q$ 在 $U \otimes V$上的作用对所有 $i \in I$、$l \in U$ 和 $t \in V$定义如下：

$$f_i \triangleright (l \otimes t) = \sum_{j=1}^{n} (e_j \blacktriangleright l) \otimes (x_{ji} \cdot t) \tag{20}$$

$$f_i \rightharpoonup (l \otimes t) = \sum_{j=1}^{n} (e_j \curvearrowright l) \otimes (x_{ji} \cdot t) \tag{21}$$

特别地，任意固定的 $(U, \blacktriangleright, \curvearrowright) \in {}_P\mathcal{PM}$ 都会给出一个函子 $U \otimes -\colon {}_A\mathcal{M} \to {}_Q\mathcal{PM}$，从 $A$-模范畴到泊松 $Q$-模范畴；类似地，任意固定的 $(V, \cdot) \in {}_A\mathcal{M}$ 都会产生一个函子 $- \otimes V\colon {}_P\mathcal{PM} \to {}_Q\mathcal{PM}$，连接 $P$ 和 $Q$上的泊松模范畴。

证明。我们先证明 $(U \otimes V, \triangleright)$ 是一个左 $Q$-模。为此，我们有：

$$\begin{aligned}
(\underline{f_i f_j}) \triangleright (l \otimes t) &\overset{(7)}{=} \sum_{u \in U_{i,j}} \alpha_{i,j}^u \underline{f_u \triangleright (l \otimes t)} \overset{(20)}{=} \sum_{u \in U_{i,j}, r = \overline{1,n}} (\alpha_{i,j}^u e_r \blacktriangleright l) \otimes (x_{ru} \cdot t) \\
&= \sum_{r=1}^{n} (e_r \blacktriangleright l) \otimes \Big( \underline{\sum_{u \in U_{i,j}} \alpha_{i,j}^u x_{ru}} \Big) \cdot t \overset{(10)}{=} \sum_{r,s,p=1}^{n} \tau_{s,p}^r (e_r \blacktriangleright l) \otimes (x_{si} x_{pj}) \cdot t \\
&= \sum_{s,p=1}^{n} \Big( \underline{\sum_{r=1}^{n} \tau_{s,p}^r e_r} \Big) \blacktriangleright l \otimes (x_{si} x_{pj}) \cdot t \overset{(6)}{=} \sum_{s,p=1}^{n} \underline{(e_s e_p) \blacktriangleright l} \otimes (x_{si} x_{pj}) \cdot t \\
&= \sum_{s,p=1}^{n} e_s \blacktriangleright (e_p \blacktriangleright l) \otimes \underline{(x_{si} x_{pj}) \cdot t} = \sum_{p=1}^{n} \Big( \underline{\sum_{s=1}^{n} e_s \blacktriangleright (e_p \blacktriangleright l) \otimes x_{si} \cdot (x_{pj} \cdot t)} \Big) \\
&\overset{(20)}{=} f_i \triangleright \underline{\sum_{p=1}^{n} e_p \blacktriangleright l \otimes x_{pj} \cdot t} \overset{(20)}{=} f_i \triangleright \big( f_j \triangleright (l \otimes t) \big)
\end{aligned}$$

我们指出，$(U \otimes V, \rightharpoonup)$ 是左李 $Q$-模这一点，可以完全按照（证明） [1, 定理 2.1] 中的方法证明。只要证明相容性

(2) 和 (3) 对 $(U\otimes V,\triangleright,\rightharpoonup)$ 成立。事实上，由于相容性 (2) 和 (3) 对 $(U,\blacktriangleright,\curvearrowright)$ 成立，且 $A$ 是一个交换代数，因此对所有 $i,j\in I$和 $l\in U,t\in V$，我们有：

$$
\begin{aligned}
&(\underline{f_if_j})\rightharpoonup(l\otimes t)\overset{(7)}{=}\sum_{u\in U_{i,j}}\alpha^u_{i,j}\underline{f_u\rightharpoonup(l\otimes t)}\overset{(21)}{=}\sum_{u\in U_{i,j},r=\overline{1,n}}(\alpha^u_{i,j}e_r\curvearrowright l)\otimes(x_{ru}\cdot t)\\
&=\sum_{r=1}^n(e_r\curvearrowright l)\otimes\big(\underline{\sum_{u\in U_{i,j}}\alpha^u_{i,j}x_{ru}}\big)\cdot t\overset{(10)}{=}\sum_{r,s,p=1}^n\tau^r_{s,p}(e_r\curvearrowright l)\otimes(x_{si}x_{pj})\cdot t\\
&=\sum_{s,p=1}^n\big(\underline{\sum_{r=1}^n\tau^r_{s,p}e_r}\big)\curvearrowright l\otimes(x_{si}x_{pj})\cdot t\overset{(6)}{=}\sum_{s,p=1}^n\underline{(e_se_p)\curvearrowright l}\otimes(x_{si}x_{pj})\cdot t\\
&\overset{(2)}{=}\sum_{s,p=1}^n\big(e_s\blacktriangleright(e_p\curvearrowright l)+e_p\blacktriangleright(e_s\curvearrowright l)\big)\otimes(x_{si}x_{pj})\cdot t\\
&=\underline{\sum_{s,p=1}^n e_s\blacktriangleright(e_p\curvearrowright l)\otimes x_{si}\cdot(x_{pj}\cdot t)}+\underline{\sum_{s,p=1}^n e_p\blacktriangleright(e_s\curvearrowright l)\otimes x_{pj}\cdot(x_{si}\cdot t)}\\
&\overset{(20)}{=}f_i\triangleright\underline{\sum_{p=1}^n(e_p\curvearrowright l)\otimes(x_{pj}\cdot t)}+f_j\triangleright\underline{\sum_{s=1}^n(e_s\curvearrowright l)\otimes(x_{si}\cdot t)}\\
&\overset{(21)}{=}f_i\triangleright\big(f_j\rightharpoonup(l\otimes t)\big)+f_j\triangleright\big(f_i\rightharpoonup(l\otimes t)\big)
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\underline{[f_i,\,f_j]}\triangleright(l\otimes t)\overset{(7)}{=}\sum_{v\in V_{i,j}}\beta^u_{i,j}\underline{f_u\triangleright(l\otimes t)}\overset{(20)}{=}\sum_{u\in V_{i,j},r=\overline{1,n}}\beta^u_{i,j}(e_r\blacktriangleright l)\otimes(x_{ru}\cdot t)\\
&=\sum_{r=1}^n(e_r\blacktriangleright l)\otimes\big(\underline{\sum_{u\in V_{i,j}}\beta^u_{i,j}x_{ru}}\big)\cdot t\overset{(11)}{=}\sum_{r,s,p=1}^n\mu^r_{s,p}(e_r\blacktriangleright l)\otimes(x_{si}x_{pj})\cdot t\\
&=\sum_{s,p=1}^n\big(\underline{\sum_{r=1}^n\mu^r_{s,p}e_r}\big)\blacktriangleright\,l\otimes(x_{si}x_{pj})\cdot t\overset{(6)}{=}\sum_{s,p=1}^n\underline{[e_s,\,e_p]\blacktriangleright l}\otimes(x_{si}x_{pj})\cdot t\\
&\overset{(3)}{=}\sum_{s,p=1}^n\big(e_s\curvearrowright(e_p\blacktriangleright l)-e_p\curvearrowright(e_s\blacktriangleright l)\big)\otimes(x_{si}x_{pj})\cdot t\\
&=\underline{\sum_{s,p=1}^n\big(e_s\curvearrowright(e_p\blacktriangleright l)\big)\otimes x_{si}\cdot(x_{pj}\cdot t)}-\underline{\sum_{s,p=1}^n\big(e_p\curvearrowright(e_s\blacktriangleright l)\big)\otimes x_{pj}\cdot(x_{si}\cdot t)}\\
&\overset{(21)}{=}f_i\rightharpoonup\underline{\sum_{p=1}^n(e_p\blacktriangleright l)\otimes(x_{pj}\cdot t)}-f_j\rightharpoonup\underline{\sum_{s=1}^n(e_s\blacktriangleright l)\otimes(x_{si}\cdot t)}\\
&\overset{(20)}{=}f_i\rightharpoonup\big(f_j\triangleright(l\otimes t)\big)-f_j\rightharpoonup\big(f_i\triangleright(l\otimes t)\big)
\end{aligned}
$$

由此完成证明。 □

此外，如果 $(U,\ \blacktriangleright,\ \curvearrowright) \in {}_P\mathcal{PM}$ 是有限维的，那么定理2.5 中构造的第一个函子存在一个左伴随：

定理 2.6. 设 $P$ 和 $Q$ 是泊松代数，且 $P$ 是有限维的，$A = \mathcal{P}(P, Q)$ 和 $(U, \blacktriangleright, \curvearrowright) \in {}_P\mathcal{PM}$ 一个有限维泊松 $P$-模。则函子 $U \otimes -\colon {}_A\mathcal{M} \to {}_Q\mathcal{PM}$ 有左伴随 $\mathcal{U}(U, -)\colon {}_Q\mathcal{PM} \to {}_A\mathcal{M}$。

证明。设 $\{u_1, \cdots, u_m\}$, $m \in \mathbb{N}^*$ 是泊松 $P$-模 $U$ 的一个 $k$-基，并用 $\gamma_{i,j}^t, \omega_{i,j}^t \in k$ 表示 $U$ 关于这两种模结构的结构常数，即对所有 $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, m$，有：

$$e_i \ \blacktriangleright\ u_j = \sum_{s=1}^{m} \gamma_{i,j}^s\, u_s, \qquad e_i \ \curvearrowright\ u_j = \sum_{s=1}^{n} \omega_{i,j}^s\, u_s \tag{22}$$

其中 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 $P$ 的一个 $k$-基。张量积函子 $U \otimes -$ 的左伴随 $\mathcal{U}(U, -)\colon {}_Q\mathcal{PM} \to {}_A\mathcal{M}$ 将按如下方式构造。首先，考虑 $(V, \vdash, \looparrowright) \in {}_Q\mathcal{PM}$，并设 $\{v_r \mid r \in J\}$ 为其 $k$-基。对于所有 $j \in I$ 和 $r \in J$，我们可以找到 $J$ 的两个有限子集 $W_{j,r}$ 和 $T_{j,r}$，使得：

$$f_j \vdash v_r = \sum_{t \in W_{j,r}} \sigma_{j,r}^t\, v_t, \qquad f_j \looparrowright v_r = \sum_{l \in T_{j,r}} \eta_{j,r}^l\, v_l \tag{23}$$

其中 $\sigma_{j,r}^t$, $\eta_{j,r}^l \in k$ 对所有 $j \in I$, $r \in J$, $t \in W_{j,r}$ 以及 $l \in T_{j,r}$ 均成立（回忆一下，$\{f_i \mid i \in I\}$是 $Q$中的一个 $k$-基）。现在令 $\overline{\mathcal{U}}(U, V)$ 为由集合 $\{Y_{ij} \mid i = 1, \cdots, m,\ j \in J\}$ 生成的自由 $A$-模，并将 $\mathcal{U}(U, V)$ 记为 $\overline{\mathcal{U}}(U, V)$ 关于由下列元素生成的$A$-子模的商：

$$\sum_{p \in W_{j,i}} \sigma_{j,i}^p\, Y_{sp} - \sum_{t=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} \gamma_{r,t}^s\, x_{rj} \diamond Y_{ti} \tag{24}$$

$$\sum_{p \in T_{j,i}} \eta_{j,i}^p\, Y_{sp} - \sum_{t=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} \omega_{r,t}^s\, x_{rj} \diamond Y_{ti} \tag{25}$$

对所有 $s = 1, \cdots, m$, $i \in J$ 以及 $j \in I$ 均成立，其中 $\diamond$ 表示 $\overline{\mathcal{U}}(U, V)$ 上的 $A$-模作用。$\widehat{\ }$ 记 $y_{tj} := Y_{tj}$，其中 $Y_{tj}$ 表示 $Y_{tj}$ 在商模 $\mathcal{U}(U, V)$ 中的等价类，则以下关系在 $\mathcal{U}(U, V)$ 这一 $A$-模中成立：

$$\sum_{p \in W_{j,i}} \sigma_{j,i}^p\, y_{sp} = \sum_{t=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} \gamma_{r,t}^s\, x_{rj} \diamond y_{ti} \tag{26}$$

$$\sum_{p \in T_{j,i}} \eta_{j,i}^p\, y_{sp} = \sum_{t=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} \omega_{r,t}^s\, x_{rj} \diamond y_{ti} \tag{27}$$

对所有 $s = 1$、$\cdots$、$m$、$i \in J$ 和 $j \in I$。现在考虑以下线性映射：

$$\rho_V\colon V \to U \otimes \mathcal{U}(U, V), \quad \rho_V(v_r) := \sum_{s=1}^{m} u_s \otimes y_{sr}, \quad \text{for all } r \in J. \tag{28}$$

N注意， $\rho_V$ 是一个泊松 $Q$-模映射；事实上，对于所有 $j\in I$ 和 $i\in J$，我们有 ：

$$\rho_V(f_j\vdash v_i)\overset{(23)}{=}\rho_V\Big(\sum_{p\in W_{j,i}}\sigma_{ji}^p v_p\Big)=\sum_{p\in W_{j,i}}\sum_{s=1}^m\sigma_{ji}^p u_s\otimes y_{sp}=\sum_{s=1}^m\Big(u_s\otimes\sum_{p\in W_{j,i}}\sigma_{ji}^p y_{sp}\Big)$$

$$\overset{(26)}{=}\sum_{s,t=1}^m\sum_{r=1}^n\gamma_{r,t}^s u_s\otimes x_{rj}\diamond y_{ti}=\sum_{t=1}^m\sum_{r=1}^n\Big(\sum_{s=1}^m\gamma_{r,t}^s u_s\Big)\otimes x_{rj}\diamond y_{ti}\overset{(22)}{=}\sum_{t=1}^m\sum_{r=1}^n e_r\blacktriangleright u_t\otimes x_{rj}\diamond y_{ti}$$

$$\overset{(20)}{=}\sum_{t=1}^m f_j\triangleright(u_t\otimes y_{ti})=f_j\triangleright\sum_{t=1}^m u_t\otimes y_{ti}\overset{(28)}{=}f_j\triangleright\rho_V(v_i)$$

and

$$\rho_V(f_j\looparrowright v_i)\overset{(23)}{=}\rho_V\Big(\sum_{p\in T_{j,i}}\eta_{ji}^p v_p\Big)=\sum_{p\in T_{j,i}}\sum_{s=1}^m\eta_{ji}^p u_s\otimes y_{sp}=\sum_{s=1}^m\Big(u_s\otimes\sum_{p\in T_{j,i}}\eta_{ji}^p y_{sp}\Big)$$

$$\overset{(27)}{=}\sum_{s,t=1}^m\sum_{r=1}^n\omega_{r,t}^s u_s\otimes x_{rj}\diamond y_{ti}=\sum_{t=1}^m\sum_{r=1}^n\Big(\sum_{s=1}^m\omega_{r,t}^s u_s\Big)\otimes x_{rj}\diamond y_{ti}\overset{(22)}{=}\sum_{t=1}^m\sum_{r=1}^n e_r\curvearrowright u_t\otimes x_{rj}\diamond y_{ti}$$

$$\overset{(21)}{=}\sum_{t=1}^m f_j\rightharpoonup(u_t\otimes y_{ti})=f_j\rightharpoonup\sum_{t=1}^m u_t\otimes y_{ti}\overset{(28)}{=}f_j\rightharpoonup\rho_V(v_i)$$

这就完成了最后一个论断。现在，对于所有泊松 $Q$-模 $V$和所有$A$-模 $X$，我们可以定义一个双射 $\mathrm{Hom}_{A\mathcal{M}}\left(\mathcal{U}(U,V)\ X\right)$ 和 $\mathrm{Hom}_{Q^{\mathcal{P}}\mathcal{M}}(V,U\otimes X)$，如下所示：

$$\Gamma_{V,X}:\mathrm{Hom}_{A\mathcal{M}}\left(\mathcal{U}(U,V),X\right)\to\mathrm{Hom}_{Q\mathcal{P}\mathcal{M}}\left(V,U\otimes X\right),\ \Gamma_{V,X}(\theta):=(\mathrm{Id}_U\otimes\theta)\circ\rho_V\quad(29)$$

对于所有 $A$-模态射 $\theta$：$\mathcal{U}(U,V)\to X$。为此，设 $g$：$V\to U\otimes X$是一个泊松 $Q$-模映射；我们需要找到唯一的 $A$-模映射 $\theta$：$\mathcal{U}(U,V)\to X$，使得 $g=\left(\mathrm{Id}_U\otimes\theta\right)\circ\rho_V$。设 $\{z_{sr}\,|\,s=1,\cdots,m,r\in J\}$ 是 $X$ 中的一族元素，使得对于所有 $r\in J$，有：

$$g(v_r)=\sum_{s=1}^m u_s\otimes z_{sr}.\quad(30)$$

此外，由于 $g$：$V\to U\otimes X$是一个泊松 $Q$-模映射，我们可以很容易地证明，对于所有 $s=1,\cdots,m$, $i\in J$和 $j\in I$，以下相容性成立：

$$\sum_{p\in W_{j,i}}\sigma_{j,i}^p z_{sp}=\sum_{t=1}^m\sum_{r=1}^n\gamma_{r,t}^s x_{rj}\cdot z_{ti}\quad(31)$$

$$\sum_{p\in T_{j,i}}\eta_{j,i}^p z_{sp}=\sum_{t=1}^m\sum_{r=1}^n\omega_{r,t}^s x_{rj}\cdot z_{ti}\quad(32)$$

其中 $\cdot$ 表示 $X$上的 $A$-模作用。自由模的泛性质给出唯一的 $A$-模映射$\overline{\theta}$： $\overline{\mathcal{U}}(U,V)\to X$，使得对所有 $s=1$、$\cdots$、$m$和 $r\in J$，均有 $\overline{\theta}(Y_{sr})=z_{sr}$。此外，$\mathrm{Ker}(\overline{\theta})$包含由以下元素生成的 $\overline{\mathcal{U}}(U,V)$的 $A$-子模

（24）和（25）中所列的元素。事实上，由于 $\theta$：$\mathcal{U}(U,\ V)\ \to X$ 是$A$-模的态射，我们有：

$$\overline{\theta}\big(\sum_{p\in W_{j,i}}\sigma^p_{j,i}\,Y_{sp}-\sum_{t=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}\gamma^s_{r,t}\,x_{rj}\diamond Y_{ti}\big)=\underline{\sum_{p\in W_{j,i}}\sigma^p_{j,i}\,z_{sp}-\sum_{t=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}\gamma^s_{r,t}\,x_{rj}\cdot z_{ti}}\overset{(31)}{=}0$$

$$\overline{\theta}\big(\sum_{p\in T_{j,i}}\eta^p_{j,i}\,Y_{sp}-\sum_{t=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}\omega^s_{r,t}\,x_{rj}\diamond Y_{ti}\big)\big)=\underline{\sum_{p\in T_{j,i}}\eta^p_{j,i}\,z_{sp}-\sum_{t=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}\omega^s_{r,t}\,x_{rj}\cdot z_{ti}}\overset{(32)}{=}0$$

对所有 $s=1$、$\cdots$、$m$、 $i\in J$ 和 $j\in I$ 均成立。这表明存在唯一的 $A$-模映射 $\theta$: $\mathcal{U}(U,V)\ \to X$，使得对所有 $s=1$、$\cdots$、$m$ 和 $r\in J$，都有 $\theta(y_{sr})=z_{sr}$。此外，这意味着对所有 $r\in J$，我们有：

$$\big(\mathrm{Id}_U\otimes\theta\big)\circ\rho_V(v_r)=\big(\mathrm{Id}_U\otimes\theta\big)\big(\sum_{s=1}^{m}u_s\otimes y_{sr}\big)=\sum_{s=1}^{m}u_s\otimes z_{sr}\overset{(30)}{=}g(v_r)$$

$\theta$ i显然，该映射具有此性质且唯一，因此映射 $\Gamma_{V,X}$ 是双射。

接下来要证明，给定一个有限维 Poisson $P$-模 $U$，赋值 $V\mapsto\mathcal{U}(U,V)$ 定义了一个函子 $\mathcal{U}(U,-):{}_Q\mathcal{PM}\to{}_A\mathcal{M}$。事实上，设 $h:V_1\to V_2$ 是一个 Poisson $Q$-模映射。将双射 $\Gamma_{V_1,\mathcal{U}(U,V_2)}$ 应用于 Poisson $Q$-模映射 $\rho_{V_2}\circ h:V_1\to U\otimes\mathcal{U}(U,V_2)$，可得唯一的 $A$-模映射 $\overline{h}:\mathcal{U}(U,V_1)\ \to\mathcal{U}(U,V_2)$，使得：

$$\big(\mathrm{Id}_U\otimes\overline{h}\big)\circ\rho_{V_1}=\rho_{V_2}\circ h$$

令 $\mathcal{U}(U,h)$ 为这一唯一态射 $\overline{h}$，函子 $\mathcal{U}(U,-)$ 便完全定义了。此外，现在很容易验证 $\mathcal{U}(U,-)$ 确实是一个函子，并且 $\Gamma_{V,\ X}$关于两个变量都是自然的。因此，$\mathcal{U}(U,-)$ 是函子 $U\otimes-$ 的左伴随。□

沿用定理 2.5 中的记号和假设，我们可以证明以下结论：

定理 2.7. 设 $P$ 和 $Q$ 是两个泊松代数，满足 $P$ 有限维，$A=\mathcal{P}(P,Q)$；设 $V=(V,\cdot)$ 是一个有限维的 $A$-模。那么函子$-\otimes V:{}_P\mathcal{PM}\to{}_Q\mathcal{PM}$ 有左伴随 $\mathcal{V}(V,-):{}_Q\mathcal{PM}\to{}_P\mathcal{PM}$。

证明。由于证明过程与定理 2.6 的证明相同，我们仅指出其主要步骤。设 $\{v_1,\cdots,v_m\}$，$m\in\mathbb{N}^*$ 是 $A$-模 $V$ 的一个 $k$-基，并将 $\gamma^t_{i,\ j,\ s}\in k$ 记为 $V$ 的结构常数，即对于所有 $i=1,\cdots,n$, $j\in J$ 以及 $s=1,\cdots,m$，有：

$$x_{ij}\ \cdot\ v_s=\sum_{t=1}^{m}\gamma^t_{i,j,s}\,v_t$$

设 $(W,\vdash,\curvearrowright)\ \in{}_Q\mathcal{PM}$ 是一个泊松 $Q$-模，且 $\{w_r\mid r\in J\}$ 是其 $k$-基。对于所有 $j\in I$和 $r\in J$，我们都可以找到 $J$ 的两个有限子集 $S_{j,r}$ 和 $T_{j,r}$，使得：

$$f_j\ \vdash\ w_r=\sum_{t\in S_{j,r}}\sigma^t_{j,r}\,w_t,\qquad f_j\ \curvearrowright\ w_r=\sum_{s\in T_{j,r}}\eta^s_{j,r}\,w_s$$

其中，对于所有 $j \in I$、$r \in J$、$t \in S_j$、$r$ 和 $s \in T_j$，均有 $\sigma_{j,\,r}^{t}$、$\eta_{j,\,r}^{s} \in k$、$r$。利用注1.1，我们现在可以将 $\mathcal{V}(V, W) = (\mathcal{V}(V, W) \blacktriangleright, \curvearrowright)$ 定义为由集合 $\{y_{ji} \mid j \in J, i = 1, \cdots, m\}$ 生成、满足以下关系的自由泊松 $P$-模：

$$\sum_{t \in S_{j,r}} \sigma_{j,r}^{t}\, y_{ra} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{b=1}^{m} \gamma_{i,j,b}^{a}\, (e_i \blacktriangleright y_{rb}) \tag{33}$$

$$\sum_{s \in T_{j,r}} \eta_{j,r}^{s}\, y_{sa} = \sum_{b=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i,j,b}^{a}\, (e_i \curvearrowright y_{rb}) \tag{34}$$

对所有 $j \in I$、$r \in J$和 $a = 1$、$\cdots$、$m$。现在，关系式（33）和（34）使我们可以轻易证明，对任意 $r \in J$，由下式定义的线性映射：

$$\eta_W : W \to \mathcal{V}(V, W) \otimes V, \qquad \eta_W(w_r) := \sum_{s=1}^{m} y_{rs} \otimes v_s$$

是泊松 $Q$-模的态射，并且类似于定理 2.6的证明，典范映射

$$\mathrm{Hom}_{P\mathcal{PM}}(\mathcal{V}(V, W), U) \to \mathrm{Hom}_{Q\mathcal{PM}}(W, U \otimes V), \qquad \theta \mapsto (\theta \otimes \mathrm{Id}_V) \circ \eta_W$$

对于任意泊松 $Q$-模 $W$和任意泊松 $P$-模 $U$，它是一个自然同构。证明至此完成。□

在给出一些例子之前，注意到以下事实将会很有用：由于 $P$和 $Q$ 上的李代数的括号是反对称的，我们有 $\mu_{i,\,i}^{s} = \beta_{i,\,i}^{u} = 0$、$\mu_{i,\,j}^{s} = -\mu_{j,\,i}^{s}$以及 $\beta_{i,\,j}^{u} = -\beta_{j,\,i}^{u}$。因此，对于 $i = j$，关系式（11）会自动成立。

例2.8。1. 设 $P$和 $Q$ 是两个泊松代数，且 $P$是有限维的，并且 $P$和 $Q$ 上的结合代数结构都是平凡的（即对于任意 $x$、$y \in P$（分别为 $Q$），有 $xy := 0$）。因此，$P$ 和 $Q$ 只是视为泊松代数的李代数。于是，$\mathcal{P}(P, Q)$恰好是 $\mathcal{A}(P, Q)$，即两个李代数的泛代数，如[5, 定理2.1]中所构造的。特别地，如果 $P$和 $Q$ 上的李代数结构也是阿贝尔的，那么 $\mathcal{P}(P, Q) \cong k[X_{si} \mid s = 1, \cdots, n, i \in I]$，其中$n = \dim_k(P)$，且 $|I| = \dim_k(Q)$。

一般而言，$\mathcal{P}(P, Q)$, $\mathcal{A}(P, Q)$ 是两个李代数 $P$ 和 $Q$的泛代数的商，由（10）中列出的关系生成的理想取商得到。

2. 令 $P := k$ 为一维泊松代数，即其常结构为$\tau_{1,1}^{1} = 1$和 $\mu_{1,1}^{1} = 0$。对于任意具有 $k$-基 $\{f_i \mid i \in I\}$、且常结构 $\alpha_{i,j}^{u}, \beta_{i,j}^{u} \in k$ 由（7）给出的泊松代数 $Q$，泛代数 $\mathcal{P}(k, Q)$ 是由交换变量 $x_i, i \in I$生成的代数，并满足对任意 $i, j \in I$成立的关系：

$$\sum_{u \in U_{i,j}} \alpha_{i,j}^{u}\, x_u = x_i x_j, \qquad \sum_{u \in V_{i,j}} \beta_{i,j}^{u}\, x_u = 0.$$

反过来，设 $Q := k$ 和 $P$ 一个 $n$维泊松代数，其常数结构 $\{\tau_{i,j}^{s} \mid i, j, s = 1, \cdots, n\}$ 和 $\{\mu_{i,j}^{s} \mid i, j, s = 1, \cdots, n\}$ 由（6）给出。

那么，泛代数 $\mathcal{P}(P, k)$ 是由交换变量$x_1, \cdots, x_n$生成、满足以下关系的代数：

$$\sum_{s,t=1}^{n} \tau_{s,t}^{a} x_s x_t = x_a, \qquad \sum_{s,t=1}^{n} \mu_{s,t}^{a} x_s x_t = 0$$

对所有 $a = 1, \cdots, n$。

**3.** 设 $k$ 是特征为 $\neq 2$ 的域，$P := k[X]/(X^2)$ 视为带有阿贝尔括号的泊松代数，$Q := \mathrm{aff}(2, k)$ 是二维仿射李代数，其基为 $\{f_1, f_2\}$，括号由 $[f_1, f_2] = f_2$ 给出，并视为带有平凡乘法的泊松代数（$xy := 0$，对所有 $x, y \in Q$）。那么：

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(P, Q) &\cong k[X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}]/(X_{11}^2, X_{12}, X_{11}X_{21}, X_{22}) \\ &\cong k[X, Y]/(X^2, XY) \end{aligned}$$

事实上，$P$ 和 $Q$ 的非零结构常数仅有：$\tau_{1,\ 1}^{1} = \tau_{1,\ 2}^{2} = \tau_{2,\ 1}^{1} = 1$和 $\beta_{1,\ 2}^{2} = 1 = -\beta_{2,\ 1}^{2}$。直接计算可知，由 10）和（11）定义关系产生的十六个相容条件中，消去冗余关系后，仅剩下以下关系：$\mathcal{P}(P, Q)$，结论由此得出：$x_{11}^2 = 0$，$x_{12} = 0$，$2\, x_{11}x_{21} = 0$ 和 $x_{22} = 0$。

## 3. The universal coacting bialgebra on a finite dimensional Poisson algebra. Applications

设 $P$是一个有限维泊松代数，其 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 构成 $k$-基。定理 $\mathcal{P}(P) := \mathcal{P}(P, P)$ 对交换代数的描述（定理 2.2）如下：若 $\{\tau_{i,j}^{s} \,|\, i, j, s = 1, \cdots, n\}$ 和 $\{\mu_{i,j}^{s} \,|\, i, j, s = 1, \cdots, n\}$ 是 $P$ 相对于结合结构和李代数结构的结构常数，如式（6）所示，则 $\mathcal{P}(P)$ 是由 $\{x_{si} \,|\, s, i = 1, \cdots, n, \}$ 生成的自由交换代数，并满足以下关系：

$$\sum_{u=1}^{n} \tau_{i,j}^{u} x_{au} = \sum_{s,t=1}^{n} \tau_{s,t}^{a} x_{si} x_{tj}, \qquad \sum_{u=1}^{n} \mu_{i,j}^{u} x_{au} = \sum_{s,t=1}^{n} \mu_{s,t}^{a} x_{si} x_{tj} \tag{35}$$

对所有 $a$、$i$、$j = 1$、$\cdots$、$n$ 均成立。此外，映射

$$\eta_P : P \to P \otimes \mathcal{P}(P), \quad \eta_P(e_i) := \sum_{s=1}^{n} e_s \otimes x_{si}, \quad \text{for all } i = 1, \cdots, n \tag{36}$$

是一个泊松代数同态。考虑双射（ $Q := P$ ）中对应于式（13）的元素，可得：

**推论 3.1.** 设 $P$ 是一个有限维泊松代数。那么，对于任意交换代数 $A$ 以及任意泊松代数同态 $f : P \to P \otimes A$，存在唯一的代数同态 $\theta : \mathcal{P}(P) \to A$，使得 $f = (\mathrm{Id}_P \otimes \theta) \circ \eta_P$。

接下来我们证明，交换代数 $\mathcal{P}(P)$ 可以赋予一种双代数结构，使得 $(P, \eta_P)$ 成为右泊松 $\mathcal{P}(P)$-余模代数。

命题 3.2. 设 $P$ 是一个维数为 $n$ 的泊松代数。那么，在 $\mathcal{P}(P)$ 上存在唯一的双代数结构，使得泊松代数同态 $\eta_P : P \to P \otimes \mathcal{P}(P)$ 成为 $P$ 上的右 $\mathcal{P}(P)$-余模结构。$\mathcal{P}(P)$ 上的余乘法和余单位定义如下：

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{s=1}^{n} x_{is} \otimes x_{sj} \quad \text{and} \quad \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{i,j} \tag{37}$$

对所有 $i, j = 1, \cdots, n$。

证明。考虑泊松代数同态 $(\eta_P \otimes \mathrm{Id}^{\mathcal{P}(P)}) \circ \eta_P : P \to P \otimes \mathcal{P}(P) \otimes \mathcal{P}(P)$。推论 3.1 给出唯一的代数同态 $\Delta : \mathcal{P}(P) \to \mathcal{P}(P) \otimes \mathcal{P}(P)$，使得下述关系成立：

$$(\mathrm{Id}_P \otimes \Delta) \circ \eta_P = (\eta_P \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(P)}) \circ \eta_P. \tag{38}$$

对每个 38应用（ $e_i$， $i = 1$， $\cdots$， $n$ 并利用（36），我们得到如下结果：

$$\sum_{t=1}^{n} e_t \otimes \Delta(x_{ti}) = (\eta_P \otimes \mathrm{Id})(\sum_{s=1}^{n} e_s \otimes x_{si}) = \sum_{s=1}^{n}(\sum_{t=1}^{n} e_t \otimes x_{ts}) \otimes x_{si}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} e_t \otimes (\sum_{s=1}^{n} x_{ts} \otimes x_{si})$$

这归结为 $\Delta(x_{ti}) = \sum_{s=1}^{n} x_{ts} \otimes x_{si}$，对所有 $t$， $i = 1$， $\cdots$， $n$。注意 $\Delta$显然是余结合的。类似地，再次应用推论 3.1，我们得到唯一的代数同态 $\varepsilon : \mathcal{P}(P) \to k$，使得下述关系成立：

$$(\mathrm{Id}_P \otimes \varepsilon) \circ \eta_P = \mathrm{can} \tag{39}$$

其中 can： $P \to P \otimes k$ 是典范同构，$\mathsf{can}(x) = x \otimes 1$，对所有 $x \in P$均成立。对每个 $e_i$, $i = 1, \cdots, n$应用 (39)，我们得到 $\varepsilon(x_{ij}) = \delta_{i,j}$，对所有 $i, j = 1, \cdots, n$均成立。容易验证， $\varepsilon$ 是 $\Delta$的余单位，因此 $\mathcal{P}(P)$ 是一个双代数。此外，(38) 和 (39) 表明，典范映射 $\eta_P$： $P \to P \otimes \mathcal{P}(P)$ 在 $P$上定义了一个右 $\mathcal{P}(P)$-余模结构。□

$\mathcal{P}(P)$ 的关键性质是以下泊松代数版本的 [5, 定理 2.11]：

定理 3.3. 设 $P$是一个有限维泊松代数。那么，$(\mathcal{P}(P), \eta_P)$ 是范畴 $\mathsf{CoactBialg}_P$ （所有余作用于 $P$上的交换双代数所构成的范畴）的始对象，我们称之为 $P$的泛余作用双代数。

证明。定理的陈述归结为证明：对于任意交换双代数 $B$ 和任意泊松代数同态 $f$： $P \to P \otimes B$，使得 $P$ 成为右 $B$-余模，都存在唯一的双代数同态 $\theta$： $\mathcal{P}(P) \to B$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\eta_P} & P \otimes \mathcal{P}(P) \\ & \searrow^{f} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_P \otimes \theta} \\ & & P \otimes B \end{array} \tag{40}$$

首先，利用推论 3.1，我们得到唯一的代数同态 $\theta\colon \mathcal{P}(P) \to B$，使得图式（40）交换。一旦证明 $\theta$ 也是余代数同态，证明便告完成。这同样可由再次使用推论 3.1得到。事实上，我们得到唯一的代数同态 $\psi\colon \mathcal{P}(P) \to B \otimes B$，使得下式成立：

$$(\mathrm{Id}_P \otimes \psi) \circ \eta_P = \big(\mathrm{Id}_P \otimes \Delta_B \circ \theta\big) \circ \eta_P \tag{41}$$

显然，代数同态 $\Delta_B \circ \theta\colon \mathcal{P}(P) \to B \otimes B$ 满足上述相容性。只要证明 $(\theta \otimes \theta) \circ \Delta\colon \mathcal{P}(P) \to B \otimes B$ 也满足相同的相容性，证明便告完成。事实上，由于 $f\colon P \to P \otimes B$ 是一个右 $B$-余模结构，我们有：

$$\begin{aligned}
\big(\mathrm{Id}_P \otimes (\theta \otimes \theta) \circ \Delta\big) \circ \eta_P &= \big(\mathrm{Id}_P \otimes \theta \otimes \theta\big) \circ \underline{\big(\mathrm{Id}_P \otimes \Delta\big) \circ \eta_P} \\
&\overset{(38)}{=} \big(\mathrm{Id}_P \otimes \theta \otimes \theta\big) \circ (\eta_P \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(P)}) \circ \eta_P \\
&= \big(\underline{(\mathrm{Id}_P \otimes \theta) \circ \eta_P} \otimes \theta\big) \circ \eta_P \\
&\overset{(40)}{=} \big(f \otimes \theta\big) \circ \eta_P \\
&= (f \otimes \mathrm{Id}_B) \circ \underline{(\mathrm{Id}_P \otimes \theta) \circ \eta_P} \\
&\overset{(40)}{=} \underline{(f \otimes \mathrm{Id}_B) \circ f} \\
&= (\mathrm{Id}_P \otimes \Delta_B) \circ \underline{f} \\
&\overset{(40)}{=} (\mathrm{Id}_P \otimes \Delta_B) \circ (\mathrm{Id}_P \otimes \theta) \circ \eta_P \\
&= (\mathrm{Id}_P \otimes \Delta_B \circ \theta) \circ \eta_P
\end{aligned}$$

as 所需结论。同样，可以证明 $\varepsilon_B \circ \theta = \varepsilon$，证明至此完成。 d. □

考虑双代数 [24] 的 Takeuchi 交换 Hopf 包络 $\mathcal{P}(P)$，利用定理 3.3，可得：

推论 3.4. 设 $P$ 是一个有限维泊松代数。那么，由所有余作用于 $P$ 的交换 Hopf 代数构成的范畴 CoactHopf$_P$ 有一个始对象 $\big(\mathcal{H}(P)\ \lambda_P\big)$，我们称之为 $P$的泛余作用 Hopf 代数。

证明。事实上，从交换霍普夫代数范畴到交换双代数范畴的遗忘函子 $U$: ComHopf $_k \to$ ComBiAlg$_k$ 具有左伴随 $L$: ComBiAlg$_k \to$ComHopf$_k$ （[24, 定理 65, (2)]）。若将伴随的单位 $L \dashv U$记为 $\mu\colon 1_{\mathrm{ComBiAlg}_k} \to UL$，那么我们很容易按照 [5,定理 2.13],的思路证明，偶 $\big(\mathcal{H}(P) := L(\mathcal{P}(P))\ \ \lambda_P := (\mathrm{Id}^P \otimes \mu_{\mathcal{P}(P)}) \circ \eta_P\big)$ 是所有余作用于 $P$ 的交换霍普夫代数所成范畴 CoactHopf$_P$ 中的始对象。□

注 3.5. 定理 3.3 和推论 3.4 关于交换双代数（分别地，霍普夫代数）在泊松代数上的作用的对偶版本也成立。对于泊松代数 $P$，我们可以定义范畴 ActBialg$_P$（分别地，ActHopf$_P$），其对象是所有作用于 $P$上的交换双代数（分别地，霍普夫代数）。更确切地说，ActBialg$_P$（分别地，ActHopf$_P$）的对象是由一交换双代数（分别地，霍普夫代数）$B$，$\mu_P$及线性映射 $B$组成的对，且 $\mu_P\colon P \otimes B \to P$满足条件 $P$，$\mu_P$）

是一个（右）泊松 $B$-模代数，即 $\mu_P$ 是一个（右） $B$-模结构，定义在 $P$ 上，同时也是一个泊松代数映射。利用与 [2, 定理 414], 相同的论证，我们可以证明 $\mathbf{ActBialg}_P$ （分别地，$\mathbf{ActHopf}_P$）有一个终对象。

接下来，我们将介绍双代数 $\mathcal{P}(P)$ 的两个重要应用。这些是泊松代数版本的类似结果，这些结果已针对李代数/结合代数在[5, 23]中得到。首先，回顾一个众所周知的事实：对于任意双代数 $H$，都有 $G(H^{\mathrm{o}}) = \mathrm{Hom}^{\mathrm{Alg_k}}(H, k)$，即所有代数同态的集合 $H \to k$ （见（[26, 第 62] 页））。

定理 3.6。设 $P$是一个有限维泊松代数，其基为 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 和$U\big(G\big(\mathcal{P}(P)^{\mathrm{o}}\big)\big)$，表示有限对偶 $\mathcal{P}(P)^{\mathrm{o}}$中所有可逆类群状元构成的群。那么，对于任意 $\theta \in U\big(G\big(\mathcal{P}(P)^{\mathrm{o}}\big)\big)$ 以及 $i = 1, \cdots, n$，定义的映射如下：

$$\overline{\gamma} : U\big(G\big(\mathcal{P}(P)^{\mathrm{o}}\big)\big) \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Poiss}}(P), \qquad \overline{\gamma}(\theta)(e_i) := \sum_{s=1}^{n} \theta(x_{si})\, e_s \tag{42}$$

是群同构。

证明。 利用推论 2.4 对于 $Q := P$得到双射

$$\gamma : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg_k}}(\mathcal{P}(P), k) \to \mathrm{End}_{\mathrm{Poiss}}(P), \quad \gamma(\theta) = \big(\mathrm{Id}_P \otimes \theta\big) \circ \eta_P$$

此外，如上所述，我们有 $\mathbf{Hom}^{\mathrm{Alg_k}}(\mathcal{P}(P)\ k) = G\big(\mathcal{P}(P)^{\mathrm{o}}\big)$，并且根据（36）可容易推出 $\gamma$ 具有（42）中给出的形式。我们将 $\overline{\gamma}$ 记作 $\gamma$ 在两个幺半群的可逆元素上的限制，其中 $\mathbf{End}_{\mathrm{Poiss}}(P)$ 上的幺半群结构由通常的自同态的复合给出，而 $G\big(\mathcal{P}(P)^{\mathrm{o}}\big)$ 关于卷积积构成一个幺半群，即

$$(\theta_1 \star \theta_2)(x_{sj}) = \sum_{t=1}^{n} \theta_1(x_{st})\theta_2(x_{tj}) \tag{43}$$

对于所有 $\theta_1, \theta_2 \in G\big(\mathcal{P}(P)^{\mathrm{o}}\big)$ 和 $j, s = 1, \cdots, n$。因此，只需证明 $\gamma$ 是幺半群同构即可完成证明，而这可以完全仿照 [5, 定理 3.1] 证明。□

接下来，对于给定的阿贝尔群 $G$，我们描述泊松代数 $P$ 上所有的 $G$-分次。

命题 3.7. 设 $G$ 是一个阿贝尔群， $P$ 是一个有限维泊松代数。 $P$ 上所有 $G$-分次的集合与所有双代数同态 $\mathcal{P}(P) \to k[G]$ 的集合之间存在一个双射，使得由双代数映射 $\theta$ : $\mathcal{P}(P) \to k[G]$ 关联到 $P = \oplus_{\sigma \in G} P_\sigma^{(\theta)}$ 上的 $G$-分次可描述如下：

$$P_\sigma^{(\theta)} := \{x \in P \,|\, \big(\mathrm{Id}_P \otimes \theta\big) \circ \eta_P(x) = x \otimes \sigma\} \tag{44}$$

对所有 $\sigma \in G$。

证明。 定理 3.3 应用于交换双代数 $B := k[G]$ 在所有双代数同态 $\mathcal{P}(P) \to k[G]$ 与所有泊松代数同态 $f$: $P \to P \otimes k[G]$ 之间建立了一个双射，后者使 $P$成为一个右 $k[G]$-余模。证明至此完成，因为我们已在例 1.2 中证明，后一个集合与泊松代数 $G$上的所有 $P$-分次一一对应。□

我们的下一个目标是对泊松代数 $P$ 上的所有 $G$-分次进行分类。为此，我们引入如下内容：

定义 3.8。设 $G$ 为一个阿贝尔群， $P$ 为一个有限维泊松代数。若存在 $g \in U\big(G\big(\mathcal{P}(P)^{\mathrm{o}}\big)\big)$，即有限对偶 $\mathcal{P}(P)^{\mathrm{o}}$ 中的一个可逆类群元，使得在卷积代数 $\mathrm{Hom}\big(\mathcal{P}(P)\ k[G]\big)$ 中有 $\theta_2 = g\star\theta_1\star g^{-1}$，则称双代数同态 $\theta_1, \theta_2 : \mathcal{P}(P) \to k[G]$ 共轭，并记作 $\theta_1 \approx \theta_2$。

在全文中，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{BiAlg}}\big(\mathcal{P}(P)\ k[G]\big)/\approx$ 表示由上述等价关系对所有˜双代数同态 $\mathcal{P}(P) \to k[G]$ 构成的集合取商所得的商集，并令 $\theta$ 表示 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{BiAlg}}\big(\mathcal{P}(P)\ k[G]\big)$ 中 $\theta \in$ 的等价类。下一个定理将对泊松代数 $P$ 上的所有 $G$-分次进行分类。

定理 3.9. 设 $G$ 为阿贝尔群， $P$ 为有限维泊松代数，且 $G$-分次$(P)$是 $P$ 上所有 $G$-分次的同构类集合。那么映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{BiAlg}}\big(\mathcal{P}(P), k[G]\big)/\approx \ \mapsto\ G-\boldsymbol{gradings}(P), \qquad \hat{\theta} \mapsto P^{(\theta)} := \oplus_{\sigma\in G} P_\sigma^{(\theta)}$$

其中，对所有 $\sigma \in G$， $P_\sigma^{(\theta)} = \{x \in P \mid \big(\mathrm{Id}_P \otimes \theta\big)\circ\eta_P(x) = x \otimes \sigma\}$，均为双射。

证明. 由于该结果的结合代数及李/莱布尼茨代数对应结论已分别在 [23, 定理 3.4] 和 [5, 定理 3.5], 中得到了详细证明，这里从略。首先注意，根据命题 3.7，对于任意 $G$-分次 $P = \oplus_{\sigma\in G} P_\sigma$，存在唯一的双代数同态 $\theta : \mathcal{P}(P) \to k[G]$，使得对所有 $\sigma \in G$， $P_\sigma = P_\sigma^{(\theta)}$。只需证明以下结论即可完成证明： $P$ 上的任意两个 $G$-分次，例如 $P^{(\theta_1)}$ 和 $P^{(\theta_2)}$，分别对应于两个双代数同态 $\theta_1, \theta_2 : \mathcal{P}(P) \to k[G]$；它们同构当且仅当 $\theta_1 \approx \theta_2$。事实上，回顾例 1.2 可知，在 $P$ 上定义一个 $G$-分次，与定义一个右 $k[G]$-余模结构 $\rho : P \to P\otimes k[G]$ 在 $P$ 上构成一一对应，且该结构也是一个泊松代数同态。现在，两个 $G$-分次 $P^{(\theta_1)}$ 和 $P^{(\theta_2)}$ 同构，当且仅当 $(P, \rho^{(\theta_1)})$ 和 $(P, \rho^{(\theta_2)})$ 既作为代数又作为右 $k[G]$-余模同构；这归结为存在泊松代数 $P$ 的一个自同构 $w : P \to P$，使得 $\rho^{(\theta_2)} \circ w = \big(w \otimes \mathrm{Id}_{k[G]}\big)\circ\rho^{(\theta_1)}$。根据定理 3.6，对于任意泊松代数自同构 $w : P \to P$，有限对偶 $g \in U\big(G\big(\mathcal{P}(P)^{\mathrm{o}}\big)\big)$ 中存在唯一的可逆群样元 $w = w_g$，使得对任意 $i = 1, \cdots, n$，其取值由下式给出

$$w_g(e_i) = \sum_{s=1}^{n} g(x_{si})\, e_s \tag{45}$$

其中， $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 $P$ 中的一组基。直接计算可知，泊松代数自同构 $w_g : P \to P$ 也是右 $k[G]$-余模映射，当且仅当满足以下条件：

$$\sum_{s=1}^{n} g(x_{as})\theta_1(x_{si}) = \sum_{s=1}^{n} \theta_2(x_{as})g(x_{si}) \tag{46}$$

注意到 $\{x_{ai}\}_{a,\ i=1,\ \cdots,\ n}$ 是 $\mathcal{P}(P)$ 的生成元系，我们可以很容易地得出（46）可化简为 $g \star \theta_1 = \theta_2 \star g$。由于 $g : \mathcal{P}(P) \to k$ 是卷积代数 Hom 中的可逆元素 $\big(\mathcal{P}(P)\ k[G]\big)$，这表明 $\theta_1 \approx \theta_2$。□

现在我们给出一个具体示例，用以描述所有交换双代数范畴中的始对象，该始对象对某个三维泊松代数进行余作用。

例 3.10. 设 $P$ 是一个三维泊松代数，其 $k$基为 $\{e_1, e_2, e_3\}$，泊松代数结构由 $e_1^2 := e_2$，$[e_1, e_3] := e_3$ 给出（未定义的乘法和括号均为零）。那么，存在一个双代数同构

$$\mathcal{P}(P) \cong k[X, Y, Z, T]/(T - XT)$$

其中后者具有如下双代数结构：

$$\begin{aligned}
\Delta(\widehat{X}) &= \widehat{X} \otimes \widehat{X}, \qquad \varepsilon(\widehat{X}) = 1 \\
\Delta(\widehat{Y}) &= \widehat{Y} \otimes \widehat{X} + \widehat{X}^2 \otimes \widehat{Y}, \qquad \varepsilon(\widehat{Y}) = 0 \\
\Delta(\widehat{Z}) &= \widehat{Z} \otimes \widehat{X} + \widehat{T} \otimes \widehat{Z}, \qquad \varepsilon(\widehat{Z}) = 0 \\
\Delta(\widehat{T}) &= \widehat{T} \otimes \widehat{T}, \qquad \varepsilon(\widehat{T}) = 1
\end{aligned}$$

该双代数在 $P$上的典范余作用 $\eta_P$: $P \to P \otimes k[X, Y, Z, T]/(T - XT)$ 定义如下：

$$\begin{aligned}
\eta_P(e_1) &= e_1 \otimes \widehat{X} + e_2 \otimes \widehat{Y} + e_3 \otimes \widehat{Z} \\
\eta_P(e_2) &= e_2 \otimes \widehat{X}^2, \qquad \eta_P(e_3) = e_3 \otimes \widehat{T}.
\end{aligned}$$

事实上，首先注意到 $P$ 的唯一非零结构常数为：$\tau_{1,1}^2 = 1$ 和$\mu_{1,3}^3 = 1 = -\mu_{3,1}^3$。现在，仔细分析由 ( $\mathcal{P}(P)$ 和 (35) 得到的 54 个定义关系，可以得出结论：消去冗余关系后，剩下如下关系：

$$x_{12} = 0, \quad x_{13} = 0, \quad x_{23} = 0, \quad x_{32} = 0, \quad x_{22} = x_{11}^2, \quad x_{33} = x_{11}x_{33}.$$

现在，记作 $X = x_{11}$、$Y = x_{21}$、$Z = x_{31}$ 和 $T = x_{33}$，即可得出结论。

## References


[1] 2301 03051 10 Agore, A.L. - 表示范畴之间的函子。泛模,

[2] $V$ arXiv: . . Agore, A.L., Gordienko, A.S., Vercruysse, J. - 作用于 Ω-代数的泛霍普夫代数, *Commun. Contemp. Math.* **25** 2023 2150095 2, 19 ( ), .

[3] Agore, A.L. - 泛余作用泊松霍普夫代数, *Manuscripta Math.* **165** 2021 255 268 3 ( ), –

[4] . Agore, A.L., Gordienko, A.S., Vercruysse, J. - 霍普夫代数上的（余）模代数结构的等价, *J. Noncommut. Geom.* **15** 2021 951 993 3 ( ), – . Agore, A.L., Militaru, G. - 有限维莱布尼茨／李代数的一个新不变量,

[5] *J. Algebra* ( ), – .

**562** 2020 390 409 3, 15, 17, 18, 19, 20

[6] Agore, A.L., Militaru, G. - 雅可比代数与泊松代数, *J. Noncommut. Geom.*, 9 (2015), 1295–1342。 4, 9

[7] Ardizzoni, A., El Kaoutit, L., Menini, C. - 余端同态左双代数胚, *J. Algebra and Its App.* **12** 2013 03, 1250181 , ( ), 第 . 期。 2, 3

[8] Ardizzoni, A., El Kaoutit, L., Menini, C. - 余模范畴与模链复形, *Intern. J. Math.* **23** 2012 10, 1250109 2, 3 , ( ), 第 . 期。Ballesteros, A., Herranz, F.J., Musso, F., Ragnisco, O. -

[9] Smorodinsky-Winternitz 哈密顿量的超可积变形, 《经典与量子系统中的超可积性》, CRM Proc. Lecture Notes 37, 2004 5 美国数学会, 罗德岛州普罗维登斯, . Bhattacharjee, S., Chirv˘asitu, A.,

[10] Goswami, D. - 子因子的量子伽罗瓦群, *Math.* **33** 2022 2 2022 2250013 3 *Internat. J.* ( ), ( )。

[11] Chirv˘asitu, A., Walton, C., Wang, X. - 关于与一对预正则形式相关的量子群，*J. Noncommut. Geom.* bf 13 2019 115 159 3 ( )，— . Crainic, M., Fernandes, R. L., M˘arcut, I. – 泊松几何讲义，《数学研究生教程》，**217** 2021 1, 5 ( )，美国数学会，普罗维登斯。[12] Drinfeld, V. G. – 量子群，国际数学家大会论文集，**1** 1987 798 820 1 ( ) – . Guedenon, T. - 泊松（*A, H*）-霍普夫模基本定理，*J. Algebra*, 595，(2022)， 216 243 4, 5 – . [13] Grabowski, J. - 括号，*Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 1986 10 8 1360001, 45, 2013 1 ( ): . [14] Huang, H., Walton, C., Wicks, E., Won, R. - 泛量子半群胚，*J. Pure Appl.* ( )，. [15] *Algebra* **227** 2023 107193 3 [16] Huang, H., Van Nguyen, C., Ure, C., Vashaw, K.B., Veerapen, P., Wang, X. - 扭曲 Manin 泛量子群及余模代数，arXiv: 2209 11621 3 。[17] Huebschmann, J. - 泊松上同调与量子化，*J. Reine Angew. Math.*，408 (1990)，57–113。1[18] Kontsevich, M. - 泊松流形的变形量子化，*Letters of Mathematical Physics*，66 2003 157 216 ( )，– . [19] Laurent-Gengoux, C., Pichereau, A., Vanhaecke, P. – 泊松结构，第347卷，2013，施普林格。[20] Mac Lane, S. - 《工作数学家的范畴论》，《数学研究生教材》，1, 5 5（第二版），施普林格， 1998， 0 387 98403 8 5 [21] ISBN - - - . Manin, Yu. I. - 量子群与非交换几何，蒙特利尔大学，数学研究中心，蒙特利尔，魁北克省， 1988 1, 2 . [22] Militaru, G. - 有限维结合代数的自同构群与分次分类，*Results Math.* **77** ( 2022 2, 3, 19, 20 )。[23] Takeuchi, M. - 由余代数生成的自由霍普夫代数，*J. Math. Soc. Japan* **23** (1971)，561–582。18[24] Tambara, D. - 代数的余自同态双代数。*J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Math.* **37** ( 1990 425 456 1, 2, 6 )，– . [25] Radford, D.E. - 霍普夫代数，世界科学出版社， 2012 5, 19 。[26] Raedschelders, T., Van den Bergh. M. - Koszul-Artin–Schelter 正则代数的 Manin 霍普夫代数是拟遗传的，*Adv. Math.*, **305** 2017 601 660 2 ( )，– . [27] Sweedler, M.E. - 霍普夫代数，Benjamin 纽约， 1969 1, 2, 5 [28] Umirbaev, U. - 泊松代数的泛包络代数与泛导子，*J. Al-* , ( )，– . [29] *gebra* **354** 2012 77 94 4 [30] Van den Bergh, M. - 双泊松代数，*Trans. Amer. Math. Soc.*，360 (2008)，5711–5769。1

Vrije Universiteit Brussel, Pleinlaan 2, B-1050 Brussels, Belgium

Max Planck Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany

Simion Stoilow Institute of Mathematics of the Romanian Academy, P.O. Box 1-764, 014700 Bucharest, Romania
*Email address*: ana.agore@vub.be 和 ana.agore@gmail.com

Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Bucharest, Str. Academiei14, RO-010014 Bucharest 1, Romania

Simion Stoilow Institute of Mathematics of the Romanian Academy, P.O. Box 1-764, 014700 Bucharest, Romania
*Email address*: gigel.militaru@fmi.unibuc.ro 和 gigel.militaru@gmail.com